

• Reti elettriche interconnessione di bipoli

BIPOLI = elementi a due MORSETTI

• Consideriamo inizialmente circuiti e reti elettriche ottenute interconnettendo BIPOLI, cioè elementi elettrici a due morsetti (poli o terminali). P. es., R, L, C

Resistori, induttori, condensatori

• piu' avanti, tripoli, quadripoli, n-poli. P. es., transistor, amplificatore operazionale

interconnessione
di BIPOLI



? $i(t)$

? $v(t)$

*noi usiamo frequenze
basse*



POTREI DI

CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE =

*circuiti più piccoli della lunghezza d'onda
più piccola*

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$D_{MAX} \leq \frac{\lambda}{20}$$

*Dimensione massima di
un circuito*

Grandezze elettriche su un bipolo

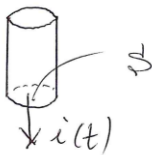
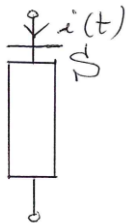
Siamo interessati alle
Tensioni e correnti

- Interessano la tensione ai morsetti, la corrente che fluisce nel bipolo, la potenza elettrica e energia elettrica assorbita dal bipolo

- definizione di corrente elettrica

- scegliamo un verso di riferimento per la corrente indicandolo con una freccia. Consideriamo una sezione S su uno dei conduttori riportando la freccia.

↓
Verso di
riferimento



- L'intensità di corrente all'istante t è data da

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}$$

carica che fluisce nello stesso
 Corrente, $i(t)$ è una grandezza scalare algebrica

derivata nel tempo
 della carica che
 attraversa S

dove $\Delta q(t)$ è la carica che attraversa S in Δt concordemente con il verso indicato

ha un segno (+, -, $\emptyset$)

- $i(t)$ è una **grandezza scalare e algebrica (con segno)**

algebrica $\Leftrightarrow$ con segno

- se la corrente è dovuta p. es. al moto di cariche positive (ioni) e il segno di $i(t)$ è positivo

$+$ $\Rightarrow$ verso del moto delle
 cariche è concorde
 con la freccia

$$i(t = 1 \text{ sec}) = +3 \text{ Ampere}$$

allora il verso del moto delle cariche (**verso vero della corrente**) è concorde con la freccia. Se il segno è negativo

$$i(t = 2) = -4$$

allora il moto delle cariche è discorde con la freccia

- Il verso di riferimento di $i(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $i(t)$ e segno di $i(t)$ permettono di determinare verso effettivo di moto delle cariche (verso vero della corrente)

NON PUO' ESSERE COMPLETAMENTE SE NON MO
STABILITO UN VERSO

es. fisica $u_{el}(+)$

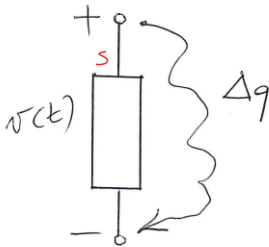


verso riferimento corrente: freccia
verso r.f. Tensione: morsetto + e -

- definizione di tensione (differenza di potenziale)

• scegliamo un **verso di riferimento** per la tensione indicando con + uno dei morsetti e con - l'altro. Scegliamo un percorso che collega + a - e lo orientiamo da + verso -. Sia Δq una carica elettrica infinitesima che si muove lungo il percorso orientato

Δq = carica che attraversa S in dt



• La tensione all'istante t e' data da

$$v(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

ΔL : lavoro compiuto dalla
forza del campo
elettrico
su Δq

dove ΔL e' il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo il percorso orientato

- $v(t)$ e' una grandezza scalare e algebrica (con segno)
- se il segno di $v(t)$ e' positivo

$$v(t = 1 \text{ sec}) = +4 \text{ Volt} \leftarrow$$

*verso vero della
Tensione*

allora il morsetto segnato con $+$ si trova a potenziale piu' alto
rispetto a quello segnato con $-$. Accade il contrario se il segno di
 $v(t)$ e' negativo

$$v(t = 2) = -5$$



-5 V
allora

*morsetto -
ha potenziale piu' alto*

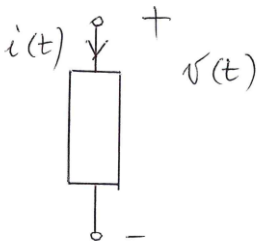
- Il verso di riferimento di $v(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $v(t)$ e segno di $v(t)$ permettono di determinare quale dei due morsetti si trova a potenziale piu' alto all'istante t (verso vero della tensione)

non c'e' tensione se non definisco
prima un verso di riferimento

Versi coordinati per tensione e corrente

Conversione per i segni della convenzione

- **convenzione degli utilizzatori:** fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $+$ ed esce dal morsetto $-$



- Def.
- potenza elettrica assorbita dal bipolo a t

POTENZA
ISORRABITA

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

[Se la potenza
el. è positiva,
è assorbita. Se
è negativa, è
potenza erogata]

- energia elettrica assorbita dal bipolo in dt

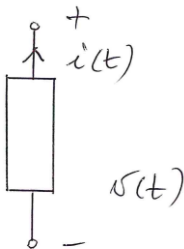
$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- energia elettrica assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} dw(t) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

energia elettrica assorbita perché utilizzatore

- convenzione dei generatori: fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $-$ ed esce dal morsetto $+$



convenzione entra dal
meno e esce
dal +

- potenza elettrica erogata dal bipolo a t

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

- energia elettrica erogata dal bipolo in dt

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

$V = \frac{dw}{dq}$ $\mathcal{V} = \frac{dq}{dt}$
 $\downarrow$
 $P = \frac{dw(t)}{dt}$ velocità di cambiamento o crescita di energia nel tempo
 $\uparrow$
 energia al secondo

- energia elettrica erogata dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

Relaz. costitutiva = legame tra I e V

- **Relazione costitutiva di un bipolo.** Un legame che il bipolo stabilisce fra tensione e corrente

legge che caratterizza completamente il comportamento el. di un bipolo

- e' la legge che caratterizza completamente il comportamento elettrico del bipolo all'interno di un circuito

Ci basta sapere il legame tra V e I

- per parlare di relazione costitutiva bisogna prima stabilire un riferimento elettrico per il bipolo, scegliendo un verso di riferimento per corrente e tensione, e poi scegliere la convenzione degli utilizzatori o generatori

riferimento elettrico: verso dir. rif. per corrente e tensione

- ad esempio, un resistore ha come relazione costitutiva $v(t) = Ri(t)$ (Legge di Ohm) se usiamo la convenzione degli utilizzatori, mentre si ha $v(t) = -Ri(t)$ se si usa la convenzione dei generatori

