

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

$\min f(x) \rightarrow$ funzione lineare

(96)

$x \in X$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{descritto da un insieme di equazioni} \\ \text{e disequazioni lineari} \end{array} \right.$

Funzione lineare $\bar{x}$ se converge da convergente

PROBLEMA DI
PL IN FORMA
STANDARD

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} m \\ \text{equazioni} \\ \text{lineari} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} n \text{ disequazioni} \\ \text{lineari} \end{array} \right.$$

Qualsiasi problema
di PL può
scrivere in FORMA
STANDARD

$x_1, x_2, \dots, x_n$: variabili del Prob. PL

$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: Dati coefficienti di costo delle
variabili nella funzione
obiettivo

$a_{ij}, i \in \mathbb{R} \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n$: Dati coefficienti delle
variabili nei
vincoli che descrivono X

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: Dati termini noti dei vincoli
di affinità

(97)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad \text{Vettore costi: } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Matrice dei coefficienti delle variabili nei vincoli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Vettore dei termini noti

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = c^T X$$

Sistema di
m equazioni
lineari

$$\equiv Ax = b$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \quad \equiv \quad X \geq 0$$

$\vdots$

$$x_n \geq 0$$

PROBLEMA DI
PL IN FORMA
STANDARD

$$\min c^T X$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

L'insieme ammissibile X di un problema di PL
è un insieme convesso -

$\min C^T x$ $\rightarrow$ funzione lineare
(funzione convessa
e concava)

$X = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ Insieme convesso

- 1) Se x^* è minimo locale $\Rightarrow x^*$ è minimo globale
- 2) L'insieme di punti di minimo è convesso

CONDIZIONI KKT APPLICATE AD UN PROB. DI PL

$$\min c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

⋮

$$x_n \geq 0$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \text{ moltiplicatori di Lagrange dei vincoli di uguaglianza}$$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \text{ moltiplicatori di Lagrange dei vincoli } x \geq 0$$

$$L(x, u, s) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - \sum_{i=1}^m u_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i)$$

$$- \sum_{j=1}^m s_j x_j$$

|| Funzione lagrangiana

$$L(x, u, s) = c^T x - u^T \overbrace{(Ax - b)}^{h(x)} - s^T x$$

$$\min c^T x \quad (99)$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Sia x^* un minimo globale del prob. di PL $\Rightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m, s^* \in \mathbb{R}^m$

Tali che:

$$1) \nabla_x L(x^*, u^*, s^*) = c^T - u^{*T} A - s^{*T} = 0^T$$

$$2) Ax^* = b \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{condizioni di ammissibilit } \\ \text{per } x^* \end{array} \right.$$

$$3) x^* \geq 0$$

$$4) s^* \geq 0$$

$$5) \left(\begin{array}{c} \lambda_J^* f_J(x^*) = 0 \\ \parallel \\ s_J^* \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} s_J^* x_J^* = 0 \quad J=1, \dots, m \\ \text{condizioni di} \\ \text{complementarit } \\ \text{(condizioni di ortogonalit )} \end{array} \right)$$

$$\overset{\circ}{\lambda_J^*} \overset{\circ}{x_J^*} \quad s_J^* \cdot x_J^* = 0 \quad J=1, \dots, m \quad \Leftrightarrow \quad s^{*T} x^* = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \right.$$

$$\text{Dalla 1) } s^{*T} = c^T - u^{*T} A \Rightarrow (c^T - u^{*T} A) x^* = 0$$

$$(s^*)^T = (c^T - u^{*T} A)^T$$

$$s^* = c - A^T u^*$$

$$(u^{*T} A)^T = A^T u^*$$

(101)

Quindi le KKT per un probs. di PL in forma standard ⁽¹⁰²⁾
sono:

