

$$\min c^T x$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$c \in \mathbb{R}^n$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

POLIEDRO

$$d \in \mathbb{R}^n$$

$$d_0 \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Semispetto Affine

$$d^T x \leq d_0$$

Semipiano indotto
da d, d_0

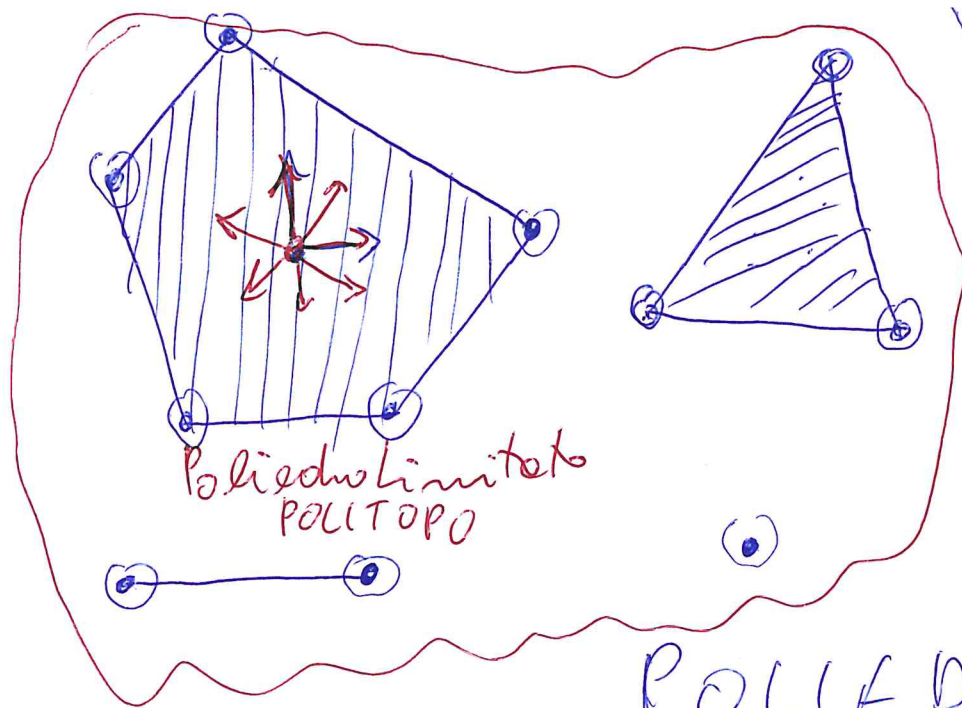
$$d^T x = d_0$$

Definizione di Poliedro

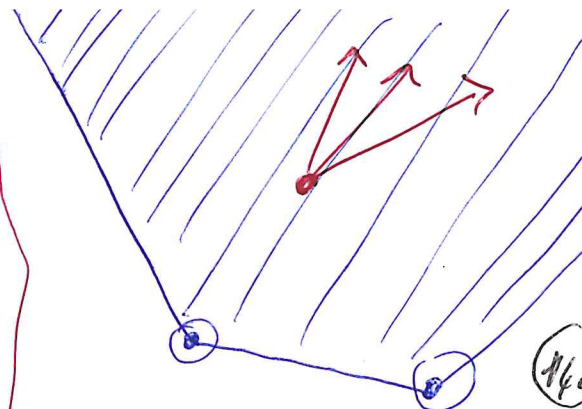
Un POLIEDRO È DATO DALL'INTERSEZIONE DI UN CERTO NUMERO DI SEMISPACI AFFINI E SEMIPIANI INDOTTI

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \rightarrow \text{Insieme di semipiani indotti} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{Insieme di semispazi affini} \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ è un Poliedro



POLIEDRI



POLIEDRO
NON LIMITATO

⬢ Vertici
di un Poliedro

POLITOPO

Un poliedro P è il politopo e $\exists M \in \mathbb{R}$
tale che $\|x\| \leq M \quad \forall x \in P$

