

GIUSEPPE MARTINELLI

MARIO SALERNO

FONDAMENTI DI ELETTROTECNICA

**CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE
LINEARI E PERMANENTI**

Volume I

Ediz. Scientifica SIDEREA



GIUSEPPE MARTINELLI

MARIO SALERNO

CATTEDRA DI ELETTROTECNICA (ELETTRONICI) - ISTITUTO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'UNIVERSITÀ DI ROMA.

FONDAMENTI DI ELETTROTECNICA

CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE LINEARI E PERMANENTI

Volume I

Edizione Scientifica SIDEREA



Le copie non firmate da uno degli Autori si ritengono contraffatte.

(210

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'MPE' or similar, written in a cursive style.

Stampato presso il Laboratorio fotolitografico della
Edizioni Scientifiche **SIDERE**A
Via delle Terme di Traiano, 5-A - 00184 ROMA

INTRODUZIONE

L'approccio circuitale all'analisi delle strutture elettriche richiede uno sviluppo bilanciato di vari argomenti, quali: il modellamento dei dispositivi e l'introduzione di elementi ideali; l'individuazione di algoritmi matematici di analisi; la caratterizzazione del circuito ai fini della sua utilizzazione; la precisazione chiara dei limiti di validità dei modelli; l'influenza delle tolleranze di fabbricazione dei dispositivi sul comportamento globale della struttura; ecc.

Tale sviluppo bilanciato può essere ottenuto solo se risulta chiara l'utilizzazione dell'approccio stesso nell'ambito del progetto della struttura elettrica e quindi in particolare il condizionamento che a tale approccio deriva da altri fattori di tipo tecnologico, fisico, chimico, tecnico-economico, matematico. Questo aspetto preliminare e chiarificatore dell'approccio circuitale è considerato nella successiva premessa al testo, che rende quindi comprensibile la scelta degli argomenti trattati. Tali argomenti sono raggruppabili in tre parti, riguardanti rispettivamente il modellamento, gli algoritmi di analisi e l'utilizzazione. L'estensione ed il livello di trattazione di tali parti sono stati volutamente differenziati, tenendo conto delle caratteristiche degli studenti, a cui il testo è rivolto. In particolare il modellamento, trattato nel Cap. I e nelle Appendici A e B, ha un carattere essenzialmente introduttivo, in quanto è tipicamente sviluppato nell'ambito di testi riguardanti i dispositivi magnetici. A questo riguardo è messo in evidenza nell'Appendice B il problema del modellamento circuitale nel caso di strutture non elettriche di tipo meccanico.

Gli algoritmi di analisi sono trattati in dettaglio nei Capp. II, III, V rispettivamente nel caso dei circuiti senza memoria (Cap. II) e dei circuiti con memoria (Capp. III, V). È stato tenuto conto in tali capitoli della necessità di utilizzare il calcolatore numerico, mantenendo però la trattazione a questo riguardo ad un livello elementare, salvo l'Appendice C, in cui viene esaminata l'influenza

della struttura del circuito sugli errori connessi all'uso dei metodi alle differenze finite. L'organizzazione di questi capitoli è stata prevista del seguente tipo, per una preparazione graduale dello studente:

- 1) posizione del problema di analisi in casi semplici;
- 2) considerazione di casi via via più complessi mediante sviluppo di esempi e derivazione di algoritmi conseguenti;
- 3) svolgimento di esempi riassuntivi in apposite appendici poste alla fine dei capitoli; dove possibile tali esempi sono d'interesse concreto, come nel caso dei circuiti senza memoria, dove si considerano stadi elementari a transistori con emettitore, collettore, base a massa;
- 4) discussione dell'uso del calcolatore mediante schemi a blocchi;
- 5) sviluppo in opportune appendici dei precedenti schemi a blocchi secondo liste in FORTRAN, con trattazione dettagliata della loro utilizzazione;
- 6) presentazione di esempi concreti, risolti con i programmi descritti, come ad esempio la determinazione del guadagno di amplificatori differenziali controeazionati in continua, della risposta nel dominio del tempo e della frequenza di filtri reattivi chiusi su resistenze, di stadi amplificatori video, ecc.

La trattazione dei procedimenti di analisi è ricondotta in ogni caso a quella dei circuiti senza memoria, riducendo quindi al minimo lo sforzo necessario per assimilarli.

La parte riguardante l'utilizzazione è sviluppata nei rimanenti capitoli. Precisamente la rappresentazione esterna del circuito nei suoi molteplici aspetti è considerata a livello introduttivo nel Cap. IV, riguardante le funzioni di rete, ed in dettaglio nei Capp. VI e IX. Le trasformazioni ed equivalenze circuitali, di importanza notevole in fase di sintesi, sono considerate nel Capitolo VII. L'analisi dell'effetto delle tolleranze dei componenti è riportata nel Cap. VIII insieme a ciò che collega tale argomento con i procedimenti di ottimizzazione circuitali.

È importante notare che il livello di trattazione dei Capp. VI, VII, VIII, IX e delle tre appendici A, B, C

è meno elementare di quello usato negli altri capitoli. In particolare, sono affrontati nei suddetti capitoli aspetti dell'analisi dei circuiti, che sono utili in una fase della preparazione dello studente successiva a quella del solo apprendimento dei procedimenti fondamentali di analisi. Per rendere più evidente tale differenza di trattazione, il testo è stato suddiviso in due volumi, nel secondo dei quali sono appunto riportati i suddetti capitoli ed appendici.

Nella stesura del testo si è presupposta una preparazione di base da parte del lettore del tipo di quella fornita mediamente nel biennio di ingegneria, oltre alla conoscenza di alcuni argomenti trattati usualmente nel terzo anno del corso di laurea in ingegneria elettronica. A tale riguardo sono stati di grande aiuto per gli autori i consigli forniti in varie occasioni da molti dei loro colleghi della Facoltà di Ingegneria di Roma, ai quali essi esprimono il loro più vivo ringraziamento.

Gli Autori

PREMESSA : Teoria dei circuiti come metodologia e suo impiego nel progetto di una struttura fisica.

La complessità dei fenomeni naturali richiede, per una loro valutazione quantitativa ed una loro utilizzazione pratica, l'impiego di procedimenti che siano nello stesso tempo sufficientemente generali, semplici ed accurati. Essi debbono avere un carattere generale piuttosto che specifico in quanto tale carattere:

- 1) rende possibile una riunione delle attività di persone che lavorano in campi diversi;*
- 2) permette di utilizzare al massimo l'intuizione, in quanto ciò che in un particolare campo può essere la conseguenza di sole proprietà matematiche in un altro è conseguenza di evidenti proprietà fisiche.*

Per quanto riguarda la semplicità, essa viene raggiunta usualmente mediante una suddivisione del problema d'interesse in sub-problemi parziali. Tale suddivisione ha il vantaggio sia di rendere più facili i singoli passi del procedimento sia di non perdere di vista l'obiettivo principale, ciò che potrebbe accadere senza la suddetta organizzazione. A titolo di esempio basti pensare a ciò a cui si andrebbe incontro se volessimo descrivere il funzionamento di un televisore direttamente mediante le equazioni di Maxwell!

Le auspiccate caratteristiche di generalità e semplicità sono possedute in larga misura dall'approccio circuitale alla valutazione quantitativa del comportamento di una struttura fisica ed al suo proporzionamento finalizzato ad uno scopo pratico assegnato. Tale approccio prevede la riduzione della struttura fisica ad una connessione di elementi idealizzati di pochi tipi. Quindi sono presenti in questo approccio due nozioni fondamentali: la «connessione», definita tramite un grafo e le «relazioni costitutive» degli elementi componenti. È interessante osservare che molte proprietà della struttura fisica in questo modo derivano semplicemente da vincoli di natura topologica legati al grafo. Per esempio tale aspetto porta a conclusioni molto interessanti nel caso delle strutture biochimiche, quali l'osservazione che alcuni comportamenti stabili sono conseguenza appunto dei vincoli topologici più che delle leggi della termodinamica (vedere ad es: Morowitz and al., «Passive stability in a metabolic network», J. Ther. Biol., 1964, 7, 98). Del resto ciò non deve meravigliare in quanto nel grafo confluiscono in forma intuitiva parte delle leg-

gi che caratterizzano la struttura fisica d'interesse. Ad esempio nel caso delle strutture elettriche a costanti concentrate, l'idealizzazione della struttura nel senso circuitale comporta la sostituzione delle leggi di Kirchhoff a quelle di Maxwell e le leggi di Kirchhoff non sono altro che vincoli topologici. La rimanente caratterizzazione della struttura fisica confluisce nelle relazioni costitutive dei pochi elementi idealizzati che emergono dal modellamento della struttura stessa.

L'operazione di modellamento si basa sulla possibilità di caratterizzare i fenomeni d'interesse mediante coppie di grandezze di due tipi diversi. Il primo tipo corrisponde a grandezze che in via di principio o effettivamente richiedono una misura tra due punti (grandezze agli estremi). L'altro tipo corrisponde a grandezze che richiedono una misura su un solo punto (grandezze attraverso). Nel caso di elementi definiti da una sola coppia di grandezze, le relazioni costitutive che si trovano in natura sono quattro, implicando sia il legame diretto tra i due tipi di grandezze sia il legame con i relativi integrali nel tempo (tab.1). In particolare per i vari tipi di strutture fisiche sia le grandezze in questione sia tali integrali corrispondono a ben note grandezze (tab. 2).

Tabella 1

Relazioni costitutive	Caso elettrico
$\Phi_1(E, F) = 0$	Resistore
$\Phi_2(E, P) = 0$	Induttore
$\Phi_3(F, Q) = 0$	Condensatore
$\Phi_4(Q, P) = 0$	Memresistore

Tabella 2

Struttura	Grandezza attraverso E	Grandezza agli estremi F	Integrale grandezza attraverso Q	Integrale grandezza agli estremi P
Elettrica	Corrente	Tensione	Carica	Flusso
Fluidico	Flusso di volume	Pressione	Volume	Momento di pressione
Reazione chimica	Velocità di reazione	Affinità	Avanzamento della reazione	—
Meccanica (rotazione)	Coppia	Velocità angolare	Quantità di moto	Spostamento angolare

L'approccio circuitale è basato sulla caratterizzazione di una struttura fisica come interconnessione di elementi idealizzati di pochi tipi. Ogni particolare campo della fisica e dell'ingegneria è quindi caratterizzato da particolari gruppi di elementi ideali. Lo studio delle proprietà di aggregati di tali elementi è il campo specifico d'interesse della teoria dei circuiti. Ai fini del progetto sono tuttavia essenziali anche le discipline che confinano con essa e che pongono i limiti pratici sulla teoria stessa. Precisamente tali discipline sono:

1) quelle che permettono di derivare modelli significativi degli elementi idealizzati dalla cui interconnessione deriva il modello globale della struttura d'interesse. Tali discipline sono quindi quelle che riguardano i dispositivi, le tecnologie e i materiali con cui i dispositivi vengono realizzati, le teorie fisiche su cui si basa il funzionamento dei dispositivi, le teorie chimiche su cui si basano le tecnologie e le misure dei vari fenomeni interessati;

2) quelle che fissano le prestazioni d'interesse dei circuiti. Si tratta quindi delle discipline di tipo sistemistico applicativo, che riguardano l'interconnessione di circuiti di varie caratteristiche ai fini del raggiungimento di un obiettivo tecnico-economico;

3) quelle matematiche che permettono l'organizzazione del progetto soprattutto ai fini della sua implementazione sul calcolatore. Importanti da questo punto di vista sono perciò le discipline riguardanti: i linguaggi con cui comunicare con il calcolatore; la teoria dell'approssimazione con cui riportare nella forma analitica più adatta alla sintesi i dati di progetto disponibili dal 2° gruppo di discipline; la teoria dell'ottimizzazione matematica con cui giungere alla scelta più opportuna dei parametri circuitali tenendo conto dei vincoli imposti da ambedue i gruppi di discipline (1° e 2°); l'analisi numerica con cui prevenire i fenomeni dovuti all'uso di lunghezze limitate di parola sul calcolatore; la teoria della simulazione tramite circuiti digitali direttamente implementabili sul calcolatore.

Il primo gruppo di discipline fornisce dati sulle proprietà degli elementi usati per caratterizzare la struttura fisica e sulla validità dei modelli; il secondo su ciò che si vuole ottenere dai circuiti. Il terzo gruppo fornisce gli strumenti necessari all'esecuzione del progetto, quando sia associato alle metodologie proprie dei circuiti che riguardano specificamente l'individuazione delle proprietà di aggregati di componenti ideali, l'analisi e la sintesi di tali aggregati.

Allo scopo di chiarire quanto detto si riporta di seguito lo schema a blocchi del procedimento logico di progetto di una struttura fisica (fig.1).

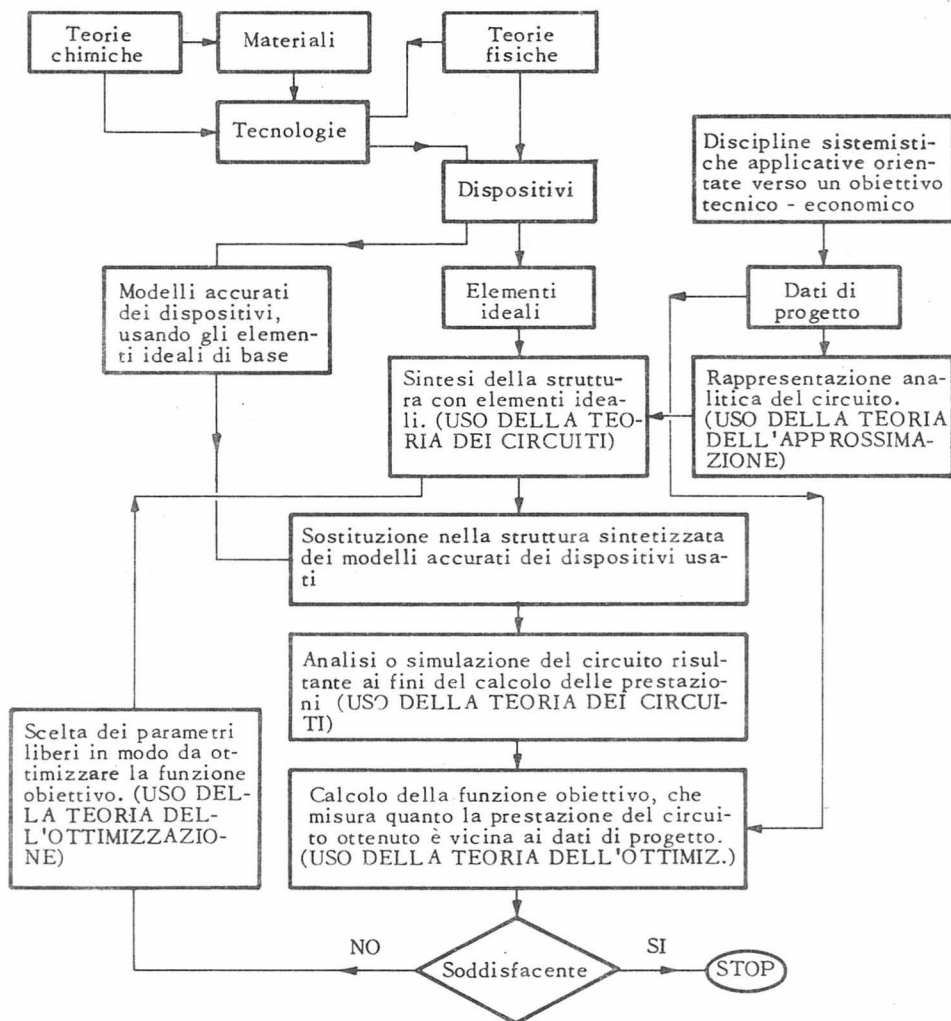


Fig.1 - Schema a blocchi del procedimento logico di progetto di una struttura fisica.

