

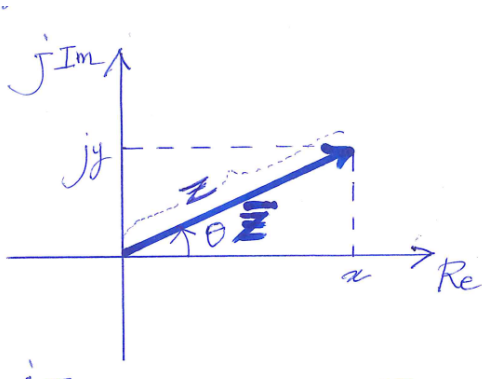
- **Richiami sui numeri complessi**
- Consideriamo il numero complesso espresso in *forma algebrica*

$$\bar{z} = x + jy$$

parte reale parte imag.

con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \text{Re}[\bar{z}]$ parte reale, $y = \text{Im}[\bar{z}]$ parte immaginaria, e j unita' immaginaria ($j^2 = -1$) i è per la corrente

- $\bar{z}$ può essere visto come un punto (o vettore) del piano complesso



• $\bar{z}$ può essere individuato tramite il suo modulo $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il suo argomento θ ; gli argomenti θ si misurano a partire dall'asse x , a cui si attribuisce $\theta = 0$ e ruotando in senso *positivo antiorario*

• il verso positivo antiorario è detto anche verso degli anticipi; il verso negativo orario è detto verso dei ritardi

• se $\bar{z} \neq 0$ si ha *allora posso determinare un angolo*

$$\cos \theta = \frac{\textcircled{x} \text{ parte reale}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{\textcircled{y} \text{ parte imag.}}{\sqrt{x^2 + y^2} \text{ modulo}}$$

• se $x \neq 0$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

• inversamente

$$x = Z \cos \theta; \quad y = Z \sin \theta$$

formule di Eulero

- *forma trigonometrica*

$$\bar{z} = Z(\cos \theta + j \sin \theta)$$

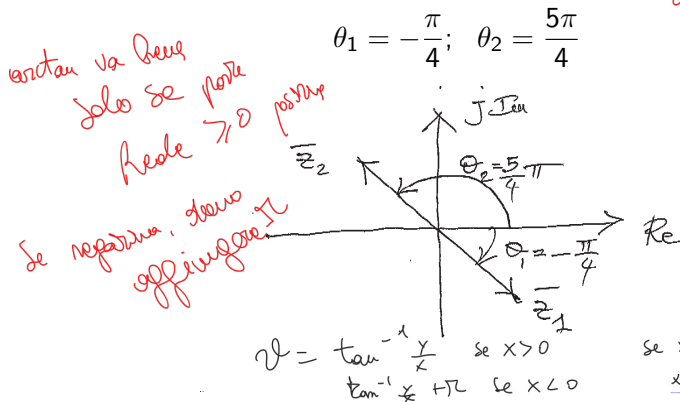
- dato che (identita' di Eulero) $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ otteniamo la *forma esponenziale*

$$\bar{z} = Ze^{j\theta}$$

• E' necessario fare attenzione al calcolo degli argomenti quando $x = \text{Re}[\bar{z}] < 0$!!! Proviamo a scrivere in forma esponenziale i due numeri complessi $\bar{z}_1 = 1 - j$, $\bar{z}_2 = -1 + j$. Si ha $Z_1 = Z_2 = \sqrt{2}$; inoltre

$$\theta_1 = \arctan(-1) = -\pi/4; \quad \theta_2 = \arctan(-1) = -\pi/4!!!!$$

siamo cosi' in assurdo; per non sbagliare conviene disegnare i numeri nel piano complesso; si vede allora che



arctan funziona solo se sono nel 1° e 4° quadrante

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

nel 2° e 3° va aggiunto

se $x = 0, y > 0, \frac{\pi}{2}$

$x = 0, y < 0, -\frac{\pi}{2}$

Funzioni sinusoidali (dominio del tempo)

- Per senoide si intende una funzione del tipo

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{variabile indep e il tempo}$$

dove $E_M \geq 0$ e' l'ampiezza; $\omega \geq 0$ e' la pulsazione (in rad/sec), φ e' la fase (in radianti); la frequenza (in Hz) e' data da

$$f = \frac{1}{T}$$

e

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

dove T (in sec) e' il periodo della senoide

Rappresentazione di sinusoidi con fasori (dominio di fasori)

- Alla sinusoide $e(t)$ si associa il numero complesso in forma esponenziale

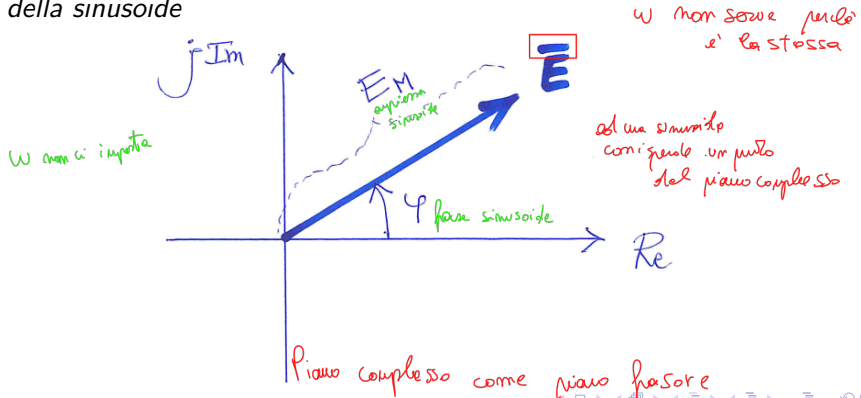
$$\bar{E} = E_M e^{j\varphi}$$

non tiene conto di ω

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modulo } E_M = \text{ampiezza sinusoide} \\ \varphi = \text{fase sinusoide} \end{array} \right.$$

detto fasore associato a $e(t)$

- notare che il modulo del fasore coincide con l'ampiezza della sinusoide; l'argomento del fasore coincide con la fase della sinusoide; il fasore non contiene l'informazione sulla pulsazione della sinusoide



sinusoidi e fasori sono in corrispondenza biunivoca

- ad ogni sinusoide corrisponde il fasore $\bar{E}$ e quindi un punto del piano complesso inteso come piano dei fasori
- viceversa, assegnato $\bar{E}$ e ω , vi corrisponde una unica sinusoide a pulsazione ω che possiamo ottenere tramite la formula

$$e(t) = \text{Re} [\bar{E} e^{j\omega t}]$$

fasore

Formula antitrasformata fasori

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} \text{Re} [\bar{E} e^{j\omega t}] &= \text{Re} [E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \text{Re} [E_M e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= E_M \cos(\omega t + \varphi) = e(t) \end{aligned}$$

- le due relazioni ottenute sono una coppia trasformata e antitrasformata (tecnicamente e' detta trasformata di Steinmetz)

- interpretazione geometrica; l'operatore

$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}$$

rappresenta una rotazione di un angolo ωt in senso positivo (antiorario); infatti

$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} \underbrace{e^{j\omega t}} = E_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Forma: vettore fisso

- allora

$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}$$

e' un vettore di modulo costante E_M che ruota intorno all'origine con velocita' angolare ω in senso positivo antiorario (vettore rotante)

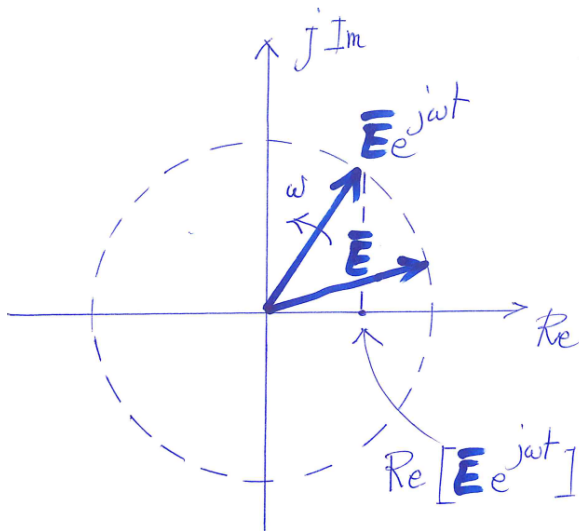
- infine, l'operatore

$$\text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}]$$

e' l'operatore di proiezione sull'asse reale

$e^{j\omega t}$

vettore rotante
che gira attorno all'
origine con velocita'
angolare ω a
modulo
costante



- Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 4 \cos(3t)$ e interpretare graficamente

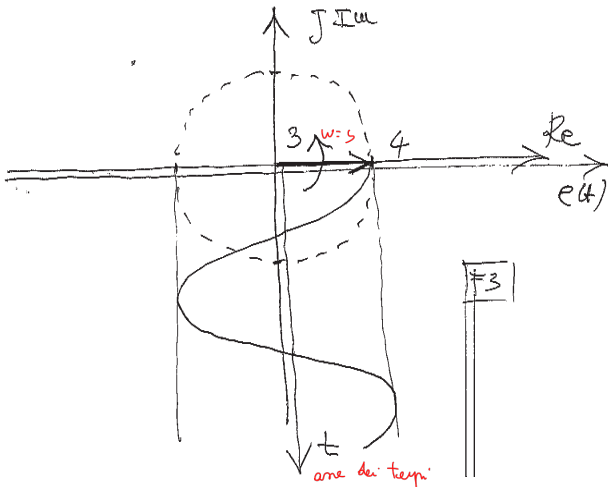
- si ha $E_M = 4$ e $\varphi = 0$, quindi $\bar{E} = 4e^{j0} = 4$

$$E_n = 3 \quad \varphi_i = 0$$

$$\bar{E} = 3e^{j0} = 3$$

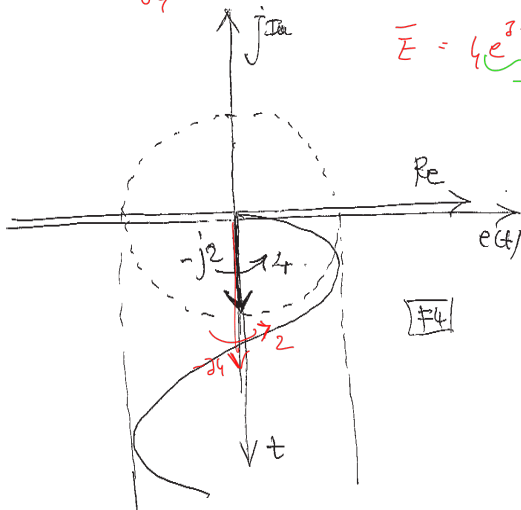
$$3 \cos(3t)$$

fasore corrispondente?



• Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 2 \sin(4t)$ e interpretare graficamente

• si ha $2 \sin(4t) = 2 \cos(4t - \pi/2)$, quindi $E_M = 2$ e $\varphi = -\pi/2$;
 allora $\bar{E} = 2e^{-j\pi/2} = -j2$ $\bar{E}_M = 4 \quad \varphi = -\pi/2$



$$\bar{E} = 4e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j4$$

Calcolo Fasoriale

- Unicità': Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω ; si ha $e_1(t) = e_2(t)$ per ogni t se e solo se $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$ *Stessa pulsazione*
- Linearità': Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω e $a, b \in \mathbb{R}$; allora $ae_1(t) + be_2(t)$ *la derivata* è una sinusoide a pulsazione ω con fasore $a\bar{\mathbf{E}}_1 + b\bar{\mathbf{E}}_2$ *combinazione lineare sinusoidale* *parimenti si combinano i fasori associati*
- Regola di derivazione: sia $e(t)$ una sinusoide a pulsazione ω con fasore $\bar{\mathbf{E}}$; allora $de(t)/dt$ è ancora una sinusoide a pulsazione ω con fasore $j\omega\bar{\mathbf{E}}$; quindi

$$\frac{de(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\bar{\mathbf{E}}$$

eq. diff. $\Rightarrow$ eq. algebrica

- questa importante regola implica che una operazione differenziale d/dt nel dominio del tempo si trasforma in una operazione algebrica $j\omega \times$ nel dominio di fasori; la regola è analoga a quella valida per la trasformata di Fourier

- verifica

$$\begin{aligned}
 \frac{de(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \{ \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \} \\
 &= \text{Re} \left[\frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) \right] \\
 &= \text{Re} [j\omega \bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \rightarrow \text{sinus. a pulsos. omega}
 \end{aligned}$$

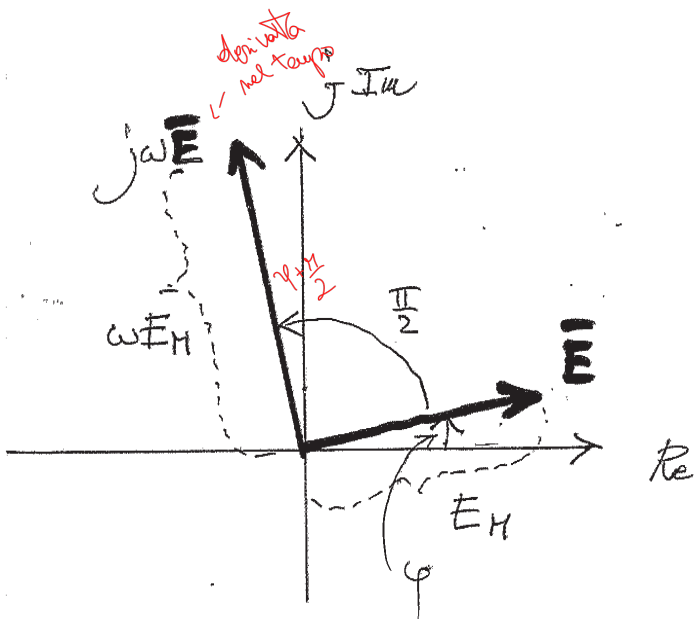
- graficamente

$$j\omega \bar{\mathbf{E}} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

↙ dove sta il fasore?

