

es 6 Sio $f_2(x)$ e $f_3(x)$ sono attivi $\Rightarrow \begin{cases} f_2(x) = 0 \\ f_3(x) = 0 \\ f_1(x) > 0 \end{cases}$

Il punto $O = (0, 0)$

$$\nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}; \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nabla f_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vettori linearmente
dipendenti!

$\Rightarrow O \neq (0, 0)$ non è punto regolare $\Rightarrow$
condizione è minima

es 7 Sio $f_1(x) \geq 0$ e $f_3(x) \geq 0$ sono attivi

$\Rightarrow$ Il punto $A = (0, \frac{3}{4})$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) > 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ f_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineamente
indipendenti.

$\Rightarrow A$ punto regolare

$$\frac{\partial L(A, \lambda^0)}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 + \cancel{\lambda_2} - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{5}{4} < 0!$$

$$\frac{\partial L(A, \lambda^0)}{\partial x_2} = -1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

∂x_2

$\Rightarrow$ KKT non soddisfatte.

es 8 tutti i vincoli sono attivi
in nessun punto

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_3(x) = 0 \end{cases}$$

Conditi e minimo $\hookrightarrow$

$$B = (1, 1), \quad O = (0, 0)$$

(84)

$$\min 2x_1^3 + 3x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0$$

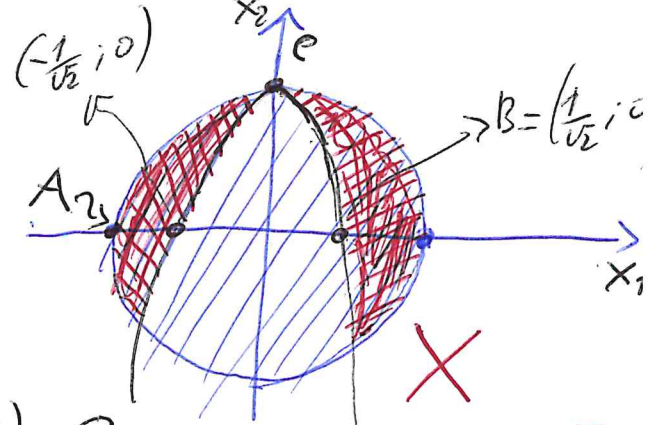
Conseguenze dei punti: $A = (-1, 0)$; $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $C = (0, 1)$

$$\min 2x_1^3 + 3x_2$$

$$f_1(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$f_2(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0$$

$\rightarrow x_2 = -2x_1^2 + 1$ parabola
Vertice $(0, 1) = C$



$$L(x, \lambda) = 2x_1^3 + 3x_2 - \lambda_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - \lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1)$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 - 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0; \lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1) = 0; \lambda_2 \geq 0$$

Cond. di
complementarietà

$$f_1(x^*) \geq 0 \text{ Cond.}$$

$$f_2(x^*) \geq 0 \text{ di Ammissibilità}$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Annullamento gradiente
funzione Lagrangiana

Punto $A = (-1, 0)$; è attivo solo $f_1(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \\ f_2(x) \end{cases}$
 È un punto regolare?

$$\nabla f_1(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \text{ punto regolare} \quad (86)$$

KKT $\lambda_2^* = 0 \Leftrightarrow \lambda_2^* f_2(x^*) = 0$

$$\frac{dL}{dx_2} = 3 - 2\lambda_1^* x_2^* - \lambda_2^* = 0 \Rightarrow 3 = 0 \quad !!$$

$\Rightarrow$ A non soddisfa KKT $\Rightarrow$ A non può essere minimo.

Punto $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Punto regolare?

$\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases}$ attivo ($\Rightarrow \lambda_1^* = 0$)
 $f_2(x) = 0$

$$\nabla f_2(B) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow B \text{ è punto regolare}$$

KKT $\frac{dL}{dx_1} = \frac{6}{2} + 2\lambda_1^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\lambda_2^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{dL}{dx_2} = 3 - \lambda_2^* = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 3 \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow$ B non soddisfa le KKT $\Rightarrow$ non può essere minimo locale

Punto $C = (0, 1)$ Sono attivi $f_1(x) \geq 0$ e $f_2(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \parallel \text{Punto regolare?}$$

$$\nabla f_1(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lin. dip.}$$

$\Rightarrow C$ non regolare $\Rightarrow$ candidato a minimo ma non è minimo

I prove itinere di Rianze Operative

(87)

mercoledì 23 novembre 2022

ore 10,15 - 13,30

ALGORITMI PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA (88)

$$\min f(x)$$

$$x \in X \equiv \begin{cases} h_i(x) = 0 & i=1, \dots, m \\ g_j(x) \geq 0 & j=1, \dots, m+p \end{cases} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \quad \parallel \quad \begin{array}{l} F(x) \text{ è definita in} \\ \text{modo tale che i punti} \\ \text{di minimo di } F(x) \text{ sono} \\ \text{anche minimi di } f(x) \end{array}$$

FUNZIONI DI PENALITÀ QUADRATICHE

$$\min f(x)$$

$$x \in X \equiv \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1, \dots, m$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

