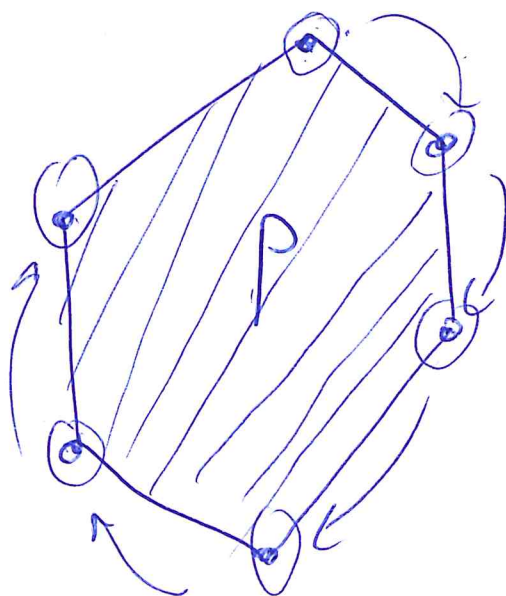


$$\min c^T x$$

$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(162)



$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{A_1}{2} & \overset{A_2}{1} & \overset{A_3}{2} & \overset{A_4}{3} & \overset{A_5}{-2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

x è vertice $\Leftrightarrow x$ è soluzione di base ammissibile

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dove } B \text{ è una base ammissibile di } A$$

$B^{-1}b \geq 0$

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 5} \quad m=2 \quad n=5 \Rightarrow \text{una base } B \text{ di } A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

cerchiamo le $m=2$ colonne di A linearmente indipendenti.
Trovare tutti i vertici di P

$$B = \begin{pmatrix} \underset{x_1}{A_1} & \underset{x_2}{A_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A_1, A_2 lin. ind. $\Rightarrow$
 B è una base di A

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_B = B^{-1}b$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} < 0!!$$

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non è soluzione
di base ammissibile
ovvero non è un
vertice di P

$\Rightarrow B = (A_1 A_2)$ non è
una base ammissibile

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A_1 e A_3 lin. ind.
 $\Rightarrow B$ è una base di A

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_F = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} = x_B$$

$$B^{-1}b \geq 0$$

$\Rightarrow B$ è una base Ammissibile

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è soluzione
ammissibile
di base ovvero
un vertice di P

(B è degenera)

$$B = (A_1 \ A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1 e A_4 são lin. dep. (164)
 $\Rightarrow B$ não é base de A

$$B = (A_1 \ A_5) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_1 e A_5 lin. ind.
 $\Rightarrow B$ é uma base de A

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad ; \quad x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_5 = 4 \\ x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$$B^{-1}b \geq 0$$

$\Rightarrow B$ é base admissível

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é um vértice de } P$$

$$B = (A_2 \ A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

B é uma base de A

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad ; \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$B^{-1}b$$

$\Rightarrow B$ é uma base admissível $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um vértice (B é ótima)

$$B = (A_2 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 \text{ e } A_4 \text{ lin. ind.} \quad (16)$$

$\Rightarrow B$ é base de A

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad ; \quad X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2 \\ -x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

B não é base eliminável (não é vertice)

$$B = (A_2 \ A_5) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 \text{ e } A_5 \text{ lin. ind.} \Rightarrow B \text{ base de } A$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_5 = 4 \\ -x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow -x_5 = 6 \Rightarrow x_5 = -6 < 0$$

$\Rightarrow x_2 = -8 \Rightarrow B$ não é base eliminável (não é vertice)

$$B = (A_3 \ A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B \text{ é uma base de } A$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b; \quad X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 + 3x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B è una base ammissibile

(166)

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x} \text{ un vertice di } P$$

B è base degenera perché $\boxed{x_4 = 0} \Rightarrow x$

$\bar{x}$ soluzione di base ammissibile degenera

$$B = (A_3 \ A_5) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 \ A_5 \text{ lin. ind.}$$

B è base di A

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - 2x_5 = 4 \\ x_3 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ \underbrace{B^{-1}b}_{\geq 0} \end{matrix}$$

$\Rightarrow B$ è una base ammissibile

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x} \text{ un vertice di } P \text{ (trovato per la quarta volta!!)}$$