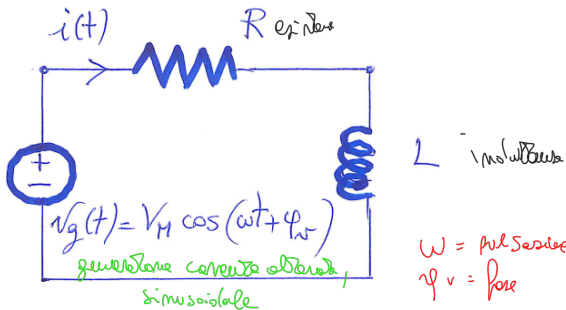
rotazione di $\frac{\pi}{2}$

quindi il fasore $j\omega \bar{\mathbf{E}}$ di $de(t)/dt$ ha modulo pari a ωE_M e si ottiene ruotando in senso positivo antiorario di un angolo pari a $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ di $e(t)$



Analisi in regime sinusoidale

- Consideriamo il circuito RL con generatore ideale di tensione sinusoidale $v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$. Vogliamo trovare $i(t)$ per $t \geq 0$ assumendo $i(0) = i_0$ *per trovare univocamente i , devo sapere la condiz. iniziale*



applicando KV

- Attenzione* $\hookrightarrow$ KV: $v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$, quindi il circuito soddisfa alla equazione differenziale affine del primo ordine

$$\underbrace{L \frac{di}{dt}}_{v_L} + \underbrace{Ri}_{v_R} = \underbrace{V_M \cos(\omega t + \varphi_v)}_{v_g}$$

è un problema di Cauchy.

ha soluzione unica per $t > 0$

con $i(0) = i_0$

- si ha

$$i_{omog} = \text{spurgo il generatore, ottengo } L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$i(t) = i_{omog}(t) + i_{part.affine}(t) = \underbrace{Ke^{-t/\tau}}_{\text{Costante di Tempo}} + \underbrace{i_{part.affine}(t)}_{\text{Solus. dell'equazione associata all'affine}}$$

con $K \in \mathbb{R}$ e $\tau = L/R$ (costante di tempo)

dipende anche dal tipo di ECCITAZIONE presente nel circuito

- verifichiamo a breve che possiamo scegliere

$$i_{part.affine}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$\omega = \omega_{\text{generatore}}$

quindi

$$i(t) = \underbrace{Ke^{-t/\tau}}_{\text{Risposta completa}} + \underbrace{I_M \cos(\omega t + \varphi_i)}_{\substack{\text{parte transitoria che si somma} \\ \text{sol. omogenea associata}}}$$

$\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ per $t \gg \tau$

corrente sinusoidale alla stessa pulsazione del generatore

• il primo termine (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$) e' detto parte transitoria, mentre il secondo e' detto *risposta in regime permanente sinusoidale*; in pratica, per $t \geq 4\tau$ si ha

$$i(t) \simeq I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Regime sinusoidale
stessa ω

e quindi, esaurito il transitorio, la *corrente nel circuito e' sinusoidale alla stessa pulsazione ω del generatore*

CIRCUITO
RAGGIUNGE UN
REGIME SINUSOIDALE

- allora

coincide con la stessa angaria e
stessa fase

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = \underbrace{Z}_{\text{impedenza}} I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

da cui

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Posso prendere
un integrale
particolare

- *soluzione nel dominio del tempo e' complicata!!!*
- introduciamo *metodo dei fasori*, molto efficiente per trovare le correnti e tensioni in regime sinusoidale; attenzione, vedremo che il metodo dei fasori non permette però di trovare la parte transitoria delle risposta.

Buon corrente in regime sinusoidale
ma non parte transitoria

Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale passato il transitorio nel dominio del tempo

- Resistore ideale R . Supponiamo $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora da legge di Ohm la legge di ohm vale sempre

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_i); \text{ quindi}$$

adesso intanto
è necessario applicare una
tensione per far scorrere
la corrente nel resistore
V e i sono in fase tra
loro, stessa ω

ampiezza
Tensione da
applicare

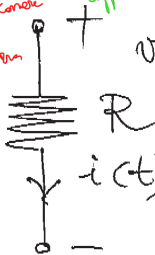
$$V_M = RI_M;$$

for scorrere
una corrente
con ampiezza I_M

$\varphi_v = \varphi_i$

dove valore V e segue
le fasi dove essere uguale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$



$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

FF

veloc. tra V_M e I_M e
 φ_v e φ_i ?

- R rappresenta la resistenza fisica (dovuta a un fenomeno dissipativo) offerta dal resistore al passaggio di una corrente; la tensione da applicare per fare scorrere tale corrente ha ampiezza $V_M = RI_M$ ed è in fase con la corrente $\varphi_v = \varphi_i$

- Induttore ideale. In accordo alla legge di Faraday si ha

induttore non dissipa, è conservativo

modello idealizzato

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{d\varphi_{\text{conc}}}{dt}$$

cosinusoidale $i(t)$ vuol dire V da applicare all'induttore per ottenere la corrente $i(t)$

dove $\varphi_{\text{conc}} = Li$ è il flusso concatenato con l'induttore

quando una corrente $i(t)$ si stabilisce in un

campo magnetico che si concatena al

flusso del campo magnetico del nostro analizzatore, L è la costante di proporzionalità tra flusso concatenato e I



$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

FS

- Esperimento 1. Supponiamo che L sia percorso da una corrente costante (continua) $i(t) = I$; allora $v(t) = 0$, quindi L è un corto circuito per le correnti costanti (interpretare fisicamente!) CC. $\forall I$

induttore lascia passare una corrente costante gratuitamente, senza che sia necessario applicare tensione ai suoi capi.

flusso concatenato costante, con ciò si forse controllata matrice sull'induttore, allora V da applicare

- Esperimento 2. Supponiamo adesso che L sia attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = L \frac{di}{dt}$$

$$= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$$

- quindi

$$\rightarrow \sin = \cos(\dots + \pi/2) \quad \text{e' una proprieta'}$$

$$V_M = \omega L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

- Conclusione importante: a differenza del caso in continua, per far scorrere su L una corrente alternata di ampiezza I_M , e' necessario applicare una tensione alternata di ampiezza

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M.$$

Tale tensione e' necessaria per 'vincere' la forza contro elettromotrice che si sviluppa su L per il fenomeno dell'autoinduzione. Si ha inoltre che la tensione e' in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente

- abbiamo posto

$$X_L = \omega L; \quad [X_L] = \text{Ohm}$$

L Henry

che e' detta reattanza induttiva e si misura in Ohm

- dato che

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} = \frac{V_M}{X_L}$$

per un valore sarebbe $I = \frac{V}{R}$

la reattanza induttiva ha il significato fisico di resistenza apparente
che l'induttore offre al passaggio di una corrente alternata;

'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non e' legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo (dovuto all'autoinduzione)

- notare che $X_L = \omega L$ cresce se cresce ω ; quindi L offre resistenze apparenti tanto piu' elevate quanto ω e' elevata

27 Hz

per esempio

induttore 1 Henry, a 50 Hz

reattanza = $2\pi \cdot 50 \cdot 1 = 314 \Omega$

Se applico 100V, ho appena corrente di $\frac{100}{314}$

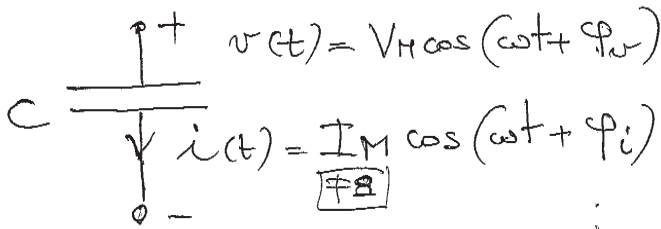
se fosse 1 MHz $\Rightarrow 60 k\Omega$

- Condensatore ideale. Si ha *→ piccolo per f piccolo, se $\omega = 0$, continua per f alta, resistenza opposta sempre più grande*

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = \frac{dq_c}{dt}$$

dove $q_c = Cv$ e' la carica sulle armature

Condensatore anticipa la corrente



$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

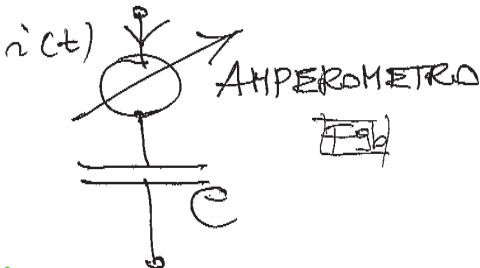
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Esperimento 1. Supponiamo di applicare a C una tensione costante (continua) $v(t) = V$; allora $i(t) = 0$, quindi C e' un circuito aperto (una interruzione elettrica) per le tensioni costanti (interpretare fisicamente!)

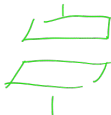
due armature metalliche, sono proprio un'interruzione elettrica. $i(t) = 0 \quad \forall V$

• Esperimento 2. Supponiamo adesso di applicare a C una tensione alternata (sinusoidale) $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$; dato che la tensione varia, si ha un passaggio continuativo di cariche (elettroni) fra le armature, quindi l'amperometro misura un passaggio di corrente; ne consegue che C non e' una interruzione elettrica per le correnti alternate

come la tensione cresce,
le armature iniziano a
caricarsi, c'è passaggio
di corrente con carica e
scarica alternata



dal punto di vista fisico, tra le armature c'è corrente di spostamento, $\frac{dQ}{dt}$ del corpo di induzione



Corrente dovuta alla variazione del campo elettrico

- notare che $X_C = 1/\omega C$ decrese se cresce ω ; quindi C offre resistenze apparenti tanto piu' piccole quanto ω e' elevata

- notare che vi sono diverse proprieta' duali per L e C (rifletterci).

Se $\omega \rightarrow 0$, e' induttanza ideale

$\omega \rightarrow +\infty$, fa passare nella breve la corrente
" $X_C \rightarrow 0$ "

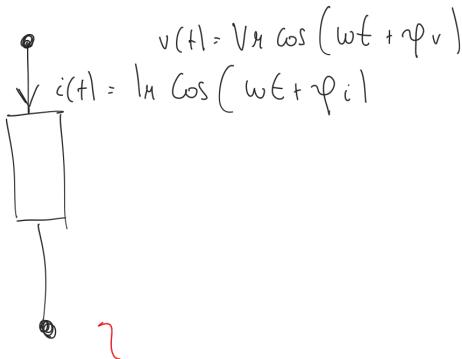
- $I(t)$ in un condensatore ideale anticipa di $\pi/2$ $V(t)$

se dunque siamo in fase sulla tensione, per quello sulla corrente
lo siamo in anticipo nel caso degli anticipi

• $1 \mu F, 50 Hz \rightarrow X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{314} = 3184 \Omega$

Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale

- Consiste di due passi
- Passo 1. Determino le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori
- Passo 2. Determino l'espressione delle leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori *Relos. costitutive e Kirchhoff per relos. costitutive*
- facciamo vedere che otteniamo nel dominio dei fasori un circuito senza memoria che puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

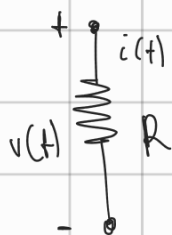


Passo nel dominio dei fasori:

$$\rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ \bar{I} = I_m e^{j\varphi_i} \\ \downarrow \\ \bar{V} = V_m e^{j\varphi_v} \\ \downarrow \end{array}$$

