

(-) min $-x_1 - x_2 - x_3$

$AX = b$

$x \geq 0$

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_3, x_5 > 0 (\neq 0) \quad y_2 = \left| \frac{3}{2} \right|$

Primal
min $c^T x$

$AX = b \longrightarrow$

$x \geq 0$

Dual

max $b^T y$

$A^T y \leq c$

y libere

$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

max $3y_1 + 10y_2 + 3y_3$

$y_2 = \left| \frac{3}{2} \right|$

(10) $-2y_1 + 2y_2 \leq -1$ ☒

(20) $2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq -1$ ☒

(30) $2y_1 - 2y_3 \leq -1 \quad (x_3 > 0) \rightarrow 2y_1 - 2y_3 = -1$

(40) $2y_2 - y_3 \leq 0$

(50) $-y_1 + 2y_3 \leq 0 \quad (x_5 > 0) \rightarrow -y_1 + 2y_3 = 0$

$(A_j^T y - c_j) x_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow y_1 = -1 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$y_2 \rightarrow \frac{3}{2} \quad 7$
 $y_2 \rightarrow -\frac{3}{2}$

(20) $2y_2 + \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow y_2 \leq -1 \rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}$

$y_1 = -1 \quad ; \quad y_3 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad y_2 = -\frac{3}{2}$

(10) Satisfies to all inequalities
(20) satisfies to all inequalities

(1) ~~isolate~~ all'ingressare

(136)

(2) // con $< \Rightarrow x_2 = 0$

(4) // con $< \Rightarrow x_4 = 0$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 10 \Rightarrow x_1 = 5 \\ -2x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_5 = 13 \Rightarrow 2x_3 = 29 \Rightarrow x_3 = \frac{29}{2} \\ -2x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_5 = 16$$

$$x_1^* = 5; x_2^* = 0; x_3^* = \frac{29}{2}; x_4^* = 0; x_5^* = 16$$

$$c^T x^* = b^T y^* ; c^T x^* = 5 + \frac{29}{2} = \frac{39}{2}$$
$$b^T y^* = 3(-1) + 10(-\frac{1}{2}) + 3(-\frac{1}{2}) =$$
$$= -3 - \frac{30}{2} - \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{39}{2}}$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

(432)

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

FORMA
STANDARD

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

FORMA
CANONICA

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \\ c \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Qualunque problema di PL si può scrivere nella
forma Standard o nella Forma Canonica

$$Ax, \max c^T x \longrightarrow -\min -c^T x$$

$$Ax \geq b \rightsquigarrow Ax = b \quad ?$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n &\geq b_i \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{sono equivalenti}$$

$$\left\{ \begin{aligned} s_i &\geq 0 \text{ variabile di surplus} \\ e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n - s_i &= b_i \end{aligned} \right\}$$

$$Ax \leq b \rightsquigarrow Ax = b$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n &\leq b_i \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{sono equivalenti}$$

$$\left\{ \begin{aligned} s_i &\geq 0 \text{ variabile slack} \\ e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n + s_i &= b_i \end{aligned} \right\}$$

x_i libera

(138)

s_i^+, s_i^- due variabili aggiuntive non negative

$$\begin{cases} s_i^+ \geq 0 \\ s_i^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_i = \boxed{s_i^+ - s_i^-} \rightarrow \text{può assumere valori positivi, negativi o nulli}$$

$\Rightarrow$ eliminare x_i e sostituirlo con $(s_i^+ - s_i^-)$

Forme canonica $\longrightarrow$

$$Ax \leq b \longrightarrow -Ax \geq -b$$

$$Ax = b$$

$$\left\{ \begin{aligned} &e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n = b_i \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{equivalenza}}$$

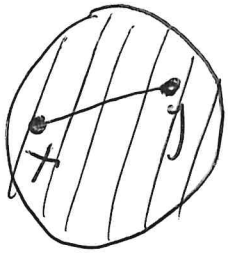
$$\left\{ \begin{aligned} &e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n \leq b_i \\ &e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n \geq b_i \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{equivalenza}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &-e_{i1}x_1 - e_{i2}x_2 - \dots - e_{in}x_n \geq -b_i \\ &e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + \dots + e_{in}x_n \geq b_i \end{aligned} \right\}$$

$$\min c^T x$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

X è un insieme
convesso



~~linear~~

$$Ax = b$$

è un insieme
di equazioni $h_i(x) =$
lineari

$$x \geq 0$$

è un insieme
di disuguaglianze
 $f_j(x) \geq 0$

lineari $\Rightarrow$

$f_j(x)$ è una fun.
lineare $\Rightarrow$
funzione sia concava
che convessa

$c^T x$ è una funzione lineare $\Rightarrow$ funzione
sia concava che convessa

Lo PL è un caso particolare di problema
di ottimizzazione convessa (X e $f(x)$
sono convessi)