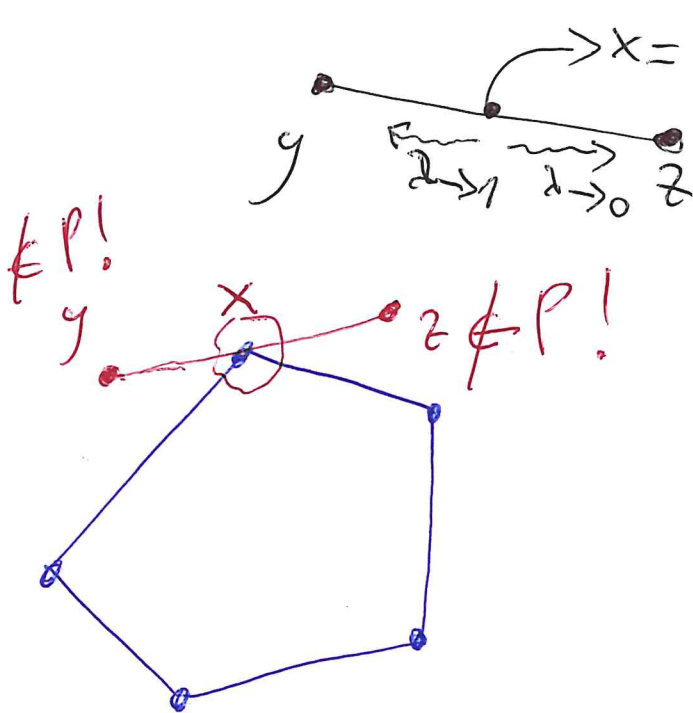
$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

VERTICE O PUNTO ESTREMO DI UN POLIEDRO ⁽¹⁴³⁾

Dato un poliedro P , un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice
vertice o punto estremo se non è possibile
esprimere x come combinazione convessa
stretta di due punti del poliedro P .

$x \in P$, x è un vertice o punto estremo se
 $\nexists y, z \in P$ tali che $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ con
 $\lambda \in (0, 1)$



TEOREMA DI MINKOWSKI-WEYL

(144)

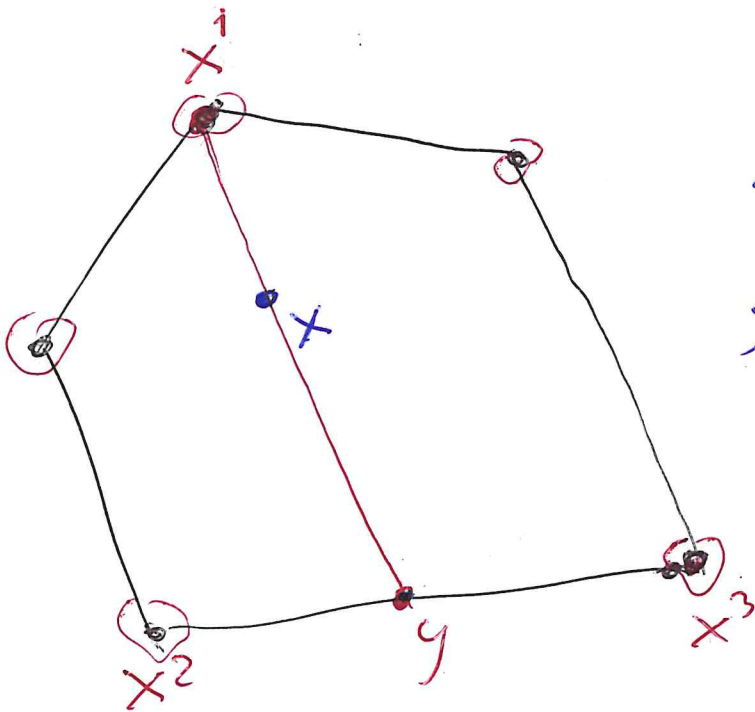
Qualunque punto di un poligono P (poliedro limitato)
 può essere espresso come combinazione
 convessa dei suoi vertici (o punti estremi)

Siano $x^1, x^2, \dots, x^k$ i vertici di P

$$\Rightarrow \forall x \in P \Rightarrow x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$

$$\text{e } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$$



$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)y$$

$$y = \epsilon x^2 + (1-\epsilon)x^3$$

$$\min_{PL} c^T x$$

(145)

$x \in P$ con P poliedro (poliedro limitato)

Teorema

Sia dato un problema di Programmazione lineare (PL) con l'insieme ammissibile P è un poliedro $\Rightarrow \exists$ sempre un vertice $x^* \in P$ soluzione ottimale del problema di PL.