L'esame dello schema a blocchi di fig.1 mette in evidenza chiaramente il legame tra i vari gruppi di discipline ed il compito specifico della teoria dei circuiti. A titolo di completamento sono necessari alcuni commenti:

1) svolgendo la teoria dei circuiti un'azione intermedia tra il primo ed il secondo gruppo di discipline, un suo compito importante è quello di con-

dizionarle entrambe nel senso che deve da una parte rendere note le possibilità offerte dai nuovi dispositivi nella realizzazione di sistemi complessi e dall'altra deve stimolare ed indirizzare le tecnologie ai fini di ottenere particolari dispositivi;

2) essendo l'utilizzazione del calcolatore determinante ai fini del progetto, acquistano grande importanza sia i metodi di simulazione che i metodi di ottimizzazione matematica. Per quanto riguarda i primi è importante osservare che lo schema logico di simulazione sul calcolatore coincide esattamente con un circuito digitale. Quindi rivestono grande importanza in questo caso i metodi di sintesi dei circuiti digitali e la conoscenza dell'influenza sul loro comportamento della lunghezza finita di parola e dell'aritmetica usata. Per quanto riguarda i secondi, è importante rilevare che la loro scelta deve essere basata sulle proprietà intrinseche del circuito. Un esempio notevole in questo senso è costituito dalla possibilità di usufruire, nel caso della grande classe dei circuiti lineari e permanenti a costanti concentrate, direttamente delle derivate delle prestazioni in funzione del valore dei componenti, a partire dall'analisi del circuito con poco aggravio rispetto alla determinazione della prestazione stessa. È evidente che concentrando l'attenzione sui metodi di ottimizzazione, estremamente potenti, basati sul gradiente della funzione obiettivo, si ha nel caso dei circuiti suddetti un notevole risparmio di tempo ed aumento di precisione.

*

CAPITOLO I

INTRODUZIONE AI CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE DI TIPO ELETTRICO

1.1 - Grandezze fisiche considerate.

Nei limiti di validità che verranno discussi in dettaglio nell'appendice A, una struttura elettrica può essere caratterizzata tramite le grandezze corrente e tensione. Tali grandezze sono variabili reali dipendenti dal tempo, appartenenti rispettivamente: la prima alla classe delle grandezze «attraverso», cioè a quelle grandezze che richiedono per la loro misura l'inserzione di uno strumento opportuno in un «punto» della struttura; la seconda alla classe delle grandezze «agli estremi», cioè a quelle grandezze che richiedono l'inserzione di uno strumento opportuno tra due «punti» della struttura.

L'unità di misura della corrente è l'«ampere»⁽¹⁾ (simbolo A) o molto spesso i suoi multipli e sotto multipli, come il kilo-ampere (simbolo kA: valore 1000 A) nei sistemi di potenza o il milli e micro-ampere (simboli mA e μ A: valori 10^{-3} e 10^{-6} A) in elettronica. Nella rappresentazione grafica, la corrente viene indicata con una freccia che precisa, sia il «punto» della struttura in cui viene considerata, sia il verso da considerare come positivo.

L'unità di misura della tensione è il «volt»⁽²⁾ (simbolo V) o molto spesso i suoi multipli e sottomultipli, come il kilo-volt (simbolo kV: valore 1000 V) nei sistemi di potenza ed il milli e micro-volt (sim-

(1) - L'ampere è definito come il valore di quella corrente che, percorrendo in modo concorde e contemporaneo due conduttori filiformi, rettilinei, paralleli, infinitamente lunghi, posti nel vuoto a distanza di un metro, provoca una forza d'attrazione tra di essi di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro di conduttore.

(2) - Il volt è definito come il valore di tensione che si misura agli estremi di una struttura elettrica accessibile solo in corrispondenza a questi due estremi, quando in essi fluisce una corrente di 1 A e la potenza assorbita è di 1 W.

boli mV e μ V: valori 10^{-3} e 10^{-6} V) in elettronica. Nella rappresentazione grafica la tensione viene rappresentata con una freccia oppure con una coppia di segni $-+$, che individuano i due «punti» tra cui essa viene definita e precisano anche il verso con cui considerarla. Precisamente il punto con il $+$ oppure verso cui punta la freccia va considerato a tensione positiva rispetto all'altro.

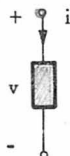
1.2 - Il circuito elettrico.

Il modello di struttura elettrica che viene definito come circuito a costanti concentrate è costituito dalla connessione di elementi ideali privi di dimensioni geometriche e caratterizzati da opportuni legami tra tensione e corrente ad essi applicate. Ciascuna connessione è considerata a tensione costante e priva di dimensioni geometriche; di conseguenza non ha importanza la sua lunghezza e forma. Per comodità di rappresentazione gli elementi sono indicati con un rettangolo da cui emergono due o più terminali filiformi, ciascuno dei quali ha per estremo un punto (morsetto). Per quanto detto, non ha importanza la dimensione del rettangolo e la posizione e lunghezza dei terminali.

L'elemento fondamentale del circuito è quello a due terminali o bipolo. Per caratterizzarlo dal punto di vista elettrico sono sufficienti la tensione tra i suoi morsetti e la corrente che lo attraversa. Tale corrente è univocamente definita in quanto, come vedremo successivamente, la corrente entrante in corrispondenza ad un morsetto del bipolo è uguale e contraria a quella entrante dall'altro morsetto.

I versi positivi con cui considerare la corrente e la tensione applicati al bipolo possono essere scelti arbitrariamente. È usuale però, per comodità, di sceglierli coordinati in modo tale che il loro prodotto, che rappresenta una potenza⁽¹⁾ coincida con la potenza elettrica assorbita dal bipolo. Tali versi coordinati sono mostrati in fig 1.2.1 e se non è detto il contrario verranno presupposti nel seguito della trattazione.

Fig.1.2.1 - Versi coordinati della corrente e della tensione applicate ad un bipolo.



(1) - Tenere presente che la definizione di tensione ricordata nel paragrafo precedente è tale che moltiplicandola per una corrente si ottiene una potenza.

È importante osservare che la scelta coordinata dei versi positivi della tensione e della corrente non ha in sé alcuna implicazione fisica. In altre parole se scegliessimo la convenzione contraria, avremmo come risultato di ottenere con il prodotto $v \cdot i$ una potenza ceduta dal bipolo. Di conseguenza, se, ad esempio, il bipolo *effettivamente* assorbe 1 watt, nel caso coordinato avremmo $v \cdot i = 1 \text{ W}$ e nell'altro caso $v \cdot i = -1 \text{ W}$.

Osserviamo che, anche nell'ambito della caratterizzazione esterna che stiamo facendo degli elementi bipolari, è possibile differenziarli dal punto di vista energetico. Precisamente, come vedremo successivamente in dettaglio, si possono avere tre comportamenti diversi, eventualmente presenti in modo combinato in uno stesso bipolo⁽¹⁾:

1) *trasferimento irreversibile di energia elettrica*. In questo caso il bipolo assorbe l'energia elettrica trasformandola in un altro tipo, per esempio calore. Si tratta di un processo irreversibile, nel senso che tale energia esce dal circuito;

2) *trasferimento reversibile vincolato di energia elettrica*. Il bipolo assorbe o cede energia, accumulandola in base agli scambi energetici con il resto del circuito, partendo da un valore iniziale noto di energia. La quantità di energia contenuta nel bipolo è perciò definita in ogni istante ed in particolare è vincolata a non scendere al di sotto del valore zero, in quanto valori negativi implicherebbero cessione di energia interna, non ricevuta dal bipolo con gli scambi con il resto del circuito;

3) *trasferimento reversibile senza vincoli di energia elettrica*. Il bipolo assorbe o cede energia senza alcun vincolo. Ciò implica che internamente al bipolo si ha un accumulatore di energia di capacità infinita, nel senso cioè che non è modificata dagli scambi energetici con il resto del circuito.

1.3 - Le leggi di Kirchhoff.

Le tensioni e correnti presenti in un circuito elettrico debbono soddisfare due leggi fisiche, che prendono il nome di leggi di Kirchhoff. Tali leggi sono approssimazioni di quelle di Maxwell nell'ambito dei circuiti a costanti concentrate e la loro validità è connessa alla validità dell'ipotesi di «costanti concentrate», che verrà discussa in dettaglio

(1) - Per dettagli ulteriori su questi comportamenti si veda: G. Biorci, Fondamenti di Elettrotecnica, UTET, 1975, Cap. I.

nell'appendice A. L'approssimazione è dello stesso tipo che si presenta in altri rami della fisica; ad esempio si ha una situazione simile a quella della meccanica in cui la legge di Newton è un'approssimazione di quelle della meccanica relativistica. Occorre ricordare che, anche se tali leggi (Newton e Kirchhoff) sono approssimazioni della realtà, esse possono essere applicate con successo alla soluzione di moltissimi problemi di grande interesse pratico e teorico. È importante tenere sempre presenti le ipotesi di validità di tali leggi, perchè altrimenti si possono commettere errori. Ciò verrà chiarito nell'appendice A, a cui si rimanda.

1.3.1 - Prima legge di Kirchhoff (legge delle correnti).

«La corrente che complessivamente esce da una superficie chiusa è uguale a quella che vi entra». L'applicazione di tale legge ad un circuito, implica l'utilizzazione di una superficie chiusa e finita che tagli gli elementi solo in corrispondenza ai terminali. Infatti, come detto nel paragrafo precedente, l'elemento è privo di dimensioni ed il rettangolo con cui lo rappresentiamo ha solo uno scopo di aiuto visivo. Inoltre, poichè rappresentiamo i circuiti su un piano, l'utilizzazione della legge precedente viene praticamente effettuata facendo riferimento ad una linea chiusa di dimensioni finite. A titolo di esempio, consideriamo il circuito di fig. I.3.1. La legge delle correnti per la linea tratteggiata (chiusa e di dimensioni finite) è, con i simboli di figura:

(I.3.1)

$$i_2 + i_6 = i_3 + i_5 + i_4$$

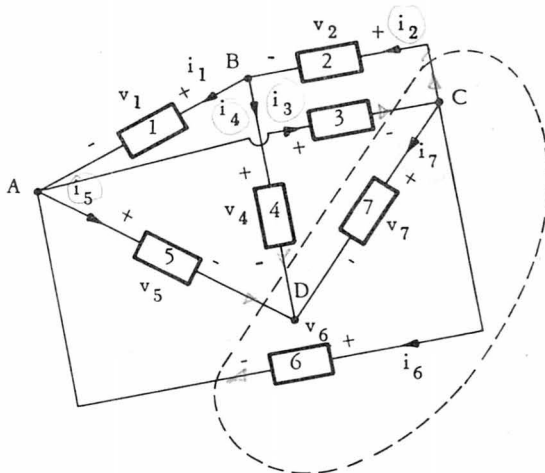


Fig. I.3.1 - Esempio di applicazione delle leggi di Kirchhoff.

In particolare, l'applicazione della legge delle correnti ad una superficie che racchiude un elemento mostra che «la corrente che entra in un morsetto di un elemento è uguale ed opposta a quella che entra nell'altro».

Ricordando che la carica elettrica è l'integrale della corrente, la legge delle correnti implica che non si può accumulare carica entro una superficie chiusa di un circuito a costanti concentrate.

$$q = \int_0^t I(t) dt$$

I.3.2 - Seconda legge di Kirchhoff (legge delle tensioni).

«È nulla la somma algebrica delle tensioni, che s'incontrano in un circuito spostandoci lungo una linea chiusa e finita. Le tensioni vanno considerate positive se concordi con il verso dello spostamento e negative nel caso contrario». L'applicazione di tale legge ad un circuito implica l'utilizzazione di una linea chiusa e finita che tagli i componenti solo in corrispondenza ai loro morsetti. Infatti sia i rettangoli che i terminali degli elementi sono privi di dimensioni ed hanno solo scopo di aiuto visivo. A titolo di esempio applichiamo la legge delle tensioni alla linea chiusa che tocca successivamente i morsetti A, B, C, D, A del circuito di fig. I.3.1; si ha, indicando con V_A , V_B , V_C , V_D le tensioni dei morsetti rispetto ad un riferimento qualsiasi:

$$(I.3.2) \quad (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) = 0$$

che equivale a:

$$(I.3.3) \quad v_1 + v_2 - v_7 + v_5 = 0$$

Osservazione.

Le equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff sono lineari e omogenee nelle correnti e nelle tensioni degli elementi del circuito. Esse non dipendono dalla natura degli elementi, ma solo dal loro numero e dal modo in cui sono collegati, cioè dalla «topologia del circuito».

I.4 - Elementi a più di due terminali. Definizione di porta.

Gli elementi che compongono un circuito possono avere più di due terminali. In questo caso si avranno tante correnti quanti sono i terminali e tante tensioni quanti sono i morsetti, avendo preso un riferimen-

to qualsiasi per le tensioni. Le leggi di Kirchhoff, tuttavia, stabiliscono dei vincoli tra queste grandezze. Precisamente, considerando una linea chiusa attorno all'elemento e tale da interessare solo i suoi terminali, si ha per la legge delle correnti che è nulla la somma delle correnti entranti nell'elemento. Ciò significa che è sufficiente conoscere le correnti di $M-1$ terminali, se M è il numero complessivo dei terminali dell'elemento, per conoscere tutte le correnti. Analogamente, la legge delle tensioni applicata ad una linea chiusa, che tocchi successivamente i morsetti dell'elemento (e solo questi), implica che è sufficiente conoscere le tensioni di $M-1$ morsetti, per conoscerle tutte.

Quanto detto suggerisce per gli elementi a più di due terminali il seguente tipo di descrizione:

- 1) scegliere un morsetto come riferimento;
- 2) definire le tensioni dei rimanenti morsetti rispetto a questo, localizzando su questo il segno «meno»;
- 3) considerare le correnti di tutti i terminali, escluso quello di riferimento.

Per ragioni di comodità, conviene poi scegliere coordinati i versi positivi delle correnti e tensioni. Ciò si ottiene considerando positive le correnti entranti nell'elemento ed il segno «meno» delle tensioni localizzato sul morsetto di riferimento. In fig. I.4.1 si riporta un esempio di elemento a cinque terminali.

È chiaro che con la scelta fatta, è possibile conoscere la tensione di qualunque morsetto rispetto ad un altro. Per esempio, la tensione del morsetto 3 rispetto al morsetto 1 vale $v_3 - v_1$.

La scelta fatta per le tensioni e correnti, atte a descrivere l'elemento, non è ovviamente l'unica possibile. In alcuni casi, infatti, è utile procedere in modo diverso, come quando, per il modo particolare di accesso all'elemento, sono presenti coppie di morsetti che costituiscono delle unità a se stanti. È il caso in cui nell'elemento si creino delle «porte».

Si definisce come «porta» di un elemento o più in generale di un circuito una coppia di morsetti per i quali sussiste la seguente condizione «la corrente entrante nell'uno è uguale ed opposta a quella entrante nell'altro».

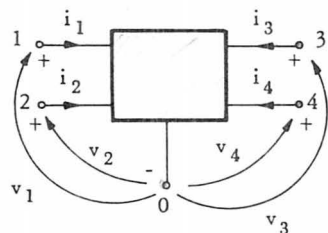


Fig. I.4.1 - Esempio di elemento a cinque terminali con versi coordinati per le tensioni e le correnti.

Da questa definizione risulta che per una porta è completamente definita la corrente e la tensione; si ha cioè una situazione del tutto simile a quella di un bipolo. In particolare, un bipolo può essere considerato come un elemento o circuito accessibile solo da una porta. Ritorniamo nel Cap. VI in dettaglio sulla nozione di porta.