B è base degenera ($x_5 = 0$) e x è sol. di base degenera

$$B = (A_4 \ A_5) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B base di A

(167)

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} 3x_4 - 2x_5 = 4 \Rightarrow x_4 = \frac{8}{3} \geq 0 \\ x_5 = 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow B$$

$\bar{x}$ è una base ammissibile

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ \dots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ \dots \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}$ è un vertice di P

SOSTANZE m $J=1, \dots, m$

ELEMENTI UTILI m $i=1, \dots, m$

q_{ij} le quantità di elemento utile i presente nelle sostanze J (in una unità di sostanza)

b_i quantità minime di elemento utile i che dovrà essere presente nella miscela di sostanze

c_J il costo unitario della sostanza J

PROBLEMA: determinare le quantità di sostanze nelle miscela in modo tale che ogni elemento utile sia presente in quantità pari o almeno b_i e che il costo complessivo della miscela sia minimo.

X_J = quantità di sostanza J interita nella miscela

$$\min \sum_{J=1}^m c_J X_J$$

quantità di elemento utile i presente nella miscela

$$\sum_{J=1}^m$$

$$q_{ij} \cdot X_J \geq b_i$$

quantità di elemento utile i che ho utilizzato nelle miscela X_J unità di sostanza J

$$X_J \geq 0 \quad J=1, \dots, m$$

UN ALGORITMO PER RISOLVERE PROBLEMI DI PL (169)

$$\begin{array}{ll} \min c^T x & \text{FORMA STANDARD} \\ P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} & A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \leq n \\ & \operatorname{rk}(A) = m \end{array}$$

METODO DEL SIMPLEXO

IDEA: Enumerare tutti i vertici del Poliedro P (ovvero le soluzioni ammissibili di base ammissibili di A) ed individuare la soluzione di base ammissibile (ovvero il vertice) che minimizza la funzione obiettivo $c^T x$.

Enumerare tutte le basi B di A

basi B : è una collezione di m colonne linearmente indipendenti di A .

$\Rightarrow$ enumerare tutte le "collezioni" di m colonne di A

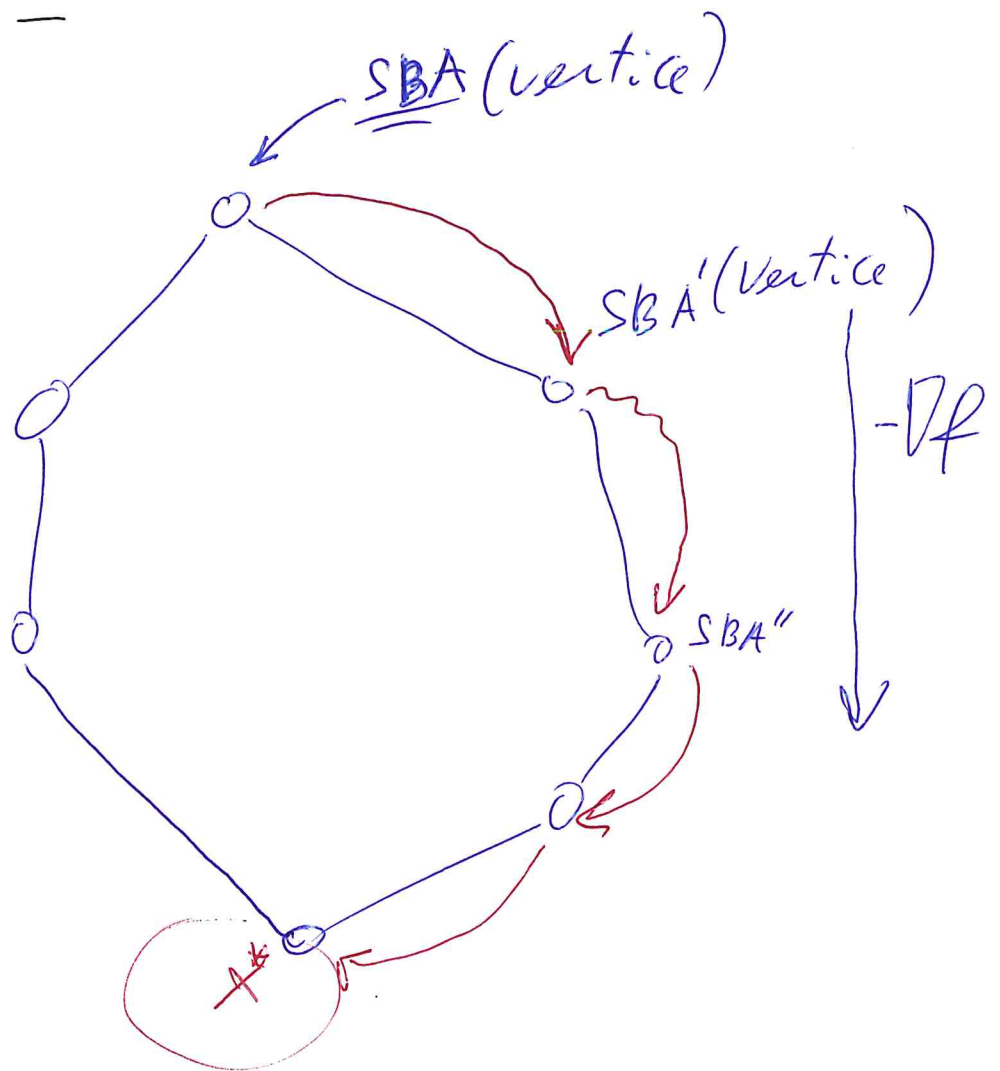
$$\Rightarrow \binom{n}{m} \overset{\text{\# massimo di basi } B \text{ di } A}{=} \frac{n!}{m! (n-m)!} \gg 0!!$$