Relaz. costitutiva di un resistore

$$v(t) = R i(t) \quad \text{legge ohm per utilizzatori}$$

Bipoli passivi o attivi

Classifichiamo i bipoli attivi e passivi

- Usiamo la convenzione degli utilizzatori. Un bipolo si dice passivo se *energia elettrica dell'intervallo $-\infty, t$ è ≥ 0*

energia elettrica

$$\Rightarrow W(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\text{energia complessivamente assorbita al bipolo}}{p(t') dt'} = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' \geq 0 \rightarrow \text{energia elettrica } \geq 0, \text{ assorbita}$$

per ogni t e per ogni possibile esperimento che facciamo con il bipolo. Con $-\infty$ si indica l'istante in cui viene fabbricato il bipolo

se per un t nel capitolo ho detto più energia rispetto quella erogata, non è passivo

- Intuitivamente, l'energia complessivamente erogata dal bipolo al circuito a cui è collegato non può mai superare quella precedentemente assorbita

bipolo passivo non significa solo che assorbe energie elettriche può anche restituirla al circuito (condensatore) ma l'energia al. che eroga al circuito non è superiore di quella che assorbe

- attenzione, per un condensatore C ci sono in generale intervalli di tempo in cui l'energia è assorbita (C si carica), ed altri in cui l'energia è invece erogata (C si scarica dando indietro energia al circuito)

l'energia complessivamente erogata è $\geq$ dell'energia compless. erogata

per anche in t_1 per un solo esperimento

- se non vale la relazione precedente, allora il bipolo si dice attivo
- un bipolo attivo ha al suo interno una **sorgente di energia** (pila, alimentatore)

passivi: oggetti che al loro interno non hanno una sorgente di energia, non possono dare energia elettrica al circuito se non quella che hanno assorbito prima

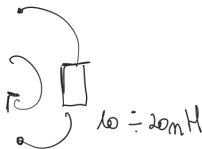
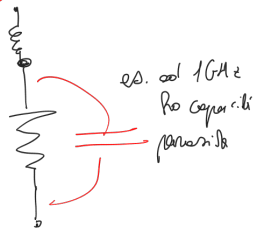
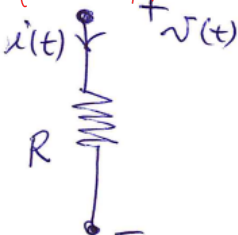
L'energia che fornisce il Bipolo passivo non supera l'energia che ha assorbito nel tempo

Bipolo attivo: bipolo che può fornire al ^{circuito} circuito più energia di quella ricevuta

Resistore ideale

4
legge Ohm

Ideale perché non ci sono elementi
parassiti, vale la legge di Ohm



- Convenzione utilizzatori. Relazione costitutiva (legge di Ohm)

$$\underline{v(t) = Ri(t)}$$

G = quanto facilmente
il resistore lascia
passare corrente

con R resistenza in Ohm. Oppure

$$i(t) = Gv(t)$$

$$G = \frac{1}{R}$$

con G conduttanza in Ohm^{-1}

- Potenza elettrica assorbita

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = Gv^2(t) \text{ Watt}$$

$$v(t) = Ri(t)$$

- Energia elettrica assorbita in dt

$$\underline{dw}(t) = v(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt \text{ Joule}$$

- Passività Verifichiamo $w(t) = \int_{-\infty}^t p(t') dt' \geq 0$

energia elettrica
assorbita da
intorno a

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t')i(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^t Ri^2(t') dt' = \int_{-\infty}^t Gv^2(t') dt' \geq 0 \end{aligned}$$

R è una costante

- un resistore ideale è passivo se e solo se $R \geq 0$ o $G \geq 0$

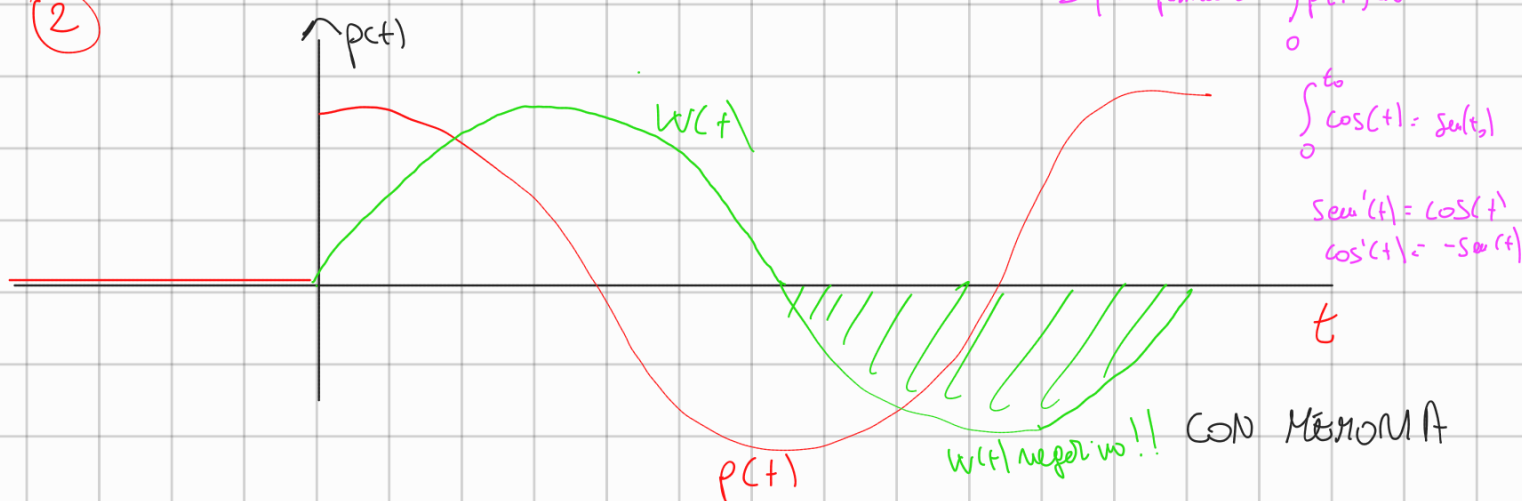
Esercizio Conversione degli utilizzatori