Osservazione.

Il legame tra le tensioni e le correnti di un elemento a più terminali è rappresentato analiticamente tramite equazioni. Tali equazioni dipendono, oltre che dalle proprietà fisiche dell'elemento, anche dal morsetto scelto come riferimento. Perciò tale morsetto di riferimento va sempre precisato. Ad esempio, nel caso delle specifiche delle case costruttrici di transistori, è sempre chiaramente precisato se il morsetto di riferimento è l'emettitore, oppure la base o il collettore.

1.5 - Proprietà generali dei componenti e dei circuiti.

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato della rappresentazione grafica degli elementi che compongono il circuito e del modo di scegliere ed orientare le grandezze elettriche che ne definiscono lo stato. Un passo ulteriore nella caratterizzazione di questi elementi e quindi dei circuiti elettrici riguarda l'introduzione di alcune proprietà molto generali che essi possono possedere. Si tratta della linearità e della permanenza. Tali proprietà si supporranno possedute da tutti gli elementi e circuiti che verranno considerati nel seguito.

Verrà anche dato un breve cenno di altre proprietà di tipo generale e del legame che intercorre tra esse.

1.5.1 - Linearità.

«Il componente o il circuito è lineare se l'effetto dovuto ad una qualsiasi causa è proporzionale alla stessa». Una conseguenza immediata di questa proprietà è il principio di sovrapposizione degli effetti che stabilisce che «l'effetto dovuto a più cause che agiscono contemporaneamente è esattamente la somma degli effetti dovuti a ciascuna causa considerata come se agisse da sola».

La proprietà di linearità implica che le equazioni costitutive degli elementi componenti il circuito sono lineari e che le rappresentazioni dei circuiti sono costituite da equazioni lineari.

1.5.2 - Permanenza.

«Il componente o il circuito è permanente (ovvero con altra dizione «invariante nel tempo») se l'effetto non dipende dall'istante di applicazione della causa». Questa proprietà si può esprimere semplicemente nel seguente modo. Supponiamo che $e(t)$ sia l'effetto dovuto alla causa $c(t)$; allora se consideriamo la nuova causa $c(t+t_0)$, l'effetto è uguale a $e(t+t_0)$.

La proprietà di permanenza, associata a quella di linearità implica che i coefficienti delle equazioni lineari costitutive degli elementi e delle rappresentazioni dei circuiti sono indipendenti dalla variabile tempo.

L'importanza delle due proprietà di linearità e permanenza risulterà chiara successivamente; fin da adesso si può anticipare che tale importanza è legata alla possibilità di impiegare metodi di analisi molto potenti e semplici per i circuiti che godono di queste due proprietà.

1.5.3 - Reciprocità.

La reciprocità è una proprietà generale dei circuiti o elementi che riguarda l'interazione di due eccitazioni sul circuito stesso. Una misura intuitiva di questa interazione si ottiene considerando la potenza entrante nel circuito o elemento, supposto accessibile da N porte, come indicato in fig. 1.5.1, in due situazioni diverse di eccitazione e poi quando tali eccitazioni agiscono contemporaneamente. Si ha:

$$(1.5.1) \quad P_1 = \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(1)} \quad ; \quad P_2 = \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(2)} \quad ;$$

$$P_{12} = \sum_{k=1}^N (v_k^{(1)} + v_k^{(2)}) (i_k^{(1)} + i_k^{(2)}) = P_1 + P_2 + \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} + \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}$$

I termini:

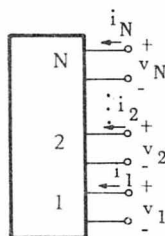
$$\sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}$$

rappresentano l'interazione tra le due eccitazioni. Se la rete è reciproca tali interazioni sono uguali, cioè:

$$(I.5.2) \quad \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)} = \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}$$

In ciò consiste la legge di reciprocità di Lorentz, che può enunciarsi come segue: « Considerate due situazioni elettriche diverse, indicate rispettivamente con 1 e 2, le grandezze elettriche di porta di un elemento o circuito, accessibile da N-porte, debbono soddisfare la (I.5.2), se esso è reciproco ».

Fig. I.5.1 - Elemento o circuito N-porte coi versi delle correnti e delle tensioni di porta coordinati.



Nel caso particolare in cui agisca nel circuito una sola causa e si consideri un solo effetto, ciò che equivale a considerare il circuito come una rete 2-porte chiusa opportunamente in corrispondenza alle porte, la legge di reciprocità di Lorentz equivale al ben noto enunciato:

« L'effetto non si modifica, in un circuito reciproco, se scambiamo tra di loro la posizione della causa con quella dell'effetto ».

L'importanza di questa proprietà per i circuiti che la posseggono verrà discussa in dettaglio nel § VI.9, quando parleremo dell'effetto che essa ha sulla rappresentazione delle reti 2-porte.

1.5.4 - Passività.

Da un punto di vista intuitivo, possiamo definire come passivo un circuito od un elemento per il quale l'effetto di una qualsiasi causa di breve durata tende a scomparire con il passare del tempo. Si tratta in questo caso di un circuito od elemento passivo in senso stretto. Una definizione più tenue, molto importante dal punto di vista delle semplificazioni che permette di introdurre, è la seguente « l'effetto di una qualsiasi causa di breve durata si mantiene limitato al passare del tempo ». Vedremo nel Cap. IV le conseguenze della passività ed in particolare della definizione intuitiva precedente.

Un'altra definizione di passività, anch'essa intuitiva, è l'impossibilità per un circuito od elemento passivo di fornire energia. Ciò ovviamente non significa che tale circuito od elemento non possa erogare energia per un limitato intervallo di tempo, ma che tale energia sia inferiore od al massimo uguale a quella accumulata in precedenza. (cond. induttivi)

A quest'ultima definizione si può associare una definizione quantitativa della passività. Supponiamo che l'elemento o il circuito considerato sia accessibile da N porte e che tensione e corrente di porta siano definiti nel modo coordinato precisato in precedenza. La potenza elettrica entrante ad un generico istante vale:

$$(I.5.3) \quad p(t) = \sum_{k=1}^N v_k(t) i_k(t)$$

Il componente o il circuito si dice passivo se:

$$(I.5.4) \quad \int_{-\infty}^t p(t) dt \geq 0$$

per ogni t e per ogni tipo di eccitazione. È da notare che l'inserimento di $-\infty$ nell'integrale, equivale a considerare il componente o il circuito a partire da un istante remoto, prima del quale si ammette che il circuito sia a riposo, cioè che non agiscano eccitazioni di alcun genere.

1.5.5 - Causalità.

«In qualsiasi istante t_0 , l'effetto dipende solo dai valori della causa per $t \leq t_0$ ». Tale proprietà potrebbe essere violata dal circuito solo per l'inadeguatezza dei modelli usati. Analiticamente, questa proprietà si può enunciare nel seguente modo. Sia $c_1(t)$ ed $e_1(t)$ una particolare coppia causa-effetto per $-\infty < t < +\infty$. Sia inoltre $c_2(t)$ ed $e_2(t)$ un'altra coppia; supponiamo che:

$$(I.5.5) \quad c_2(t) = c_1(t) \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

allora, qualunque siano $c_2(t)$ e $c_1(t)$ per $t > t_0$, si ha:

$$(I.5.6) \quad e_2(t) = e_1(t) \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Una forma più semplice di enunciato è possibile nel caso che ci interessa di elementi e circuiti lineari. L'enunciato è il seguente: «L'effetto è nullo per $t \leq t_0$ se è nulla la causa per $t \leq t_0$ ».

È facile rendersi conto che i due enunciati sono equivalenti nel caso lineare. Supponiamo dapprima che sia valido il secondo e facciamo vedere che ne consegue il primo. A questo scopo, con riferimento alle eccitazioni e cause considerate nelle (I.5.5) e (I.5.6), consideriamo la causa $c(t) = c_2(t) - c_1(t)$. Per definizione:

$$(I.5.7) \quad c(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Poichè il circuito o elemento è lineare, l'effetto di $c(t)$ è uguale a $e(t) = e_2(t) - e_1(t)$. In base al secondo enunciato risulta:

$$(I.5.8) \quad e(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \leq t_0$$

Dalla (I.5.8) consegue la (I.5.6) e quindi la validità del primo enunciato. Inversamente supponiamo che sia valido il primo enunciato e facciamo vedere che ne consegue il secondo. Come nel caso precedente, consideriamo la causa $c(t) = c_2(t) - c_1(t)$. L'effetto che gli corrisponde è, poichè il circuito è lineare, $e(t) = e_2(t) - e_1(t)$. In base al primo enunciato e quindi alle (I.5.5) ed (I.5.6) si ha che $c(t)$ ed $e(t)$ soddisfano alle (I.5.7) ed (I.5.8), cioè al secondo enunciato.

Osservazione.

Come detto in precedenza la violazione della proprietà di causalità da parte di un circuito od elemento è solo conseguenza dell'inadeguatezza dei modelli usati. Tale inadeguatezza è particolarmente presente nel caso dei circuiti non passivi. Infatti è stato dimostrato nell'articolo D.C. Youla, L.J. Castriota, H.J. Carlin « Bounded real scattering matrices and the foundation of linear passive network theory », IRE TRANS. CT-6 (1959) pag. 102, che un circuito lineare e passivo è sempre causale e quindi in tale ambito l'inadeguatezza dei modelli porta ad errori più limitati che nel caso attivo.

Una dimostrazione semplice del modo in cui la causalità consegue dalla linearità e passività nel caso di un bipolo è disponibile in H.J. Carlin, A.B. Giordano, « Network theory », Prentice - Hall, 1964 pagg. 6-7.

1.6 - Relazioni costitutive degli elementi bipolari lineari e permanenti.

Gli elementi ideali a due terminali (bipoli) che compongono il circuito elettrico a costanti concentrate lineare e permanente sono di pochi tipi, che definiremo di seguito, e scaturiscono dal modellamento di componenti reali. È interessante osservare che gli elementi ideali che si considerano sono buone approssimazioni dei corrispondenti componenti reali. Tale situazione è completamente diversa da quella che si verifica per gli elementi ideali a più di due terminali, che vedremo nel paragrafo successivo.

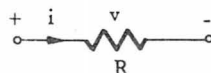
1.6.1 - Resistore.

«Il resistore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(1.6.1) \quad v(t) = Ri(t)$$

con R reale e costante, a cui si dà il nome di resistenza. Il simbolo usato è quello di fig.1.6.1.

Fig.1.6.1 - Simbolo del resistore.



La resistenza si misura in ohm (simbolo Ω) o spesso nei suoi multipli ($1k\Omega = 1000\Omega$; $1M\Omega = 1.000.000\Omega$) e la sua inversa, che prende il nome di conduttanza, in Ω^{-1} .

Risulta perciò:

$$(1.6.2) \quad i(t) = Gv(t)$$

Il resistore passivo è quello per cui R è una quantità non negativa e corrisponde con buona approssimazione al componente reale corrispondente. Il resistore passivo è un puro dissipatore di energia; infatti in qualunque intervallo di tempo esso assorbe energia, senza mai restituirla, poichè la potenza elettrica assorbita:

$$(1.6.3) \quad p(t) = i^2(t) \cdot R$$

è sempre non negativa. In esso ha luogo un trasferimento irreversibile di energia.

Il componente reale che corrisponde al resistore passivo è caratterizzato dal valore della resistenza (valori commerciali comuni da qualche Ω alle decine di $M\Omega$), dalla precisione con cui è realizzato, dalla potenza che può dissipare senza alterarsi (potenza elettrica che si trasforma in calore).

Il resistore attivo è caratterizzato da una resistenza negativa. Perciò esso fornisce sempre energia al circuito. Il componente reale che gli corrisponde è usualmente rappresentato bene da tale modello solo entro limiti piuttosto modesti delle ampiezze di tutte le grandezze elettriche ad esso applicate e quando non interessi il comportamento completo del componente reale. In particolare è facile dimostrare che il resistore attivo facilmente dà origine a circuiti a cui sono associate assurdità di tipo fisico.

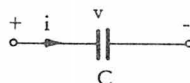
1.6.2 - Condensatore.

«Il condensatore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.4) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

con C costante reale, a cui si dà il nome di capacità. Il simbolo usato è quello di fig. I.6.2

Fig. I.6.2 - Simbolo del condensatore.



La capacità si misura in farad (simbolo F) o usualmente nei suoi sottomultipli (micro-farad = 10^{-6} F, simbolo μ F; nano-farad = 10^{-9} F, simbolo nF; pico-farad = 10^{-12} F, simbolo pF). Le dimensioni della capacità si deducono dalla (I.6.4), cioè:

$$(I.6.5) \quad \text{farad} = \frac{\text{secondo}}{\text{ohm}}$$

Il condensatore passivo è quello per cui C è positiva e rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale. È facile vedere che il condensatore passivo trasferisce energia in modo reversibile con il vincolo di cedere energia al circuito a cui è collegato in quantità minore o uguale a quella immagazzinata in precedenza. Il valore dell'energia immagazzinata è facilmente deducibile, partendo dalla (I.6.4); infatti:

$$(I.6.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t i(\tau) v(\tau) d\tau = \\ &= C \int_{-\infty}^t v(\tau) \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} C v^2(t) \end{aligned}$$

nell'ipotesi che, nell'istante remoto indicato con $t = -\infty$, il condensatore fosse a riposo, cioè senza energia immagazzinata. È chiaro quindi dalla (I.6.6) che il condensatore è passivo nel caso di capacità positiva.

La (I.6.4) può inoltre interpretarsi come legame tra tensione e carica elettrica, cioè:

$$(I.6.7) \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = C v(t)$$

e la capacità rappresenta in questo caso il coefficiente nella relazione costitutiva di semplice proporzionalità tra carica e tensione.

Il componente reale che corrisponde al condensatore passivo è caratterizzato dal valore della capacità (valori commerciali comuni da qualche pF a millesimi di F), dalla precisione con cui è realizzato, dal valore di tensione che può sopportare senza danni.

Il condensatore «attivo» è caratterizzato da un valore negativo di capacità. L'uso di tale elemento ideale è limitato e riguarda circuiti particolari. Il campo di validità del modello è entro intervalli modesti delle grandezze elettriche applicate.

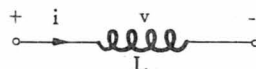
1.6.3 - Induttore.

«L'induttore ideale è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.8) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

con L costante reale, a cui si dà il nome di induttanza. Il simbolo usato è quello di fig. 1.6.3».

Fig. 1.6.3 - Simbolo dell'induttore.



L'induttanza si misura in henry (simbolo H) o usualmente anche con i suoi sottomultipli (milli - henry = 10^{-3} H, simbolo mH; micro-henry = 10^{-6} H, simbolo μ H). Le dimensioni dell'induttanza si deducono dalla (I.6.8), cioè:

$$(I.6.9) \quad \text{henry} = \text{ohm} \cdot \text{secondo}$$

Il componente passivo è quello per cui L è positiva e rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale. È facile vedere che l'induttore passivo trasferisce energia in modo reversibile, con il vincolo di cedere energia al circuito a cui è collegato in quantità minore od uguale a quella immagazzinata in precedenza. Il valore di tale energia immagazzinata è facilmente deducibile, partendo dalla (I.6.8); infatti:

$$(I.6.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v(\tau) i(\tau) d\tau = \\ &= L \int_{-\infty}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} L i^2(t) \end{aligned}$$

È chiaro quindi dalla (I.6.10) che l'induttore è passivo nel caso d'induttanza positiva.