Velocità costitutiva, 1 legge Ohm

R ideale in regime sinusoidale

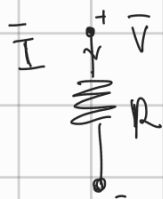


$$v(t) = R i(t)$$

$$\bar{V} = R \bar{I}$$

Relaz. analogica a quella del tempo

ma lo impegno così



$$\bar{V} = R \bar{I}$$

cioè

$$V_m e^{j\varphi_v} = R I_m e^{j\varphi_i}$$

$\Rightarrow$

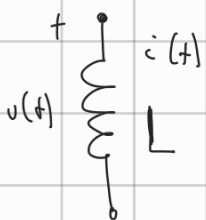
{

$$V_m = R I_m$$

$$\varphi_v = \varphi_i$$

Sono in fase tensione e corrente

Induttore ideale regime sinusoidale



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

↓ trasformo

Utile sapere, anche in regime sinusoidale applico trasformata fasoriale

ora è senza memoria

$$\bar{V} = L j\omega \bar{I} = j\omega L \bar{I} = j X_L \bar{I}$$

impedenza

← dipende da ω

"legge di ohm simbolica per un induttore"

Impedenza di L in corrente alternata è puramente immaginaria

Infatti:
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{j\omega L}$$

lavoro dunque
$$\bar{Z}_L = j\omega L = j X_L$$

$$[\bar{Z}_L] = \text{ohm}$$

• Legge di Ohm Simbolica

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_L} = \bar{Y}_L \bar{V}$$

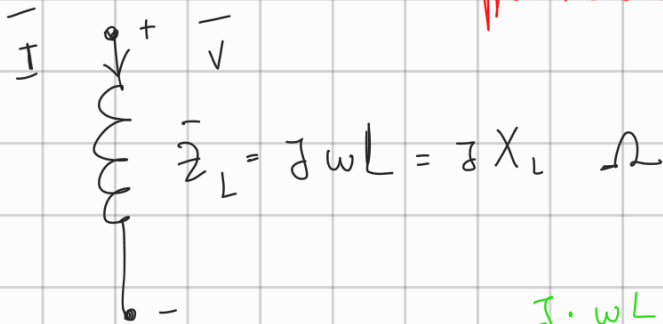
• Sono numeri complessi, ma non fasori, non è associata ad una grandezza sinusoidale

• $\bar{Y}_L = \frac{1}{\bar{Z}_L}$ " ammettanza "

• $\bar{Z}_L$ e $\bar{Y}_L$ non sono FASORI

• Rappresentazione nel dominio dei fasori di un induttore
 lo stesso come un resistor (grande fittizio)

Rappresentazione Simbolica



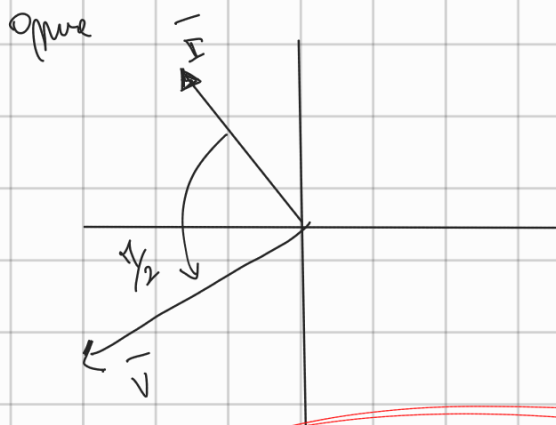
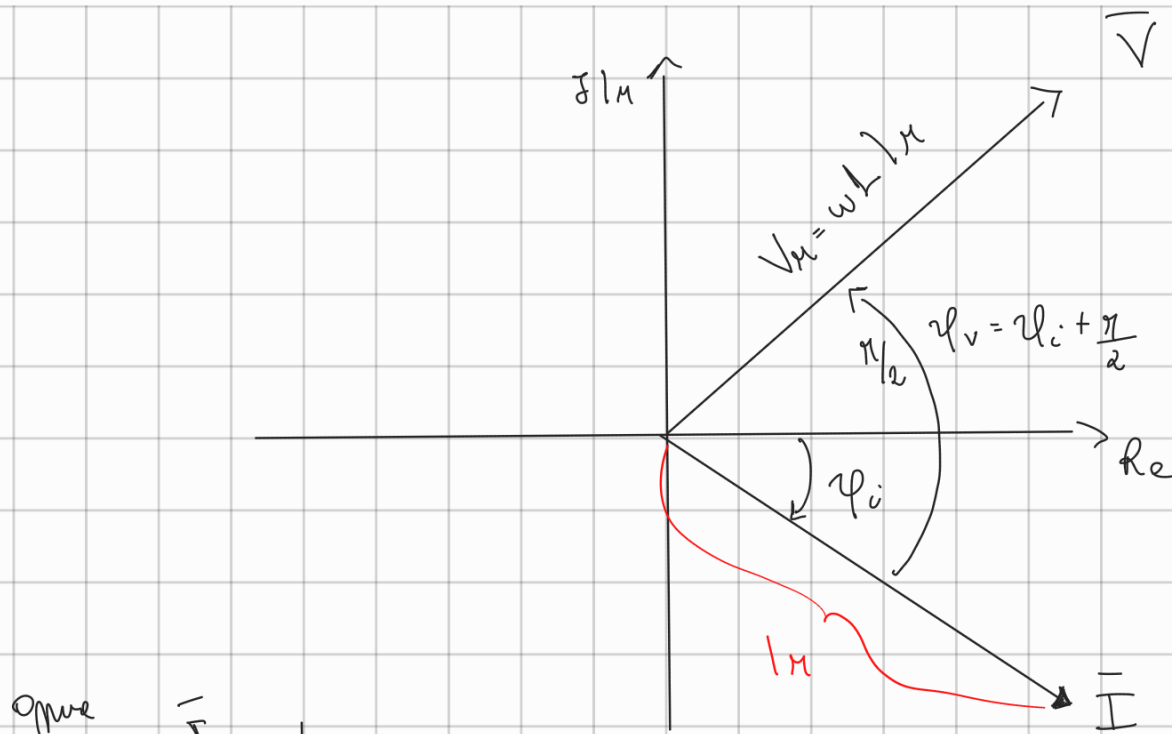
$j \cdot \omega L$ = sfasamento di 90° , moltiplicare per j
 fattore esplicito

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I}$$

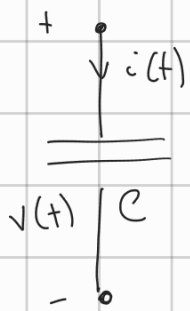
$$\Rightarrow \bar{V} = V_M e^{j\psi_V} = \omega L \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_j I_M e^{j\psi_I} = \omega L I_M e^{j(\psi_I + \frac{\pi}{2})}$$

dunque

$$\begin{cases} V_M = \omega L I_M \\ \psi_V = \psi_I + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Per un Condensatore



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow \bar{I} = j\omega C \bar{V} = \frac{\bar{V}}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{\bar{V}}{-j\omega_c}$$

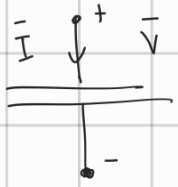
$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega_c} = -j \frac{1}{\omega_c} = -j X_C \quad \text{impedenza condensatore}$$

$$\bar{Y}_C = \frac{1}{\bar{Z}_C} = j\omega C \quad \text{ammettenza condensatore}$$

↓ Legge di Ohm simbolica ↓

$$\underline{I} = \overline{Y_c} \overline{V} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z_c}}$$

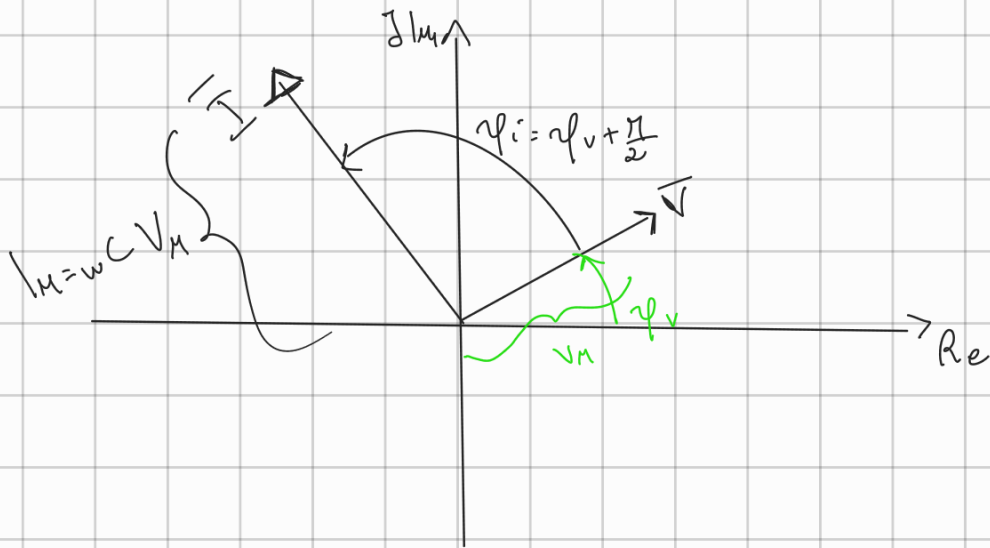
Augue representas. simbolic



$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C} \Omega = -j X_c \Omega$$

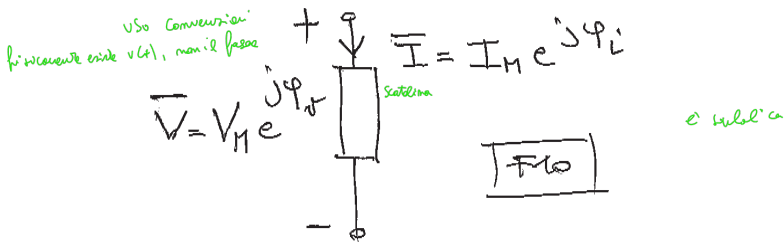
$$\Rightarrow \underline{I} = j\omega C \overline{V} \Rightarrow \underline{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} V_M e^{j\varphi_v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_M = \omega C V_M \\ \varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia
- $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione ai morsetti e $\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v}$ il fasore della tensione e con $\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i}$ quello della corrente; come in figura, pensiamo simbolicamente che al bipolo sia applicato $\bar{\mathbf{V}}$ e vi fluisca $\bar{\mathbf{I}}$ (in questo caso coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori)



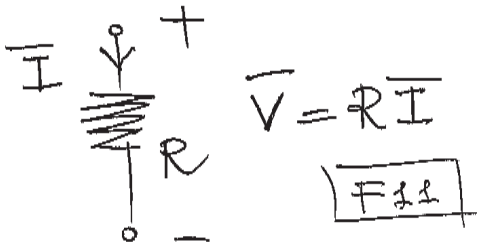
- *Relazione costitutiva del bipolo:* è il legame che il bipolo stabilisce fra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ nel dominio dei fasori

legame algebrico
non differenziale

- **Resistore ideale.** Da $v(t) = Ri(t)$, usando la linearita' della trasformata fasoriale, otteniamo

$$\bar{\mathbf{V}} = R\bar{\mathbf{I}}$$

detta legge di Ohm simbolica nel dominio dei fasori



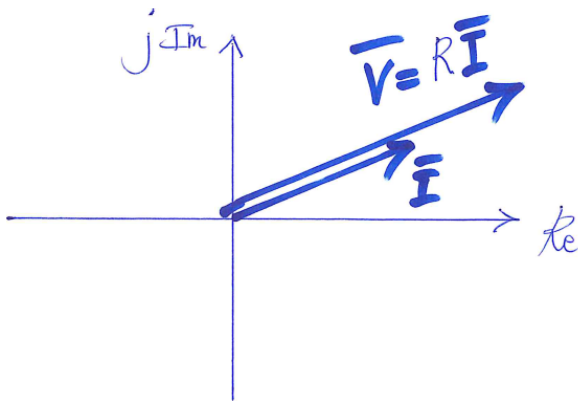
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = R\bar{\mathbf{I}} = R I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi, in accordo a quanto visto nel dominio del tempo

$$V_M = R I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

- per $R > 0$ i due fasori $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ sono *paralleli fra di loro e in fase*



• **Induttore ideale.** Da $v(t) = L di(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = jX_L \bar{\mathbf{I}}$$

• *l'induttore è quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di L è il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L = jX_L; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_L] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza è definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_L = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_L}$$

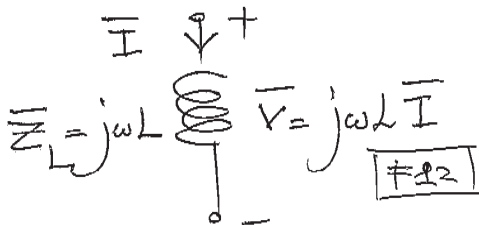
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_L} = \bar{\mathbf{Y}}_L \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per l'induttore'