al tempo $t = -\infty$ (1) $p(t) = v(t)i(t) = \sin(t)$, $t \geq 0$

(2) $p(t) = v(t)i(t) = \cos(t)$, $t \geq 0$

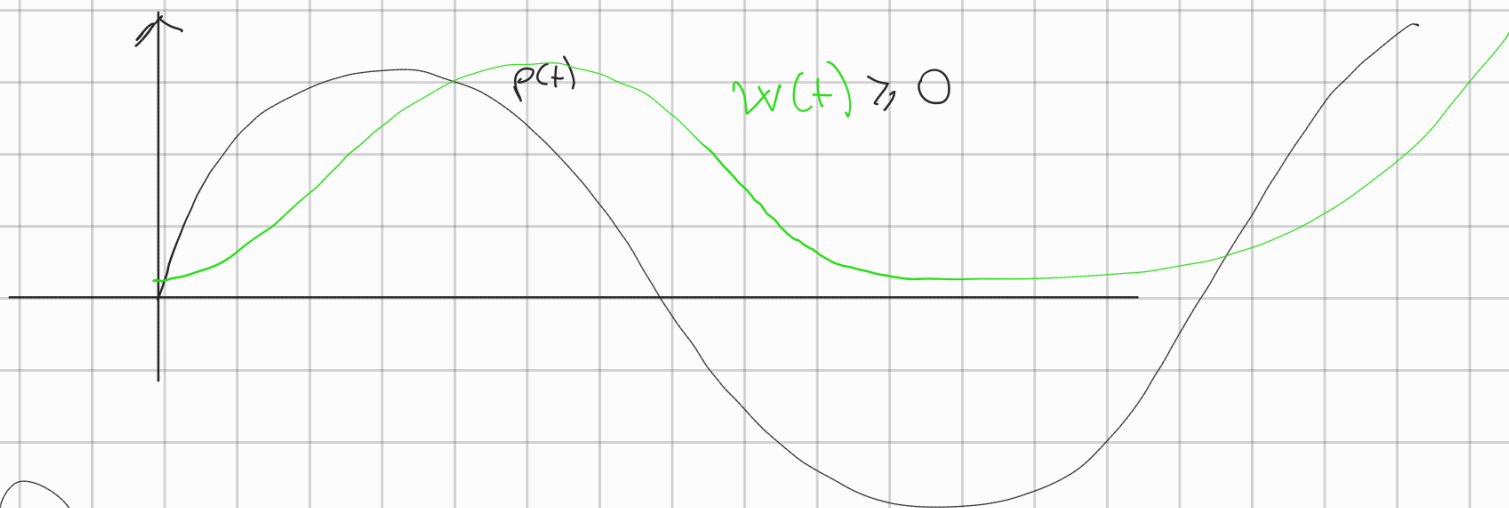
(2)



Conclusione: Si conclude che il caso (2) è sicuramente attivo, $W(t)$ negativa per un t

Caso (1)

$$\int_0^{t'} \sin(t) dt = -\cos(t') + \cos(0) = 1$$



(1) in questo esperimento $W(t)$ è ≥ 0 , ma solo per questo esperimento l'integrale è ≥ 0 non posso concludere se è passivo o attivo.

Risolvere ANALITICAMENTE

- un resistore ideale e' un elemento adinamico (senza memoria).
C'e' un legame istantaneo fra $v(t)$ e $i(t)$

- Casi particolari. Corto circuito (c.c.): $R = 0$ Ohm. Relazione costitutiva

$$v(t) = 0$$

qualunque sia $i(t)$

Resistenza piccola

$$R i(t) = 0 \quad \forall i$$

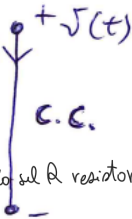
qualunque sia la corrente

come v. v. v. v. v.

dW = energia elettrica
assorbita dal
resistore in
intervallo dt

$$= p(t) dt = \underbrace{R i^2(t)}_{\text{energia dissipata sotto forma di calore}} dt \rightarrow \text{calore}$$

Calore sviluppato sul R resistore



Resistore negativo si realizza con I/VIC
fornisce energia elettrica

- Circuito aperto (c.a.): $G = 0 \text{ Ohm}$. Relazione costitutiva

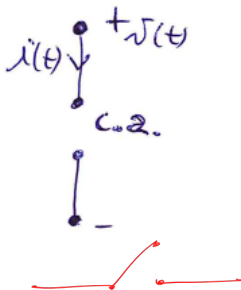
$R \rightarrow + \infty$

qualunque sia $v(t)$

$$i(t) = 0$$

$$\forall v(t)$$

resistenza totale
grande che impedisce
il passaggio di corrente



- Interruttore ideale. E' un c.c. negli intervalli di tempo in cui e' chiuso e un c.a. in quelli in cui e' aperto

non si associa energia el. in c.c. o c.a.

$$\int_0^t R i^2(t) dt \text{ e } 0$$

in c.c. e c.a.

- c.c., c.a., e interruttore ideale sono elementi **inerti**. Si ha $p(t) = 0$ per ogni t e quindi non partecipano agli scambi energetici

poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

- poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

poiché $\partial \tilde{z} = 0$
 $\partial V = 0$

- tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

- tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

- tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

- tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

tutta l'energia
el. assorbita viene
dissipata

Condensatore Ideale elemento conservativo

Modello ideale

- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

$$i = \frac{dq}{dt}$$

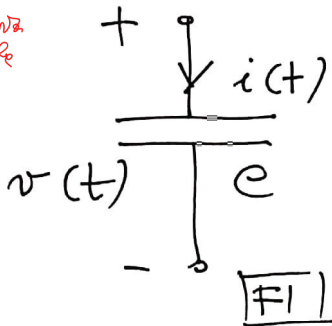
carica
di elettroni
in un
tempo

$$q(t) = C v(t)$$

$$q(t) = C v(t)$$

con $q(t)$ carica sulle armature all'istante t e C capacita' in Farad
del condensatore

Condensatore reale, si comporta
similmente a quello ideale



Convenzione utilizzatore

$$q(t) = C v(t)$$

$$i = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\int_0^{t_0} i(t) dt = q(t_0)$$

$$\frac{q(t)}{dt} = \frac{d(C v(t))}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

inversa.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Condensatore: separazione di cariche

Legge in forma differenziale controllata in tensione

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

Se vogliamo trovare $v(t)$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

$\underbrace{t_0}_{v(t_0) \text{ stato iniziale}}$ $\underbrace{t_0}_{t_0}$

$\rightarrow$ rappresent. controllata in corrente

con $v(0)$ tensione iniziale su C

$v(t)$ o $q(t)$ variabile di stato del nostro CONDENSATORE

- $v(t)$ (oppure $q(t)$) e' detta variabile di stato di C $v(0)$ (oppure $q(0)$) e' lo stato iniziale

meglio sapere la tensione che la corrente

$v(t)$ e la variabile di stato, con i

- C e' un elemento con memoria: per conoscere $v(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $v(0)$ e anche tutto l'andamento di $i(t)$ fra 0 e t