Dim.

Siano $x^1, x^2, \dots, x^K$ i vertici di P

$$x^i \in \mathbb{R}^n \text{ per } i=1, \dots, K$$

$$z^* = \min \{c^T x^i : i=1, \dots, K\}$$

$$\underline{\text{Th}} \quad \forall y \in P \Rightarrow c^T y \geq z^*$$

Per Mink.-Weyl $\Rightarrow y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_K x^K = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i$
con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K \geq 0$

$$c^T y = c^T \left(\sum_{i=1}^K \lambda_i x^i \right) =$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K = 1$$

$$c^t y = c^t \cdot \left(\sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot x^i \right) = \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot \underbrace{c^t \cdot x^i}_{\substack{\text{valore} \\ \text{funzione} \\ \text{obiettivo nel} \\ \text{vertice } x^i}} \geq \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot z^* =$$

(146)

$$= z^* \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^K \lambda_i}_{=1} = z^*$$



Probleme di PL in forma standard

147

$$\min c^T x$$

$$x \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forme
standard

x è un
Polyedro

$$\min -x_1 - x_2$$

$$x \equiv \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases} \quad Ax = b$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0$$

(1) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 24; x_4 = 6$
Vertice $(0; 0)$

(2) $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$
 $x_1 = 3; x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Vertice } (3; \frac{3}{2})$

(3) $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + x_3 = 24 \\ 3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2; x_3 = 12 \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{Vertice } (2; 0)$

(4) $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6 \\ -2x_2 + x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = 18 \end{cases}$

$x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4 \\ 3x_1 + x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = -6 \end{cases}$
 $\nexists$

$$\min c^T x$$

$$P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow m \text{ equazioni con } n \text{ incognite (variabili)}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (148)$$

H.p. su A ① $m \leq n$; ② $\text{rg}(A) = m$ (nono pieno)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ m & & & & \end{pmatrix} \quad \underline{n \geq m}$$

$A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_m$

Se annullo $\boxed{n-m}$ variabili il sistema $Ax = b$ diventa un sistema di m equazioni in m incognite (variabili)

$\Rightarrow$ Se le righe o le colonne dei coefficienti delle variabili ~~che~~ sono linearmente indipendenti il sistema ammette una unica soluzione.

$$Ax = b \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_m x_m = b$$

Se annullo le ultime $n-m$ variabili:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_m x_m = 0 \quad x_{m+1} = \dots = x_n = 0$$

Se le colonne $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono lin. ind. $\Rightarrow$ Il sistema ammette una unica soluzione

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \quad (149)$$

H.p. $m \leq n$
 $\text{rk}(A) = m$

BASE DELLA MATRICE ~~A~~

Insieme di m colonne linearmente indipendenti di A .

$$\min -x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases} \quad Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4$

~~Una base di A~~ B è una base di A se formata da 2 colonne linearmente indipendenti.

Se annullo $n-m$ variabili in modo tale che le colonne associate alle variabili non nulle siano linearmente indipendenti, posso calcolare in unico il valore delle variabili non nulle.

$$Ax = b$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Hp

$$m \leq n$$

$$\text{rk}(A) = m$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$$

Se annullo $n-m$ variabili in modo tale che le colonne della di A associate alle variabili non nulle sono lin.

indipendenti*, allora il sistema $Ax = b$ ammette una unica soluzione.

* tali colonne formano una base B della matrice A

$$B \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$$

Sia B una base delle matrice A

$$B = \begin{pmatrix} A_{\beta(1)} & A_{\beta(2)} & \dots & A_{\beta(m)} \\ x_{\beta(1)} & x_{\beta(2)} & \dots & x_{\beta(m)} \end{pmatrix}$$

m colonne di A lin. ind.

