

Prob.
PRIMALE

Prob. DUALE

115

$$\min c^T x$$

$$\max b^T y$$

FORMA
CANONICA

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

x^* e y^* sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi primale e duale $\Leftrightarrow$

valgono le seguenti condizioni (KKT)

$$\left. \begin{array}{l} Ax^* \geq b \\ x^* \geq 0 \end{array} \right\} \text{Ammissibilità del punto } x^* \text{ per il primale}$$

$$\left. \begin{array}{l} A^T y^* \leq c \\ y^* \geq 0 \end{array} \right\} \text{Ammissibilità del punto } y^* \text{ per il duale}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow (c - A^T y^*)_j \cdot x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \Rightarrow (c_j - A_j^T y^*) \cdot x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \Rightarrow (Ax^* - b)_i \cdot y_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \Rightarrow (e_i^T x^* - b_i) \cdot y_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Condizioni} \\ \text{di complementarità} \\ \text{o di ortogonalità} \end{array}$$

Proprietà di dualità debole $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y} \quad \forall \bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ ammissibili}$
Proprietà di dualità forte $c^T x^* = b^T y^* \Leftrightarrow x^* \text{ e } y^* \text{ sono soluzioni ottime}$

Proprietà Dualità

(116)

Il problema duale di un problema duale
comprimende il problema primale

$$\begin{array}{ll} \text{Primale} & \text{Duale} \\ \min c^T x & \max b^T y \\ Ax = b & A^T y \leq c \Rightarrow -A^T y \geq -c \\ x \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Duale del duale} & \text{Primale} \\ -\max -c^T x & \min c^T x \\ -Ax = -b & Ax = b \\ x \geq 0 & x \geq 0 \end{array} \Rightarrow$$

Se il problema primale è illimitato
 $\Rightarrow$ il problema duale non ha soluzioni
ammissibili (è impossibile) e viceversa -

DM7 H.P. prob. primale illimitato $c^T x \rightarrow -\infty$

Th il prob. duale ~~non~~ non ha sol. ammiss.

Dualità debole

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y} \quad \forall \bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ sol. ammissibili}$$

Quando $\bar{x}$ è sol. di un problema primale
e $\bar{y}$ è sol. di un problema duale
 $b^T \bar{y} \leq -\infty \quad \forall \bar{y} \text{ ammissibile del duale}$

$\Rightarrow$ Il duale è impossibile, non ha sol.
ammissibili -

$$\min 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

Esercizio binario

(117)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \rightarrow y_1 \geq 0 \\ x_2 + x_3 \leq 2 \rightarrow y_2 \leq 0 \\ x_1 - x_3 = 3 \rightarrow y_3 \text{ libera} \end{cases} Ax \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \text{ libera}$$

$$\min c^T x \rightsquigarrow \max b^T y$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f. ob.
duale

$$\max b^T y = y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

VINCOLI DUALE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

colonne A

righe di A

$$A_1^T y \leq c_1$$

$$\Rightarrow (2 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq 10 \Rightarrow 2y_1 + y_3 \leq 10$$

I vincoli
duale

$$A_2^T y \geq c_2 \Rightarrow (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 20 \Rightarrow -y_1 + y_2 \geq 20$$

II

vincolo

$$A_3^T y = c_3 \Rightarrow (0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 30 \Rightarrow y_2 - y_3 = 30$$

Problema duale

(118)

$$\max y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

$$2y_1 + y_3 \leq 10$$

$$-y_1 + y_2 \geq 20$$

$$y_2 - y_3 = 30$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

y_3 libera

KKT

x^* e y^* sono sol. ottime

$\Leftrightarrow$

- x^* Ammissibile per il primale

- y^* " " il duale

$$(2x_1^* - x_2^* - 1)y_1^* = 0$$

$$(x_2^* + x_3^* - 2)y_2^* = 0$$

$$(x_1^* - x_3^* - 3)y_3^* = 0$$

$$(10 - 2y_1^* - y_3^*)x_1^* = 0$$

$$(20 + y_1^* - y_2^*)x_2^* = 0$$

$$(30 - y_2^* + y_3^*)x_3^* = 0$$

Cond.