La (I.6.8) può inoltre interpretarsi come legame tra flusso d'induzione magnetica e corrente, cioè:

$$(I.6.11) \quad \varphi(B) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = L i(t)$$

e l'induttanza rappresenta in questo caso il coefficiente nella relazione costitutiva di semplice proporzionalità tra flusso d'induzione e corrente.

Il componente reale che corrisponde all'induttore passivo viene realizzato utilizzando i circuiti magnetici.

L'induttore «attivo» è caratterizzato da un valore negativo di induttanza. L'uso di tale elemento ideale è limitato e riguarda circuiti particolari. Il campo di validità del modello è entro intervalli modesti delle grandezze elettriche applicate.

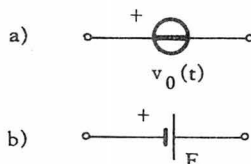
1.6.4 - Il generatore indipendente di tensione.

«Il generatore indipendente di tensione è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.12) \quad v(t) = v_0(t)$$

con v_0 una funzione del tempo assegnata, eventualmente costante. Il simbolo usato è quello di fig.1.6.4 a). Nel caso di ampiezza costante, cioè $v_0(t) = E$, viene spesso usato il simbolo di fig.1.6.4 b).

Fig.1.6.4 - Simbolo del generatore indipendente di tensione.



Il generatore indipendente di tensione rappresenta con buona approssimazione il corrispondente componente reale, quale ad esempio una batteria, la rete di distribuzione dell'energia elettrica in corrispondenza ad una presa. È facile vedere che il generatore indipendente di tensione è sede di un trasferimento reversibile non vincolato di energia; infatti la corrente che esso eroga dipende dal circuito a cui è connesso e per-

ciò la potenza istantanea che esso eroga può assumere qualsiasi valore e segno. Ciò significa che idealmente tale elemento è collegato ad un accumulatore di energia di capacità infinita, cioè non perturbabile dagli scambi di energia. Il generatore indipendente di tensione costituisce uno dei due modi in cui si può intervenire dall'esterno su un circuito. Come vedremo nel § 1.6.7, si possono avere degli inconvenienti, usando tale modello, in quanto esso non rappresenta in modo completo il corrispondente componente reale.

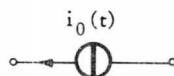
1.6.5 - Il generatore indipendente di corrente.

«Il generatore indipendente di corrente è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(1.6.13) \quad i(t) = i_0(t)$$

con i_0 una funzione del tempo assegnata, eventualmente costante. Il simbolo usato è quello di fig. 1.6.5».

Fig. 1.6.5 - Simbolo del generatore indipendente di corrente.



Il generatore indipendente di corrente, a differenza di quello di tensione, ha più importanza come ingrediente di circuiti equivalenti di componenti reali che come modello di un unico componente reale. È facile vedere che tale elemento è sede di un trasferimento reversibile non vincolato di energia; infatti la tensione che si stabilisce tra i suoi morsetti dipende dal circuito a cui è connesso e perciò la potenza istantanea che esso eroga può assumere qualsiasi valore e segno. Quindi, come per il generatore indipendente di tensione, si può pensare che quello di corrente sia collegato idealmente ad un accumulatore di energia di capacità infinita.

I due generatori indipendenti costituiscono i due modi in cui si può intervenire dall'esterno sul circuito. Nel § 1.6.7, metteremo in evidenza alcune incongruenze a cui i modelli dei generatori indipendenti danno luogo.

1.6.6 - Corto-circuito e circuito aperto.

«Il corto-circuito è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.14) \quad v(t) = 0$$

ed il simbolo con cui viene rappresentato è mostrato in fig.1.6.6 a).

Fig.1.6.6 - Simboli del corto-circuito a) e del circuito aperto b).



Tale elemento ideale è di grande uso nei circuiti, anche se non corrisponde ad alcun componente reale. Si può pensare come un caso limite del generatore di tensione. In particolare, è interessante notare come un generatore indipendente di tensione che venga disattivato, cioè la cui tensione impressa sia messa a zero dall'esterno del circuito, si riduca proprio ad un corto-circuito. Tale osservazione verrà utilizzata successivamente in varie occasioni.

«Il circuito-aperto è un elemento caratterizzato dalla relazione costitutiva:

$$(I.6.15) \quad i(t) = 0$$

ed il simbolo con cui viene rappresentato è mostrato in fig.1.6.6 b). Tale elemento ideale è di grande uso nei circuiti, anche se non corrisponde ad alcun componente reale. Si può pensare come un caso limite del generatore di corrente. In particolare, è interessante notare come un generatore indipendente di corrente, che venga disattivato, cioè la cui corrente impressa sia messa a zero dall'esterno del circuito, si riduca proprio ad un circuito aperto.

1.6.7. Incongruenze associate agli elementi ideali e circuiti equivalenti dei bipoli reali.

Gli elementi introdotti nei paragrafi precedenti sono ideali. La «storia» che ha portato alla loro definizione non è usualmente fondamentale, ma può aiutare a capire se hanno un significato fisico. Nel caso dei bipoli il significato fisico è sempre presente, in quanto, a parte per il generatore indipendente di corrente, la definizione dell'elemento ideale è scaturita da un processo di «idealizzazione» di qualche componente reale di uso comune.

L'idealizzazione, però, a volte può essere stata eccessiva, con il che possono insorgere in un circuito (ideale) delle incongruenze. Accenniamo in fig.1.6.7 alle più macroscopiche ed evidenti, discutendo in

dettaglio il caso a) dei due generatori indipendenti di tensione. È evidente che se le due tensioni impresse v_1 e v_2 sono diverse, il circuito di fig. I.6.7 a) non ha senso. D'altra parte se $v_1 = v_2$, risulta indeter-

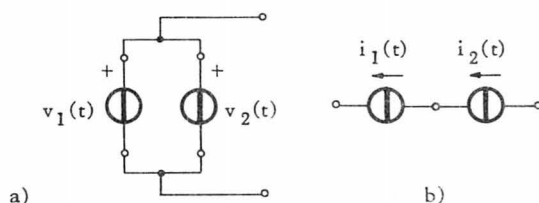
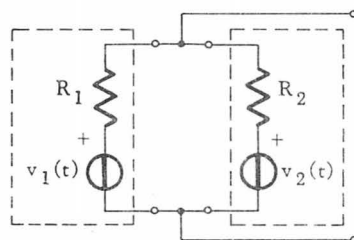


Fig. I.6.7 - Due esempi di incongruenze che possono verificarsi connettendo elementi ideali bipolari.

minata la corrente erogata da ciascun generatore. In ambedue i casi si è in una situazione «non fisica». D'altra parte che l'incongruenza sia dovuta all'idealizzazione è evidente, in quanto è chiaramente identificabile la situazione che si verrebbe ad avere con due generatori di tensione reali. Ciò mette in evidenza che il componente reale richiede di essere caratterizzato con un circuito equivalente che contiene oltre all'elemento ideale corrispondente, anche altri elementi ideali. Ad esempio, già la presenza di un resistore elimina l'inconveniente di fig. I.6.7 a), come mostrato in fig. I.6.8, dove entro le zone tratteggiate sono riportati i circuiti equivalenti dei generatori indipendenti di tensione reali. Ovviamente il circuito equivalente di fig. I.6.8 non è sufficiente a tenere conto di altri comportamenti del componente reale, come ad esempio la capacità di seguire rapidamente le variazioni di carico. Sarà necessario per questo scopo e per altri possibili arricchire il circuito equivalente adottato.

Fig. I.6.8 - Rimozione dell'incongruenza di fig. I.6.7 a) mediante un circuito equivalente opportuno per il generatore indipendente di tensione reale.



Riprenderemo il discorso su questo punto successivamente per i componenti reali a più di due terminali. Per quanto riguarda i componenti reali bipolari occorre accennare al fatto che ordinariamente si ha già una buona approssimazione con l'elemento ideale corrispondente. L'aggiunta di un resistore di valore opportuno all'induttore ed al condensatore porta a circuiti equivalenti assai soddisfacenti per i corrispondenti

componenti reali. Tali resistori sono usualmente previsti nelle specifiche costruttive di tali componenti, tramite un opportuno coefficiente di merito.

Il coefficiente di merito più usato è definito come segue con riferimento a figura I.6.9:

$$(I.6.16) \quad Q = \frac{\omega L}{R_s} \quad ; \quad Q = \frac{1}{\omega C R'_s}$$

oppure:

$$(I.6.17) \quad Q = \frac{R_p}{\omega L} \quad ; \quad Q = R'_p \omega C$$

in cui ω è la pulsazione di funzionamento. Le due definizioni sono praticamente equivalenti nelle condizioni usuali di funzionamento, in quanto è richiesto dalle applicazioni per il coefficiente di merito Q un valore sufficientemente elevato.

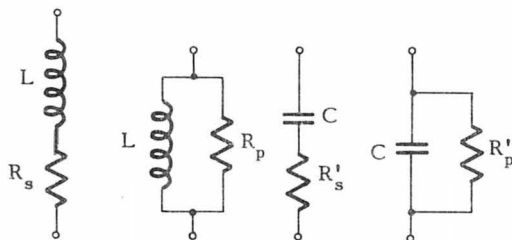


Fig.I.6.9 - Circuiti equivalenti degli induttori e condensatori reali che tengono conto delle perdite associate.

1.7 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte attivi lineari e permanenti.

Da quanto detto nel § 1.6 ed in particolare nel § 1.6.7 il modello di un componente bipolare reale nasce da un compromesso tra due esigenze contrastanti:

- 1) il modello deve essere sufficientemente completo per rappresentare convenientemente il componente dal punto di vista d'interesse;
- 2) il modello deve essere semplice per evitare che l'analisi del circuito si complichino in modo proibitivo.

Tale compromesso nel caso dei componenti bipolari reali è stato risolto, introducendo elementi ideali opportuni tramite un processo di idealizzazione dei componenti reali. I modelli che ne risultano per i componenti bipolari reali sono assai soddisfacenti, in quanto usualmente richiedono l'elemento ideale corrispondente ed eventualmente qualche altro elemento degli altri tipi, con funzione di correzione.

Nel caso dei componenti due-porte attivi reali la situazione è completamente diversa. Il processo di idealizzazione si può applicare, ma porta ad un elemento ideale molto distante dal componente reale. Per questa ragione l'elemento ideale in questione, che vedremo nel § 1.7.4 serve essenzialmente per due scopi: analisi grossolana e rapida dei circuiti contenenti componenti attivi; derivazione di circuiti equivalenti.

La maggioranza degli elementi ideali attivi due-porte si ottiene mediante dei procedimenti completamente avulsi dalla realtà e successivamente essi vengono utilizzati, insieme agli usuali elementi bipolari ideali nei circuiti equivalenti dei componenti reali⁽¹⁾.

A causa di questa tecnica, esistono numerosi elementi ideali attivi, non tutti indispensabili, nel senso cioè che si può rappresentare l'uno come aggregato di altri. La loro conoscenza è utile, in quanto si prestano con efficacia diversa al modellamento dei componenti reali nelle diverse situazioni di impiego.

È infine opportuno mettere in evidenza che le due porte di ciascun elemento possano essere completamente separate, come accade negli elementi «bilanciati» oppure possono avere un terminale in comune, come accade negli elementi sbilanciati. In fig. I.7.1 sono riportati i simboli relativi ai due casi.

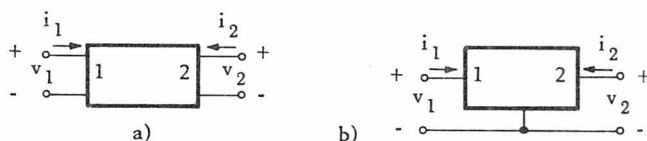


Fig. I.7.1 - Simboli usati per gli elementi bilanciati a) e sbilanciati b).

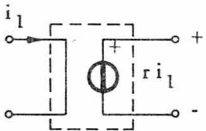
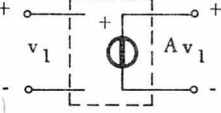
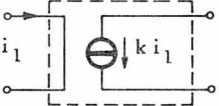
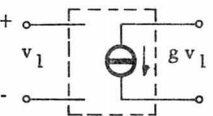
1.7.1 - Generatori controllati.

I generatori controllati sono elementi attivi ideali due-porte caratterizzati dal fatto che la grandezza impressa è proporzionale tramite

(1) - Per dettagli vedere ad esempio: G. Martinelli, « Sintesi delle reti elettriche: Vol. II » Ed. Siderea, 1971 pag. 604 - 646.

una costante che prende il nome di parametro di controllo ad un'altra grandezza elettrica applicata al loro ingresso. Dipendentemente dal fatto che la grandezza impressa e quella di controllo possono essere una tensione od una corrente, si hanno quattro tipi di generatori controllati. Per comodità, si riportano in tab.I.7.1 per ciascuno dei quattro tipi il nome particolare usato, le relazioni costitutive con riferimento a figura I.7.1, il simbolo usato per rappresentarli nel caso bilanciato, le dimensioni del parametro di controllo.

TABELLA I.7.1 - Vari tipi di generatori controllati.

Generatore di tensione controllato in corrente (transimpedenza)	$v_2 = r i_1$ $v_1 = 0$		
Generatore di tensione controllato in tensione	$v_2 = A v_1$ $i_1 = 0$		Adimensionale
Generatore di corrente controllato in corrente	$i_2 = k i_1$ $v_1 = 0$		Adimensionale
Generatore di corrente controllato in tensione (transammettenza)	$i_2 = g v_1$ $i_1 = 0$		Ω^{-1}

I generatori controllati sono tra gli elementi ideali attivi più usati. È importante notare che ciascuno di essi è sufficiente ad individuare il circuito equivalente di qualsiasi componente reale quando venga unito agli elementi bipolari passivi. In particolare è possibile dedurre tutte e quattro i tipi di generatori controllati a partire da uno solo di essi. Nelle figg.I.7.2, I.7.3, I.7.4 viene mostrato un modo possibile per dedurre dalla transammettenza gli altri tipi di generatori controllati.

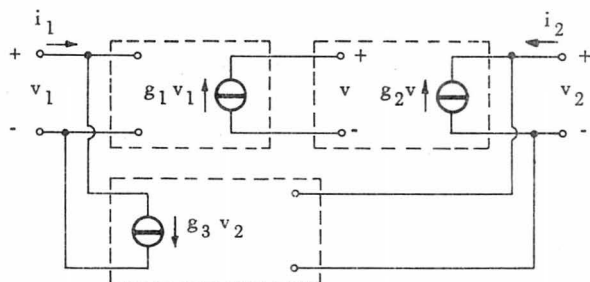


Fig.1.7.2 - Transimpedenza ottenuta con tre transammettenze. Il parametro di controllo vale $1/g_3$ e $v_1 = 0$. I valori di g_1 e g_2 sono arbitrari, purché diversi da zero.

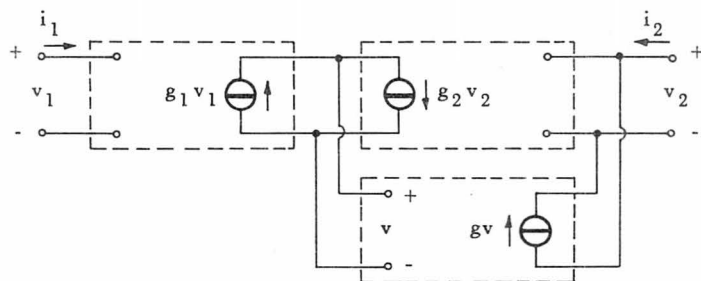


Fig.1.7.3 - Generatore di tensione controllato in tensione ottenuto con tre transammettenze. Il parametro di controllo vale g_1/g_2 ed $i_1 = 0$. Il valore di g è arbitrario, purché diverso da zero.

