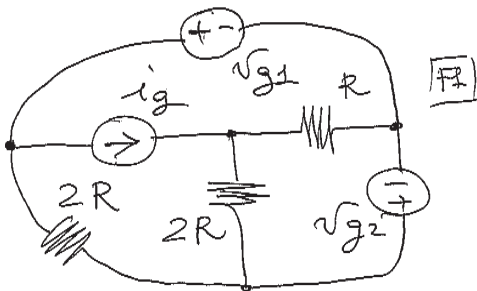


- **Metodi Generali di Analisi di Reti Resistive**

- Consideriamo il seguente circuito con $\ell = 6$ bipoli e $n = 4$ nodi.

Risolvere il circuito significa determinare tutte le tensioni v_i e correnti i_i dei bipoli. Sono $2\ell = 12$ incognite

note
intro: 6

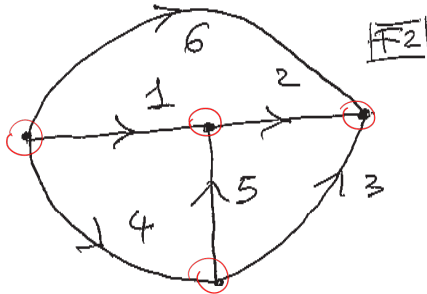


- In pratica si individua un sottoinsieme delle incognite, dette variabili ausiliarie, e si cerca di scrivere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili ausiliarie; dalle variabili ausiliarie possiamo poi trovare indirettamente tutte le altre incognite

- per individuare le variabili ausiliarie e scrivere il sistema risolvante facciamo uso di alcuni elementi di teoria dei grafi

Consideriamo un *grafo orientato* associato al circuito; il grafo e' *connesso* ed ha un numero di lati $\ell = 6$ pari al numero di bipoli; supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ogni lato

- *nodo*: e' un punto del grafo a cui sono connessi due o piu' bipoli; si hanno in questo caso $n = 4$ nodi



Possiamo anche avere un nodo pleguere,
Solo due lati



Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)

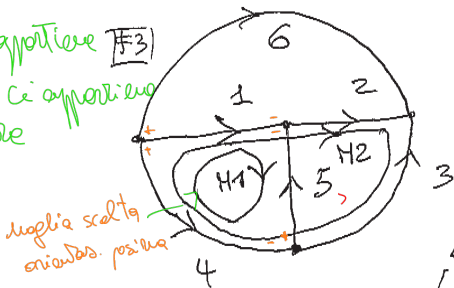
• maglia: insieme di lati che formano un percorso chiuso; ad esempio $M1 = \{1, 5, 4\}$, $M2 = \{1, 2, 3, 4\}$, etc. Per ogni maglia possiamo scrivere una KV. Ad esempio, orientando $M1$ e $M2$ in senso positivo orario otteniamo

$$KV\ M1: v_1 - v_5 - v_4 = 0; \quad KV\ M2: v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

contiamo le maglie indipendenti:

ogni maglia consente di scrivere una KV

se il lato appartiene alla maglia, ci appartiene una sola volta



ogni KV porta un vincolo

es. 1 nota v_1, v_4 , trovo v_5

• ogni KV lungo una maglia stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le tensioni dei lati che fanno parte della maglia; le tensioni dei lati v_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, non sono quindi tutte indipendenti di loro

$m - \ell + 1$ KV indipendenti

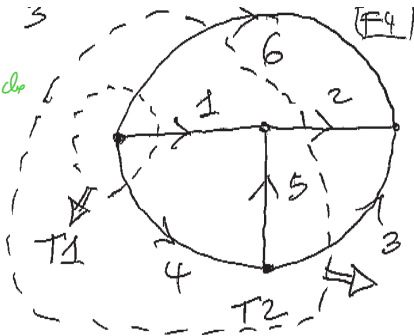
Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)