- quindi, nel dominio dei fasori, l'induttore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = \omega L I_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_i}$$

quindi

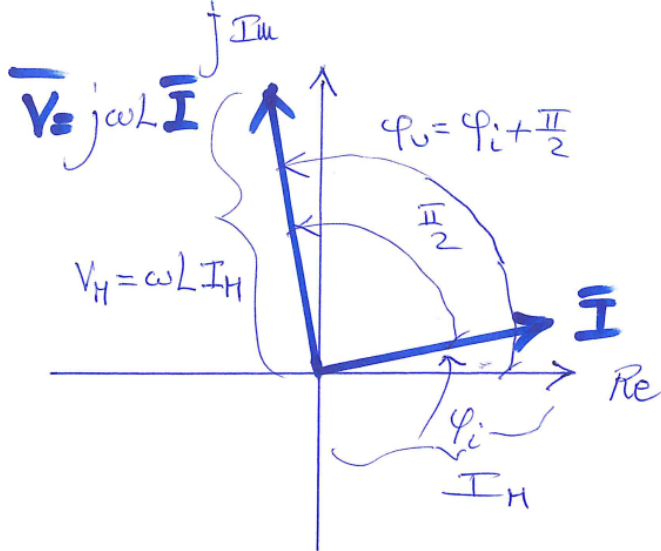
$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \omega L I_M e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

e

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{V}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{I}}$



• **Condensatore ideale.** Da $i(t) = Cdv(t)/dt$, usando la linearita' e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}}$$

• *il condensatore e' quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di C e' il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_C] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza e' definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = j\omega C$$

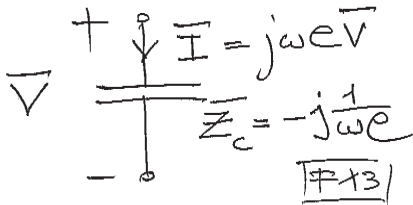
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_C \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per il condensatore'

- quindi, nel dominio dei fasori, il condensatore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_C = -j/(\omega C)$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}} = \omega C V_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_v}$$

quindi

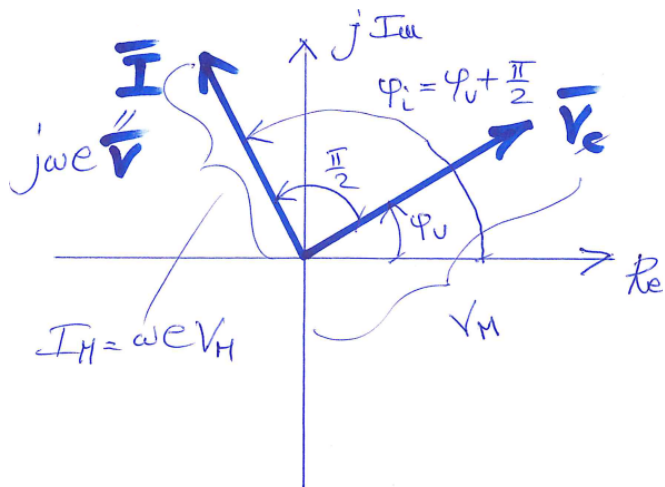
$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C V_M e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

e

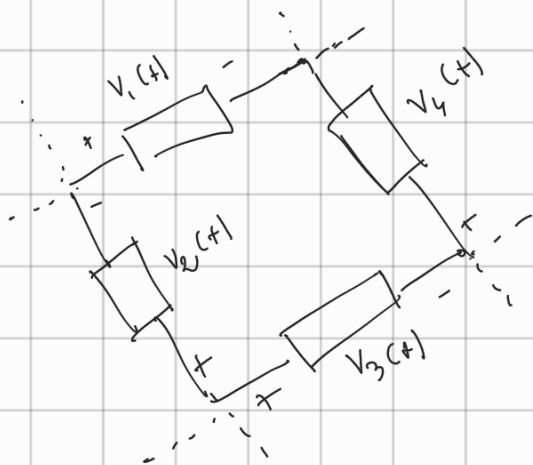
$$I_M = \omega C V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{I}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{V}}$



Reggi K.V.K.



$$v_1(t) - v_4(t) - v_3(t) + v_2(t) = 0$$

ma possiamo anche scriverlo come, usando l'andamento

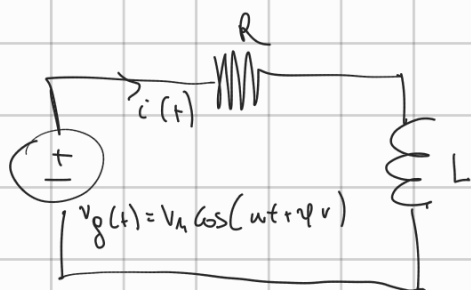
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\bar{V}_1 e^{j\omega t}] - \operatorname{Re} [\bar{V}_4 e^{j\omega t}] - \operatorname{Re} [\bar{V}_3 e^{j\omega t}] + \operatorname{Re} [\bar{V}_2 e^{j\omega t}] \\ = \operatorname{Re} [(\bar{V}_1 - \bar{V}_4 - \bar{V}_3 + \bar{V}_2) e^{j\omega t}] = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \bar{V}_1 - \bar{V}_4 - \bar{V}_3 + \bar{V}_2 = 0$$

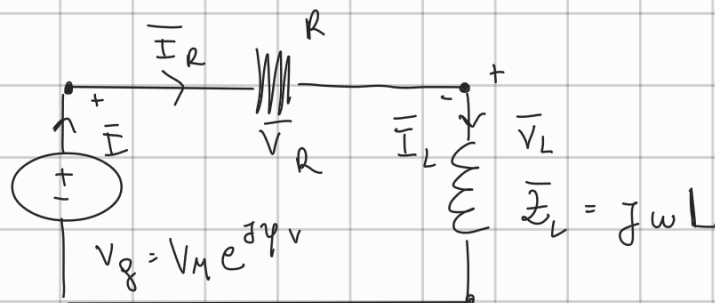
Vale KV nel dominio dei fasori

Esempi

? $i(t)$ in regime sinusoidale



essendo un
CIRCUITO
SIMBOLICO
nel dominio dei
fasori



le KI mi dicono che
c'è un'idea come

$$KI: \bar{I}R = \bar{I}_L = \bar{I}$$

unica corrente uguale

$$KV: \bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L$$

• Relaz. costitutive

$$\bar{V}_R = R \bar{I}_R$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L$$

$$\bar{V}_g = R \bar{I}_R + j\omega L \bar{I}_L = (R + j\omega L) \bar{I}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L}$$

Prova il teorema, solo con i teoremi

o uso la formula di Parseval. $i(t) = \text{Re}[\bar{I} e^{j\omega t}]$

o Scrivo il numero complesso forma esponenziale

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} \\ &= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R})} \end{aligned}$$

I_M

φ_i

modulo fase

Dopo

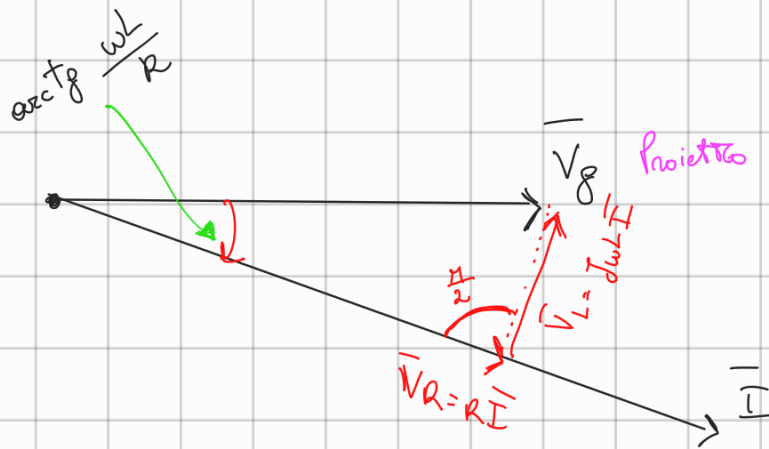
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_v - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)$$

Diagramma fasoriale

Es. $\varphi_v = 0$
e dunque $V_g = V_m$

$$\bar{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctan \frac{\omega L}{R}}$$

La corrente è sfasata
 nel 4° quadrante



il triangolo mi semplifica (?)
 la KV subito spara

$$\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L = R \bar{I} + j \omega L \bar{I}$$

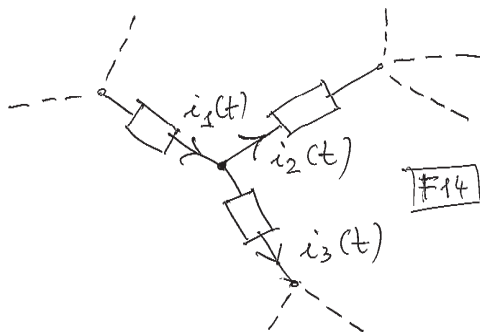
- **Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori**

- Consideriamo una rete in regime sinusoidale a pulsazione ω (tutte le correnti e tensioni, esaurito il transitorio, sono sinusoidali a pulsazione ω); consideriamo un nodo a cui sono collegati tre bipoli. Si ha dalla KI: $-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ per ogni t ; quindi

$$-\text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_2 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_3 e^{j\omega t}] = \text{Re}[(-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3) e^{j\omega t}] = 0$$

per ogni t da cui

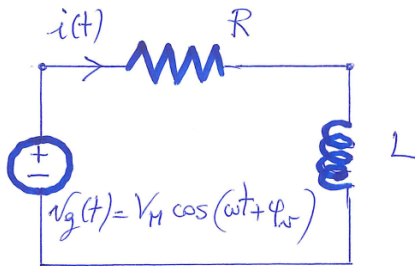
$$-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3 = 0$$



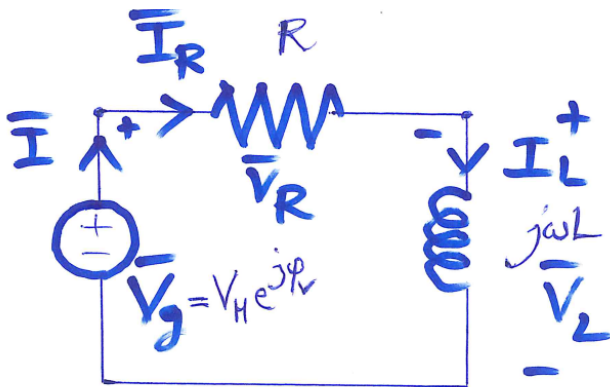
- *KI nel dominio dei fasori: i fasori delle correnti in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le correnti*
- analogamente, *KV nel dominio dei fasori: i fasori delle tensioni in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le tensioni*
- usando le relazioni costitutive e le leggi di Kirchhoff illustrate possiamo associare al circuito un *circuito simbolico* nel dominio dei fasori; il circuito simbolico e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti senza memoria visti nella Parte 1

Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori

- Consideriamo ancora il circuito RL studiato in precedenza; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Passo 1. Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



- Passo 2. Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$:

- KI: $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_R = \bar{\mathbf{I}}_L$

- KV: $\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L$

- relazioni costitutive: $\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}}_R$; $\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L\bar{\mathbf{I}}_L$

- si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}}_g = V_M e^{j\varphi_v} = (R + j\omega L)\bar{\mathbf{I}}$$

e

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L}$$

- Passo 3. Da $\bar{\mathbf{I}}$ otteniamo $i(t)$. Scriviamo $\bar{\mathbf{I}}$ in forma esponenziale

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\frac{\omega L}{R})}}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))}$$

allora

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

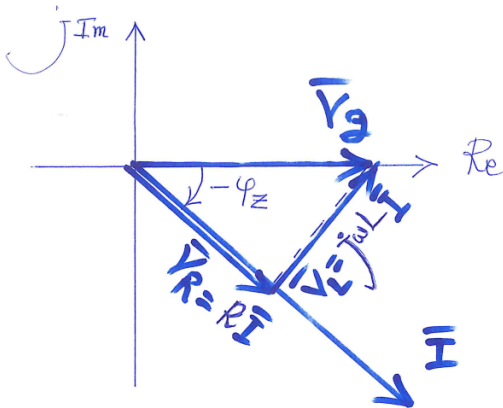
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

- stesso risultato ottenuto con analisi nel dominio del tempo; il procedimento nel dominio dei fasori e' molto piu' semplice e diretto
- Esercizio per casa: ripetere il Passo 3 usando invece la formula di antitrasformata fasoriale $i(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{I}} e^{j\omega t}]$

- **Diagramma fasoriale**
- Sia ad esempio $\varphi_v = 0$, quindi $\bar{\mathbf{V}}_g = V_M$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega L}{R})}$$

- si ha $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} + j\omega L\bar{\mathbf{I}}$; $R\bar{\mathbf{I}}$ e' parallelo a $\bar{\mathbf{I}}$, mentre $j\omega L\bar{\mathbf{I}}$ e' in anticipo di $\pi/2$ rispetto a $\bar{\mathbf{I}}$; possiamo allora costruire il seguente diagramma fasoriale



- **Interpretazione fisica**

- Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto combinato della resistenza Ohmica e del fenomeno dell'^{c'è l'induzione}autoinduzione, offre al passaggio di una corrente alternata una "resistenza apparente" (impedenza) pari a