$v(t)$ e $i(t)$ non sono legati direttamente

$v(t)$ tiene in memoria l'andamento della corrente da t_0 a t

Energetica del condensatore ideale

dal punto di vista energetico

- La potenza istantanea assorbita vale

$$dw = dE_C = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

conservata

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

Energia del
campo elettrico del
condensatore

→
istante per istante
potenza istantanea coincide
con E del campo elettrico
del condensatore

dove

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo elettrico di C. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo elettrico di C

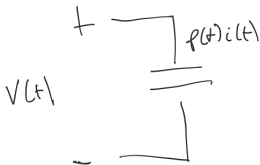
$$dw = p(t) dt$$

- ↓
- in termini differenziali

variazione di energia del campo elettrico del C

$$dw(t) = p(t)dt = dE_C(t) = d\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) \geq 0 \text{ oppure } \leq 0$$

- l'energia elettrica dw assorbita da C in dt coincide con la variazione di energia del campo elettrico di C in dt



Tutto quello che entra viene immagazzinato sotto forma di energia del campo elettrico

es. immagazzina 1J sotto forma di campo elettrico
rida esattamente al circuito 1J

Elemento conservativo

- ne consegue che
 - il ~~condensatore ideale~~ è un elemento **conservativo** (accumulatore perfetto)
 - ~~immagazzina sotto forma di energia del campo elettrico tutta l'energia elettrica assorbita~~
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo elettrico è completamente **reversibile**, cioè C è capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo elettrico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di C); in particolare C è capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita
 - C **non dissipa**; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

Perché C non dissipa?

se coulomb $dW = dE_C + \underbrace{dQ \cdot \underbrace{0}_{\text{calore}}}$

anche 1 J e la rete tutto nel lavoro el

→ si scarica poi il corpo el. e lui resti 1 J

$$dE_C(t) = d\left(\frac{1}{2} C v^2(t)\right) ! \text{ conservativo}$$

è un campo conservativo
il campo elettrostatico

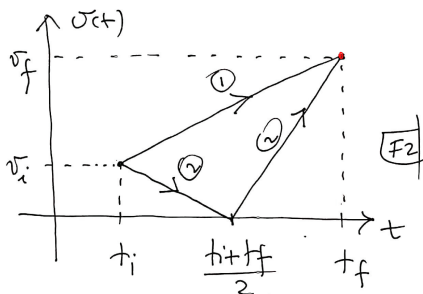
- in termini matematici

$$dw = dE_C = d\left(\frac{1}{2} C v^2\right)$$

significa che dw è un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato v)

- analogo al lavoro compiuto dal campo elettrostatico (campo conservativo) in fisica

- **Esempio.** Calcolare l'energia elettrica assorbita da C nell'intervallo $[t_i, t_f]$ per i due diversi andamenti di $v(t)$ in figura



arrivo a v_f con
due percorsi
diversi

(è un elemento conservativo,
indipendente del percorso

energia assorbita da C nell'intervallo

- si ha

$$\begin{aligned}
 w_{[t_i, t_f]} &= \int_{t_i}^{t_f} p(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} v(t) i(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dw = dE_C \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dE_C = \underline{E_C(t_f) - E_C(t_i)} = \boxed{\frac{1}{2} C v_f^2 - \frac{1}{2} C v_i^2 \text{ joule}}
 \end{aligned}$$

energia finale - energia iniziale
indipendentemente dal percorso

- l'energia elettrica assorbita dipende solo da stato iniziale v_i e finale v_f ma non dall'andamento di $v(t)$ fra t_i e t_f

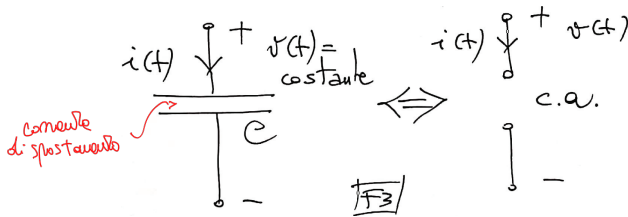
Come si comporta C?

- **C in regime stazionario** Tensione applicata costante

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Se $v(t) = \text{costante}$, $i(t) = 0$, quindi in regime stazionario C equivale a un circuito aperto (stessa relazione costitutiva)

Per la stessa
velocità
costitutiva
di un
circuito aperto



Tensione non costante? la corrente ci passa.

Es Tensione sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} =$$

quando Tensione è costante
non passa corrente

Induttore Ideale

gli induttori reali diversi molto da quelli ideali

scelte del convenzionamento

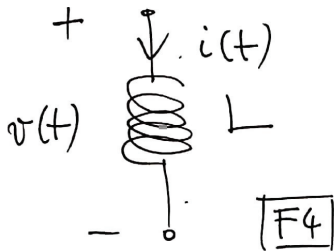
- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

INDUTTANZA

$$\varphi(t) = \downarrow Li(t)$$

però costante in un'unica induttanza

con $\varphi(t)$ flusso del campo di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento all'istante t e L induttanza in Henry dell'induttore



variabile di stato per l'evoluzione: tensione

$i_C(t)$ e $v_L(t)$ non permettono di sapere lo stato energetico

var. stato induttore: corrente o flusso

- Relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

per induttori

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

costante in f. della
tensione

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

con $i(0)$ corrente iniziale in L

- $i(t)$ (oppure $\varphi(t)$) e' detta variabile di stato di L ; $i(0)$ (oppure $\varphi(0)$) e' lo stato iniziale

- L e' un *elemento con memoria*: per conoscere $i(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $i(0)$ e anche tutto l'andamento di $v(t)$ fra 0 e t

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

avendo la corrente posso sapere

Energetica dell'induttore ideale

lo stato energetico

- La potenza istantanea assorbita vale

Com. di lavoro

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)L \frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_L(t)$$

dove

$$dW = p(t) dt$$

$$E_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo magnetico di L. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_L(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo magnetico di L

- in termini differenziali

$$dw(t) = p(t)dt = dE_L(t) = d\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

- l'energia elettrica dw assorbita da L in dt coincide con la variazione di energia del campo magnetico di L in dt

anche come Joule, lo perde e lo riduce nel corpo
negli

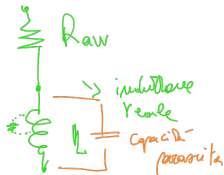
diminuisce la corrente, si scarica il corpo magnetico e
verifica