Definisco la funzione $F(x)$ nel seguente modo:

$$F(x) = f(x) + p P(h_1(x); h_2(x); \dots; h_m(x))$$

$$P(h(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } h(x) = 0 \text{ ovvero se } x \in X \\ \alpha > 0 & \text{se } h(x) \neq 0 \text{ ovvero se } x \notin X \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}^+$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \text{Si può dimostrare che quando} \\ \underline{p \rightarrow +\infty} \text{ i punti minimi} \\ \text{di } \underline{f(x)} \text{ e } \underline{F(x)} \text{ coincidono} \end{array}$$

$$P(h(x)) = \sum_{i=1}^m (h_i(x))^2$$

(89)

METODI BARRIERA (METODI AI PUNTI INTERNI)

$$\min f(x)$$

$$x \in X \equiv \begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \\ \vdots \\ f_p(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$$

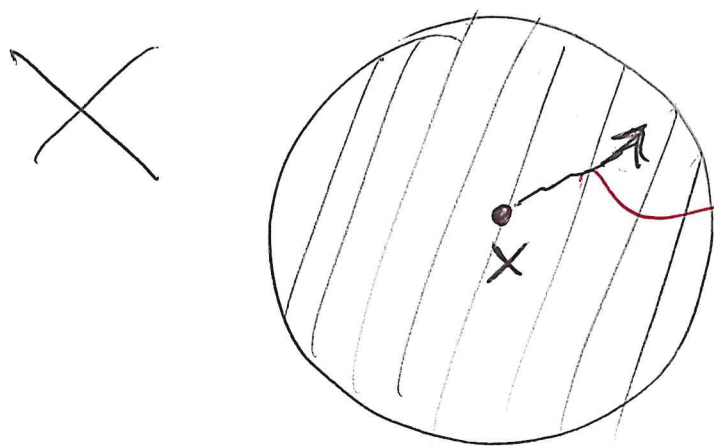
$F(x)$ è definita come:

$$F(x) = f(x) + \varepsilon v(f_1(x); f_2(x); \dots; f_p(x))$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

$v(f(x))$ è una funzione che tende a $+\infty$ quando $f(x) \rightarrow 0$

$$v(f(x)) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } f(x) \longrightarrow 0$$

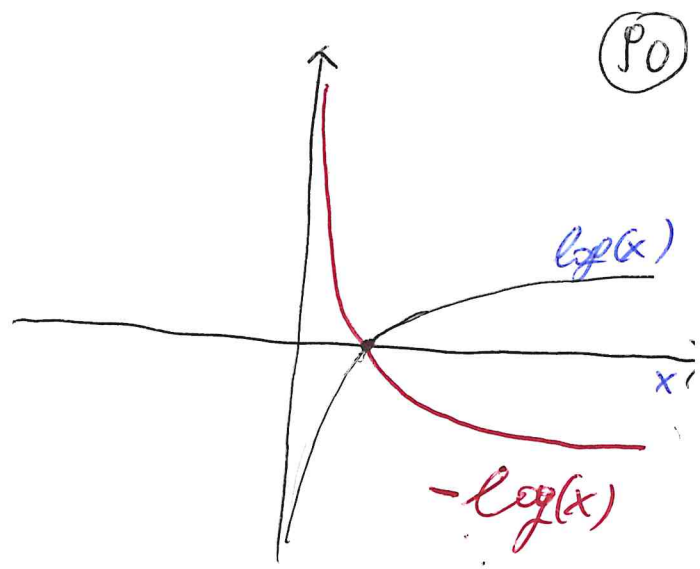


$v(f(x))$ cresce quando
da un punto interno di
X ci avviciniamo alla
frontiera

$$\min F(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$v(p(x)) = - \sum_{j=1}^p \log(p_j(x))$$



$\text{Hp } x^*$ minimo locale, x^* punto regolare $\Rightarrow$ (P1)
 $\exists \lambda^*$ vettore dei moltiplicatori di Lagrange tale che
 le KKT sono soddisfatte -

$$X \equiv \begin{cases} h_i(x) = 0 \\ h_{m+1}(x) = 0 \\ f_{m+1}(x) \geq 0 \\ f_{m+p}(x) > 0 \end{cases}$$