- a) $AX^* = b$ } condizioni di ammissibilità
b) $x^* \geq 0$ }
c) $s^* = c - A^T u^* \geq 0$ } non negatività dei moltiplicatori s^*
d) $(c^T - u^{*T} A) x^* = 0$ } condizioni di complementarità

$$d) \Rightarrow c^T x^* - \underbrace{u^{*T} A x^*}_{= b \text{ per la a)}} = 0 \Rightarrow \boxed{c^T x^* = u^{*T} b}$$

$$d) \rightarrow (c^T - u^{*T} A) x^* = 0 \Rightarrow x^{*T} \cdot (c - A^T u^*) = 0$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Associe ad ogni problema di PL un problema di PL chiamato **PROBLEMA DUALE**

PROBLEMA DI PL IN FORMA STANDARD

$$\begin{array}{ll} \min e^T x & \boxed{\text{PROBLEMA PRIMALE}} \\ Ax = b & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 & \end{array}$$

IL PROBLEMA DUALE

$$\begin{array}{ll} \max b^T y & \\ A^T y \leq e & \end{array}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

vettore delle variabili

Si può dimostrare

$$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

le condizioni KKT per i problemi
PRIMALE E DUALE SONO LE STESSA

$$\max b^T y \quad - \min -b^T y$$

$$A^T y \leq c \quad \Rightarrow \quad c - A^T y \geq 0$$

$$\boxed{\max f(x) \equiv - \min -f(x)}$$

$$\boxed{f(x) \geq 0}$$

Sia v il vettore di moltiplicatori di Lagrange associato alle disuguaglianze del sistema $c - A^T y \geq 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$L(y, v) = f(x) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(x) = -b^T y - v^T (c - A^T y)$$

Sia y^* un punto di minimo globale $\Rightarrow$

$\exists v^* \in \mathbb{R}^m$ che soddisfa le KKT:

$$1) \nabla_y L(y^*, v^*) = -b^T + v^{*T} A^T = 0^T$$

$$2) c - A^T y^* \geq 0$$

$$3) v^* \geq 0$$

$$4) \underbrace{v_j^*}_{0} \underbrace{(c - A^T y^*)_j}_{g_j(y^*)} = 0; j=1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v^{*T} (c - A^T y^*) = 0}$$

KKT DEL PROBLEMA DUALE 105

$$1) -b + Av^* = 0 \Rightarrow \boxed{Av^* = b}$$

$$2) c - A^T y^* \geq 0$$

$$3) v^* \geq 0$$

$$4) v^{*T} (c - A^T y^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{(c^T - y^{*T} A) v^* = 0}$$

Ponendo $x^* = v^*$ e $u^* = y^*$ le KKT del
 problema PRIMALE $\min c^T x$ e del problema duale
 $Ax = b$ $\max b^T y$
 $x \geq 0$ $A^T y \leq c$

COINCIDONO

OVVERO

1) I moltiplicatori di Lagrange u^* del probs. primale all'ottimo coincidono con la soluzione ottimale y^* del problema duale

2) I moltiplicatori di Lagrange v^* del probs. duale coincidono con la soluzione ottimale x^* del problema primale

Dalle cond. complementarietà (o ortogonalità) del problema duale (cond. 4):

(106)

$$4) (C^T - y^{*T} A) v^* = 0 \Rightarrow C^T v^* - \underbrace{y^{*T} A v^*}_{\substack{u \\ b}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C^T v^* = y^{*T} b}$$

$$\Rightarrow \text{Dato che } x^* = v^* \Rightarrow \boxed{C^T x^* = y^{*T} b = b^T y^*}$$

Se x^* e y^* sono soluzioni ottime dei problemi primale e duale, rispettivamente, allora le KKT si ha che:

$$C^T x^* = b^T y^*$$

ovvero i valori delle soluzioni ottime dei due problemi coincideranno

PROB. IN
FORMA STANDARD
PROB. PRIMALE

$$\min c^T x$$

$$x \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

PROB. DUALE

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c \Leftrightarrow c - A^T y \geq 0$$