- ne consegue che
 - l'induttore ideale e' un elemento conservativo (accumulatore perfetto)
 - immagazzina sotto forma di energia del campo magnetico tutta l'energia elettrica assorbita
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo magnetico e' completamente reversibile, cioè L e' capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo magnetico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di L); in particolare L e' capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita *energia conservata nel circuito*
 - L non dissipa; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

- in termini matematici

$$dw = dE_L = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Ma qui
coppia di
forze c'è
capacità

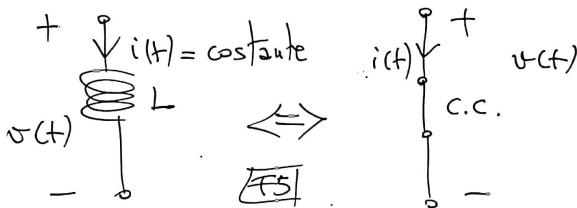


significa che dw e' un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato i)

perché $v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0$

- Se $i(t) = \text{costante}$, $v(t) = 0$, quindi in regime stazionario L equivale a un corto circuito (stessa relazione costitutiva)

reagisce
 L è costante,
dipende dalla
freq e la
corrente



in un induttore ideale
non si apre il
cortocircuito costante per "gestione" di corrente

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t dW = \int_{-\infty}^t d\bar{E}_c = \bar{E}_c(t) - \bar{E}_c(-\infty) = \\
 &= \frac{1}{2} c v^2(t) - \frac{1}{2} c v^2(-\infty) = 0, \text{ appena l'atomo si è scaricato.}
 \end{aligned}$$

Dimostrazione p. 140.

L'energia è sempre ≥ 0

Generatore Indipendente Ideale di Tensione

- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$v(t) = e_g(t)$$

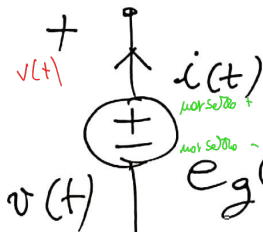
un generatore applica al circuito una tensione nota a priori

Funzione nota del tempo

cioe' la tensione impressa ai morsetti e' una assegnata (nota) funzione del tempo $e_g(t)$

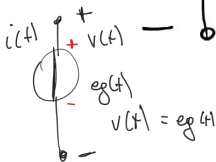
Conversione dei generatori

eg: tensione impressa ai morsetti



$$e_g(t) =$$

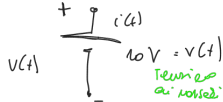
generatore Tensione impressa dal generatore



nei libri

in generazione indipendente e ideale, non posso dire nulla a priori della misura, devo prima applicare tensione

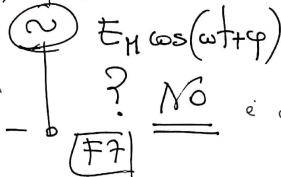
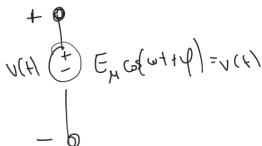
- p. es. $e_g(t) = E = \text{costante (batteria)}$



- $e_g(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di tensione sinusoidale; alternatore); anche nel caso dell'alternatore dobbiamo indicare uno dei due morsetti del generatore con il + e l'altro con il - (altrimenti siamo in una situazione ambigua); la rappresentazione nella figura che segue e' ambigua e non va usata

la corrente lo
trova a posteriori

$$e_g(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi) \quad v(t) \quad i(t)$$



è ambiguo, non so a quale morsetto

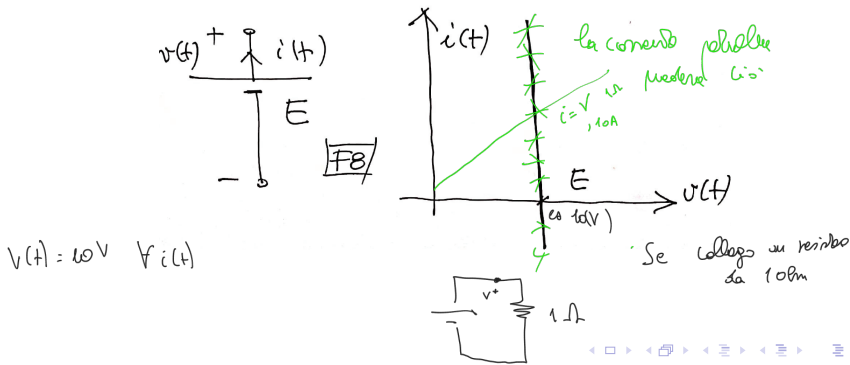
metto + per morsetto, per capire qual
è il morsetto a potenziale maggiore



$$i_R = \frac{V(t)}{R} = \frac{10}{R}$$

- per un generatore indipendente ideale di tensione e' nota a priori la tensione $v(t)$ impressa ai morsetti mentre non e' nota la corrente $i(t)$ erogata; la corrente $i(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la corrente solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

- **Esempio.** Caratteristica tensione corrente di una batteria
 $v(t) = E$.



Generatore indipendente ideale di corrente

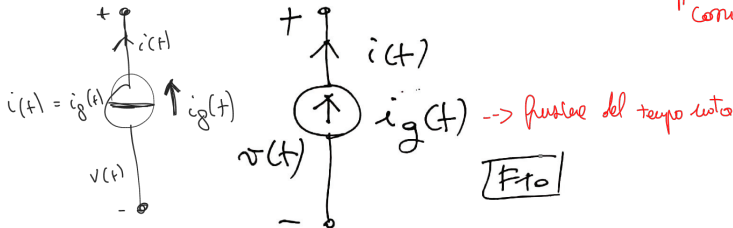
- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$i(t) = i_g(t)$$

*conservo la corrente
che da questo
generatore*

cioè la corrente impressa ai morsetti è una ~~assegnata~~ (nota)
funzione del tempo $i_g(t)$

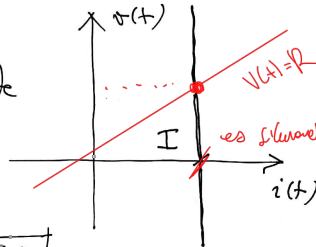
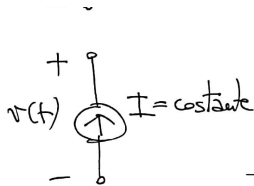
*non soppianto la
corrente*