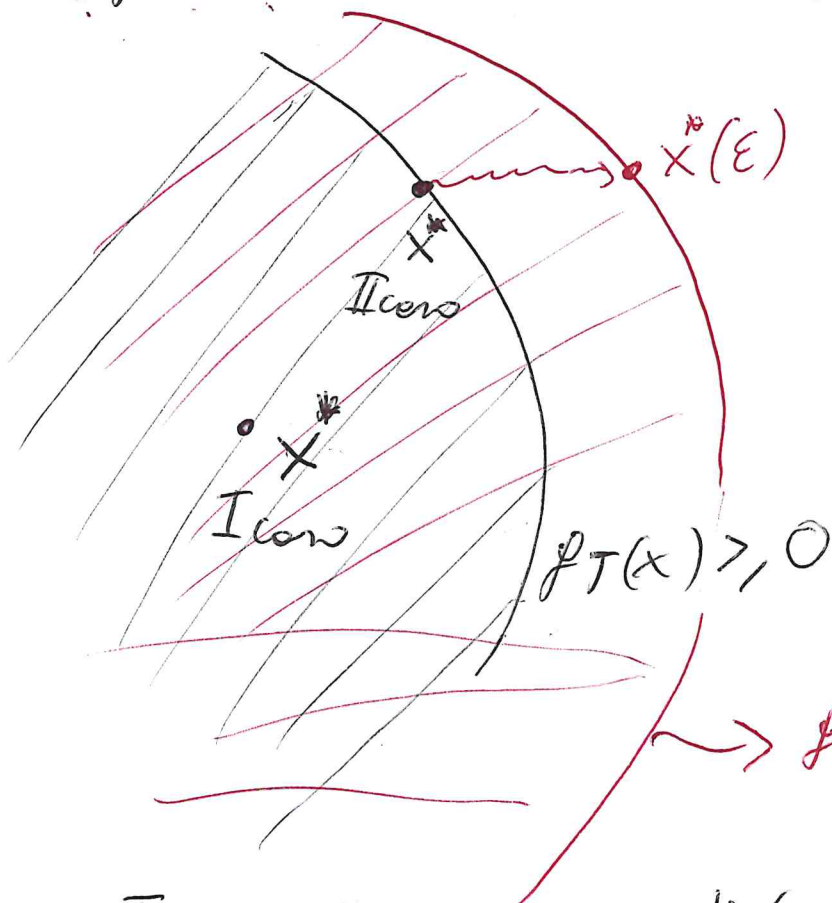
$$\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_m^* \\ \lambda_{m+1}^* \\ \lambda_{m+2}^* \\ \vdots \\ \lambda_{m+p}^* \end{pmatrix}$$

$$f_J(x) \geq 0 \iff \lambda_J(\lambda_J^*)$$

$$f_J(x) \geq 0 \implies$$

$$f_J(x) \geq -\varepsilon \|\nabla f_J(x^*)\|$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon > 0$



$$\implies f_J(x) \geq -\varepsilon \|\nabla f_J(x^*)\|$$

CoG I x^* è interno ad X , ~~non è attiva~~

$f_J(x) \geq 0$ non è attivo in $x^* \Rightarrow f_J(x^*) > 0$

$\Rightarrow$ per le condizioni di complementarità $\lambda_J^* f_J(x^*) = 0$
 si ha che $\lambda_J^* = 0$

(92)

$$f(x) \rightsquigarrow f(x^*(\varepsilon))$$

Il può dimostrare che la variazione della
funzione obiettivo è stata data

↳ moltiplicatore di Legendre
del vincolo $f_T(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ Se L_T è grande $\Rightarrow$ la convergenza delle f è più
 // " " (piccolo) $\Rightarrow$ " " " " è più
 $\Rightarrow$ Il moltiplicatore λ

$\Rightarrow$ Il moltiplicatore d_T esprime la sensibilità della funzione obiettivo alle perturbazioni del vincolo $f_T(x) \geq 0$

Quando $f'(x) \geq 0$ non è attivo in x^* $\Rightarrow$
 $\lambda_T = 0$ L'ho

$$\frac{d f(x)}{d \epsilon} = - \sum_T \| \nabla_{\mathcal{F}_T} f(x^k) \| = 0$$

$\Rightarrow$ Nel caso I la funzione obiettivo non è sensibile alle variazioni del vincolo

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL) (P)

$\min f(x) \leadsto$ funzione lineare

$x \in X \leadsto$ descritto da un insieme di equazioni e disequazioni lineari

Una funzione lineare è lineare e convessa

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le variabili.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ sono i coefficienti delle variabili.

funzione convessa se $\forall x, y \in X$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \lambda x + (1-\lambda)y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = c_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + c_2(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) + \dots + c_n(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \lambda c_1 x_1 + (1-\lambda)c_1 y_1 + \lambda c_2 x_2 + (1-\lambda)c_2 y_2 + \dots + \lambda c_n x_n + (1-\lambda)c_n y_n$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\Rightarrow$ Una funzione lineare è convessa

fonzione concave se $\forall x, y \in X$

(94)

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\Rightarrow$ Una funzione lineare è
concave

Molte PL

$$X = \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \\ f_{min}(x) \geq 0 \\ \vdots \\ f_{min+p}(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ funzioni lineari

$$f_j(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ funzioni
lineari

$\Rightarrow$ X è un insieme
convesso

funzioni
lineari
che convessa

PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

$\min f(x) \rightarrow \text{lineare} \Rightarrow \text{convessa}$

$x \in X \begin{cases} \text{derivati e equazioni} \\ \text{e disuguaglianze lineari} \end{cases} \Rightarrow \text{Insieme convesso}$

- $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ Se } x^* \text{ è un minimo locale} \Rightarrow \text{è minimo globale} \\ (2) \text{ L'insieme dei punti di minimo globale è convesso} \end{array} \right.$

Si può dimostrare:

In un problema di PL le condizioni KKT

sono condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale anche per i punti non regolari.