- taglio: consideriamo una linea chiusa (linea Guassiana) che taglia il grafo in due parti senza passare dai nodi; per taglio si intende l'insieme dei lati che sono intersecati dalla linea chiusa

lines
more
sained

negli: insieme dei lati

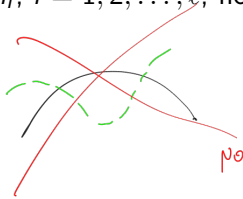
Figlio: insieme dei bati
che interseco, che
Figlio



per ogni $T \in \mathcal{T}$
possiede
una $K \perp$

- ad esempio $T1 = \{1, 6, 4\}$, $T2 = \{6, 2, 3\}$
 - orientiamo ciascun taglio scegliendo una normale positiva alla linea chiusa (uscente o entrante); nel caso in figura si ha
ogni taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare tra le costanti
- $$KI \ T1 : i_1 + i_4 + i_6 = 0; \quad KI \ T2 : i_6 + i_2 + i_3 = 0$$

- ogni KI per un taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le correnti dei lati che fanno parte del taglio; le correnti dei lati i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, non sono quindi tutte indipendenti di loro



Se C_i appartiene, C_i appartiene 1 volta

Le l tensioni e le l correnti non sono tutte indipendenti

Supponiamo di avere un grafo orientato

- Albero: insieme di lati del grafo:

- 1) Connesso

- 2) tocca tutti i nodi

- 3) non forma percorsi chiusi

(UN ALBERO NON CONTIENE MAGLIE)

- Proprietà: ogni albero ha $n-1$ rami

- # Co-albero: insieme dei lati del grafo che non appartengono all'albero
(insieme complementare)

=> gli elementi dei co-alberi si chiamano conole (bratteggiata)

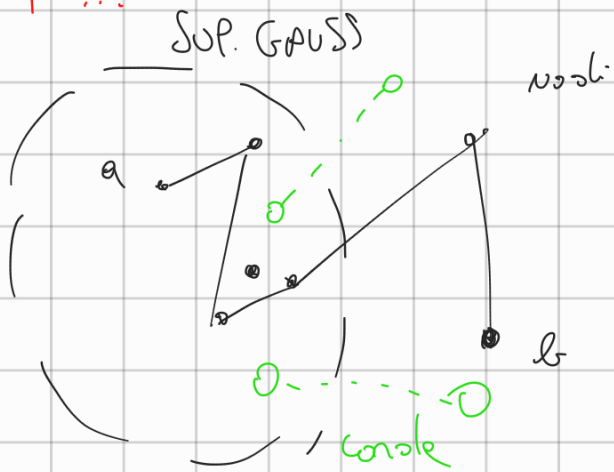
- Un coalbero può contenere una maglia

- ogni albero ha $l - (n - 1) = l - n + 1$ conole

- ogni co-albero valido non contiene tagli

(tutte le volte che taglio il mio circuito, mi interseco per forza con un ramo)

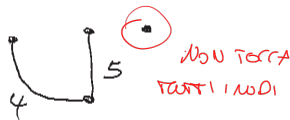
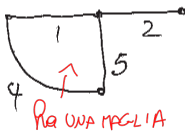
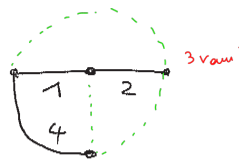
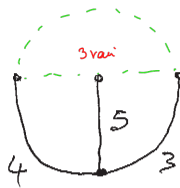
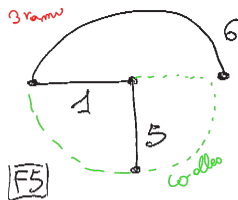
Dim!!!



per sf. di altro, ho
un percorso che u.
va da a a b

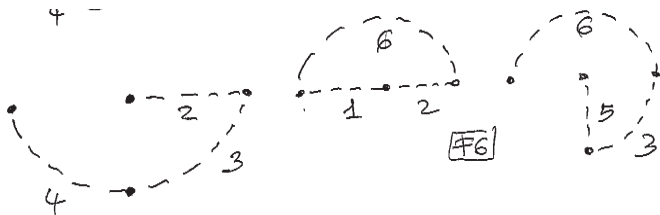
la mia superficie chiusa
non può intersecare
Solo corde

- **Albero**: insieme connesso di lati del grafo che tocca tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie) $n-1$ KI indipendenti