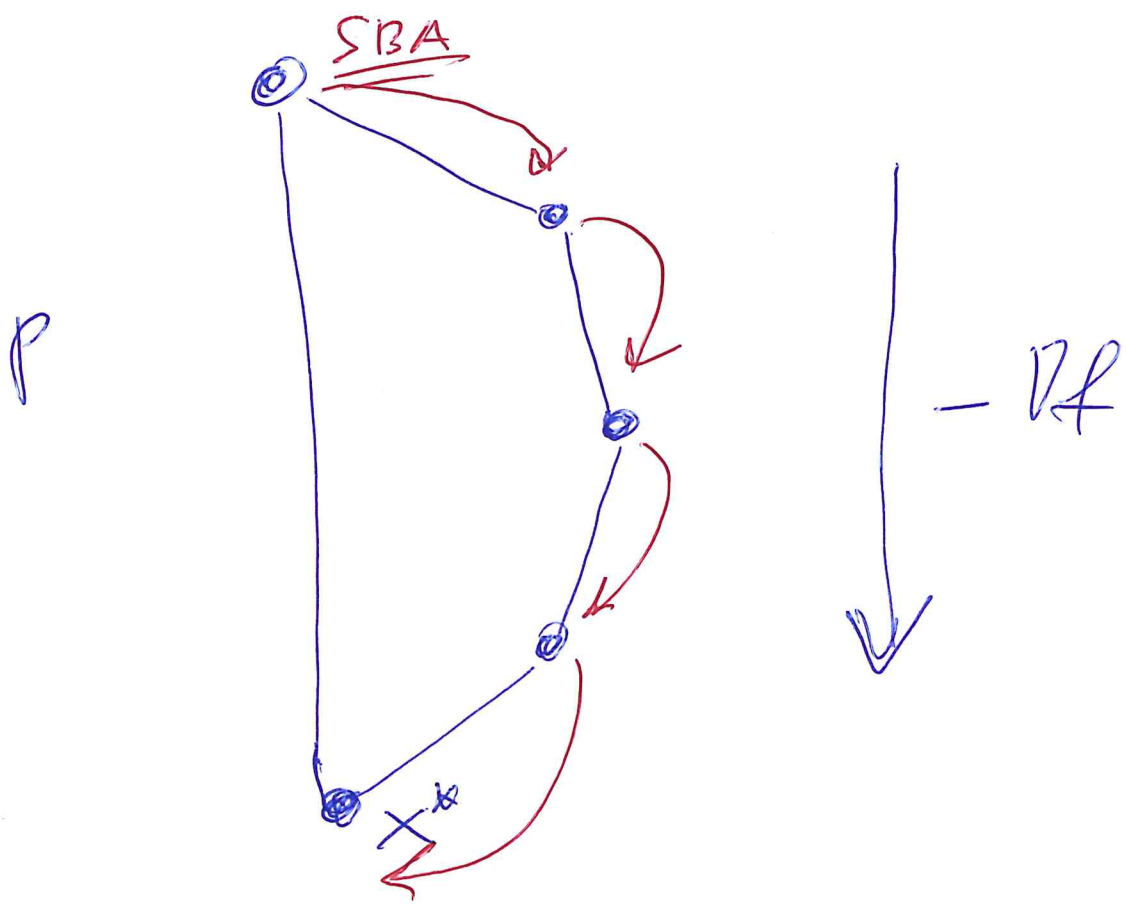
Componenti migliorative:

(170)

① Test di OTTIMITÀ: permette di controllare se una soluzione di base ammissibile (Vertice) è ottimale.

② Un modo per passare da una soluzione ~~ammissibile~~ di base ammissibile non ottimale ad una "vicina" con valore della funzione obiettivo $\underline{C^T X}$ non peggiore (meggiore) della precedente.





Nel caso peggiore il metodo del Simplex
deve visitare tutti i vertici (SBA) del
 poliedro e quindi terminare dopo
 (al max) $\binom{n}{m}$ iterazioni -

TEST DI OTTIMALITÀ

(172)

$$\min c^T x$$

$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Sia $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una base
ammissibile di A

$\Rightarrow$ le soluzioni di base ammissibili
essenziali o B $\bar{x}$ (vertice di P)

$$x_{\#} = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (B^{-1}b \geq 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} B & F \end{pmatrix}$$

$x_B \quad x_F$

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ \vdots \\ c_F \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \min c_B^T x_B + c_F^T x_F & \quad (c^T x) \\ Bx_B + Fx_F = b & \quad (Ax = b) \\ x_B \geq 0 \quad x_F \geq 0 & \end{aligned}$$

$$B \text{ è una base} \Rightarrow \exists \underline{B^{-1}}$$

$$Bx_B + Fx_F = b \Rightarrow B^{-1}Bx_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

$\Rightarrow$ dato una base B di A , posso esprimere x_B
in funzione di x_F

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Fx_F) + c_F^T x_F = \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) x_F \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ costante $\quad \bar{c}_F^T \sim$ vettore dei costi ridotti associati alle variabili

B è una base ammissibile $\Rightarrow$ SBA $x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C^T x = C_B^T x_B + C_F^T x_F = C_B^T B^{-1}b + 0 = C_B^T B^{-1}b \quad (173)$$

TEST OTTIMALITÀ

Teorema

Sia B una base ammissibile di A .

Se il vettore dei costi ridotti $\boxed{\bar{C}_F^T = C_F^T - C_B^T B^{-1}F} \geq 0$

$\Rightarrow$ la soluzione ammissibile di base

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ è soluzione ottimale per il}$$

problema di PL (in forma standard).

DIM.

$$\forall x \in P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow C^T x = C_B^T x_B + C_F^T x_F =$$

$$= C_B^T B^{-1}b + \underbrace{(C_F^T - C_B^T B^{-1}F)}_{\substack{V_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0}} x_F$$

$$\Rightarrow C^T x \geq C_B^T B^{-1}b$$

Valore delle f. ob.
nel punto $x \in P$

Valore delle
f. ob. nelle SBA
 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$



B bene ammissibile di A

(174)

$$SBA \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\text{non ottimo} \Rightarrow \bar{c}_F^T = (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) \begin{pmatrix} \text{non tutti} \\ \geq 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

$$c^T x = c_B^T B^{-1}b + \bar{c}_F^T x_F$$

problema in
forma canonica
rispetto a B

Sia $\bar{c}_h$ il costo ridotto della variabile fuori base

x_h e sia $\bar{c}_h < 0$

Idea: aumentare x_h
il più possibile mantenendo
le altre variabili fuori base
a 0

$$x_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \dots & A_{B(m)} \\ x_{B(1)} & x_{B(2)} & \dots & x_{B(m)} \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} \geq 0$$



$$B^{-1}A_h = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h \quad \Downarrow$$

175

$$\begin{cases} X_{B(1)} = \bar{b}_1 - \bar{e}_{1h} x_h \geq 0 \\ X_{B(2)} = \bar{b}_2 - \bar{e}_{2h} x_h \geq 0 \\ \vdots \\ X_{B(m)} = \bar{b}_m - \bar{e}_{mh} x_h \geq 0 \end{cases}$$