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ Ohm}$$

La presenza di L in serie a R provoca quindi:

$Z_{RL} > R$ *perché la corrente*

1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

2) uno sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\varphi_z = \arctan(\omega L/R)$ compreso fra 0 e $\pi/2$

3) tali effetti sono tanto più evidenti quanto ω è elevata

$$\text{Se } \omega \rightarrow 0, \quad \arctg \rightarrow 0$$

$$\omega^2 L^2 \rightarrow 0$$

La corrente non è limitata solo da R , ma qui entra in gioco anche L , con ω che sale, L domina

Resistenza apparente

1) Z_{RL} = impedenza o "resistenza apparente"

perché la corrente è

$$I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

2) Perché $\varphi_i = \varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R}$

- **Risposta in frequenza**

- Supponiamo $v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$, facciamo variare ω e studiamo gli andamenti di

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- il primo degli andamenti rappresenta la risposta in ampiezza, mentre il secondo la risposta in fase; nel complesso sono la risposta in frequenza del circuito

Risposta in azerbaijano

Risposta in fase

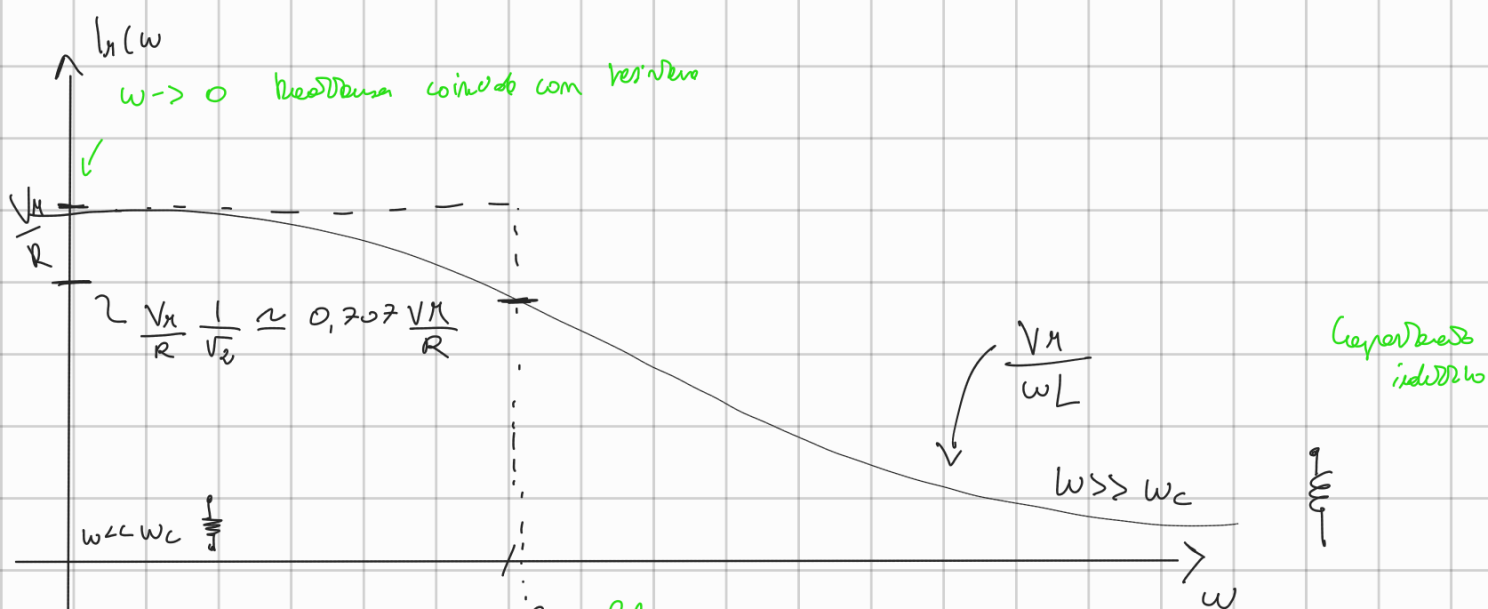
Risposta in $\sqrt{11}$ frequenze del circuito

$$V_g(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_n (\omega t + \varphi_i(\omega))$$

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$U_i(\omega) = -\arctan \frac{\omega L}{R}$$

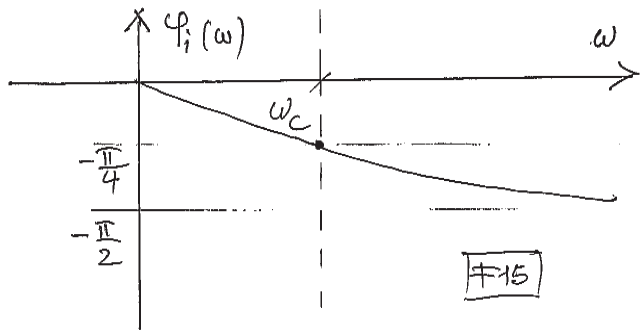
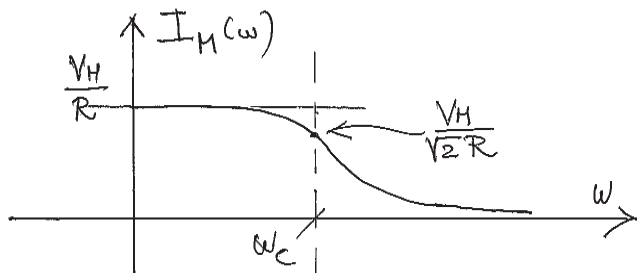


per $w \rightarrow 0$, formula R , e trascurando la corrente senza
quasi in fase
 $w \gg 0$, formula L

sub critico Re L si contraddicevano

Tensione e corrente
con se ci fosse solo
induttore

Momento L. $\frac{M}{2}$



7-15

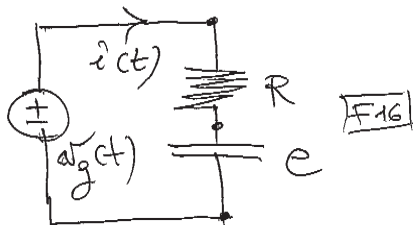
- si tratta di un filtro passa basso del primo ordine; la pulsazione critica vale

$$\omega_c = \frac{R}{L} \text{ rad/sec}$$

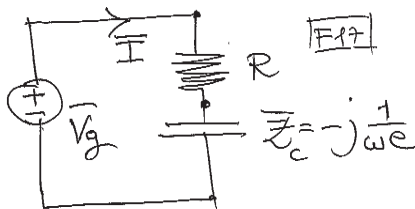
ed e' la pulsazione alla quale la risposta in ampiezza e' pari a $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ la massima risposta in ampiezza (che vale V_M/R quando $\omega = 0$)

- **Circuito RC serie**

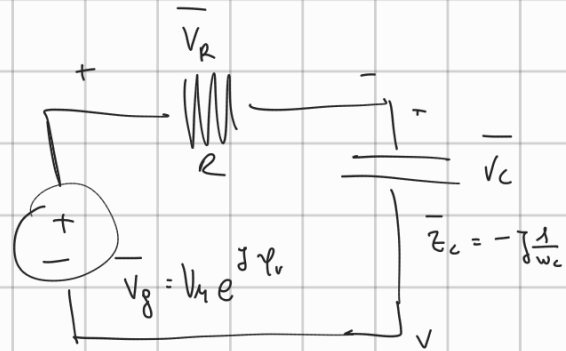
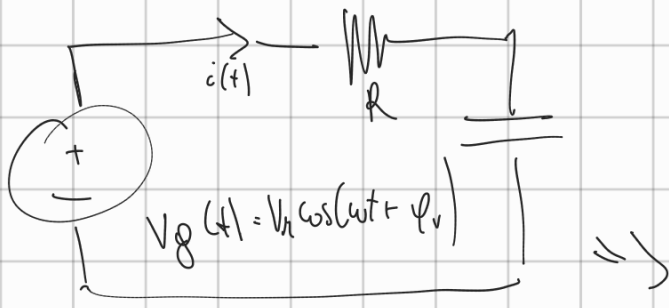
Consideriamo il circuito RC serie in figura; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



Circuiti  , impostare



$$V_g = V_m e^{j\phi_v} = \bar{V}_R + \bar{V}_C = R \bar{I} - j \frac{1}{\omega C} \bar{I}$$

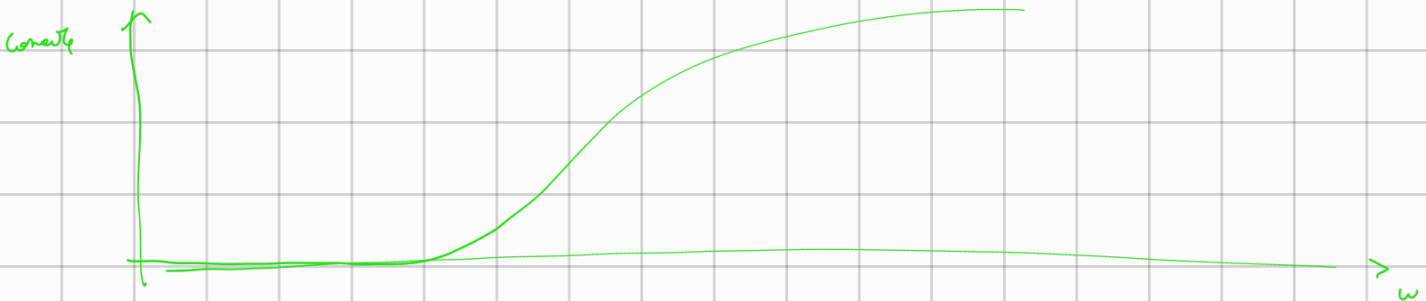
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{V_m e^{j\phi_v}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\phi_v + \arctan \frac{1}{\omega C R})}$$

$$= I_m e^{j\phi_i}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \phi_v + \arctan \frac{1}{\omega C R})$$

La corrente è limitata da una combinazione di R e C

La corrente è in anticipo (+ arctg) di un angolo tra 0° e 90°



- Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C = R\bar{\mathbf{I}} - \frac{j}{\omega C}\bar{\mathbf{I}}$$

da cui

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))}$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$

- la presenza di C in serie a R provoca
 - 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$
 - 2) uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\arctan(1/(\omega CR))$ compreso fra 0 e $\pi/2$
 - 3) tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' bassa
- studiare la risposta in frequenza del filtro e mostrare che e' un passa alto del primo ordine con pulsazione critica $\omega_c = 1/(RC)$

Impedenza e ammettenza di un bipolo

*non devono esserci generatori
autobloccati*

• Consideriamo un bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω contenente R, L, C (no generatori ind.ti di tensione e corrente); l'impedenza

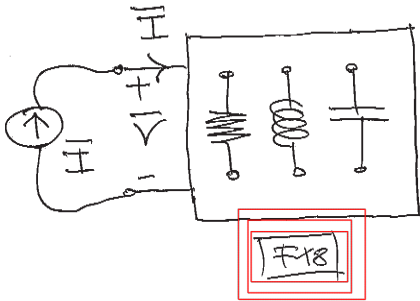
$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \text{ Ohm}$$

numero complesso

e' definita in modo analogo alla resistenza equivalente di un bipolo

Dipolo deve essere lineare e omogeneo in corrente

omogeneo



- l'ammettenza del bipolo e' il reciproco dell'impedenza

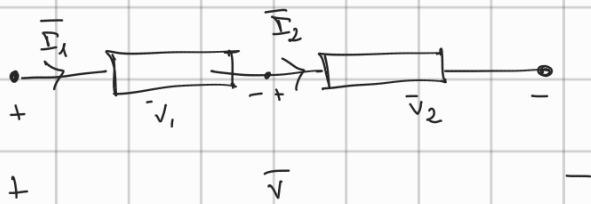
$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \text{ Ohm}^{-1}$$

bipolo deve essere controllabile in tensione

- si puo' dimostrare che

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}; \quad \bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$$

Dipolo in serie



$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2$$

(con Kirchhoff ai nodi) $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$

$$\Rightarrow (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \bar{I}$$

Quello che abbiamo visto prima, possiamo vederlo qui, per le parti reali complessi

una funzione di ω

induttore e condensatore
sono casi particolari

$$\bar{Z}(\omega) = \underbrace{R(\omega)}_{\text{Resistenza}} + j \underbrace{X(\omega)}_{\text{Reattanza}}$$

$$\bar{Y}(\omega) = \underbrace{G(\omega)}_{\text{Conduttanza}} + j \underbrace{B(\omega)}_{\text{Susceptanza}}$$

valgo G

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} \quad \text{Trick}$$

$$= G + jB$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Forma esponenziale

Z maiuscola è modulo

φ_z è l'argomento complesso

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_z}$$

$$\bar{y} = y e^{j\varphi_y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z e^{j\varphi_z}}$$

$$y = \frac{1}{z} ; \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

Da algebrica a esponenziale

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e se $z \neq 0$

$$\varphi_z :$$

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi_z = \frac{X}{R}$$

$$z = z e^{j\varphi_z}$$

nota $i(t)$,
 $I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

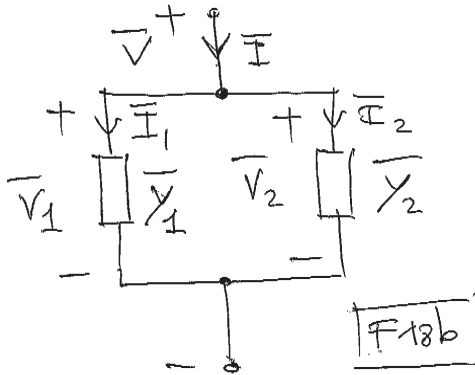
si determina $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$

$$\bar{v} = \bar{z} \bar{i} \quad \text{per def. di impedenza}$$

$$\Rightarrow V_m e^{j\varphi_v} = z e^{j\varphi_z} I_m e^{j\varphi_i} = z I_m e^{j(\varphi_i + \varphi_z)}$$

$$\Rightarrow v(t) = z I_m \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

- Le regole per il calcolo delle impedenze e ammettenze sono perfettamente analoghe a quelle per il calcolo delle resistenze equivalenti; ad esempio, per due bipoli in parallelo si ha $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \bar{V}$, quindi $\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$



- *Forma algebrica:*

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = R(\omega) + j\cancel{X}(\omega)$$

dove $R(\omega)$ in Ohm e' detta resistenza mentre $X(\omega)$ in Ohm e' detta reattanza

-

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

dove $G(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta conduttanza mentre $B(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta suscettanza

- *formule di trasformazione:* si ha

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

quindi

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- studiare anche le trasformazioni inverse

20/04

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{Y} = Y e^{j\varphi_Y}$$

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_Z}$$

? tensione per far scorrere questa corrente?