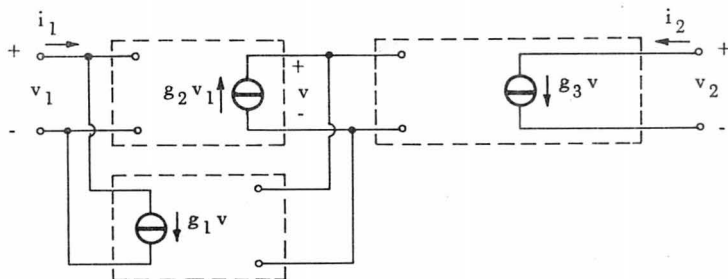


Fig.1.7.4 - Generatore di corrente controllato in corrente ottenuto con tre transammettenze. Il parametro di controllo vale g_3/g_1 e $v_1 = 0$. Il valore di g_2 è arbitrario, purché diverso da zero.

1.7.2 - Convertitori d'impedenza negativa.

I convertitori d'impedenza negativa sono caratterizzati dalla loro capacità di cambiare da passivo in attivo o viceversa un elemento

ideale bipolare, eventualmente alterandone il valore di una quantità costante. L'elemento di cui si vuole cambiare la natura viene collegato ad una delle due porte del convertitore e il bipolo cambiato si vede all'altra porta. Il cambiamento consiste in una variazione di segno e nella moltiplicazione per una costante positiva, che, nel caso delle resistenze ed induttanze prende il nome di coefficiente di conversione e nel caso delle capacità è l'inverso di tale coefficiente.

TABELLA 1.7.2 - Convertitori d'impedenza negativa.

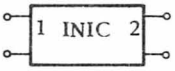
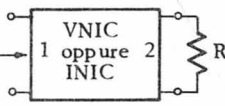
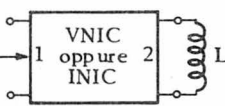
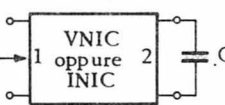
Convertitore di impedenza negativa ad inversione di tensione	$v_1 = -k_1 v_2$ $i_1 = -k_2 i_2$ $k_1 > 0; k_2 > 0$		Coefficiente di conversione dalla porta 1 alla 2 $k^2 = \frac{k_1}{k_2}$
Convertitore di impedenza negativa ad inversione di corrente	$v_1 = k_1 v_2$ $i_1 = k_2 i_2$ $k_1 > 0; k_2 > 0$		Coefficiente di conversione dalla porta 1 alla 2 $k^2 = \frac{k_1}{k_2}$

TABELLA 1.7.3 - Conversione da passivo ad attivo degli elementi bipolari.

Resistore	Resistore di resistenza $-k^2 R$		$v_1 = \mp k_1 v_2 = \mp k_1 (-R i_2) =$ $= \pm k_1 R \left(\mp \frac{1}{k_2} i_1 \right) = -k^2 R i_1$
Induttore	Induttore di induttanza $-k^2 L$		$v_1 = \mp k_1 v_2 = \mp k_1 \left(-L \frac{di_2}{dt} \right) =$ $= \pm k_1 L \frac{d}{dt} \left(\mp \frac{1}{k_2} i_1 \right) = -k^2 L \frac{di_1}{dt}$
Condensatore	Condensatore di capacità $-\frac{C}{k^2}$		$i_1 = \mp k_2 i_2 = \mp k_2 \left(-C \frac{dv_2}{dt} \right) =$ $= \pm k_2 C \frac{d}{dt} \left(\mp \frac{1}{k_1} v_1 \right) = -\frac{C}{k^2} \frac{dv_1}{dt}$

I convertitori di impedenza negativa sono di due tipi, a seconda che passando dalla porta d'ingresso a quella di uscita si ha un'inversione di corrente o di tensione. In tab.I.7.2 riportiamo il nome, le relazioni costitutive con riferimento a fig.I.7.1, il simbolo usato per rappresentarli nel caso bilanciato ed il valore del coefficiente di conversione. In tabella I.7.3 illustriamo l'azione di conversione esercitata sugli elementi bipolari. È interessante osservare che lo scambio delle due porte ha come unico effetto quello di invertire il coefficiente di conversione.

Dal punto di vista energetico si vede chiaramente che i convertitori d'impedenza negativa scambiano in modo reversibile non vincolato l'energia, in modo analogo ai generatori di tutti i tipi visti.

Infine in fig.I.7.5 viene mostrato lo schema dei due tipi di convertitori, ottenuto con quattro transammettenze.

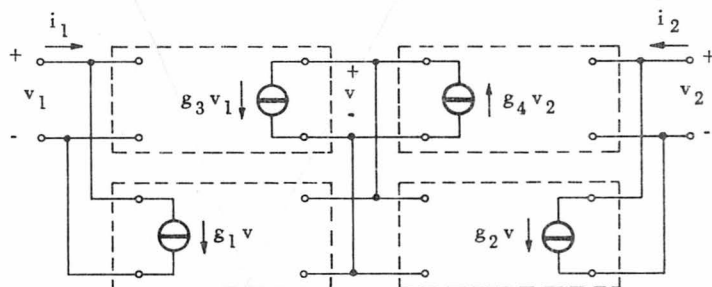


Fig.I.7.5 - Convertitore d'impedenza negativa ottenuto con quattro transammettenze. Risulta: $v_2 = (g_3/g_4) v_1$; $i_2 = (g_2/g_1) i_1$. Scegliendo i rapporti g_3/g_4 , g_2/g_1 positivi si ha l'INIC; scegliendoli negativi si ha il VNIC.

1.7.3 - Invertitori d'impedenza negativa.

Gli invertitori d'impedenza negativa sono caratterizzati dalla loro capacità di cambiare da passivo in attivo o viceversa un elemento ideale bipolare, scambiando contemporaneamente la tensione con la corrente. Ciò implica ad esempio che un condensatore passivo è cambiato in un induttore attivo. Le relazioni costitutive dell'invertitore d'impedenza negativa sono:

(I.7.1)

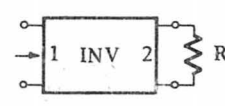
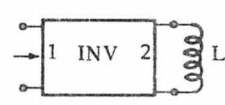
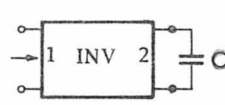
$$v_1 = R_1 i_2$$

$$v_2 = R_2 i_1$$

con $R_1, R_2 > 0$. Il caso usuale è quello in cui $R_1 = R_2$. Utilizzando le (I.7.1) si ottiene facilmente l'effetto d'inversione e cambiamento di natura, illustrato in tab.I.7.4.

È facile rendersi conto che scambiando le due porte il comportamento dell'invertitore rimane inalterato. Dal punto di vista energetico si ha lo stesso comportamento degli altri elementi ideali attivi due-porte.

TABELLA I.7.4 - Inversione e conversione da passivo ad attivo degli elementi bipolari.

Resistore	$\left. \begin{array}{l} \text{Resistore di resistenza} \\ - \frac{R_1 R_2}{R} \end{array} \right\}$ 	$v_1 = R_1 i_2 = - R_1 \frac{v_2}{R} = - \frac{R_1}{R} R_2 i_1 =$ $= - \frac{R_1 R_2}{R} i_1$
Induttore	$\left. \begin{array}{l} \text{Condensatore di capacità} \\ - \frac{L}{R_1 R_2} \end{array} \right\}$ 	$i_1 = \frac{1}{R_2} v_2 = \frac{1}{R_2} \left(- L \frac{di_2}{dt} \right) =$ $= - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} \frac{v_1}{R_1} = - \frac{L}{R_1 R_2} \frac{dv_1}{dt}$
Condensatore	$\left. \begin{array}{l} \text{Induttore di induttanza} \\ - R_1 R_2 C \end{array} \right\}$ 	$v_1 = R_1 i_2 = R_1 \left(- C \frac{dv_2}{dt} \right) =$ $= - R_1 C \frac{d}{dt} (R_2 i_1) = - R_1 R_2 C \frac{di_1}{dt}$

Infine in fig. I.7.6 viene mostrato uno schema di invertitore di impedenza negativa ottenuto con due transammettenze.

I.7.4 - Nullore.

Il nullore è un elemento ideale attivo caratterizzato dalle seguenti relazioni costitutive:

$$(I.7.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ i_1 &= 0 \end{aligned}$$

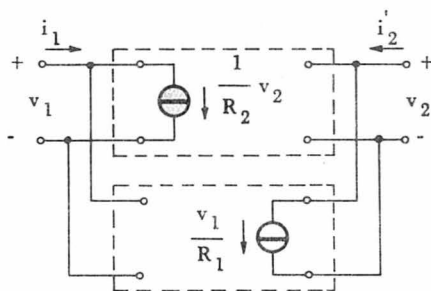


Fig. I.7.6 - Invertitore d'impedenza negativa ottenuto con due transammettenze ($R_1, R_2 > 0$).

È evidente che l'assenza nelle (I.7.2) delle grandezze elettriche della seconda porta, implica che queste possono assumere qualsiasi valore. Il simbolo usato è riportato in fig.I.7.7.

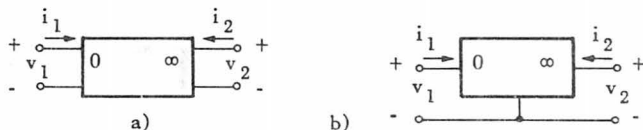


Fig.I.7.7 - Simbolo usato per il nullo bilanciato a) e sbilanciato b).

Il nullo è l'unico elemento ideale attivo due-porte che si ottiene mediante un procedimento di idealizzazione. In fig.I.7.8 sono riportati i fondamenti di tale procedimento, relativamente all'amplificatore operazionale ed al transistor.

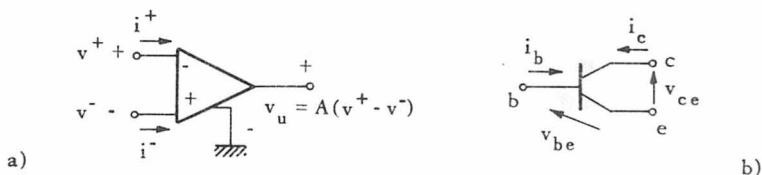


Fig.I.7.8 - Procedimento di idealizzazione che porta al nullo: a) Amplificatore operazionale: si ottiene il nullo bilanciato al tendere di i^+ e di i^- a zero e di A all'infinito. b) Transistore (NPN o PNP): si ottiene il nullo sbilanciato con morsetto comune coincidente con l'emettitore, morsetto contrassegnato dallo 0 con la base e morsetto contrassegnato con ∞ con il collettore al tendere a zero di i_b e di v_{be} .

Mediante il nullo è possibile ottenere qualsiasi altro elemento ideale attivo due porte. Per vedere ciò, basta mostrare che è possibile ottenere una transammettenza mediante un circuito contenente nullori e resistori passivi. Ciò è riportato in fig.I.7.9.

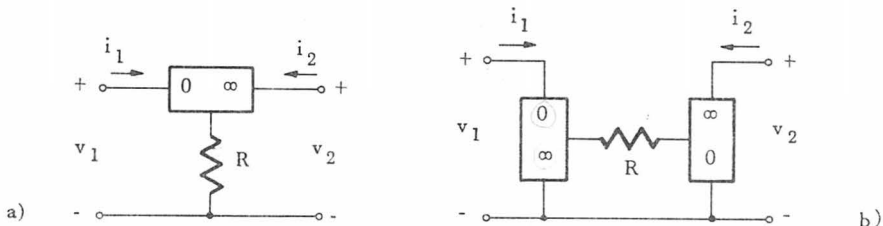


Fig.I.7.9 - Schema di una transammettenza sbilanciata ottenuta con nullori sbilanciati e resistori passivi: a) caso del parametro di controllo positivo; b) caso del parametro di controllo negativo. Il parametro di controllo ha ampiezza $1/R$ in tutte e due i casi.

È stato detto nell'introduzione al § 1.7 che l'elemento ideale ottenuto per idealizzazione di componenti attivi reali, serve essenzialmente per due scopi. Il primo è quello di permettere un'analisi rapida, anche se grossolana, di circuiti contenenti componenti reali attivi. Questo punto verrà sviluppato nel § 2.6 del Cap. II.

Per quanto riguarda il secondo punto, cioè la possibilità di derivare circuiti equivalenti, anche se solo da un punto di vista ideale, lo considereremo qui di seguito⁽¹⁾. La proprietà del nullore, che è fondamentale a questo riguardo, è:

1) La possibilità di scinderlo in una coppia di bipoli, di per sé stessi anomali ed assurdi, se considerati separatamente, quali il nullatore ed il noratore. Tali elementi ideali sono definiti in fig. 1.7.10. In fig. 1.7.11, sono riportati gli schemi bilanciato e sbilanciato del nullore, ottenuti con la coppia nullatore-noratore;

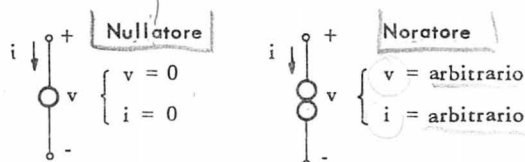


Fig. 1.7.10 - Relazioni costitutive e simboli per il nullatore e per il noratore.

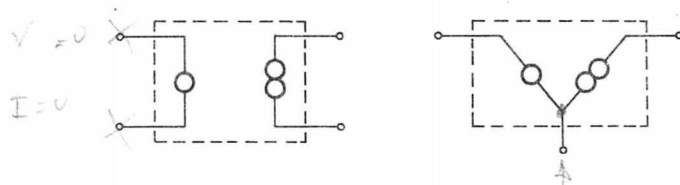


Fig. 1.7.11 - Schema bilanciato e sbilanciato del nullore, ottenuto tramite la coppia nullatore-noratore.

2) La possibilità di ottenere con nullatori e noratori i circuiti equivalenti del corto-circuito e del circuito aperto, come messo in evidenza in figura 1.7.12.

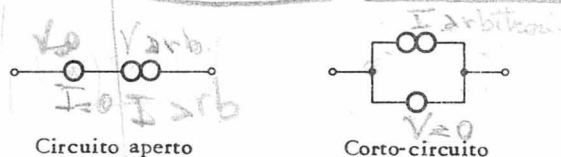


Fig. 1.7.12 - Circuiti equivalenti del corto-circuito e del circuito aperto, ottenuti tramite il nullatore ed il noratore.

(1) - Per ulteriori dettagli vedere G. Martinelli, op. cit., pag. 640 - 646.

Il modo di procedere per derivare circuiti equivalenti, dal punto di vista esterno, ma internamente diversi, consiste nel materializzare nel circuito di partenza un circuito aperto oppure un corto-circuito o più di uno contemporaneamente e quindi nel sostituire agli elementi ideali attivi i nullori nella forma di fig.I.7.11. A questo punto associando opportunamente nullatori e noratori in modo da formare coppie, si ottengono nell'interno del circuito sia nullori in posizione diversa da quella di partenza sia un numero maggiore di essi. È evidente che il nuovo circuito, se si cerca di realizzarlo con componenti reali, si comporterà usualmente in modo molto diverso da quello di partenza, in quanto la lontananza degli elementi ideali dai componenti reali gioca un effetto diverso dipendentemente dal circuito considerato.