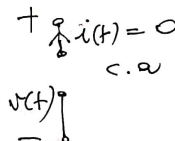
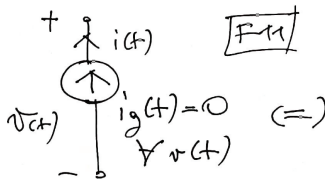
- p. es. $i_g(t) = I = \text{costante}$
- $i_g(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di corrente sinusoidale)

- per un generatore indipendente ideale di corrente e' nota a priori la tensione $i(t)$ impressa, ~~ai~~ mentre non e' nota la tensione $v(t)$ ai morsetti; la tensione $v(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la tensione solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

- Esempio.** Caratteristica tensione corrente di un generatore di corrente costante $i(t) = I$.



es. si assume $i = 1A$ la corrente
 con v puo' essere
 qualsiasi



$[F-11]$

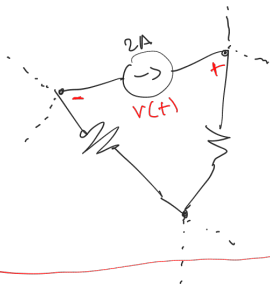
(=)

- **Disattivare** un generatore ind.te ideale di corrente significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

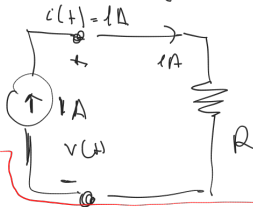
$$\underline{i(t) = i_g(t) = 0, \quad \forall v(t)}$$

converte 0 ∇ tensione
e in circuito
aperto

- in tale situazione il generatore **equivale a un circuito aperto**.

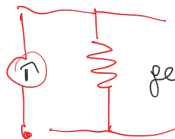


la tensione si equivalga



$$v(t) = R \cdot 1A$$

V non vincolata
in relazione
a R



generatore di corrente reale con capacità di assorbimento

Energetica di un generatore indipendente ideale di tensione

dentro c'è un sistema chimico, ci sono scambi energetici tra batteria e circuito

- Un generatore indipendente è l'interfaccia per eccellenza fra circuito e mondo esterno. Scambia energia elettrica in modo illimitato e completamente reversibile operando la conversione fra energia elettrica e altre forme di energia non elettriche (ad es. energia chimica) *Scambi energetici sono reversibili*

in un intervallo di tempo può assorbire e dare energia elettrica

- per una batteria di un'automobile (sistema elettrochimico) si ha (convenzione dei generatori)

$$dw = dE_{\text{chimica}} = \text{energia elettrica scambiata da un sistema chimico}$$

cioè energia elettrica scambiata con circuito (dw) coincide con energia scambiata in modo reversibile con un sistema chimico (dE_{chimica})

- il segno può essere positivo o negativo. Le batterie idealmente possono erogare o assorbire energia elettrica
- ad esempio, se si genera energia di legame chimico $dE_{\text{chimica}} > 0$, allora una pari quantità di energia elettrica viene data al circuito ($dw = dE_{\text{chimica}} > 0$). Se la batteria assorbe energia elettrica, viene accumulata nella batteria una pari quantità di energia sotto forma di legami chimici ($dw = dE_{\text{chimica}} < 0$)
- durante tali processi di carica e scarica non vi è dissipazione.

CONVENZIONE DEI GENERATORI

$dw = dE_{\text{chimica}} > 0 \Rightarrow$ batteria sta erogando energia elettrica

$dw = dE_{\text{chimica}} < 0 \Rightarrow$ la batteria sta assorbendo energia dal circuito

trasformazione perfettamente reversibile $\Rightarrow$ non c'è dissipazione.

da IS al circuito

$\rightarrow$ mette IS al circuito

Se perdesse qualcosa

$$dw = dE_{\text{chimica}} + dQ_{\text{calore}}$$

Leggi di Kirchhoff

per analizzare un circuito devo conoscere:

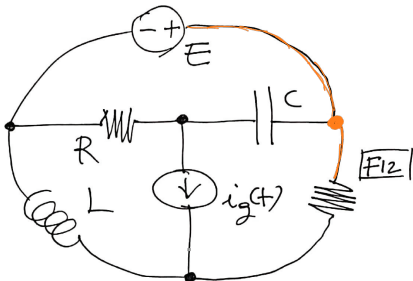
- Per scrivere le leggi di Kirchhoff di un circuito devo preliminarmente stabilire un riferimento elettrico sul circuito. Cio' si effettua assegnando un verso di riferimento (ad arbitrio) per ciascuna tensione e corrente degli elementi del circuito.

devo conoscere (1) *Relaz. costitutive* (2) *Leggi di Kirchhoff*

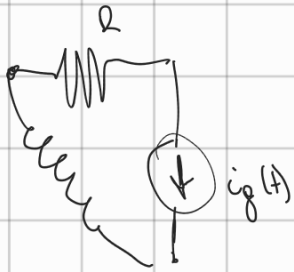
• Grafo e Grafo Orientato Associato a un Circuito

(1) *Metto verso di rif. di per tensione e corrente*

- Consideriamo un circuito con 6 bipoli come in figura. Supponiamo che il circuito sia connesso



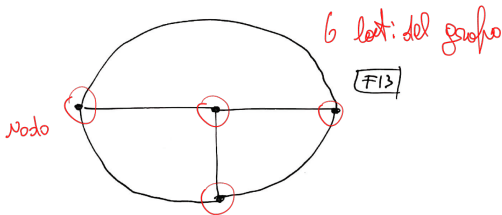
Leggi di Kirchhoff non dipendono dagli elementi ma
da come sono collegati



ad ogni bipolo faccio corrispondere
un lato del grafico

$$l = n^{\circ} \text{ bipoli} = \underline{n^{\circ} \text{ lati del grafico}}$$

- **Grafo.** A ciascun bipolo facciamo corrispondere astrattamente un **lato** del grafo. Sia in generale ℓ il numero di lati del grafo (numero di bipoli). In questo caso $\ell = 6$

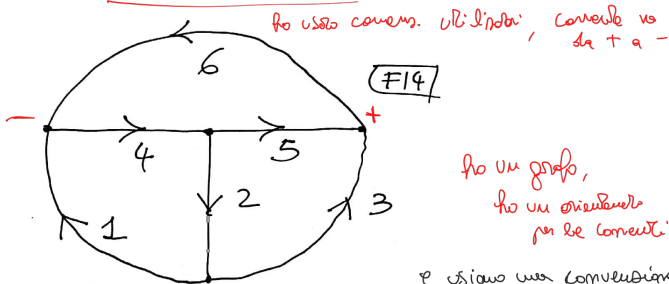


- **Nodo:** e' un punto del grafo dove sono connessi due o piu' bipoli. Sia n il numero di nodi (in questo caso $n = 4$)

nodi connessi.