$\hookrightarrow$ variabili in base

$\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \setminus \{x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, \dots, x_{\beta(m)}\}$ variabili fuori base
 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \setminus \{A_{\beta(1)}, A_{\beta(2)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$ colonne fuori base
 $A_{\beta(1)}, A_{\beta(2)}, \dots, A_{\beta(m)}$ colonne in base

$$Ax = b$$

$$B \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

(151)

B : una base di A

$$A = (A_1 A_2 \dots A_m) = \left(\begin{array}{c|c} B & F \end{array} \right)$$

variabili
in base

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \\ \text{Restanti} \\ n-m \\ \text{variabili} \\ \text{fuori base} \end{pmatrix}$$

$$x_B \in \mathbb{R}^m$$

$$x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$F \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$$

variabili fuori
base

$$Ax = b \Rightarrow (B | F) \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Bx_B + Fx_F = b$$

$$B \text{ base di } A \Rightarrow \det(B) \neq 0 \Rightarrow B \text{ è invertibile}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^{(e)}$$

$$\otimes B^{-1}(Bx_B + Fx_F) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b \Rightarrow x_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B = -B^{-1}Fx_F + B^{-1}b$$

$$X_B = -B^{-1}F X_F + B^{-1}b \quad (*)$$

152

Le annulla ~~le variabili~~ le $n-m$ variabili
fuori base $\Rightarrow$ determiniamo in modo
unico le variabili in base

$$X_F = 0$$

(*)

$\Rightarrow$

$$X_B = B^{-1}b$$

$$Ax = b$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

153

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

$$m \times n$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{une base} \\ B & 2 \times 2 \end{matrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{une base } B \text{ de } A$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-24)} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x_B + B^{-1} F x_F = B^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$B^{-1}b$

$B^{-1}b$

Se annulla $x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ (154)

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è sol. di Base ammissibile

SOLUZIONE DI BASE

Dato il Poliedro
 $P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\forall p \ m \leq n$
 $\text{rk}(A) = m$

Sia B una base della matrice A ($B \in \mathbb{R}^{m \times m}$),
 la soluzione in cui

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si dice soluzione di Base relativa alla
 base B

Tale soluzione per definizione soddisfa
 il sistema $Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Fx_F = b$

Es. $x_3 = x_4 = 0$

$Ax = b$

(155)

$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = b$

$\Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{A_2} x_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} (*)$

$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ è una base di A perché A_1 e A_2 sono lin. indipendenti.

Il sistema

$\Rightarrow (*)$ ammette una unica soluzione

$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad (x_3 = x_4 = 0)$

Soluzioni di Base ammissibile (156)

Una soluzione di base si dice ammissibile quando

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B^{-1}b \geq 0} \quad \left(\in P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \right)$$

—————/

Soluzioni di Base degeneri

Se $B^{-1}b$ ha qualche componente nulla

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} \quad \text{è una soluzione di base} \\ \text{degenera}$$

Problemi di PL in forma standard (157)

$$\min c^T x$$

$$P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Teorema

Un punto $x \in P$ è un vertice (o punto estremo)

$\Leftrightarrow x$ è una Soluzione di Base ammissibile.

DIM.

$\Rightarrow$ Hp x è sol. di base ammissibile.

$\Leftarrow$ Th x è un vertice

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$

$$x_B \in \mathbb{R}^m$$

$$x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Sic $k \leq m$ il # di componenti $\neq 0$ di $x_B = B^{-1}b$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ \vdots \\ x_k > 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{matrix}} \right\} x_B \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} x_F \end{matrix}$$

Per escludere supponiamo che x non sia un vertice $\Rightarrow \exists y, z \in P$ tali che
 $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ con $\lambda \in (0, 1)$

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \quad \text{con } \lambda \in \{0,1\} \quad (158)$$

$$y, z \in P \Rightarrow \begin{cases} Ay = b \\ y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} Az = b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \quad \lambda \in (0,1)$$

$\lambda \geq 0$ $1-\lambda \geq 0$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad || \quad A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$$

$$Ay = b \Rightarrow \textcircled{1} A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_k y_k = b$$

$$Az = b \Rightarrow \textcircled{2} A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_k z_k = b$$

Per ipotesi $\lambda \in (0,1)$ $y \neq z$ altrimenti x non può essere espresso come comb. conv. stretta

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow A_1 \underbrace{(y_1 - z_1)}_{\alpha_1} + A_2 \underbrace{(y_2 - z_2)}_{\alpha_2} + \dots + A_k \underbrace{(y_k - z_k)}_{\alpha_k} = 0$$

Poiché $y \neq z$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ non sono tutti nulli

$$\Rightarrow \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0$$

$\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_k$ l.o. linearmente dipendenti. ASSURDO PERCHÉ COLONNE DI UNA BASI!!