L'esempio di fig.I.7.13 chiarisce il procedimento di derivazione, descritto sommariamente in precedenza. Esso riguarda la derivazione

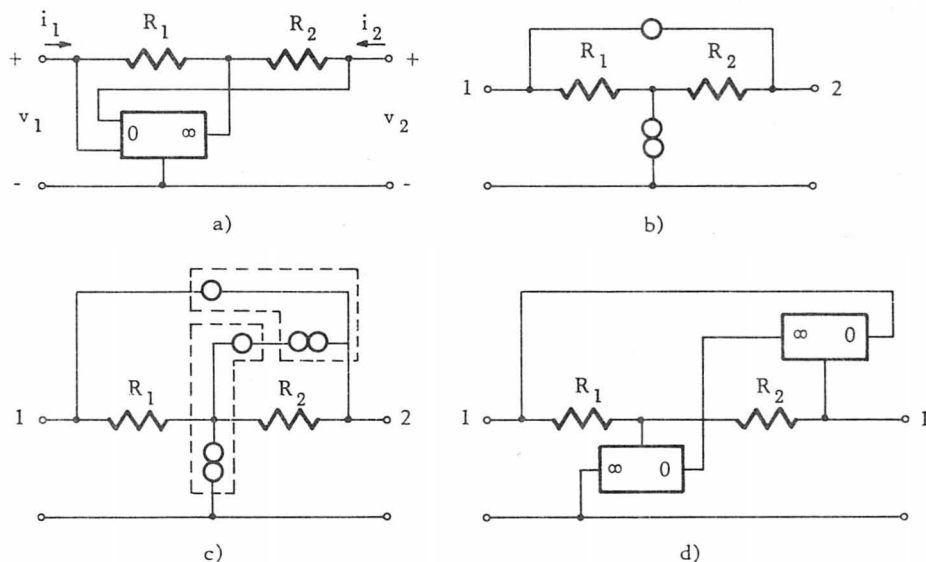


Fig.I.7.13 - Derivazione di uno schema di INIC a due nullori da uno ad un nullore.

di due schemi noti di convertitori d'impedenza negativa a nullori, l'uno dall'altro. Precisamente in a) è mostrato lo schema di INIC contenente un nullore e due resistori passivi. Il coefficiente k_1 è uguale ad 1 e k_2 a R_1/R_2 . Lo schema b) si ottiene usando l'equivalenza del nullore con la coppia nullatore-noratore di fig.I.7.11. Si ottiene quindi lo schema c) aggiungendo in parallelo ad R_2 un circuito aperto del tipo considerato in fig.I.7.12. Associando le coppie nullatore-noratore come

indicato nel tratteggio di c) ed identificandole con nullori sbilanciati si arriva al nuovo schema di INIC a due nullori sbilanciati e due resistori, mostrato nella parte d) della figura, esattamente equivalente dall'esterno all'INIC di partenza.

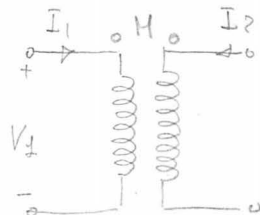
1.8 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte passivi lineari e permanenti.

Gli elementi ideali che considereremo sono tre, di cui due provengono da un procedimento di idealizzazione del tipo di quello che è usato nel caso degli elementi bipolari passivi. Gli elementi in questione sono le «induttanze mutuamente accoppiate» ed il «trasformatore ideale». Il procedimento di idealizzazione a partire dal componente reale corrispondente è molto più spinto per il trasformatore che per gli induttori mutuamente accoppiati. Il terzo elemento che considereremo è il giratore; anch'esso può essere ottenuto con un procedimento di idealizzazione di un componente reale. Tuttavia tale idealizzazione è eccessiva e perciò è più appropriato pensare tale elemento ideale ottenuto con un procedimento simile a quello impiegato nel caso attivo, ma applicato al caso degli elementi ideali passivi non-reciproci.

1.8.1 - Induttori mutuamente accoppiati e trasformatore ideale.

Gli induttori mutuamente accoppiati costituiscono un elemento ideale a due-porte, definito dalle seguenti relazioni costitutive, con riferimento a fig. I.7.1:

$$(I.8.1) \quad \begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$



in cui L_1 ed L_2 prendono il nome di induttanze proprie ed M induttanza mutua. Nel caso dell'elemento passivo, che è l'unico che interessa, valgono le seguenti limitazioni:

(I.8.2)

$$L_1 \geq 0$$

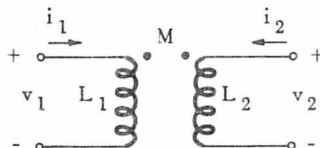
$$L_2 \geq 0$$

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Il simbolo usato per rappresentare questo elemento è mostrato in fig. I.8.1. È importante rilevare che:

1) nel simbolo usato sono presenti i simboli di due induttori di induttanza L_1 ed L_2 . Ciò, d'altra parte, non deve meravigliare in quanto l'elemento a due porte, se ridotto ad una, ad esempio aprendo una porta, coincide esattamente con un induttore;

Fig. I.8.1 - Simbolo usato per gli induttori mutuamente accoppiati.



2) nel simbolo usato è presente una coppia di punti. Tali punti indicano che nel calcolo della tensione su un induttore, la caduta di tensione provocata dalla corrente che scorre nell'altro (accoppiato) è concorde a quello provocato dalla corrente propria, se le due correnti si trovano nella stessa posizione rispetto ai suddetti punti, cioè tutte e due entranti o uscenti. Nel caso contrario le due cadute di tensione sono discordi, come indicato in fig. I.8.2.

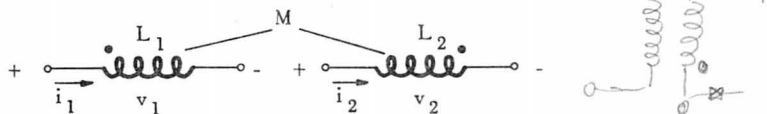


Fig. I.8.2 - Induttori mutuamente accoppiati con versi discordi delle correnti. Risulta:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} ; \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

L'elemento «induttori mutuamente accoppiati» è analogo dal punto di vista energetico ad un induttore, in particolare passivo se le tre costanti L_1 , L_2 , M soddisfano le (I.8.2). Di conseguenza in esso ha luogo un trasferimento reversibile di energia vincolato. Facciamo vedere la necessità e sufficienza delle (I.8.2) per la passività dell'elemento. A questo scopo è necessario calcolare l'energia immagazzinata nell'elemento a partire da un istante remoto ($t = -\infty$), in cui l'elemento stesso è a riposo. Si ha:

$$\begin{aligned}
 (I.8.3) \quad \mathcal{E}(t) &= \int_{-\infty}^t (v_1 i_1 + v_2 i_2) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M \left(i_2 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{di_2}{dt} \right) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2
 \end{aligned}$$

Supponiamo che l'elemento sia passivo, allora $\mathcal{E}(t) \geq 0$ qualunque sia il valore di i_1 ed i_2 . Ciò implica:

$$\begin{aligned}
 &\text{per } i_2 = 0 \quad L_1 \geq 0 \\
 (I.8.4) \quad &\text{per } i_1 = 0 \quad L_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{per } i_2 = \pm i_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}; \quad i_1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t) = L_1 i_1^2 \pm M \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_1^2 \geq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}
 \end{aligned}$$

Supponiamo quindi che siano soddisfatte le (I.8.2); facciamo vedere che l'elemento è passivo, cioè $\mathcal{E}(t) \geq 0$ per qualsiasi i_1 ed i_2 . In particolare, se $i_1 = 0$ oppure $i_2 = 0$, la verifica è immediata. Nel caso generale, riscriviamo $\mathcal{E}(t)$ come segue:

$$(I.8.5) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \left[1 + 2 \frac{M}{L_1} \frac{i_2}{i_1} + \frac{L_2}{L_1} \left(\frac{i_2}{i_1} \right)^2 \right]$$

La quantità entro parentesi vale al minimo, al variare di i_2/i_1 :

$$(I.8.6) \quad 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

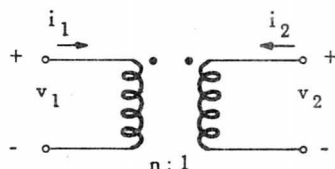
e quindi è non-negativa per le (I.8.2), così come $1/2 L_1 i_1^2$, ciò che dimostra che $\mathcal{E}(t) \geq 0$.

Il trasformatore ideale è un elemento passivo due-porte, definito dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\begin{aligned}
 (I.8.7) \quad &v_1 = n v_2 \\
 &i_1 = -\frac{1}{n} i_2
 \end{aligned}$$

in cui n prende il nome di rapporto di trasformazione. Il simbolo è riportato in fig. I.8.3. Si vede dalla figura che il simbolo usato è molto simile a quello degli induttori mutuamente accoppiati, tuttavia una differenza fondamentale è la presenza solo di n al posto delle tre costanti L_1, L_2, M .

Fig. I.8.3 - Simbolo usato per il trasformatore ideale.



Il trasformatore non assorbe o cede potenza e quindi energia; infatti:

$$(I.8.8) \quad p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = n v_2 \left(-\frac{1}{n} i_2 \right) + v_2 i_2 = 0$$

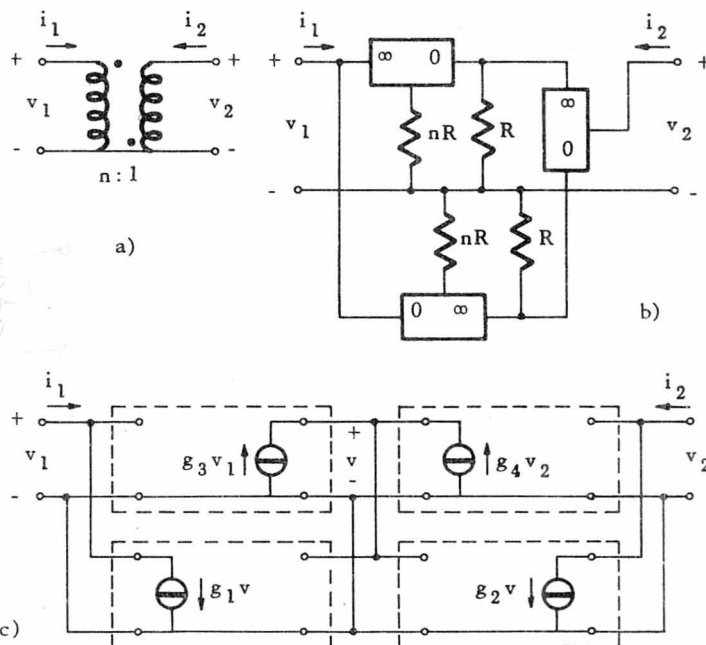


Fig. I.8.4 - Schemi del trasformatore ideale sbilanciato a) ottenuti con nullori sbilanciati in b) e con transmettenze sbilanciate in c). In quest'ultimo caso deve essere $g_4/g_3 = n$ e $g_2/g_1 = n$.

Le sue proprietà tipiche sono:

- 1) la capacità di alterare le grandezze elettriche passando da una porta all'altra;
- 2) la capacità di alterare il livello degli elementi ideali bipolari, quando chiusi su una sua porta, come messo in evidenza in Tab.I.8.1.

Tali proprietà sono di fondamentale importanza nelle applicazioni del corrispondente componente reale.

È infine da mettere in evidenza, che, se ciò è comodo in qualche particolare applicazione, è possibile usare schemi del trasformatore ideale ottenuti con qualcuno degli elementi ideali due-porte attivi. In particolare in fig.I.8.4 riportiamo lo schema ottenuto per un trasformatore sbilanciato, usando il nullore sbilanciato e la transammettenza.

TABELLA I.8.1 • Variazione di livello degli elementi bipolari ideali per effetto del trasformatore.

Resistore		$v_1 = nv_2 = n(-Ri_2) = -nRi_2 =$ $= -nR(-n \cdot i_1) = n^2 Ri_1$ $v_1 = -nv_2 = -n(-Ri_2) = nRi_2 =$ $= nR(ni_1) = n^2 Ri_1$
Induttore		$v_1 = nv_2 = n \left(-L \frac{di_2}{dt} \right) = -nL \frac{di_2}{dt} =$ $= -nL \frac{d}{dt} (-ni_1) = n^2 L \frac{di_1}{dt}$ $v_1 = -nv_2 = -n \left(-L \frac{di_2}{dt} \right) = nL \frac{di_2}{dt} =$ $= nL \frac{d}{dt} (ni_1) = n^2 L \frac{di_1}{dt}$
Condensatore		$i_1 = -\frac{1}{n} i_2 = -\frac{1}{n} \left(-C \frac{dv_2}{dt} \right) = \frac{C}{n} \frac{dv_2}{dt} =$ $= \frac{C}{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_1}{n} \right) = \frac{C}{n^2} \frac{dv_1}{dt}$ $i_1 = \frac{1}{n} i_2 = \frac{1}{n} \left(-C \frac{dv_2}{dt} \right) = -\frac{C}{n} \frac{dv_2}{dt} =$ $= -\frac{C}{n} \frac{d}{dt} \left(-\frac{v_1}{n} \right) = \frac{C}{n^2} \frac{dv_1}{dt}$

1.8.2 - Giratore.

Il giratore è l'unico elemento ideale due-porte passivo non-reciproco che si abbia a disposizione. Le sue relazioni costitutive sono, con riferimento a fig. I.7.1:

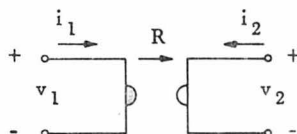
(I.8.9)

$$v_1 = -R i_2$$

$$v_2 = R i_1$$

in cui R è la resistenza di girazione. Il simbolo comunemente usato è mostrato in fig. I.8.5.

Fig. I.8.5 - Simbolo per il giratore.



La passività del giratore è facilmente verificabile, utilizzando la (I.8.9). Precisamente, si ha, come per il trasformatore ideale:

$$(I.8.10) \quad p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = -R i_2 i_1 + R i_1 i_2 = 0$$

Perciò il giratore non assorbe né cede potenza e quindi energia.

Per quanto riguarda la reciprocità, è sufficiente controllare che esso non soddisfa la legge di reciprocità di Lorentz.

Infatti, applicando le (I.8.9) alla (I.5.2), si ha:

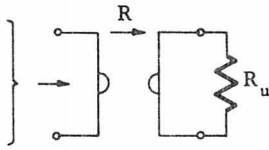
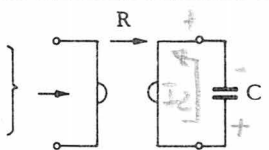
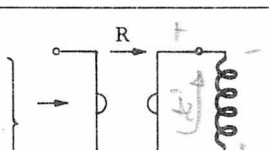
(I.8.11)

$$\sum_{k=1}^2 v_k^{(1)} i_k^{(2)} = -R i_2^{(1)} i_1^{(2)} + R i_1^{(1)} i_2^{(2)} \neq \sum_{k=1}^2 i_k^{(1)} v_k^{(2)} = -R i_1^{(1)} i_2^{(2)} + R i_2^{(1)} i_1^{(2)}$$

È interessante ricordare che il nome di giratore dato a questo elemento deriva dalla sua caratteristica proprietà di scambiare tra loro la tensione e corrente, per cui tale elemento permette di trasformare un induttore in un condensatore e viceversa. In Tab. I.8.2 viene riassunto lo effetto del giratore sui bipoli ideali. Particolarmente importante è la trasformazione di un condensatore in un induttore, che è la base dell'impiego del giratore nei microcircuiti, dove appunto è del tutto assente lo induttore reale tradizionale. Ulteriori dettagli su questo punto (uso dei giratori sbilanciati, realizzazione dei trasformatori con giratori) posso-

no essere trovati in G. Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche», Vol. II Ed. Siderea 1971.

TABELLA 1.8.2 - Effetto del giratore sui bipoli ideali.