Aumento x_h
il più possibile
in modo che
le variabili
in base rimangano
non negative

$$A) X_{P(i)} = \bar{b}_i - \bar{e}_{ih} x_h \geq 0$$

Due casi:

$$(1) \bar{e}_{ih} > 0 \Rightarrow x_h \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{e}_{ih}} \quad \pi_i^0$$

$$(2) \bar{e}_{ih} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{\bar{b}_i}_{\geq 0} - \underbrace{\bar{e}_{ih}}_{\leq 0} \underbrace{x_h}_{\geq 0} \geq 0 \quad \left\| \begin{array}{l} (A) \text{ è sempre} \\ \text{valida} \\ \text{per } \forall x_h \geq 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ il valore massimo di x_h :

$$\frac{\bar{b}_t}{\bar{e}_{th}} = \theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{e}_{ih}}, \forall i \text{ tale che } \bar{e}_{ih} > 0 \right\} \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\text{Aumento } x_h \text{ da } 0 \longrightarrow \theta = \frac{\bar{b}_t}{\bar{e}_{th}}$$

$$\Rightarrow C^T X = C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_F^T X_F = C_B^T B^{-1} b + \underbrace{\bar{C}_h}_{\geq 0} x_h = C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_h \cdot \theta$$

$\Rightarrow$ la f. ob. decresce del valore $\bar{C}_h \cdot \theta$

$$\begin{cases} X_{B(t)} = \bar{b}_t - \bar{e}_{th} x_h \\ X_h = \theta = \frac{\bar{b}_t}{\bar{e}_{th}} \end{cases} \Rightarrow X_{B(t)} = 0$$

$\Rightarrow x_h$ "entra in base" con il valore $\theta = \frac{\bar{b}_t}{\bar{c}_{th}}$

$x_{p(t)}$ "esce" dalla base con il valore θ (176)

ovvero

"entra" in base le colonne A_h

"esce" dalla base le " $A_{p(t)}$

$$B = \begin{pmatrix} x_{p(1)} & x_{p(2)} & x_{p(t)} & x_{p(m)} \\ A_{p(1)} & A_{p(2)} & A_{p(t)} & A_{p(m)} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \dots & A_h & \dots \end{pmatrix} = A \setminus B$$

x_h

otteniamo una nuova matrice $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\tilde{B} = (A_{p(1)} A_{p(2)} \dots A_h \dots A_{p(m)})$$

$\tilde{B}$ è una nuova base di A ? SI

$$A_h = \begin{pmatrix} \bar{c}_{1h} \\ \bar{c}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{c}_{mh} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{e}_{1h} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \bar{e}_{2h} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{th} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{mh} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(177)

columna in posizione t

$$\det(B^{-1} \tilde{B}) = (-1)^{t+h} \cdot \bar{e}_{th} \neq 0$$

$$B^{-1} A_h = \begin{pmatrix} \bar{e}_{1h} \\ \bar{e}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{e}_{mh} \end{pmatrix}$$

Teorema di Binet

$$\det(C \cdot D) = \det(C) \cdot \det(D)$$

$$\Rightarrow \det(B^{-1} \tilde{B}) = \det(B^{-1}) \cdot \det(\tilde{B}) \neq 0$$

Perché B
è una base

$\begin{bmatrix} \times \\ 0 \end{bmatrix} !!$

$$\det(\tilde{B}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{B} \text{ è una base di } A !!$$