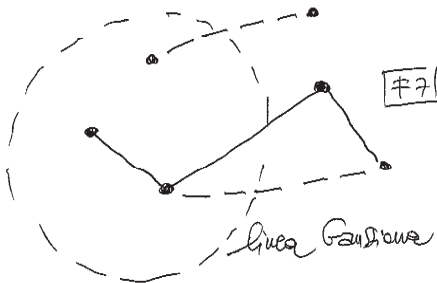
- esempi di alberi validi e di alberi non validi
- Proprietà: ogni albero ha $n - 1$ rami
- Infatti il primo ramo connette 2 nodi; aggiungendo un ramo connesso un terzo nodo; procedendo così riesco a connettere tutti gli n nodi con $n - 1$ rami

- *Coalbero*: insieme di lati del grafo che non fanno parte dell'albero



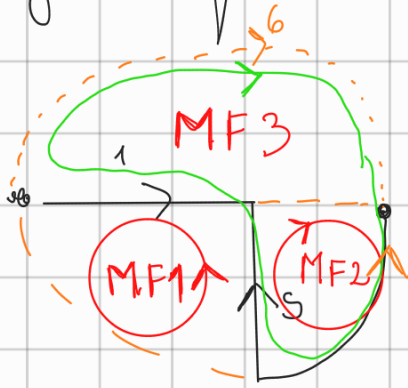
- esempi di coalberi validi e esempi di coalberi non validi (fare)
- Proprieta': ogni coalbero ha $\ell - n + 1$ corde (ovvio)
- convenzionalmente i rami dell'albero vengono indicati a tratto continuo mentre le corde sono tratteggiate

- Proprieta: un coalbero non contiene tagli (non e' possibile tagliare il grafo in due parti intersecando solo corde)



- Cenno alla verifica: consideriamo una linea chiusa che taglia il grafo in due parti; prendiamo un nodo interno ed un nodo esterno alla linea chiusa; dato che l'albero connette tutti i nodi, ed e' connesso, vi sara' un percorso lungo l'albero che collega il nodo interno a quello esterno; quindi la linea chiusa interseca almeno un ramo dell'albero

Maglia fondamentale associata al mio albero



: contiene 1 corda e,
per il resto, solo rami
dell'albero

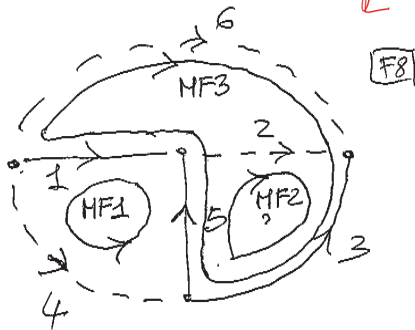
Prendo un albero
& prendo un ramo

Le MF sono in corrispondenza biunivoca
con le corde del co-albero

Vi sono $l - n + 1$ MF associate all'albero

Proprietà': se aggiungo una corda ad un albero si forma una maglia costituita dalla corda e, per il resto, da rami dell'albero; tale maglia è detta *maglia fondamentale* (MF)

maglia fondamentale associata ad un albero



• Proprietà': le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde del coalbero; vi sono quindi $\ell - n + 1$ maglie fondamentali associate all'albero; ciascuna maglia fondamentale si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente della corda che le individua

- $MF1 = \{1, 5, 4\}$; $MF2 = \{2, 3, 5\}$; $MF3 = \{1, 3, 5, 6\}$

$$\underline{V} = (V_1, V_2, \dots, V_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$$

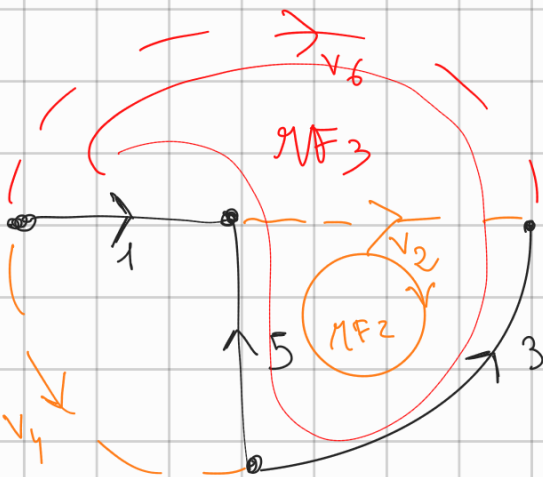
$V_a \in \mathbb{R}^{m-1}$ vettore delle $m-1$ Tensioni dei rami dell'albero