Resistore	$\left. \begin{array}{l} \text{Resistore di resistenza} \\ \frac{R^2}{R_u} \end{array} \right\}$ 	$v_1 = R i_2 = R \left(- \frac{v_2}{R_u} \right)$ $= \frac{R}{R_u} v_2 = \frac{R}{R_u} R i_1 = \frac{R^2}{R_u} i_1$
Condensatore	$\left. \begin{array}{l} \text{Induttore di induttanza} \\ R^2 C \end{array} \right\}$ 	$v_1 = - R i_2 = R \left(- C \frac{dv_2}{dt} \right) =$ $= RC \frac{d}{dt} (R i_1) = R^2 C \frac{di_1}{dt}$
Induttore	$\left. \begin{array}{l} \text{Condensatore di capacità} \\ \frac{L}{R^2} \end{array} \right\}$ 	$i_1 = \frac{1}{R} v_2 = \frac{1}{R} \left(- L \frac{di_2}{dt} \right) =$ $= - \frac{L}{R} \frac{d}{dt} \left(- \frac{v_1}{R} \right) = \frac{L}{R^2} \frac{dv_1}{dt}$

È infine da mettere in evidenza, che, se ciò è comodo in qualche applicazione particolare, è possibile usare schemi del giratore ottenuti con qualcuno degli elementi ideali attivi. In particolare in fig.1.8.6 riportiamo lo schema di un giratore sbilanciato ottenuto mediante nullori sbilanciati e transammettenze.

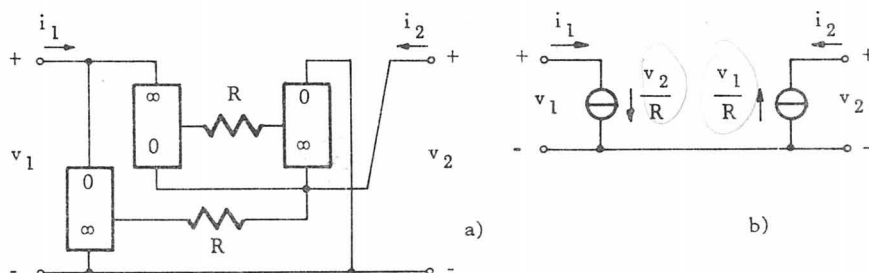


Fig.1.8.6 - Schemi del giratore sbilanciato ottenuti con nullori sbilanciati a) e con transammettenze b).

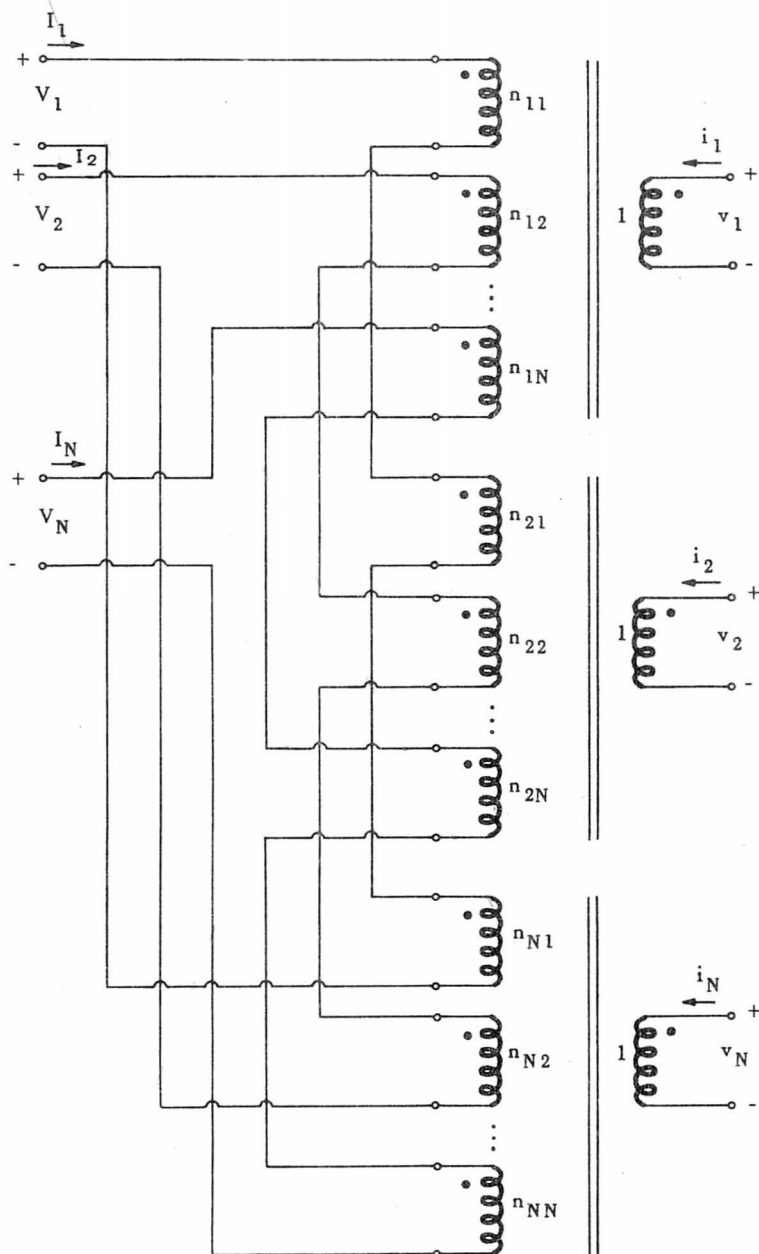


Fig.I.8.7 - Il simbolo usato per il trasformatore a più porte.

È facile vedere che l'elemento ideale definito dalle (I.8.13) è passivo e reciproco. Infatti:

$$(I.8.15) \quad p(t) = \sum_{k=1}^N (V_k I_k + v_k i_k) = V^t I + i^t v = v^t T I - I^t T^t v = 0$$

ciò che prova la passività.

Per quanto riguarda la legge di reciprocità di Lorentz, si ha:

$$(I.8.16) \quad \begin{aligned} i^{(1)t} v^{(2)} + I^{(1)t} V^{(2)} &= -I^{(1)t} T^t v^{(2)} + I^{(1)t} V^{(2)} = 0 \\ i^{(2)t} v^{(1)} + I^{(2)t} V^{(1)} &= -I^{(2)t} T^t v^{(1)} + I^{(2)t} V^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

ciò che prova la reciprocità dell'elemento.

I.9 - Circuiti equivalenti a costanti concentrate lineari e permanenti dei componenti reali.

Il circuito ideale costituisce un'approssimazione di una struttura reale costituita da dispositivi a due o più terminali di pochi tipi connessi in modo qualsiasi tra loro. Esso si ottiene sostituendo a ciascun dispositivo un circuito equivalente più o meno complesso a seconda di ciò che si vuole ottenere. Il circuito equivalente di ciascun dispositivo reale si ottiene tramite un'operazione di modellamento, la cui importanza è evidente ai fini di una valutazione esatta delle prestazioni del circuito stesso. Usualmente l'approccio al modellamento di un dispositivo si basa o su una corrispondenza fisica tra elementi ideali componenti il circuito equivalente e fenomeni che hanno luogo nel dispositivo oppure su una caratterizzazione esterna forzata. La prima via ha il vantaggio di portare ad un circuito i cui parametri sono indipendenti dalla frequenza entro campi molto vasti e la cui dipendenza da altre quantità (tensione di polarizzazione, temperatura, ecc.) sono prevedibili ed in parte controllabili. Di contro ha lo svantaggio di una difficile misurazione dei parametri stessi. Vantaggi e svantaggi opposti caratterizzano la seconda via.

Qualunque sia l'approccio seguito, il circuito equivalente del dispositivo lo rappresenta in modo accettabile solo se un certo numero di condizioni sono soddisfatte e se interessano solo particolari punti di vista. Per questa ragione è fondamentale tenere conto di tali condizioni e punti di vista nell'uso del circuito equivalente, eventualmente fornito dalla casa costruttrice del dispositivo.

Nel presente paragrafo, più che una panoramica dettagliata dell'argomento, si vuole dare un'idea degli aspetti più importanti del modellamento. A questo scopo la trattazione verrà limitata solo ad un componente reale: il transistor bipolare a giunzione, che verrà indicato nel seguito per brevità con la sua sigla inglese BJT⁽¹⁾ (bipolar junction transistor).

Come noto il BJT si ottiene introducendo dai due lati opposti di un cristallo puro di silicio o di germanio impurità dello stesso tipo e, centralmente, del tipo opposto, come messo in evidenza in fig. I.9.1. Nel funzionamento normale la giunzione base-emettitore è polarizzata in senso diretto e quella base-collettore in senso inverso. Il dispositivo viene caratterizzato tramite curve, che si ottengono prendendo uno dei suoi morsetti come riferimento, ed individuando il legame tra le tensioni degli altri due morsetti rispetto a quello di riferimento e le correnti entranti in esso. Ad esempio, prendendo l'emettitore come riferimento, una famiglia di curve molto usata è quella che fornisce l'andamento della corrente di collettore I_C in funzione della tensione collettore-emettitore V_{CE} al variare della corrente di base I_B , come mostrato in fig. I.9.2, insieme con la famiglia di curve che forniscono I_B in funzione della tensione base-emettitore V_{BE} al variare di V_{CE} .

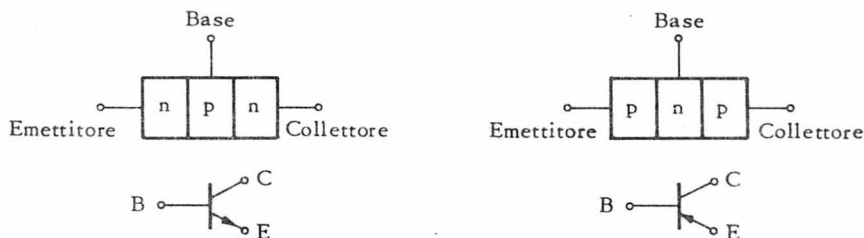


Fig. I.9.1 - Transistori BJT del tipo NPN e PNP. Le lettere n e p indicano la presenza dei due tipi di impurità.

L'esame della fig. I.9.2 mette in evidenza la non-linearità del transistor, cioè il fatto che il legame tra le grandezze elettriche I_B , I_C , V_{BE} , V_{CE} è estremamente non lineare. Tuttavia, è facile rendersi conto che tale legame è approssimativamente lineare tra le variazioni di queste grandezze rispetto ai valori che corrispondono a punti delle due regioni $I_C - V_{CE}$, $I_B - V_{BE}$ di fig. I.9.2, scelti opportunamente. Questa osservazione è la base del circuito equivalente lineare e permanente del

(1) - Per dettagli ulteriori sul BJT e per notizie relative ad altri dispositivi, quali il triodo, il pentodo, il MOSFET, il JFET, l'amplificatore operazionale si veda ad es.: M. Gasparini, D. Mirri, « Dispositivi e circuiti elettronici », Ed. Calderini Bologna 1976, Vol. I e Vol. II.

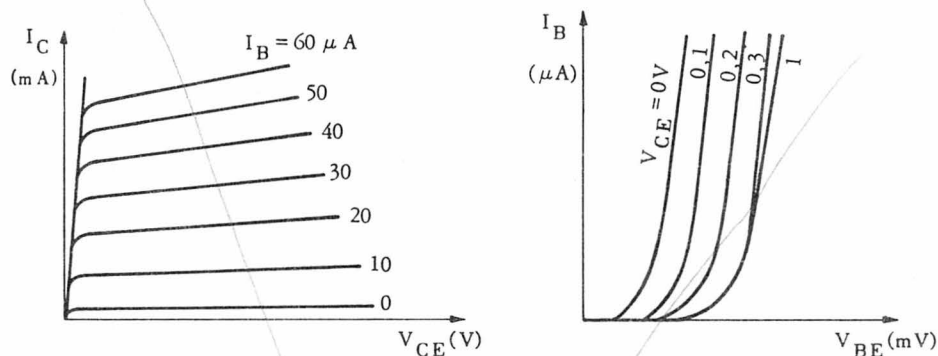


Fig.1.9.2 - Caratteristiche di un BJT.

BJT. Precisamente, tramite un'operazione fondamentale, che prende il nome di *polarizzazione*, il BJT viene portato a funzionare in punti opportuni delle suddette regioni, caratterizzati da valori ben definiti delle grandezze elettriche (*punto di lavoro*). Quindi si vanno a considerare le variazioni di queste grandezze intorno al punto di lavoro. Il legame tra queste variazioni caratterizza il circuito equivalente del BJT e permette di individuarlo. Come detto in precedenza si possono seguire due approcci per effettuare questa determinazione: approccio fisico e approccio esterno. Vedremo successivamente in dettaglio i due approcci.

È importante notare che giuoca un ruolo fondamentale il morsetto preso come riferimento.

1.9.1 - Approccio esterno alla determinazione del circuito equivalente del BJT.

Preso un morsetto come riferimento, il BJT si presenta come un circuito due-porte e quindi può essere caratterizzato esternamente con le tecniche proprie dei circuiti due-porte che vedremo nel Cap. VI. Per quanto detto, quello che si ottiene lega le variazioni delle grandezze elettriche.

L'approccio è particolarmente conveniente nelle applicazioni in bassa frequenza del BJT; in questo caso infatti i parametri del circuito equivalente sono indipendenti dalla frequenza e coincidono esattamente con gli elementi ideali resistori e generatori controllati, come messo in evidenza in fig.1.9.3, che si riferisce al caso che il morsetto di riferimento sia l'emettitore. È necessario sottolineare che:

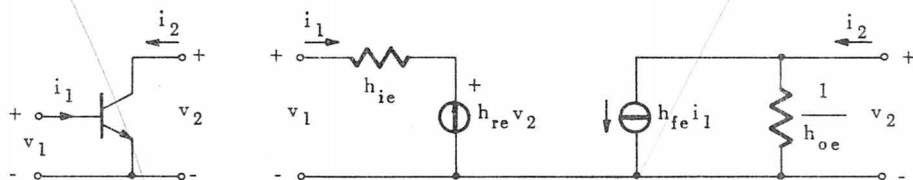
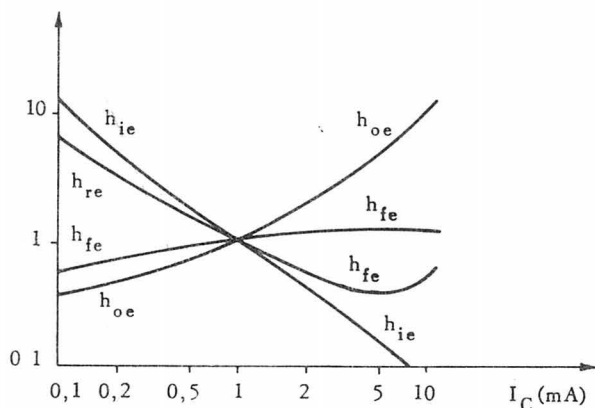


Fig.I.9.3 - Circuito equivalente del BJT in bassa frequenza.

1) il circuito equivalente dipende dal punto di lavoro, ottenuto con la polarizzazione. In fig.I.9.4 si riporta l'andamento dei quattro parametri del circuito al variare della I_C nel punto di lavoro;

Fig.I.9.4 - Andamento dei parametri del circuito equivalente normalizzati rispetto al valore che si ha per $I_C = 1$ mA.