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) \quad (= Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z))$$

argomento
della impedenza

Formula inversa

$$\text{Conosco } v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V} \quad \Rightarrow \quad I_M e^{j\varphi_i} = Y e^{j\varphi_Y} V_M e^{j\varphi_v}$$

$$\Rightarrow i(t) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_Y)$$

$$\bullet \quad Z = \frac{1}{Y} \quad \bullet \quad \varphi_Y = -\varphi_Z$$

Ricombino

Scrivo

$$\bullet \quad i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_Z)$$

FAMOSA

In fatti per esempio R-L serie

$$\bar{Z}_{RL} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}} = Z_{RL} e^{j\varphi_{Z_{RL}}}$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

impedenza che offre al circuito il rapporto della corrente dovuta sui
alla res. che invola.

• Se siamo in un circuito R-C

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos\left(\omega t + \varphi_v + \arctg \frac{1}{\omega CR}\right)$$

• Proviamo Impedenza

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

usando forma esponenziale

$$Z e^{j\varphi_z} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = \frac{V_M}{I_M} \quad \varphi_v - \varphi_i = \varphi_z$$

Impedenza di tipo Ohmico-Induttivo e capacitivo

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

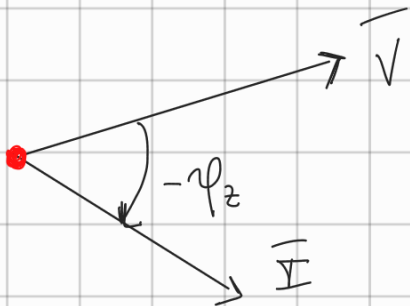
e consideriamo $R(\omega > 0) \leftarrow$ Bipolo passivo

$$\varphi_z(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \leftarrow \text{positivo}$$

$\leftarrow$ angolo capen
tra -90° e 90° ,
dipende dal segno di
 $X(\omega)$

1) $X(\omega) > 0$ $\varphi_z(\omega) \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$$

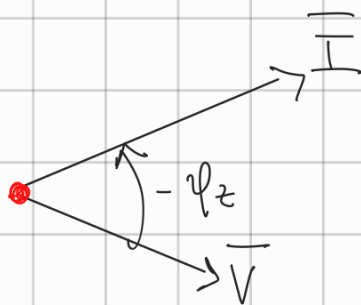


in un bipolo
ohmico - induttivo

In un bipolo ohmico - induttivo
la corrente è in ritardo di un
angolo fra 0 e 90° rispetto
alla tensione

2) $X(\omega) < 0$ esempio circuito RC

$$\varphi_z(\omega) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

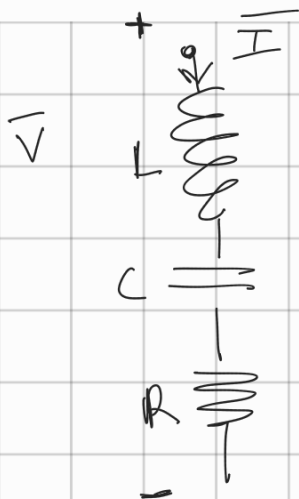


Caso ohmico - capacitivo.
la corrente è in avanzo
di un angolo fra 0 e 90°
rispetto alla tensione

- Se $X(\omega) = 0$, impedenza puramente Reale, resistiva (?)
- * fine Recap

Circuiti Risonanti RLC in serie (da parte parallelo)

Siano in Regime sinusoidale



$$\bar{Z}_L = j\omega L = jX_L$$

$$\bar{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

X_L e X_C si cancellano

$$\bar{Z}_{RLC} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C)$$

$$= R(\omega) + jX(\omega)$$

$\Rightarrow$ effetto di cancellazione fra L e C

$$X_L = X_C \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

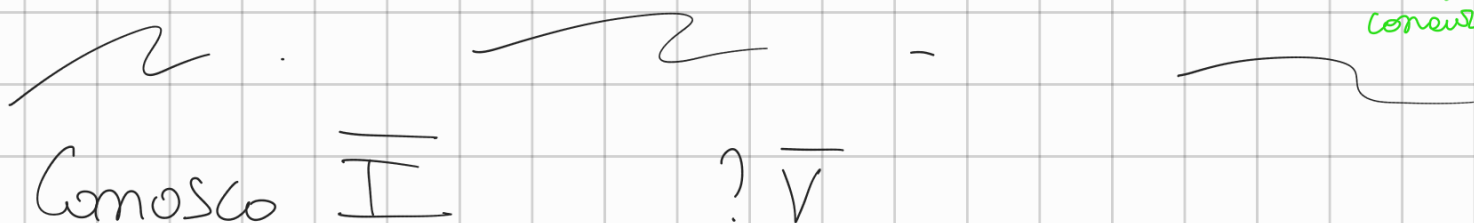
definiamo

$$\omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec} \quad \text{Pulsazione di risonanza}$$

$$X_L \geq X_C \Leftrightarrow \omega \geq \omega_0$$

$\omega \rightarrow 0$ il condensatore tende a bloccare la corrente, è come un c.a.

per $\omega \gg 0$, è l'induttore che tende a bloccare la corrente



Conosco $\bar{I}$

? $\bar{V}$

(1) $\omega < \omega_0 \Rightarrow X_C > X_L$

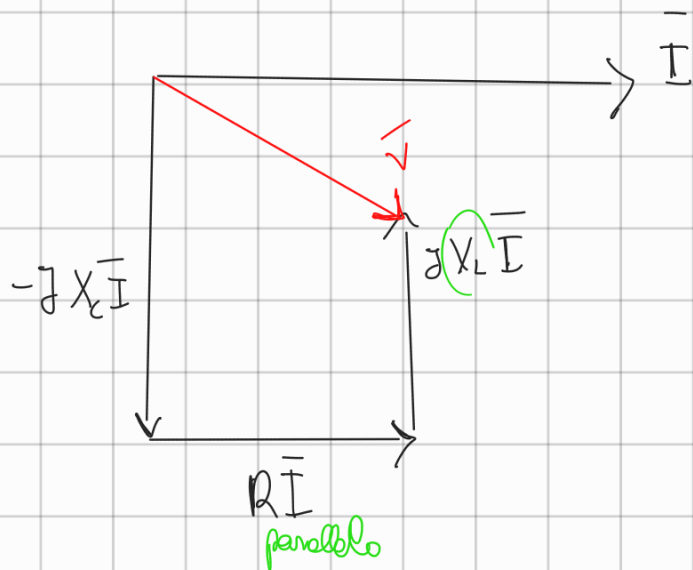
mi "costa" la tensione

mi aspetto che la corrente sia in anticipo sulla tensione

$$\bar{V} = R\bar{I} + jX_L\bar{I} - jX_C\bar{I}$$

è trattato come se
fossero 3 resistori

ricorda che $X_C > X_L$



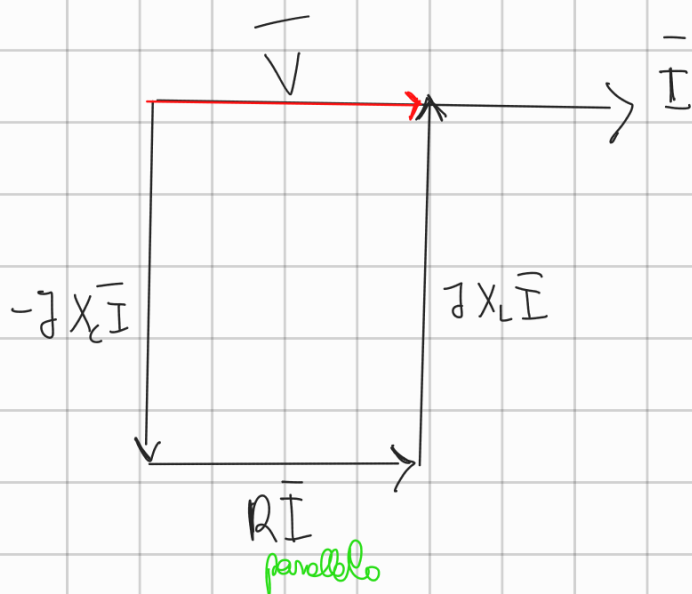
Prevala nella serie
il condensatore
Comportamento "ohmico-capacitivo"

2

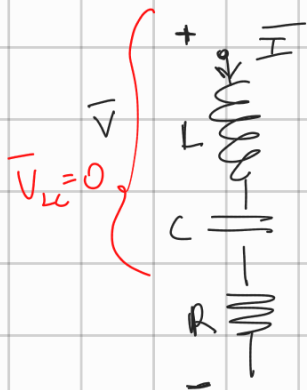
$$\omega = \omega_0$$

qui aspetto Comportamento Resistivo

L e C si cancellano perfettamente



$$\bar{V}_{LC} = 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ V_L \\ \downarrow \\ V_C \end{matrix}$$



Impedenza uguale
e opposte

Per L e C la
Tensione tra loro è 0,
ma il gruppo risente ancora
qualcosa

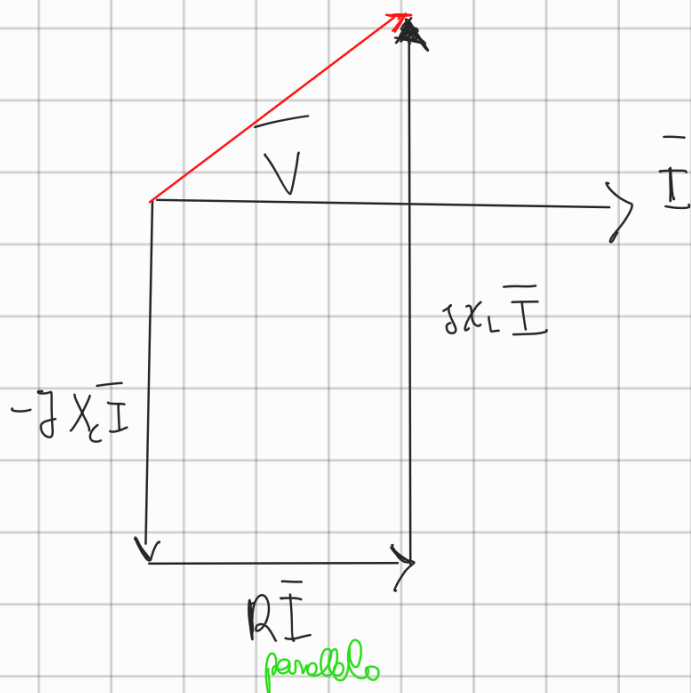
3

Caso $\omega > \omega_0$

$X_C < X_L$

Comportamento ohmico-induttivo,

Paralelo L



Qui si comporta come un
filtro passa-banda.