Insieme ammissibile di un problema di PL (4c)

$$\min -x_1 - x_2$$

$$\boxed{Ax = b}$$

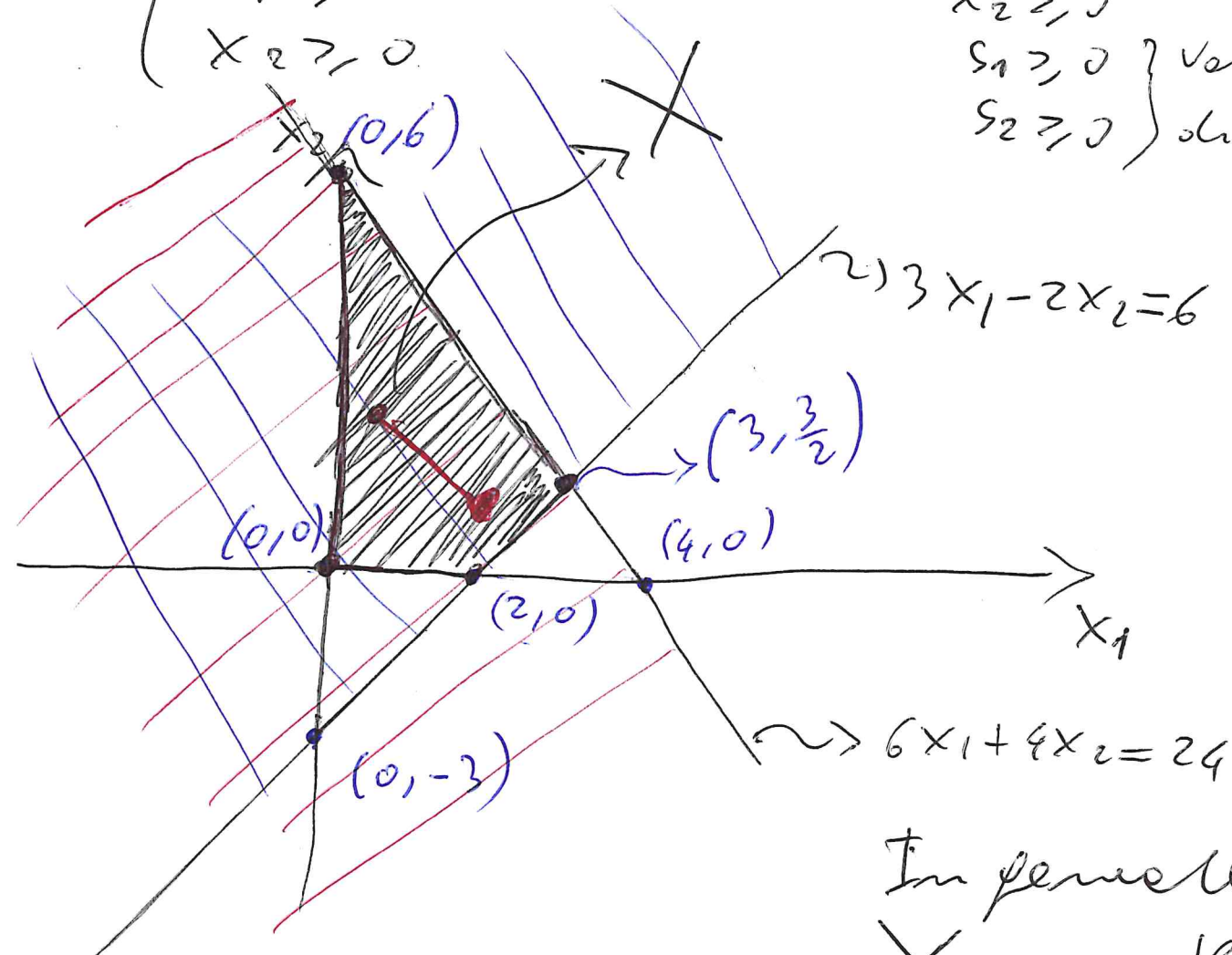
$$X = \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & \leadsto 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 & \leadsto 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{variabili} \\ \text{di stock} \end{array} \right\}$$

$$s_2 \geq 0$$



In generale
 X è un Poliedro
Insieme convesso