$V_c \in \mathbb{R}^{\ell-m+1}$ vettore delle $\ell-m+1$ Tensioni delle corde del ω -albero

V_a sono una base per lo spazio delle Tensioni V dei lati del grafo

$\Rightarrow V_a$ sono indipendenti $\rightarrow$ non ci sono legami tra di loro
 Note V_a posso determinare V_c , scrivendo $\ell-m+1$ KV alle MF

$\rightarrow$ per un albero non contiene neppure un ciclo, non ci sono vincoli di dipendenza lineari tra le V_a



$$V_a = \{V_1, V_3, V_5\} \quad m-1$$

$$V_c = \{V_2, V_4, V_6\} \quad \ell-m+1$$

voglio V_4 , applico la KV $\Rightarrow$

$$V_4 + V_5 - V_1 = 0 \Rightarrow V_4 = V_1 - V_5$$

Scritto V_i in funzione della base

$$V_2 - V_3 + V_5 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 - V_5$$

$$V_6 - V_3 + V_5 - V_1 = 0 \Rightarrow V_6 = V_1 + V_3 - V_5$$

$\Rightarrow$ ho usato $\ell-m+1$ KV MF INDIPENDENTI per costruzione

- Indichiamo con $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle tensioni dei lati del grafo

- **Tensioni indipendenti.** Indichiamo con $\mathbf{v}_a$ il vettore delle $n - 1$ tensioni dei rami dell'albero e con $\mathbf{v}_c$ il vettore delle $\ell - n + 1$ tensioni delle corde del coalbero.

Le tensioni $\mathbf{v}_a$ formano una base per lo spazio delle tensioni dei lati del grafo, e cioè:

1) le tensioni $\mathbf{v}_a$ sono indipendenti fra di loro

2) da $\mathbf{v}_a$ si possono determinare le tensioni dipendenti $\mathbf{v}_c$ scrivendo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che l'albero non contiene maglie (pensarci!)

V_a = tensioni indipendenti.

V_c = tensioni co-albero, dipendenti.

Ho $\ell - n + 1$ corde. per ogni corda, costruisco una MF
per ogni MF, scrivo una KV.

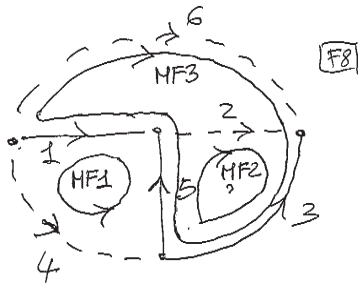
ricavo le $\ell - n + 1$ V_c con le $\ell - n + 1$ KV

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo di un esempio; scegliamo l'albero in figura per cui $\mathbf{v}_a = (v_1, v_3, v_5)^T$ e $\mathbf{v}_c = (v_2, v_4, v_6)^T$; le $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF sono date da

$$v_4 - v_1 + v_5 = 0$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_6 - v_1 - v_3 + v_5 = 0$$



- notare che tali KV sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la tensione della corda che individua la MF corrispondente; tale tensione non appare per costruzione in altre KV

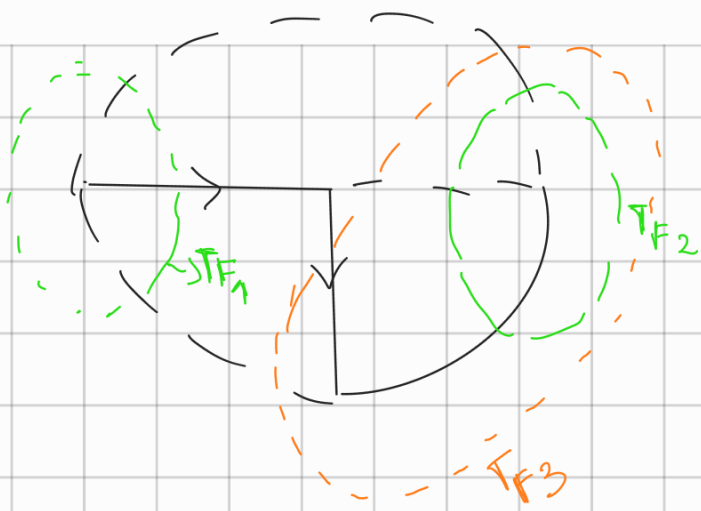
- risolvendo otteniamo le $\ell - n + 1 = 3$ tensioni dipendenti delle corde in funzione delle tensioni indipendenti dei rami dell'albero