di complementarità
o ortogonalità

Esercizio Dualità

118

$$\min -\frac{1}{2}x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 0 \leadsto y_1 \geq 0$$

$$2x_3 + x_4 + 2x_5 = 8 \leadsto y_2 \text{ libera}$$

$$2x_2 - 3x_4 - 2x_5 = -10 \leadsto y_3 \text{ libera}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

All'ottimo vale

$$x_3^* \neq 0 \quad x_4^* = \frac{10}{3}$$

$$|y_1^*| = \frac{1}{2}$$

Trova le
soluzioni
ottime dei
problemi duali

Prob. DUALE

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\max b^T y = 8y_2 - 10y_3$$

$$A^T y \leq c$$

$$c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

$$\begin{cases} A_1^T y \leq c_1 \\ \vdots \\ A_5^T y \leq c_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y_1 \leq -\frac{1}{2} \quad (1) * \\ 2y_1 + 2y_3 \leq 5 \quad (2) \\ 2y_2 \leq 0 \quad (3) * \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq -1 \quad (4) * \\ 2y_2 - 2y_3 \leq 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0; y_2, y_3 \text{ libere}$$

$$(1D) \Rightarrow y_1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y_1^* = \frac{1}{2}}$$

(120)

poiché $x_3^* \neq 0 \Rightarrow$ per le cond. di comp
il vincolo (3D) deve essere soddisfacuto all'equilibrato

$$\Rightarrow (3D) \Rightarrow 2y_2^* = 0 \Rightarrow \boxed{y_2^* = 0}$$

Analogamente poiché $x_4^* = \frac{10}{3} \neq 0 \Rightarrow$
il vincolo duale (4D) sarà soddisfatto all'equilibrato

$$\Rightarrow (4D) \Rightarrow 2y_1^* + y_2^* - 3y_3^* = -1 \Rightarrow 1 - 3y_3^* = -1$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$

$$\boxed{y_3^* = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1^* = \frac{1}{2} ; y_2^* = 0 ; y_3^* = \frac{2}{3}} \quad \boxed{\times}$$

$$(2D) \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \leq 5 \Rightarrow 1 + \frac{4}{3} \leq 5 \quad \boxed{\text{ok}}$$

$$(5D) \Rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{2}{3} \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq 0 \quad \boxed{\text{ok}}$$

la soluzione ~~ha~~ $\boxed{\times}$ è ammissibile per il
duale

Poiché $y_1^* = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow -x_1^* + 2x_2^* + 2x_4^* = 0$ (121)

(11) $y_3^* = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow 2x_2^* - 3x_4^* - 2x_5^* = -10$

Poiché (20) e (50) non sono soddisfatte.

ell'equivalente della soluzione $y^* \Rightarrow$

~~le~~ per le condizioni di complementarità
le componenti variabili primali x_2^* e x_5^* sono 0
ell'ottimo.

$$\Rightarrow x_2^* = x_5^* = 0; \quad x_4^* = \frac{10}{3}$$

$\Rightarrow$ I vincoli del problema diventano

$$\begin{cases} -x_1^* + 2x_4^* = 0 \\ 2x_3^* + x_4^* = 8 \\ -3x_4^* = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y_1^* \neq 0 \\ x_4^* = \frac{10}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{20}{3}; \quad 2x_3^* = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow x_3^* = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{20}{3}; \quad x_2^* = 0; \quad x_3^* = \frac{7}{3}; \quad x_4^* = \frac{10}{3}; \quad x_5^* = 0}$$