Corrente non passa per $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$

Vediamo dunque ora
la risposta in frequenza

Dati un RLC, c'è
sempre un ω particolare

Risposta in frequenza di un RLC serie

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$$

ho ampiezza e modulo che
dipendono da ω

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{Z_{RLC}(\omega)}$$

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v - \varphi_{Z_{RLC}}(\omega)$$

La scriviamo in forma esplicita

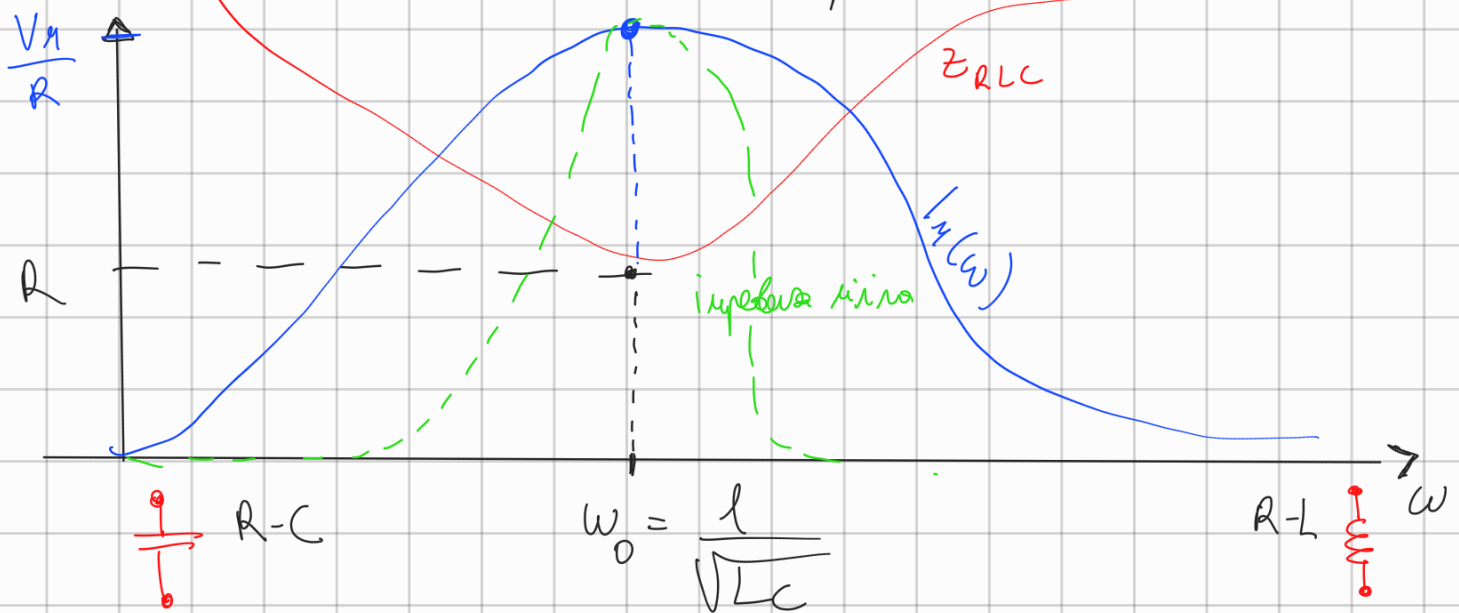
$$\bar{Z}_{RLC} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}_{Z_{RLC}} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \quad \varphi_{Z_{RLC}}$$

$$I_m(\omega) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

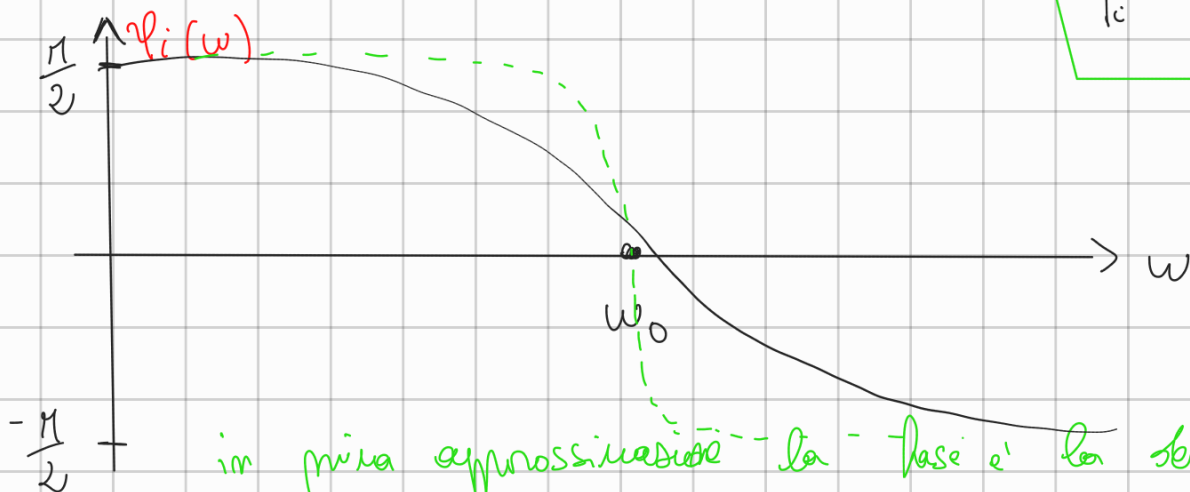
//
Sopprimiamo
0

minimo dell'impedenza la ha quando $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = 0$



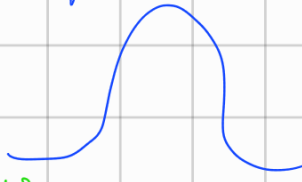
- In un circuito RLC serie abbiamo la MINIMA IMPEDENZA alla PULSAZIONE di RISONANZA ω_0 e a ω_0 la CORRENTE e' MASSIMA

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

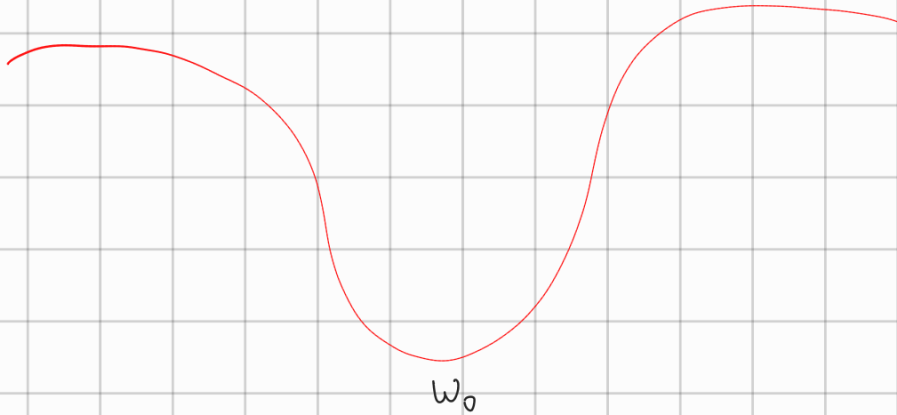


in prima approssimazione la fase e' la derivata prima dell'ampiezza

È molto importante vedere quanto è stretta la "curva"
 stretta della curva,
 più il filtro è stretto
 ma più è stretta e più allineato
 più è stretta e
 sfasamento



In parallelo il circuito è un elimina-banda, per l'angolo
 degli ω_0 positivi



Potenza regime sinusoidale

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Valore quadratico medio

operazione di
 media su
 un periodo

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v) dt \\ &= \frac{V_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_v)}{2} dt = \end{aligned}$$



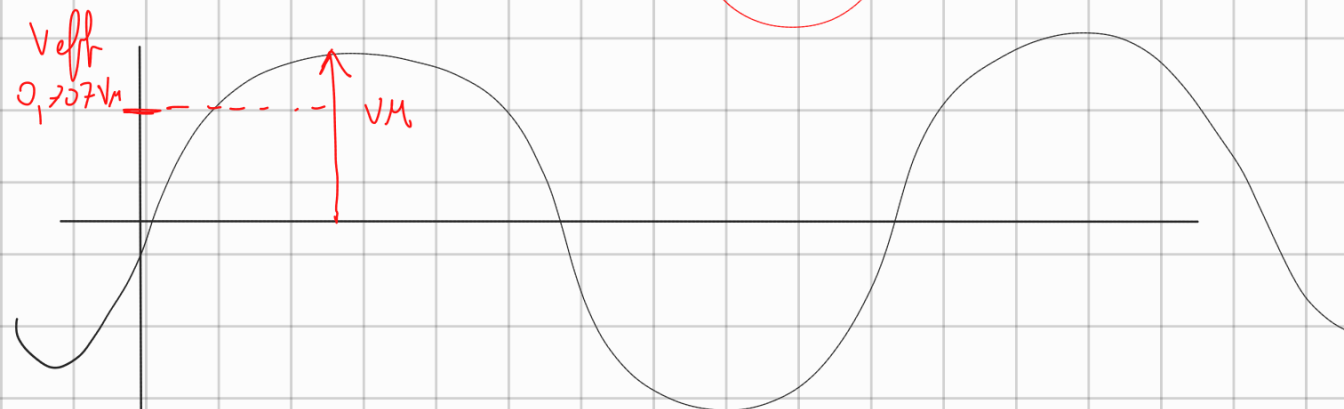
2 oscillazioni, l'integrale della media è 0

$$V_{eff} = \frac{1}{2} V_M^2$$

Valore efficace V_{rms} root mean square

$$V = V_{eff} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v) dt}$$

$$= \frac{V_M}{\sqrt{2}} \approx 0,707 V_M$$



$V_{eff} \approx 30\%$ in meno dell'apice

~~non vanno più tanto non cambia una legge~~

R ideale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_M}{R} \cos(\omega t)$$

in reg. sinusoid

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2 \omega(t) \text{ W}$$

la potenza istantanea obliata nel tempo

che non ci interessa

- ci interessa la potenza attiva

POTENZA ATTIVA = media su un periodo / POTENZA MEDIA

$$* P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{Watt}$$

=> nel caso del resistore

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) dt = \boxed{\frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}}$$
$$= \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M$$
$$= \frac{V_{eff}^2}{R} = R I^2 = \frac{V I}{\eta} \quad \text{Watt}$$

Potenza attiva, cosa significa? se moltiplico per T

$\underbrace{P \cdot T}_{\substack{\text{e' un'energia} \\ \text{elettrica}}} = \int_0^T p(t) dt \quad \text{Joule} \quad \text{Energia elettrica}$

energia elettrica assorbita da R in un intervallo di tempo pari ad un periodo T della sinusoide

P potenza reale o utilizzata

energia viene dissipata sotto forma di calore ecc.

La potenza attiva e' legata al concetto di trasformazione
ad un altro tipo di potenza

- Pot. attiva: Trasformazione irreversibile da energia elettrica ad altre forme (calore, energia luminosa...)

Es. Stufa da $P = 1 \text{ kW}$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 20 \times 10^{-3} \text{ sec}$$

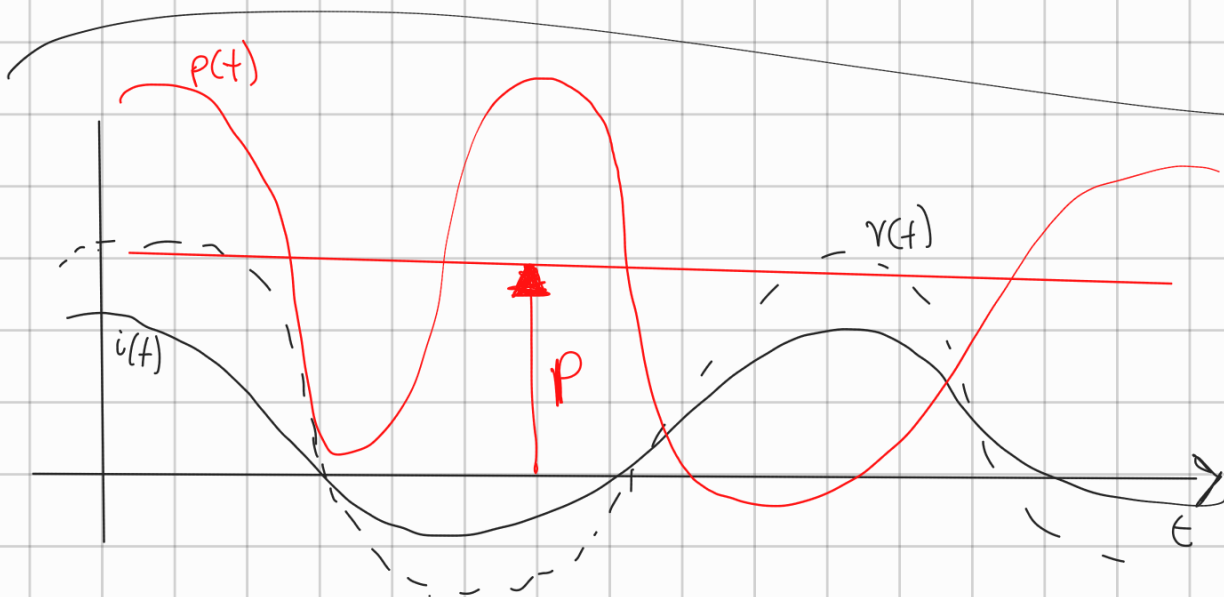
$$T \cdot P = 20 \times 10^{-3} \times 10^3 = 20 \text{ joule}$$

in un periodo
 da nostra stufa in un periodo (20ms) anche 20J
 e li trasformo in calore

$$50 \times 20 = 1000 \text{ J in 1 secondo}$$

$$3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6 \text{ Joule} \leftarrow \text{kWh}$$

quanta energia
 elettrica si
 trasforma
 in calore



- *Forma esponenziale:*

$$\bar{\mathbf{Z}} = Ze^{j\varphi_z}$$

dove Z in Ohm e' il modulo dell'impedenza e φ_z e' l'argomento

-

$$\bar{\mathbf{Y}} = Ye^{j\varphi_y}$$

dove Y in Ohm^{-1} e' il modulo dell'ammettenza e φ_y e' l'argomento

- *formule di trasformazione:*

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

- Ulteriori trasformazioni:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e, se $\bar{\mathbf{Z}} \neq 0$, φ_z e' tale che