$$\begin{aligned} v_4 &= v_1 - v_5 \\ v_2 &= v_3 - v_5 \\ v_6 &= v_1 + v_3 - v_5 \end{aligned}$$

Posso anche scrivere $\underline{v}_c = \underline{A} \underline{v}_g$

vetture tensioni dei lati è ortogonale a quello delle corse.

NICE



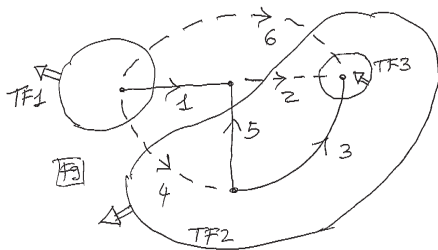
Tagli fondamentali, prendo
un ramo e tutto quello

provo un ramo e se è possibile
tagliare il circuito
in questo modo

- Tagli fondamentali e rami dell'albero sono in
corrispondenza biunivoca
vi sono $n-1$ TF associati all'albero

Taglio Fondamentale (TF): e' un taglio che contiene un ramo dell'albero e, per il resto, solamente corde del coalbero; ogni taglio si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente del ramo corrispondente

Ragioniamo con le correnti:



- Proprieta': i tagli fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero; vi sono quindi $n - 1$ tagli fondamentali associati all'albero
- $TF1 = \{1, 4, 6\}$; $TF2 = \{2, 4, 5, 6\}$; $TF3 = \{2, 3, 6\}$

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$$

$$i_c \in \mathbb{R}^{\ell-m+1}$$

i_c sono una base dello spazio
della corrente

$$\underline{i_a} \in \mathbb{R}^{m-1}$$

i_c sono indipendenti tra loro

i_c : base spazio corrente

i_c : indipendenti

note i_c : posso trovare i_a scrivendo $m-1$ k1 ai TF

$$\Rightarrow i_c = \{i_2, i_4, i_6\} \quad \ell-m+1$$

$$i_a = \{i_1, i_3, i_5\} \quad m-1 \quad m-1 \text{ k1 e f}$$

infer: $i_1 + i_4 + i_6 = 0 \Rightarrow i_1 = -i_4 - i_6 \quad \leftarrow$

valg. $i_5 \Rightarrow$ vedo la terza equazione

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0 \Rightarrow i_5 = i_2 + i_4 + i_6 \quad \leftarrow$$

$$i_3 = -i_2 - i_6 \quad \leftarrow$$

Eq. indipendenti

$\ell-m+1$ eq indipendenti

$$\underline{i_a} = \underline{B} \underline{i_c}$$

$$A = -B^T$$

$$\underline{V_c} = \underline{A} \underline{V_a}$$

• Indichiamo con $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle correnti dei lati

• **Correnti indipendenti.** ~~Indichiamo con $\mathbf{i}_c$ il vettore delle~~
 $\ell - n + 1$ correnti delle corde del coalbero e con $\mathbf{i}_a$ il vettore delle
 $n - 1$ correnti dei rami dell'albero. Le correnti $\mathbf{i}_c$ formano una base
per lo spazio delle correnti dei lati del grafo, e cioè:

1) le correnti $\mathbf{i}_c$ sono indipendenti fra di loro

2) da $\mathbf{i}_c$ si possono determinare le correnti dipendenti $\mathbf{i}_a$ scrivendo
 $n - 1$ KI ai TF associate all'albero

• verifica: il punto 1) deriva dal fatto che il coalbero non contiene
tagli (pensarci!)

• lavorare con correnti cicliche è com.
lavorare con correnti di ramo.