Soluzione ottima problema primale

Verifie $C^T X^* = b^T y^*$

(122)

$$C^T X^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{20}{3} \right) - \frac{10}{3} = \frac{-20 - 20}{6} = -\frac{40}{6} = -\frac{20}{3}$$

$$b^T y^* = -10 \left(\frac{2}{3} \right) = -\frac{20}{3}$$

Et vérifiez la dualité forte

$$\min 3x_1 - 5x_2 - 3x_4 - x_5$$

$$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 \geq -4 \rightarrow y_1 \geq 0$$

$$-2x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 - 3x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq -4 \rightarrow y_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

Verificare se ell'ott. si può avere $x_2 \neq 0; x_3 \neq 0$

Forme
canonice

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

duale
 $\max b^T y$

$$A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\max -4y_1 - 4y_2$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & \frac{3}{2} & -4 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T y \leq c$$

$$\begin{aligned} 0 \neq x_2^* (A_2^T y^* - c_2) &= 0 \\ 0 \neq x_3^* (A_3^T y^* - c_3) &= 0 \end{aligned}$$

- (b1) $-y_1 - 2y_2 \leq 3 < \checkmark$
- (b2) $-3y_1 + \frac{3}{2}y_2 \leq -5 \otimes = \checkmark$
- (b3) $3y_1 - 4y_2 \leq 0 \otimes = \checkmark$
- (b4) $-2y_1 - 3y_2 \leq -3 < \checkmark$
- (b5) $-y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq -1 < \checkmark$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3y_1 + \frac{3}{2}y_2 = -5 \\ 3y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}y_2 = -5 \Rightarrow y_2 = 10 \\ y_1 = \frac{8}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 10 \end{pmatrix} \text{ è ammissibile per il duale}$$

124

D₈ // 9 $\Rightarrow x_5 = 0$

D) $u, y \Rightarrow x, z = 1$

$$u \quad y_2 \Rightarrow u \quad u$$

↳ il 2° principio
Indirizzo all'epistola

$$\textcircled{\times} - 3x_2 + 3\left(\frac{12}{5}\right) = -4$$

$$\Rightarrow -3x_2 = -4 - \frac{36}{5} = -\frac{56}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{56}{15}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \\ \hline 15 \\ 12 \\ \hline 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T x = b^T y$$

$$C^T X = -5 \cdot \frac{56}{15} = -\frac{56}{3} ; b^T y = -4 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 = -\frac{56}{3}$$

$$\min -2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5$$

125

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \rightsquigarrow y_1 \text{ libera}$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \rightsquigarrow y_2 //$$

$$-2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \rightsquigarrow y_3 //$$

$$x_1 \geq 0 \dots x_5 \geq 0$$

È possibile che all'ottimo x_1 e x_3 siano le uniche variabili $\neq 0$? ($x_2 = x_4 = x_5 = 0$)

Duale $\max b^T y$

$$\text{Principale } \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \Rightarrow$$

$$A^T y \leq c$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\max y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$A_1^T y = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq -2 \quad (D_1)$$

$$A_2^T y = -2y_1 - 2y_2 \leq 5 \quad (D_2)$$

$$A_3^T y = y_3 \leq -1 \quad (D_3)$$

$$A_4^T y = y_1 + 2y_3 \leq -2 \quad (D_4)$$

$$A_5^T y = y_2 + y_3 \leq -2 \quad (D_5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Vincolo principale

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_1 = 2 \\ -2x_1 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 4$$

$$\text{poiché } x_1 \neq 0 \Rightarrow (D_1) = 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -2 \Rightarrow$$

$$// \quad x_3 \neq 0 \Rightarrow (D_3) = 0 \Rightarrow y_3 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 + 2y_2 = -4 \Rightarrow y_2 = -2 - \frac{1}{2} y_1$$

$$C^T X = b^T y$$

126

$$C^T X = -6$$

$$b^T y = y_1 + 2y_2 + 2y_3 = y_1 + 2y_2 - 2$$

$$C^T X = b^T y \Rightarrow y_1 + 2y_2 = -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = -2 - \frac{1}{2} y_1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

(D2)