Siano x^* e y^* soluzioni ottime del prob. primale e duale, rispettivamente $\Rightarrow$ Le KKT sono:

$$\begin{aligned} 1) & Ax^* = b \\ 2) & x^* \geq 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI DI} \\ \text{AMMISSIBILITA'} \\ \text{DEL PUNTO } x^* \end{array} \right\}$$

$$3) c - A^T y^* \geq 0 \quad \left\| \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI AMMISSIBILITA'} \\ \text{DEL PUNTO } y^* \end{array} \right.$$

$$4) x^{*T} (c - A^T y^*) = 0 \quad \text{cond. di comp. o di ortogonalit\`a}$$

$$4) \underbrace{x^*}_{\substack{V \\ 0}}^T \underbrace{(c - A^T y^*)}_{\substack{V \\ 0}} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x_J^*}_{\substack{\text{J-esime} \\ \text{variabile del primale} \\ \text{ell'ottimo}}} \underbrace{(c - A^T y^*)_J}_{\substack{\text{le parte sinistra} \\ \text{del vincolo J-esime} \\ \text{del duale ell'ottimo}}} = 0 \quad \forall J=1, \dots, n$$

~~per J=1, \dots, n~~

Le condizioni di comp. o ortog. implicano che ell'ottimo
L ebbie:

$$x_J^* = 0 \quad \text{e/o} \quad c_J - A^T y^*_J = 0 \rightarrow \text{parte sinistra del vincolo J-esime del duale}$$

Variable $x_J^* = 0$ e/o J-esimo vincolo del duale soddisfatto ell'upplemento

PROBLEMA DI PL
IN FORMA STANDARD

(108)

PROB. PRIMALE

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

PROB. DUALE

$$\max b^T y$$
$$A^T y \leq c$$

$x \in \mathbb{R}^n$
vettore variabili. $\parallel$ m Variabili

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m$$

$Ax = b$ è
un sistema di
m equazioni

$y \in \mathbb{R}^m$
vettore variabili. $\parallel$ m Variabili

$A^T y \leq c$ è un
sistema di m
diseguazioni

$$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

PROBLEMA PRIMALE

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

PROBLEMA DUALE

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \leq c \end{aligned}$$

(109)

PROPRIETÀ DI DUALITÀ DEBOLE

Siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili rispettivamente del problema primale e del problema duale

$\Rightarrow$ Si ha:

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$$

Valore della f. ob. del primale in $\bar{x}$ è sempre $\geq$ del valore della f. ob. del prob. duale in $\bar{y}$

DIM.

Hp. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono sol. ammissibili $\Rightarrow \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ A^T y \leq c \end{cases}$

$$\text{Th. } c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$$

Per l'ammissibilità di $\bar{y} \Rightarrow (A^T \bar{y})^T \leq (c)^T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{y}^T A \leq c^T \quad \text{moltiplico per } \bar{x} \text{ "a destra"}$$

$$\Rightarrow \text{poichè } \bar{x} \geq 0 \text{ si ha } \bar{y}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x} \Rightarrow$$

$$\text{per l'ammissibilità di } \bar{x} \Rightarrow A \bar{x} = b \Rightarrow \bar{y}^T b \leq c^T \bar{x}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}}$$

QED

□

PROPRIETÀ DI DUALITÀ FORTE

(110)

Sono $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili dei problemi
primali e duale rispettivamente.

Se si ha $C^T \bar{x} = b^T \bar{y} \Rightarrow$

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi
problemi.

Dim.

Hp. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili; $C^T \bar{x} = b^T \bar{y}$

Th. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

Per la dualità debole $\Rightarrow C^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$

Se y^* è una soluzione ottimale del prob. duale

$\Rightarrow$ per la dualità debole si ha

$$C^T \bar{x} \geq b^T y^* \quad \forall \bar{x} \text{ ammissibile per il prob. primale}$$

$\Rightarrow$ il valore della funzione obiettivo del problema
primal non è mai inferiore al valore
della funzione obiettivo del prob. duale all'ottimo.