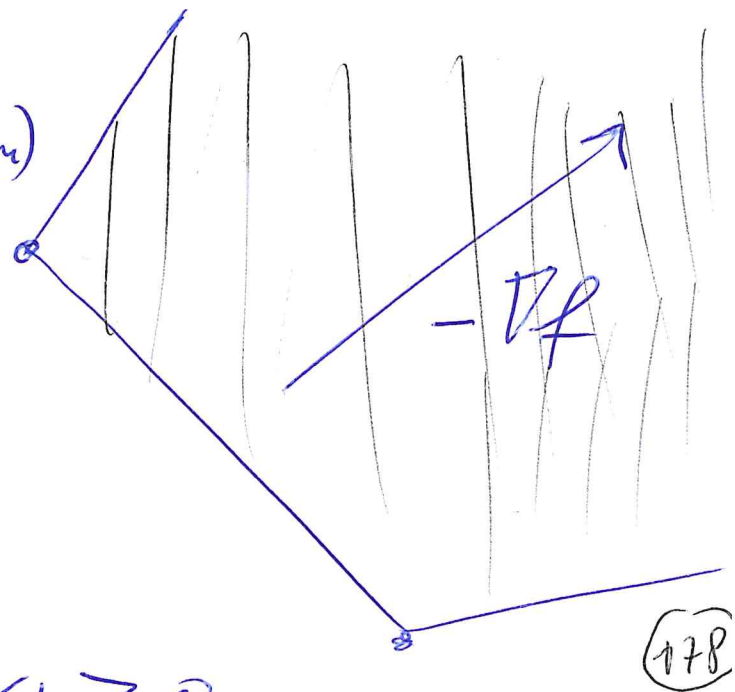
OPERAZIONE DI PIVOT

Entra nelle basi le colonne A_h (x_h)
esce dalle basi " " $A_{p(t)}$ ($x_{p(t)}$)

$$\text{Se } \bar{e}_i h \leq 0 \quad \forall i=1, \dots, p(m)$$

altrimenti

$$B^{-1}A_h = \begin{pmatrix} \bar{e}_{1h} \\ \bar{e}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{e}_{mh} \end{pmatrix} \leq 0$$



$$\Rightarrow X_{p(i)} = \bar{b}_i - \bar{e}_{ih} x_h \geq 0$$

$$\forall x_h \geq 0$$

$$\text{Per } i=1, \dots, m$$

$\Rightarrow x_h$ può crescere all'infinito rimanendo nella regione Ammissibile (Poliedro)

$$\Rightarrow C^T x \longrightarrow -\infty$$

Problema
illimitato

$$\min -x_1 - x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(179)

Consideriamo la base B

$$B = (A_3 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = (A_1 \ A_2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0 \\ x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F \\ c^T x = c_B^T B^{-1}b + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) x_F \end{cases}$$

problema in
forma canonica
rispetto la base B

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

costi ridotti
delle variabili
fuori base

$$c^T x = -x_1 - x_2 = \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_0 + \underbrace{\bar{c}_1}_{-1} x_1 + \underbrace{\bar{c}_2}_{-1} x_2$$

$$\bar{c}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow \text{SBA non \u00e9 ottimale}$$

$$\hookrightarrow c^T x = 0 \text{ f. ob. in SBA}$$

$$\begin{cases} C^T x = -x_1 - x_2 \\ \rightarrow x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ \rightarrow x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

180

$\Rightarrow$ Se aumento una variabile fuori base con costo ridotto negativo la f. ob. decrece -

Aumentiamo x_1 e manteniamo $x_2 = 0$

Massimo aumento di x_1 :

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \geq 0 \Rightarrow 24 - 6x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{il max aumento di } x_1 \text{ è } 2$$

$$\text{quando } x_1 = 2 \ (x_2 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 12 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Soluzione ammissibile con valore della f. ob. $= -2 < 0$ $\rightarrow$ valore della SBA di partenza

(A₁)

x_1 è entrata in base con valore 2

x_4 è uscita dalla base (con valore nullo)

(A₄)

OPERAZIONE
DI PIVOT $\leftarrow$

Nuove base

$$B = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(181)

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = B^{-1}b \geq 0!$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \longrightarrow x_3 = 24 - 6\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - 4x_2 = \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} C^T x &= -x_1 - x_2 = -\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_2 = \\ &= -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C^T x = -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{\substack{\text{il valore} \\ \text{della f. ob.} \\ \text{nella nuova} \\ \text{sol. base}}} + \underbrace{\bar{c}_2 x_2 + \bar{c}_3 x_4}_{\substack{\text{costi rispetto} \\ \text{variabili} \\ \text{fuori base}}} \end{cases}$$

→ Problema in forma canonica rispetto alla nuova base $B = (A_1, A_3)$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= -\frac{5}{3} < 0!! \Rightarrow \text{SBA non \u00e8 ottimale} \\ \bar{c}_3 &= \frac{1}{3} \geq 0 \end{aligned}$$