Hp x è un vertice di P

(159)

$\Rightarrow$ Th x è soluzione di Base ammissibile

$Ax=b$ m equazioni n variabili

Annullando $m-m$ variabili, e meno di condizioni lineari, si trova ~~invece~~ univoco le altre m variabili.

$\Rightarrow$ un vertice può avere al max m componenti $\neq 0$. Supponiamo quindi che x abbia $K \leq m$ componenti $\neq 0$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_K > 0$$

con $K \leq m$

Per esempio supponiamo che x non lie
Sl. di base amm.

$\Rightarrow$ le colonne $A_1, A_2, \dots, A_K$ associate
a $x_1, x_2, \dots, x_K$ rispettivamente devono essere
lin. dipendenti $\Rightarrow$

$$\rightarrow \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_K A_K = 0$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ non tutti nulli

Poiché x è un vertice $\Rightarrow x \in P$

(160)

$$\Rightarrow Ax = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = b$$

$$\varepsilon x \textcircled{2} A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \dots + A_k \alpha_k = 0$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\textcircled{1} + \varepsilon \textcircled{2} \Rightarrow A_1 \overbrace{(x_1 + \varepsilon \alpha_1)}^{y_1} + A_2 \overbrace{(x_2 + \varepsilon \alpha_2)}^{y_2} + \dots + A_k \overbrace{(x_k + \varepsilon \alpha_k)}^{y_k} = b$$

$$\textcircled{1} - \varepsilon \textcircled{2} \Rightarrow A_1 \underbrace{(x_1 - \varepsilon \alpha_1)}_{z_1} + A_2 \underbrace{(x_2 - \varepsilon \alpha_2)}_{z_2} + \dots + A_k \underbrace{(x_k - \varepsilon \alpha_k)}_{z_k} = b$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Ay = b & \left(\begin{smallmatrix} \text{vedi} \\ \textcircled{1} + \varepsilon \textcircled{2} \end{smallmatrix} \right) \\ Az = b & \left(\begin{smallmatrix} \text{vedi} \\ \textcircled{1} - \varepsilon \textcircled{2} \end{smallmatrix} \right) \end{cases}$$

Se scelgo ε sufficientemente piccolo

$$\Rightarrow y_1, \dots, y_k \geq 0 \quad ; \quad z_1, z_2, \dots, z_k \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y \geq 0 \quad z \geq 0} \Rightarrow y, z \in P$$

$$x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \quad \parallel \text{NOTA!} \Rightarrow$$

x può essere espresso come combinazione convessa
 stretta di $z, y \in P$ ASSURDO!!

Poiché x è un vertice per il

PROBLEMI DI ALLOCAZIONE DI RISORSE

Esempio

Un'azienda produce vernici di due tipi V_1, V_2 per la produzione utilizzata dei preparati in polvere P_1, P_2, P_3 .

Le seguenti matrici di risorse sono o produzione

	V_1	V_2
P_1	1	1
P_2	2	2
P_3	—	1

disponibilità
in mezzogiorno
dei preparati

	P_1	P_2	P_3
Disp. (kg)	750	1000	400

profitto per $V_1 = 7$ Euro/litro

// " $V_2 = 10$ Euro/litro

Problema: determinare le quantità di V_1 e V_2 da produrre in modo da massimizzare il profitto.

X_{V_1} = litri di vernice V_1 da produrre (l)

X_{V_2} = litri di vernice V_2 da produrre (l)

$$\max (7 \cdot X_{V_1} + 10 \cdot X_{V_2}) \rightarrow \text{Profitto Totale}$$

$$X_{V_1} \geq 0$$

$$X_{V_2} \geq 0$$

$P_1)$ $X_{V_1} + X_{V_2} \leq 750$
Consumo di
Preferato P_1
(kg)

$P_2)$ $2X_{V_1} + 2X_{V_2} \leq 1000$
Consumo di
Preferato P_2
(kg)

$P_3)$ $X_{V_2} \leq 400$
Consumo
di preferato
 P_3 (kg)