Metto un orientamento

- **Grafo Orientato:** scelgo una numerazione per i lati del grafo e assegno ad arbitrio un verso di riferimento per la corrente di ciascun lato indicando tale verso con una freccia

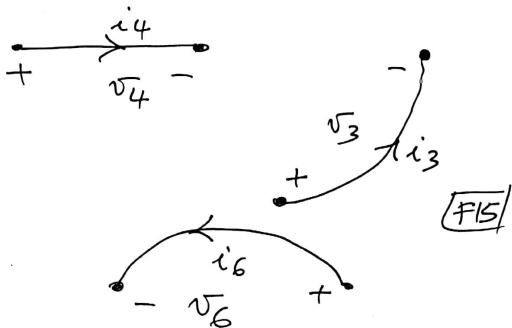


*avendo fissato verso riferimento
corrente, ho arbitrario. verso temp.*

*e usiamo una convenzione
es. utilizzatori*

Differenziale Elettrico sul nostro circuito

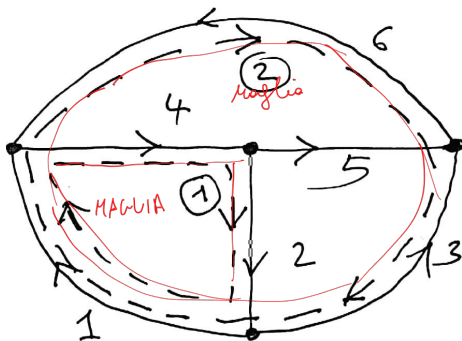
- supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ciascun bipolo; ne consegue che, fissato il verso di riferimento della corrente, resta automaticamente fissato il verso di riferimento della tensione di ciascun bipolo



- il grafo orientato tiene conto di quanti bipoli ci sono e come sono interconnessi fra di loro (topologia del circuito); astrae però dal tipo di elementi presenti

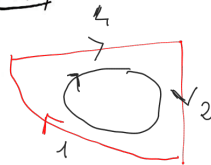
Leggi Kirchhoff *non dipendono dal tipo di elementi*

- Una volta fissato un grafo orientato, siamo in grado di scrivere le leggi di Kirchhoff per il circuito
- Scegliamo una **maglia** sul grafo, cioè' un percorso chiuso formato da lati del grafo. **Orientiamo** la maglia in senso orario o antiorario.



Prendo verso di percorrenza

(FIG)



- **Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)**. E' nulla, istante per istante, la **somma algebrica** delle tensioni dei lati che si incontrano percorrendo la maglia (algebrica significa che la tensione ha un segno); ogni tensione si prende col segno + se concorde con il verso di percorrenza della maglia, col segno - altrimenti

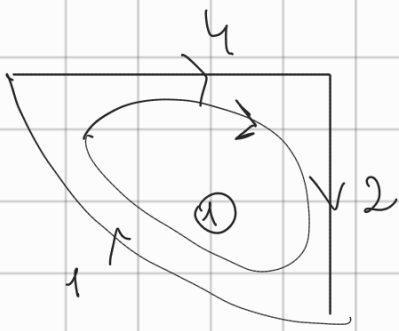
- Per la maglia 1 si ha

$$v_2 + v_1 + v_4 = 0$$

mentre per la maglia 2 si ha

$$-v_6 - v_3 + v_1 = 0$$

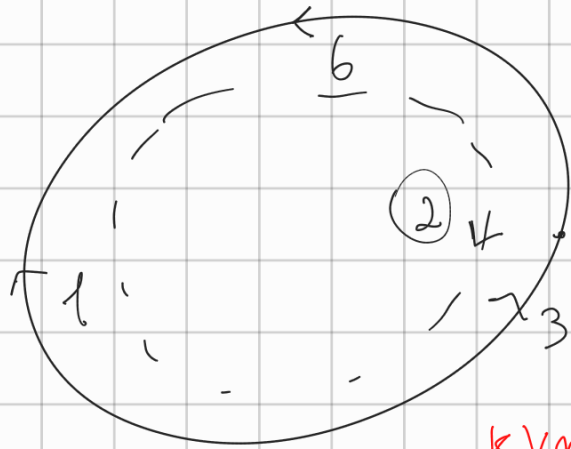
- ogni KV implica un vincolo di dipendenza fra le tensioni dei lati della maglia; quindi $v_1(t), \dots, v_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro



KV maglia 1

$$+V_2 + V_1 + V_4 = 0$$

per legge di K
 Analisi vincoli
 lineari e i vincoli
 sono indipendenti tra le
 2 maglie



KVm 2

$$+V_1 - V_6 - V_3 = 0$$

- problema: quante KV indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante tensioni indipendenti ci sono per un grafo orientato?

ℓ lati, n nodi

- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KV indipendenti sono in generale pari a $\ell - n + 1$, quindi le tensioni indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (\ell - n + 1) = n - 1$

ho 60 lati, 60 maglie

3, leff - di k indipendenti

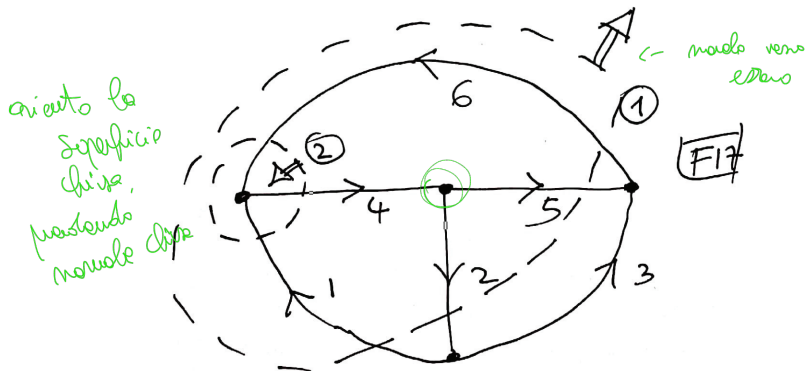
$\ell - 31$ tensioni indep

$= \boxed{n-1}$ *numero tensioni indipendenti*
meno di nodi - 1

- Superficie Gaussiana: linea chiusa che taglia i lati del grafo senza passare dai nodi.