• Correnti a divergenza 0, verificano le KI

Tensioni indipendenti = Tensioni dei rami dell'albero $(n-1) \Rightarrow k-n+1$ HF

Correnti indep $\Rightarrow$ Correnti delle corde del coalbero $(\ell-n+1) \Rightarrow n-1$ KI
m-1 TF

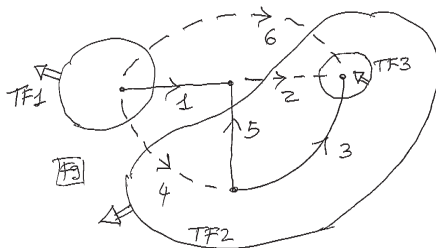
$\forall$ ramo ho un TF

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo dell'esempio considerato per il quale $\mathbf{i}_c = (i_2, i_4, i_6)^T$ e $\mathbf{i}_a = (i_1, i_3, i_5)^T$; le $n - 1 = 3$ KI ai TF sono date da

$$i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0$$

$$i_3 + i_2 + i_6 = 0$$



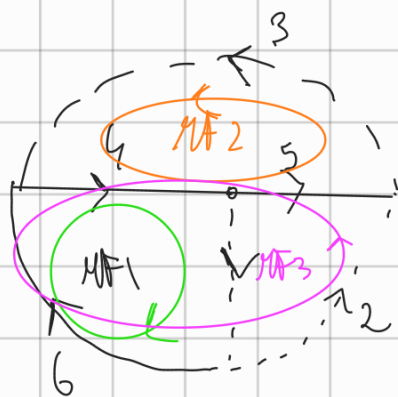
- notare che tali KI sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la corrente del ramo che individua il TF corrispondente; tale corrente non appare per costruzione in altre KI

- risolvendo otteniamo le $n - 1 = 3$ correnti dipendenti dei rami dell'albero in funzione delle correnti indipendenti delle corde del coalbero

$$i_1 = -i_4 - i_6$$

$$i_5 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$i_3 = -i_2 - i_6$$



$$i_c = \{i_1, i_2, i_3\}$$

$\mathbb{I}_1$ conetti cicliche
della MF
Conetti di Maxwell

non esiste neanche la conetto perpendicolare
della mappa

$$\mathbb{I}_2 \dots \mathbb{I}_3$$

$$\underline{\mathbb{I}} = \{\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3\}$$

$l-m+1$

ci sono
solo le
conetti $\mathbb{I}_1$

$$i_1 = \mathbb{I}_1$$

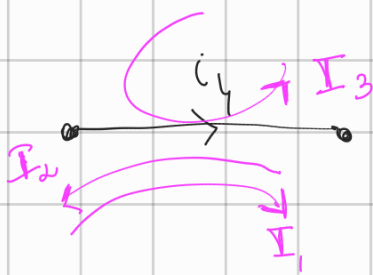
$$i_2 = \mathbb{I}_2$$

$$i_3 = \mathbb{I}_3$$

conetto con l coincide con $\mathbb{I}$.

$\Rightarrow$ Le conetti cicliche coincidono con le
conetti delle conole
anch'esse sono per lo spazio delle conetti

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{I}} = \{\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3\} \quad l-m+1$$



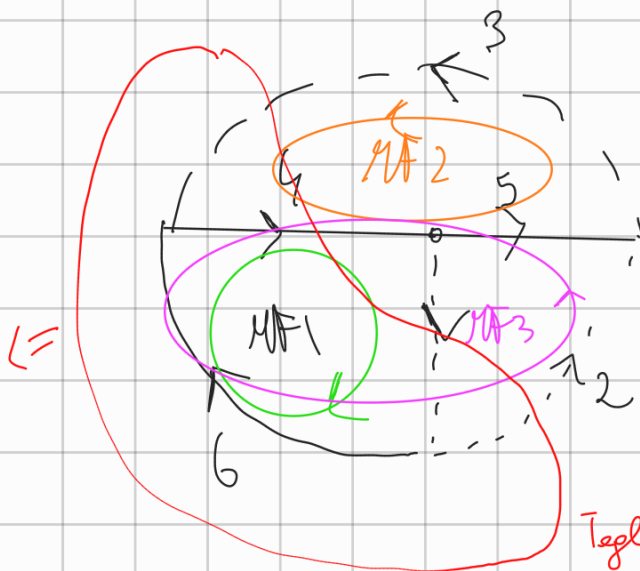
$$i_4 = \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3$$

quali conetti possono in i_4 ?