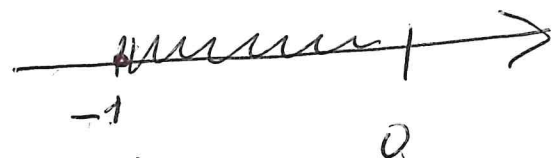
$$\Rightarrow y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -6 \Rightarrow y_1 - 4 = -6$$

$$-2y_1 - 2(-2 - \frac{1}{2} y_1) \leq 5 \Rightarrow -y_1 \leq 1 \Rightarrow y_1 \geq -1$$

$$(D4) \Rightarrow y_1 - 2 \leq -2 \Rightarrow y_1 \leq 0$$

$$(D5) \Rightarrow -2 - \frac{1}{2} y_1 - 1 \leq -2 \Rightarrow y_1 \geq -2$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -1 \\ y_1 \leq 0 \\ y_1 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -1 \\ y_1 \leq 0 \end{cases} \quad y_1$$



$$\begin{cases} -1 \leq y_1 \leq 0 \\ y_2 = -2 - \frac{1}{2} y_1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \infty$ soluzioni ottimali del problema dual

anzi si ha che $C^T X = b^T y$ con X e y entrambi, b_1

Nome.....

Cognome.....

Prima prova in corso d'anno di Ricerca Operativa A.A. 2018-2019

1

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^3 - x_2^2 \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Quali dei seguenti punti:

$$A = (1, 0) \quad B = (0, 1) \quad C = (0, -1) \quad D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \quad E = (0, 0)$$

possono essere esclusi come punti di minimo locale, e perché?

2

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcccccccl} \max & x_1 & & +x_2 & +x_3 & & & & \\ & -2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & -x_5 & = & 3 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +2x_4 & & = & 10 \\ & & -3x_2 & -2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 3 \\ & x_j & & & & & \geq & 0 \end{array}$$

Se ne scriva il duale. Si verifichi se si può avere che all'ottimo le variabili x_3 e x_5 siano positive e che il valore ottimo della variabile duale associata al secondo vincolo sia, in valore assoluto, pari a $3/2$.

Problema

$$\Rightarrow \min -x_1^3 + x_2^2 \quad f_1(x) \geq 0$$

$$\lambda_1 \rightarrow f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \rightarrow f_2(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2 \geq 0$$

$$\lambda_3 \rightarrow f_3(x) = x_1 \geq 0$$

$$\lambda_4 \rightarrow f_4(x) = 1 - x_1 \geq 0$$

~~≡~~

Posso escludere l'essere minimi locali i punti

replani che NON soddisfanno le KKT

$$L(x, \lambda) = -x_1^3 + x_2^2 - \lambda_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1) - \lambda_2((x_1 - 1)^2 + x_2) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4(1 - x_1)$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = -3x_1^2 - 2\lambda_1(x_1 - 1) - 2\lambda_2(x_1 - 1) - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x^*, \lambda^*) = 2x_2 - 2\lambda_1(x_2 - 1) - \lambda_2 = 0$$

$$f_1(x^*) \geq 0; \dots; f_4(x^*) \geq 0$$

$$\lambda_1^* \geq 0; \dots; \lambda_4^* \geq 0$$

$$\lambda_1^* f_1(x^*) = 0; \lambda_2^* f_2(x^*) = 0; \lambda_3^* f_3(x^*) = 0; \lambda_4^* f_4(x^*) = 0$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 1) \end{pmatrix}; \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix}; \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nabla f_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = (1, 0) = (x_1, x_2)$
 f_1 è attivo
 f_2 è attivo
 f_3 non attivo
 f_4 attivo

$X \subseteq \mathbb{R}^2$
 $x \in \mathbb{R}^2$

129

In A sono attivi: 3 vincoli poiché $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ è non regolare