"taglia in due il grafo senza passare dai nodi"

- Scegliamo una linea Gaussiana e **orientiamo** la linea scegliendo una normale positiva rivolta verso l'esterno o verso l'interno



*non si deve assumere corrente in un
superficie chiusa*

- Legge di Kirchhoff per le correnti (KI). E' nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che intersecano la linea Gaussiana (algebraica significa che la corrente ha un segno); ogni corrente si prende col segno + se concorde con la normale alla linea Gaussiana, col segno - altrimenti

*+ se concordo alla normal
- se non concorde*

- Per la linea 1 si ha

$$i_5 - i_6 - i_1 + i_2 = 0$$

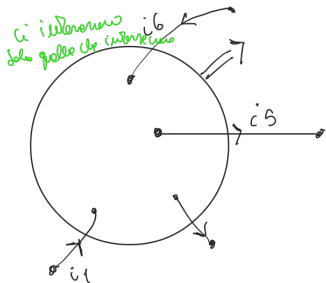
mentre per la linea 2 si ha

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

- ogni KI implica un vincolo di dipendenza fra le correnti dei lati intersecati da una linea Gaussiana; quindi $i_1(t), \dots, i_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro

- problema: quante KI indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante correnti indipendenti ci sono per un grafo orientato?

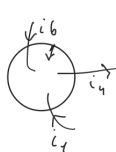
- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KI indipendenti sono in generale pari a $n - 1$, quindi le correnti indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (n - 1) = \ell - n + 1$



$$k_i = i_5 - i_6 - i_1 + i_4 = 0$$

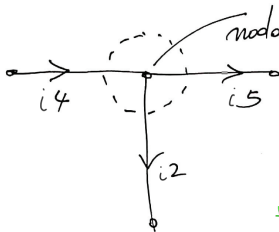
3 ki indep.

$n - 1$ ki indep.
Bra di Bono



$$i_1 + i_6 - i_4 = 0$$

- **Seconda Versione della KI (Fisica II):** E' nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che ^{collegano} incidono in un nodo. Ogni corrente si prende col segno + se esce dal nodo, col segno - altrimenti



[F18]

+ se entrano nel nodo
- se escono

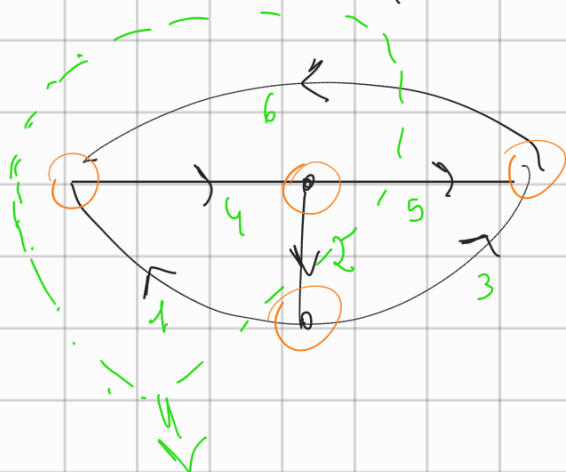
• si ha

$$-i_4 + i_2 + i_5 = 0$$

• e' facile mostrare che le due formulazioni sono equivalenti fra di loro.

↳ prendo una superficie gaussiana per ogni nodo e prendo una normale che esce dalla superficie chiusa

il viceversa? bene pero sta legge F.II da mostrare!



$$-i_1 + i_4 - i_6 = 0$$

$$i_5 + i_2 (-i_4) = 0$$

sostituisco

ho un circuito con l bipoli connessi

incognite: tutte le tensioni e tutte le correnti

↳ le tensioni + le correnti = $2l$ incognite

$l - n + 1$ KV indipendenti tra loro $\Rightarrow$ se le sommo...
 $n - 1 + KI$ indipendenti

le equaz. indipendenti
 le relazioni costitutive +

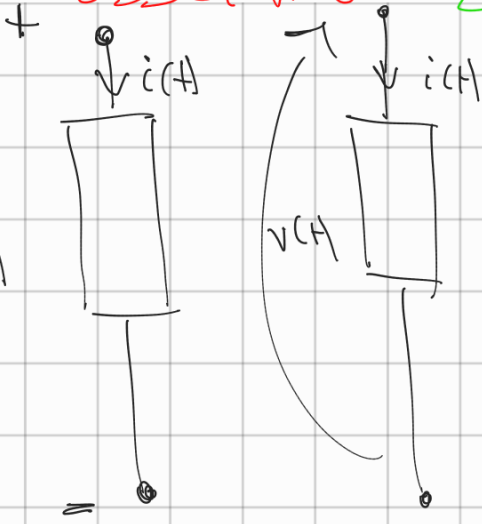
$2l$ numero di equaz.

leggi K-moff + relaz. costitutive
 il problema e' ben posto

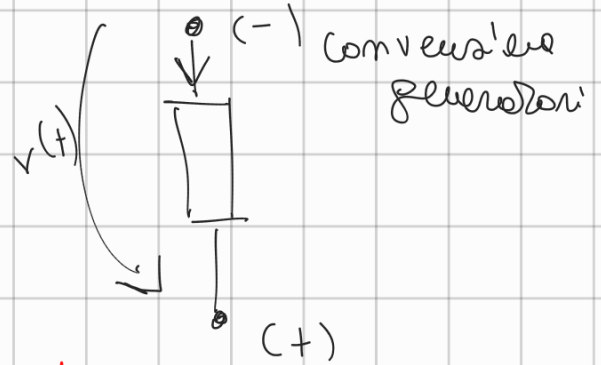
OSSERVAZ

← allora motori per le tensioni

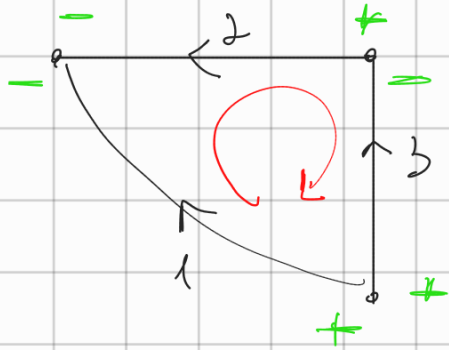
$v(t)$



freccie discordi = convert. utilizzatori

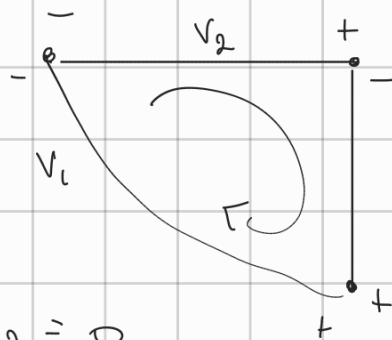


OSS 2. modo equivalente Kirchhoff



$$+V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

ma posso anche



Si sommo le
cadute di tensione

$$+V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

↓
Se vedo
cadute di tensione

Somma le cadute di tensione