$$i_4 - i_3 - i_1 + i_2 = 0$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $\mathbb{I}_3$ $\mathbb{I}_1$ $\mathbb{I}_2$

$$\Rightarrow i_4 = \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2$$



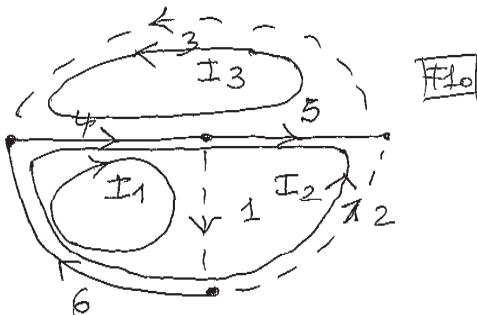
Taglio perpendicolare

Fisica: conetti di un vanto come "somma" di conetti cicliche
equivolgono alle conetti del Taglio perpendicolare

Correnti cicliche delle maglie (di Maxwell)

- Esempio. Facciamo percorrere ogni MF da una corrente I_i che si richiude su se stessa (detta corrente ciclica o di Maxwell); ovviamente vi sono $\ell - n + 1 = 3$ correnti cicliche delle MF; inoltre tali correnti risultano in corrispondenza biunivoca con le correnti delle corde

$$I_1 = i_1; I_2 = i_2; I_3 = i_3$$



- ne consegue che anche le correnti cicliche $\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T \in \mathbb{R}^3$ costituiscono una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

!! Metodo Totale (TABLEAU)

grafo orientato con l lati e n nodi incognite:

l tensioni e l conduttanze, $2l$ incognite

• Equazioni Topologiche (dipendono solo dal grafo)

$l - n + 1$ KV m.f. indipendenti

$n - 1$ KI Cf. indipendenti

l eq. m. indipendenti

solo per conoscere
il grafo

• Equazioni TIPOLOGICHE (dipendono da natura elementi)

$\Rightarrow$ l relazioni costitutive dei bipoli.

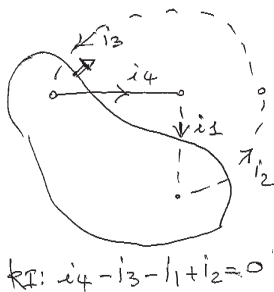
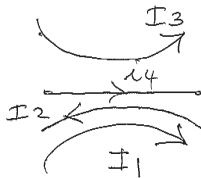
$2l$ equazioni

Metodi ad eliminazione, all'inizio ho tutte le incognite

- le correnti dipendenti dei rami dell'albero si possono ottenere per sovrapposizione delle correnti cicliche; ad esempio, per il ramo 4 si ha

$$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$$

dato che $I_i = i_i$, $i = 1, 2, 3$, si vede che cio' equivale a determinare la corrente del ramo usando una KI al TF individuato da tale ramo



- I_{cicliche} e i_c costituiscono 2 basi equivalenti per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

Metodo Totale (del Tableau) !!!

- Consideriamo un circuito con ℓ bipoli e n nodi e un grafo orientato ad esso associato; scegliamo un albero; le incognite sono le tensioni v_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ e le correnti i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ dei lati del grafo; in totale vi sono 2ℓ incognite

- Equazioni di tipo topologico (dipendono solo dal grafo orientato)
 $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero
 $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

In totale abbiamo $\ell - n + 1 + n - 1 = \ell$ equazioni topologiche

- Equazioni tipologiche (dipendono dalla natura degli elementi presenti)

ℓ relazioni costitutive dei bipoli

- Complessivamente sappiamo perciò scrivere $\ell + \ell = 2\ell$ equazioni, tante quante sono le incognite; il problema è quindi *ben posto*

- nei principali metodi di analisi non si usa l'intero insieme delle incognite ma un suo sottoinsieme (variabili ausiliarie); ad esempio, nella versione più semplice del metodo delle maglie fondamentali, le variabili ausiliarie sono le $\ell - n + 1$ correnti delle corde.