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad \sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

quindi

$$\tan \varphi_z = \frac{X}{R}$$

- viceversa

$$R = Z \cos \varphi_z; \quad X = Z \sin \varphi_z$$

- studiare le rimanenti formule di trasformazione

Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale

- Consideriamo un bipolo di cui si conosce $\bar{\mathbf{Z}}$ o $\bar{\mathbf{Y}}$
- nota $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ vogliamo trovare $v(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{I}} = Z e^{j\varphi_z} I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi

$$V_M = Z I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \varphi_z$$

e

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

- nota $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ vogliamo trovare $i(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{V}} = Y e^{j\varphi_y} V_M e^{j\varphi_v}$$

quindi

$$I_M = Y V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \varphi_y$$

e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y)$$

- possiamo anche scrivere

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$$

Osservazione: si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}}$$

e quindi

$$Z = \frac{V_M}{I_M}; \quad \varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

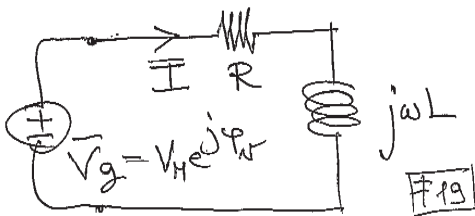
- il modulo dell'impedenza coincide con il rapporto delle ampiezze di tensione e corrente del bipolo; l'argomento dell'impedenza coincide con lo sfasamento tensione corrente
- studiare formule analoghe in relazione all'ammettenza

- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RL ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

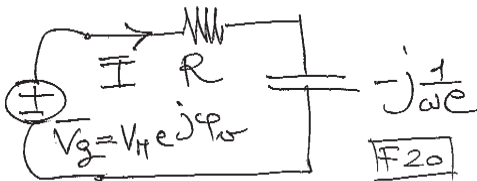


- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RC ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctan(1/(\omega CR))}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$



Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo

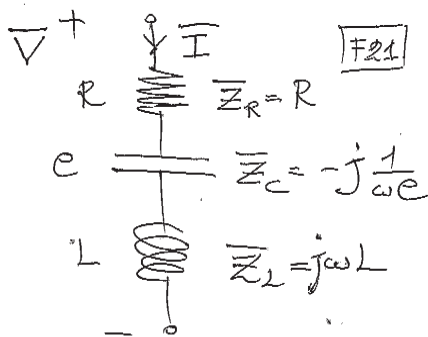
- Consideriamo l'impedenza

$$\bar{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

e supponiamo che il bipolo sia passivo ($R(\omega) > 0$)

- l'impedenza e' di tipo *ohmico-induttivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \geq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in ritardo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- l'impedenza e' di tipo *ohmico-capacitivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \leq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in anticipo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- come vedremo, l'impedenza di un bipolo puo' essere di tipo ohmico induttivo per certi valori di ω e di tipo ohmico capacitivo per altri valori di ω

- **Circuiti risonanti RLC**
- Consideriamo il circuito risonante RLC serie in figura in regime sinusoidale a pulsazione ω



- l'impedenza vale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

- c'è un effetto di cancellazione fra X_L e X_C

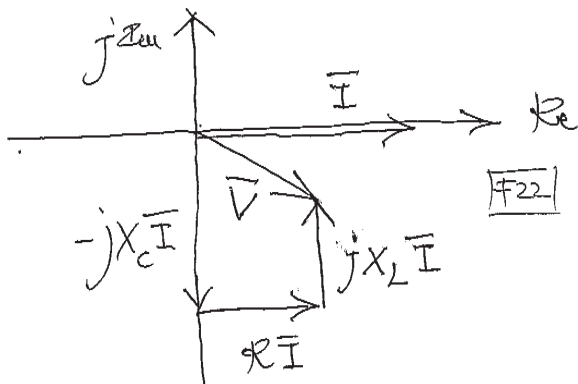
- *pulsazione di risonanza* ω_0 : pulsazione alla quale $X_L = X_C$, cioè' $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$; quindi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

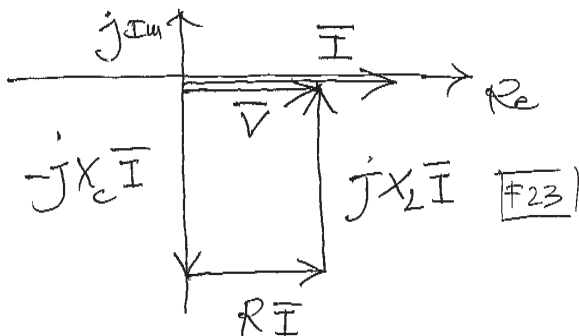
- *diagrammi fasoriali*. Supponiamo scorra una corrente $\bar{\mathbf{I}}$ con $\varphi_i = 0$; vogliamo costruire graficamente la tensione $\bar{\mathbf{V}}$ da applicare per far scorrere tale corrente; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} - jX_C\bar{\mathbf{I}} + jX_L\bar{\mathbf{I}}$$

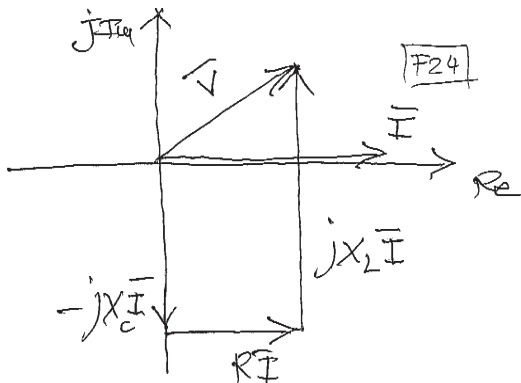
- 3 casi diversi
- Caso 1. $\omega < \omega_0$; in tal caso $X_L < X_C$, $X < 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico capacitivo (corrente anticipa tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Caso 2. $\omega = \omega_0$; in tal caso $X_L = X_C$, $X = 0$ e $\bar{\mathbf{Z}} = R$; quindi il comportamento e' di tipo resistivo (corrente in fase con la tensione)



- Caso 3. $\omega > \omega_0$; in tal caso $X_L > X_C$, $X > 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico induttivo (corrente ritarda rispetto alla tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Notare che un circuito RLC cambia drasticamente il suo comportamento al variare di ω passando da un comportamento ohmico-capacitivo ad uno resistivo e infine a uno ohmico-capacitivo

- Si ha

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$$

con

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi_z(\omega) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

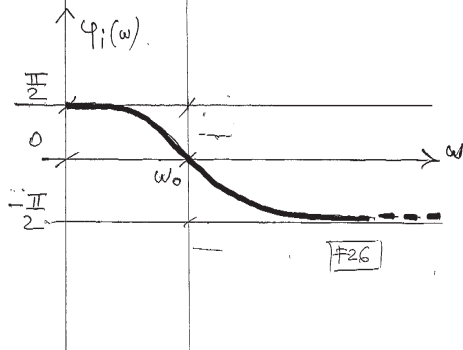
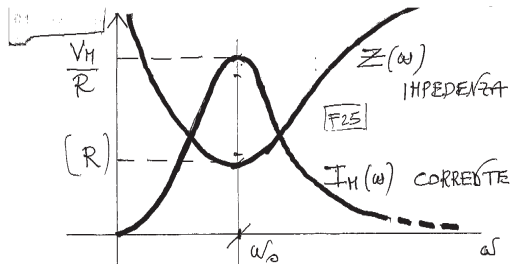
- la corrente assorbita in regime sinusoidale vale

$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$ con

$$I_M(\omega) = \frac{V_M(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_M(\omega)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

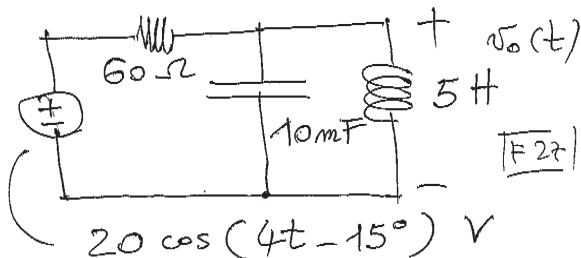
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v(\omega) - \varphi_z(\omega) = \varphi_v(\omega) - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- *risposta in frequenza*; assumiamo per semplicità' $V_M(\omega) = V_M$ e $\varphi_v(\omega) = 0$ e disegniamo gli andamenti della risposta in ampiezza $I(\omega)$ e in fase $\varphi_i(\omega)$; riportiamo anche per convenienza $Z(\omega)$

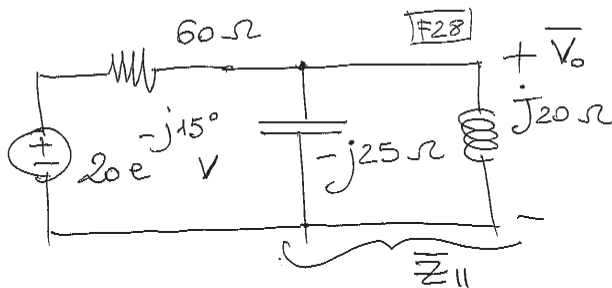


- si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine; notare che *un circuito RLC serie offre la minima impedenza alla pulsazione ω_0 di risonanza, pulsazione alla quale l'ampiezza della corrente assorbita risulta massima.*

Esempio. Determinare $v_o(t)$ in regime sinusoidale per il circuito in figura.



- Notare che la fase della tensione del generatore e' espressa in gradi invece che in radianti; nei calcoli che seguono dobbiamo comportarci di conseguenza



- Si ha

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ohm}; \quad X_L = \omega L = 20 \text{ Ohm}$$

quindi otteniamo il circuito simbolico in figura che possiamo analizzare con i metodi delle reti resistive; in particolare

$$\overline{Z}_{||} = -j25 || j20 = j100 \text{ Ohm}$$

- dalla regola del partitore di tensione

$$\bar{\mathbf{V}}_o = 20e^{-j15^\circ} \times \frac{j100}{60 + j100} = 17.15e^{j16^\circ} \text{ V}$$

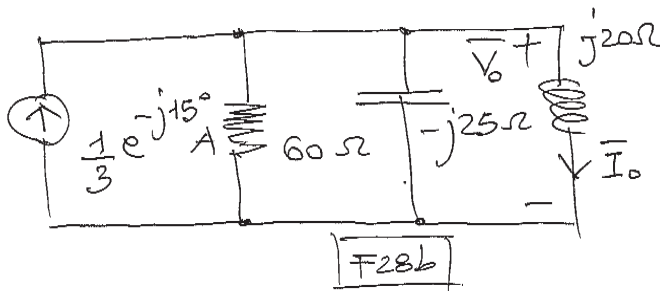
- la tensione in regime sinusoidale vale quindi

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 16^\circ) \text{ V.}$$

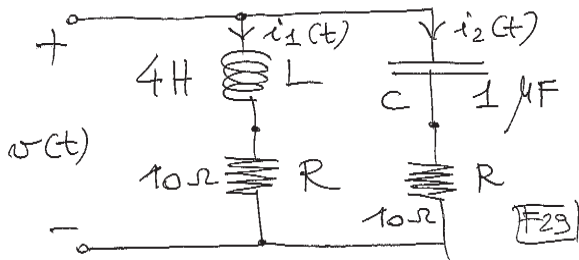
- Metodo alternativo: trasformo il generatore reale di tensione in uno reale di corrente a trovo $\bar{I}_o$ con la regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_o = \frac{e^{-j15^\circ}}{3} \frac{\frac{1}{j20}}{\frac{1}{60} + \frac{1}{-j25} + \frac{1}{j20}}$$

e poi $\bar{V}_o = j20\bar{I}_o$; verificare che si ottiene lo stesso risultato precedente



- **Esempio.** Determinare ω in modo che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in regime sinusoidale.



- da cui $X_L = X_C$ ossia

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/sec}$$

- problema: disegnare un diagramma fasoriale alla ω ottenuta assumendo $\varphi_v = 0$ e interpretare il risultato.