$\Rightarrow A$ potrebbe essere minimo locale

$B = (0, 1)$

f_1 è attivo $\Leftrightarrow f_1(B) = 0$
 f_2 non è attivo $\Leftrightarrow f_2(B) > 0$
 f_3 attivo $\Leftrightarrow f_3(B) = 0$
 f_4 non è attivo $\Leftrightarrow f_4(B) > 0$

$\nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla f_3(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linearmente dipendenti

$\Rightarrow B$ è non regolare $\Rightarrow$ candidato a minimo locale

$C = (0, -1)$

f_1 non è attivo $\rightarrow \lambda_1^* = 0$
 f_2 è attivo
 f_3 attivo
 f_4 non è attivo $\rightarrow \lambda_4^* = 0$

$\nabla f_2(C) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla f_3(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. indipendenti
 $\Rightarrow C$ è punto regolare

$\frac{\partial L}{\partial x_1}(C, \lambda^*) = -2\lambda_2^*(-1) - \lambda_3 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2}(C, \lambda^*) = -2 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -2 < 0$! MP !!

$\Rightarrow C$ non soddisfa le KKT $\Rightarrow$ non è minimo locale

(130)

$$\text{Per } D = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right) \quad f_1(D) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 1 = \frac{4+9}{16} - \frac{16}{16} = -\frac{3}{16} < 0 !!$$

$\Rightarrow D$ non punto ammissibile $D \notin X$

$$E = (0, 0)$$

f_1 non è attivo	$f_1(E) > 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 0$
f_2 " " "	$f_2(E) > 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 0$
f_3 è attivo	$f_3(E) = 0$
f_4 non è attivo	$f_4(E) > 0 \Rightarrow \lambda_4^* = 0$

$$\nabla f_3(E) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow E \text{ punto regolare}$$

Controllo le KKT

$$\frac{\partial L(E, \lambda^*)}{\partial x_1} = -\lambda_3^* = 0 \Rightarrow \lambda_3^* = 0 \quad \text{OK! } (\lambda_3 \geq 0)$$

$$\frac{\partial L(E, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0 = 0 \quad \text{OK}$$

Il punto E soddisfa le KKT $\Rightarrow E$ è un candidato
a minimo locale.

Nome.....

Cognome.....

Prima prova in itinere di Ricerca Operativa A.A. 2019-2020

1

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 \\ & x_2^2 \geq x_1^3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2^2 \leq 4 \end{aligned}$$

- Si considerino i seguenti punti: $A = (0, 0)$ $B = (1, 1)$ $C = (0, 2)$ $D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ $E = (\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{8}{27}})$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Determinare se nel punto $C = (0, 2)$ esiste una direzione di discesa ammissibile.

2

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \min & -\frac{1}{2}x_1 & +5x_2 & -x_4 & \\ & -x_1 & +2x_2 & +2x_4 & \geq 3 \\ & & 2x_3 & +x_4 & +2x_5 = 8 \\ & & 2x_2 & -3x_4 & -2x_5 = -10 \\ & x_j & & & \geq 0 \end{array}$$

Si scriva il duale e si calcolino le soluzioni ottime x^* ed y^* dei due problemi, avendo le seguenti informazioni:

- nella soluzione ottima del problema primale, la variabile x_4 è pari a $10/3$
- nella soluzione ottima del problema primale, la variabile x_3 è diversa da 0
- nella soluzione ottima del problema duale, la variabile duale associata al primo vincolo del primale è pari, in valore assoluto, a $1/2$.

$$C = (0, 2)$$

$$\begin{aligned} f_1 \text{ non attivo} &\Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ f_2 \text{ attivo} & \nabla f_2(C) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ lin.} \\ f_3 \text{ attivo} & \nabla f_3(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ Inad.} \end{aligned} \quad (132)$$

$\Rightarrow C$ è punto regolare

$$\text{KKT} \quad \frac{\partial L(C, \lambda)}{\partial x_1} = -4 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 4 > 0 \text{ ok!!}$$

$$\frac{\partial L(C, \lambda)}{\partial x_2} = 8 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{12}{4} < 0 \text{ !!}$$