$\Rightarrow$ il valore minimo di $C^T \bar{x}$ è per il valore
del valore della fun. ob. del problema duale all'ottimo.

$\Rightarrow$ Se $C^T \bar{x} = b^T y^* \Rightarrow \bar{x}$ deve essere necessariamente
anche soluzione ottimale del problema primale.

TEOREMA

111

Due soluzioni x^* e y^* ammissibili per i problemi
~~primali~~ primale e duale, rispettivamente, sono
anche soluzioni ottime $\longleftrightarrow$

$$C^T x^* = b^T y^*$$

Condizione
necessaria e
sufficiente di
ottimo per prob.
primale e duale

Dim.

$\Rightarrow$ KKT

$\Leftarrow$ Dualità forte

Sono x^* e y^* sol. ottime primale e duale $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Valgono le KKT $\Rightarrow C^T x^* = b^T y^* \Rightarrow$ per la dualità
forte $\Rightarrow x^*$ e y^* sono sol. ottime per primale e
duale.

Nelle PL le KKT sono condizioni
necessarie e sufficienti di ottimo (globale)

Nelle PL le KKT valgono anche nei punti non
regolari

REGOLE PER LA COSTRUZIONE DEL PROBLEMA DUALE DI UN QUALSIASI PROBLEMA PRIMALE (NELLA FORMA DI MINIMIZAZIONE)

(112)

PRIMALE

DUALE

$$\min c^T x$$

$$\max b^T y$$

$$Ax \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b \quad \begin{array}{l} m \\ \text{vincoli} \end{array}$$

$$A^T y \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} c \quad \begin{array}{l} n \\ \text{vincoli} \end{array}$$

$$x \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{libere} \end{cases} 0 \quad \begin{array}{l} n \\ \text{variabili} \end{array}$$

$$y \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{libere} \end{cases} 0 \quad \begin{array}{l} m \\ \text{variabili} \end{array}$$

Una variabile duale per ogni vincolo del primale
 Un vincolo duale per ogni variabile del primale

Il verso delle disuguaglianze che definiscono i vincoli del primale ~~implicano~~ ^{definisce} il verso delle variabili del duale

Il verso delle variabili del primale definisce il verso delle disuguaglianze dei vincoli del duale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow c_1^T \\ \rightarrow c_2^T \\ \vdots \\ \rightarrow c_m^T \end{matrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$

$$A = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{pmatrix} \quad (113)$$

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$Ax = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$c_1^T x = b_1$$

$$c_2^T x = b_2$$

$\vdots$

$$c_m^T x = b_m$$

$$c_i^T x = b_i$$

$$A^T y \leq c$$

$\Downarrow$

$$A_1^T y \leq c_1$$

$$A_2^T y \leq c_2$$

$$A_m^T y \leq c_m$$

$$A_j^T y \leq c_j$$

REGOLE PER LA COSTRUZIONE DEL DUALE

PRIMALE

DUALE (114)

min $\longrightarrow$ max
f. ob. $\longrightarrow$ f. ob.
 $c^T x \longrightarrow b^T y$

Vincoli

$a_i^T x \geq b_i \longrightarrow y_i \geq 0$

$a_i^T x \leq b_i \longrightarrow y_i \leq 0$

$a_i^T x = b_i \longrightarrow y_i \text{ libera}$

Variable

$x_j \geq 0 \longrightarrow A_j^T y \leq c_j$

$x_j \leq 0 \longrightarrow A_j^T y \geq c_j$

$x_j \text{ libera} \longrightarrow A_j^T y = c_j$

Variabili

$y_i \geq 0$

$y_i \leq 0$

$y_i \text{ libera}$

Vincolo

$A_j^T y \leq c_j$

$A_j^T y \geq c_j$

$A_j^T y = c_j$

Per ogni coppia primale e duale le condizioni KKT costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità.

Valgono inoltre le proprietà di dualità debole e forte.