NO KKT

$$D = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} f_1 \text{ attivo} & f_1(D) = 0 \\ f_2 \text{ non attivo} & f_2(D) > 0 \quad \lambda_2 = 0 \\ f_3 \text{ non attivo} & f_3(D) > 0 \quad \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla f_1(D) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow D \text{ è punto regolare}$$

$$\text{KKT} \quad \frac{\partial L(D, \lambda)}{\partial x_1} = 2\left(\frac{1}{2} - 2\right) + 3\lambda_1\left(\frac{1}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -3 + \frac{3}{8}\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8 > 0 \text{ ok}$$

$$\frac{\partial L(D, \lambda)}{\partial x_2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0 \text{ ok !!}$$

D ^{NON} soddisfa le KKT $\Rightarrow$ ^{NON} Condizione di minimo locale

$$E = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{8}}{27} \right)$$

$$\begin{aligned} f_1 \text{ attivo} & f_1(E) = 0 \\ f_2 \text{ non attivo} & f_2(E) > 0 \\ f_3 \text{ attivo} & f_3(E) > 0 \end{aligned} \quad \nabla f_1(E) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2\frac{\sqrt{8}}{27} \end{pmatrix} \neq 0$$

E punto regolare

$$\frac{\partial L(E, \lambda)}{\partial x_1} = 4\frac{\sqrt{8}}{27} - 2\frac{\sqrt{8}}{27}\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\frac{\partial L(E, \lambda)}{\partial x_2} = 2\left(+\frac{2}{3} - 2\right) + 3\frac{8}{27}\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \quad \lambda_1 \neq 0$$

NO KKT

$$\min (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2$$

$$f_1(x) = -x_1^3 + x_2^2 \geq 0$$

$$f_2(x) = 2 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$f_3(x) = 4 - x_2^2 \geq 0$$

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 - \lambda_1(-x_1^3 + x_2^2) - \lambda_2(2 - x_1 - x_2) - \lambda_3(4 - x_2^2)$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) = 2(x_1 - 2) + 3\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = 4x_2 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = 4x_2 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0$$

$$f_1(x) \geq 0 ; f_2(x) \geq 0 ; f_3(x) \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1 f_1(x) = 0 \quad \lambda_2 f_2(x) = 0 \quad \lambda_3 f_3(x) = 0$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = (0, 0)$$

f_1 attivo
 f_2 non att.
 f_3 " "

$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A punto regolare
lineamento dip.

$\Rightarrow$ A non regolare $\Rightarrow$ punto estremo minimo locale

$$B = (1, 1)$$

f_1 attivo
 f_2 attivo
 f_3 non attivo

$$\nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 0$ lin. ind.

$\Rightarrow$ B punto regolare

KKT $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow 6 - 5\lambda_1 = 0$

[No KKT]

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - \frac{12}{5} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{20}{5} + \frac{12}{5} < 0$$

Nel punto $c(0,2)$ sono attivi i vincoli f_2 e f_3

$$\nabla f_2(c) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla f_3(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(134)

$$d \in \mathbb{R}^2 \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f_2(c)^T d \geq 0 \\ \nabla f_3(c)^T d \geq 0 \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{condizione di} \\ \text{emissibilità per } d \end{array} \right.$$

$\nabla f(c)^T d < 0 \Rightarrow d$ è direzione di discesa

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 4x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(c) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } d_2 = -1$$

$$-d_1 + 1 \geq 0$$

$$-1 \leq 0$$

$$-4d_1 - 8 < 0$$

$$\begin{cases} -d_1 - d_2 \geq 0 \\ -4d_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow d_2 \leq 0$$

$$\rightarrow -4d_1 + 8d_2 < 0$$

$$\text{Se } d_1 = 0, d_2 = -1 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ è dir. di discesa}$$

$$// \quad // \quad // \quad d_1 = 1 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ emissibile} //$$