2) il circuito equivalente vale per ampiezze limitate delle variazioni delle grandezze elettriche;

3) il circuito equivalente dipende dalla temperatura interna della giunzione, come messo in evidenza in fig.I.9.5. La temperatura interna a sua volta dipende dalla temperatura esterna e dalla potenza dissipata nel BJT. A questo riguardo è nota per ogni BJT la resistenza termica giunzione-ambiente k_{ja} espressa in $^{\circ}\text{C}/\text{mW}$, che fornisce immediatamente la temperatura della giunzione, nota la potenza dissipata nel transistor e la temperatura ambiente, cioè:

$$(I.9.1) \quad T_j - T_a = k_{ja} P_d$$

dove: T_j è la temperatura della giunzione; T_a è la temperatura ambiente; k_{ja} è la resistenza termica; P_d è la potenza dissipata nel transistor;

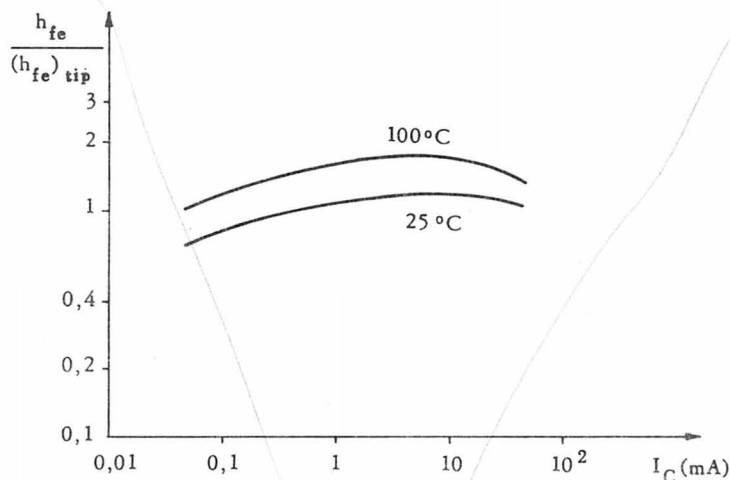


Fig.1.9.5 - Andamento di h_{fe} con I_C e con la temperatura.

4) il circuito equivalente dipende dal morsetto scelto come riferimento. Ad esempio, prendendo la base invece dell'emettitore, il circuito si modifica come indicato in fig.1.9.6 con i valori degli elementi espressi in funzione di quelli del circuito di fig.1.9.3 (avendo effettuato delle opportune semplificazioni nella loro derivazione).

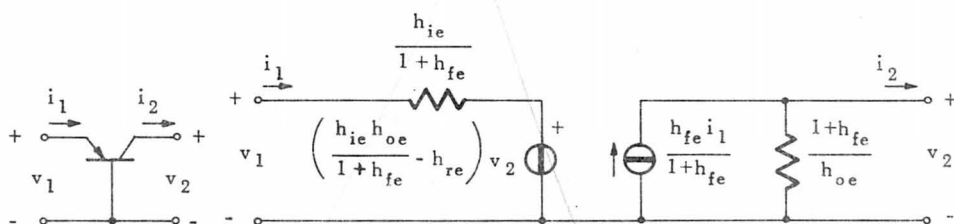


Fig.1.9.6 - Circuito equivalente del BJT con morsetto di riferimento coincidente con la base.

È interessante tenere presente i campi di valori usuali per i parametri; precisamente si ha:

h_{fe}	qualche decina ÷ qualche centinaio
h_{ie}	1 ÷ 10 (kΩ)
h_{re}	10^{-3} ÷ 10^{-4}
h_{oe}	10 ÷ 100 (μ mho)

È da ricordare inoltre che il costruttore fornisce per ogni dispositivo oltre alle condizioni di misura i valori tipici e per i parametri più importanti i limiti di variazione minimo e massimo. Ad esempio per il BJT AC125 della Philips Elcoma (PNP al germanio), dalle specifiche si ha:

Condizioni di misura: $I_C = 2 \text{ mA}$ frequenza = 1 kHz
 $V_{CE} = 5 \text{ V}$ temperatura = 25°C

Valori tipici: $h_{ie} = 1,7 \text{ k}\Omega$; $h_{fe} = 125$; $h_{oe} = 80 \mu\text{mho}$; $h_{re} = 6,5 \cdot 10^{-4}$

Variazioni: $(h_{fe})_{\min} = 80$; $(h_{fe})_{\max} = 170$

Il costruttore inoltre fornisce famiglie di curve del tipo di fig.1.9.4 e 1.9.5.

La limitazione maggiore del circuito equivalente considerato è che esso vale in bassa frequenza. Quando il BJT interessa a frequenze per le quali è necessario tenere conto della memoria del dispositivo, nell'ambito dell'approccio esterno, occorre introdurre parametri non più reali ma complessi e variabili con la frequenza. È usuale fare uso in questo caso, per ragioni di comodità, di altre configurazioni legate a tipi diversi di rappresentazione del circuito 2-porte che è il BJT. Il costruttore inoltre fornisce per varie frequenze i valori misurati tipici, massimi e minimi dei parametri del circuito. In queste condizioni il circuito equivalente non contiene più elementi ideali del tipo visto in precedenza ma blocchi funzionali dipendenti dalla frequenza. Il vantaggio dello approccio esterno in questo caso è la semplicità del circuito equivalente e della misura dei parametri che servono. Lo svantaggio è la dipendenza dei parametri dalla frequenza e quindi la necessità di effettuare la misura per varie frequenze. Vantaggi e svantaggi opposti sono presenti nell'approccio fisico.

1.9.2 - Approccio fisico alla determinazione del circuito equivalente: il circuito a π -ibrido o di Giacoletto.

Il circuito equivalente del BJT più usato alle alte frequenze è quello proposto da Giacoletto, chiamato anche a π -ibrido (pi-greco-ibrido).

Il circuito è mostrato in fig.1.9.7 ed i suoi parametri vengono individuati analizzando fin dove è possibile il meccanismo di funzionamento del dispositivo ed i fenomeni parassiti che lo accompagnano. In particolare:

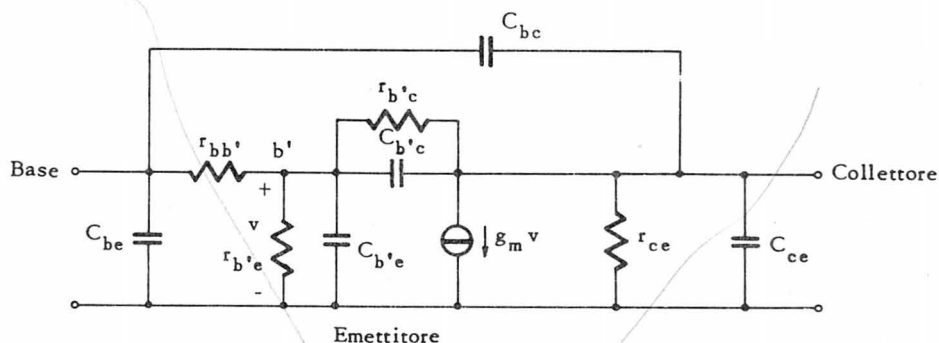


Fig.I.9.7 - Circuito equivalente di Giacoleto.

– $r_{bb'}$, tiene conto della caduta di tensione associata alla diffusione delle cariche maggioritarie entro la regione di base;

– $r_{b'c}$, r_{ce} tengono conto dell'effetto della tensione di collettore sulla larghezza della regione di base, che provoca una dipendenza delle correnti di base e di collettore dalla tensione di collettore. In particolare $r_{b'c}$ è usualmente trascurabile;

– $r_{b'e}$, g_m . La tensione base-emettitore influisce esponenzialmente a riposo sulle correnti di base e di collettore. Supponendo che tale dipendenza sussista anche se le grandezze elettriche variano nel tempo, si hanno di conseguenza la resistenza $r_{b'e}$ ed il generatore di corrente controllato. In effetti l'ipotesi precedente vale solo entro certi limiti, ciò che pone un limite alla validità del circuito di Giacoleto;

– $C_{b'c}$. In una giunzione, al variare della tensione ai suoi capi varia il numero delle cariche non neutralizzate ai lati della giunzione stessa. Di tale effetto tiene conto $C_{b'c}$ per la giunzione base-collettore. Tale capacità prende il nome di capacità di transizione della giunzione base-collettore;

– $C_{b'e}$. La capacità $C_{b'e}$ è somma di due termini, $C_{b'e}^I$ e $C_{b'e}^{II}$. Il primo è analogo a $C_{b'c}$ e prende il nome di capacità di transizione della giunzione base-emettitore. Il secondo tiene conto della carica minoritaria immagazzinata nella base e prende il nome di capacità di diffusione. Quest'ultimo termine è nettamente prevalente sul primo;

– C_{be} , C_{ce} , C_{bc} sono capacità dovute ai fili ed al contenitore ed usualmente possono essere trascurate.

Il valore dei parametri del circuito di Giacoletto dipende oltre che dal particolare BJT, dal punto di lavoro e dalla temperatura. È importante conoscere, almeno qualitativamente, tale dipendenza. Ad esempio: g_m varia linearmente con I_E , inversamente con la temperatura e non dipende da V_{CE} ; $C_{b'e}$, relativamente alla sua componente prevalente, varia linearmente con I_E , dipende poco dalla temperatura ed è indipendente da V_{CE} ; $C_{b'c}$ è indipendente da I_E e dalla temperatura e decresce con V_{CE} ; $r_{b'e}$ aumenta con V_{CE} e la temperatura e varia inversamente ad I_C .

È importante tenere presente che il costruttore non fornisce usualmente tutti i parametri del circuito di Giacoletto; occorre perciò ricavarli dai dati disponibili che sono: corrente di polarizzazione del collettore I_{CO} ; valore in bassa frequenza (usualmente 1 kHz) di h_{fe} , indicato come β_0 ; frequenza di transizione f_T , cioè la frequenza in corrispondenza alla quale il parametro h_{fe} diventa unitario in modulo⁽¹⁾; valore di $C_{b'c}$. Si ricavano da questi dati (per una temperatura di 25°C):

$$\begin{aligned} g_m &\approx 40 I_{CO} \\ (I.9.3) \quad r_{b'e} &\approx \frac{\beta_0}{g_m} \\ C_{b'e} &\approx \frac{g_m}{2\pi f_T} - C_{b'c} \end{aligned}$$

Il valore di $r_{bb'}$ è difficilmente reperibile; il suo valore tuttavia è dell'ordine di $10 \div 50 \Omega$ e può essere spesso trascurato.

È infine da ricordare che il circuito di Giacoletto è valido fino a frequenze dell'ordine della metà della frequenza di transizione f_T . Oltre questa frequenza non è più accettabile, in quanto il modello non tiene conto dei fenomeni parassiti che divengono predominanti alle altissime frequenze.

Per concludere questo paragrafo, riportiamo le specifiche del costruttore relative ad un BJT della S.G.S, il BC113 NPN al silicio, e successivamente i calcoli relativi ai parametri più significativi del circuito di Giacoletto ad esso relativo.

(1) - Molto spesso il costruttore fornisce invece di f_T il valore di $|h_{fe}(f)|$ a qualche frequenza elevata f_0 , in corrispondenza alla quale $|h_{fe}(f_0)|$ è vicino ad uno. Tenendo conto dell'andamento asintotico di $|h_{fe}(f)|$ con la frequenza, quando è vicino ad uno, si ha che:

$$(I.9.2) \quad f_T \approx |h_{fe}(f_0)| \cdot f_0$$

Specifiche del costruttore.

$$V_{CE} = 5 \text{ V} \quad , \quad I_{CO} = 1 \text{ mA} \quad , \quad T = 25^\circ\text{C}$$

$$|h_{fe}| = 5 \quad \text{valore tipico per} \quad f = 20 \text{ MHz}$$

$$c_{b'e} = 2,7 \text{ pF} \quad \text{tipico} \\ 4 \text{ pF} \quad \text{max}$$

$$\beta_0 = 350 \quad \text{valore tipico per} \quad f = 1 \text{ kHz}$$

Calcoliamo con le (I.9.3) i parametri g_m , $r_{b'e}$, $c_{b'e}$, usando ove possibili i valori massimi delle specifiche e tenendo conto per il calcolo di f_T della (I.9.2). Si ha:

$$g_m = 40 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ mA/V}$$

$$r_{b'e} = \frac{350}{40 \cdot 10^{-3}} = 8,75 \text{ k}\Omega \quad ; \quad f_T \leq 5 \cdot 20 \cdot 10^6 = 100 \text{ MHz}$$

$$c_{b'e} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 10^8} - 4 \cdot 10^{-12} \simeq 60 \text{ pF}$$

I.9.3 - Paradossi legati all'uso di elementi ideali.

L'operazione di modellamento di un dispositivo o circuito reale, qualunque sia l'approccio seguito, può portare ad un circuito ideale che viola alcune leggi fisiche fondamentali. Vedremo nel prossimo capitolo che un qualsiasi circuito ideale soddisfa sempre il principio di conservazione della potenza. Tuttavia può accadere che il circuito violi il principio di causalità oppure la teoria della predizione di Wiener. Esempi dettagliati riguardanti questo punto possono essere trovati in G. Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche» Vol. II, Siderea, 1971, pp. 618-621 per il convertitore d'impedenza negativa e pp. 593-596 per il resistore negativo.

L'esistenza di questi paradossi mette in evidenza che non tutti i risultati che si ottengono analizzando un circuito ideale sono aderenti al comportamento reale della struttura fisica che si sta considerando.

I.10 - Grafo di un circuito e sue proprietà topologiche.

Nell'ambito di validità delle ipotesi di linearità, permanenza e costanti concentrate, un circuito reale può essere rappresentato mediante

la connessione di elementi ideali del tipo di quelli visti nei paragrafi precedenti. Tali elementi sono sempre riconducibili a due terminali mediante l'uso di un generatore controllato oppure del nullore, quando usato nella configurazione nullatore-noratore. Di conseguenza il generico circuito ideale è costituito da un insieme di elementi a due terminali, connessi in modo qualunque, caratterizzati da due grandezze elettriche (tensione e corrente).

Se R è il numero degli elementi a due terminali suddetti, le grandezze elettriche sono rispettivamente R tensioni ed R correnti. Queste $2R$ grandezze debbono soddisfare due gruppi di equazioni:

1) quelle che conseguono dalle relazioni costitutive. Si tratta di equazioni che legano tensione e corrente di un solo elemento nel caso che tale elemento rappresenti un componente a due terminali, come ad esempio il resistore, l'induttore, ecc. Sono invece equazioni che legano tensioni e correnti di due o più elementi nel caso che questi elementi rappresentino un componente a tre o più terminali, come ad esempio i generatori controllati, il nullore, il giratore, il trasformatore ecc.;

2) quelle che conseguono dalle due leggi di Kirchhoff.

In particolare, le equazioni del secondo gruppo sono omogenee e del tutto indipendenti dalla natura degli elementi. Ciò implica che l'insieme delle R correnti si può sempre suddividere in due sottoinsiemi di cui uno derivabile dall'altro direttamente. Il sottoinsieme da cui deriviamo le correnti di tutti gli elementi lo indicheremo nel seguito come «sottoinsieme delle correnti indipendenti». Esistono numerosi sottoinsiemi di questo tipo, come vedremo successivamente. In modo del tutto simile si può definire un «sottoinsieme delle tensioni indipendenti». La individuazione dei sottoinsiemi delle tensioni e delle correnti indipendenti è di importanza fondamentale per la soluzione del problema della analisi di un circuito. D'altra parte, tale individuazione è basata sulle leggi di Kirchhoff; quindi non dipende dalla natura degli elementi, ma solo dal numero degli elementi presenti e dal modo in cui sono connessi. Per questa ragione accanto al circuito conviene considerare il suo «grafo», intendendo per grafo ciò che si ottiene dal circuito sostituendo ciascun elemento con un segmento, come mostrato in fig. I.10.1 b).

Molto spesso il grafo viene orientato, nel senso che in ogni suo ramo si assume assegnato un verso. Tale verso coincide usualmente con quello della corrente che percorre il corrispondente elemento e fornisce anche il verso positivo della tensione, se si suppone di usare versi positivi coordinati per le due grandezze elettriche di ciascun elemento. Ciò è mostrato in fig. I.10.2 per l'esempio già considerato.

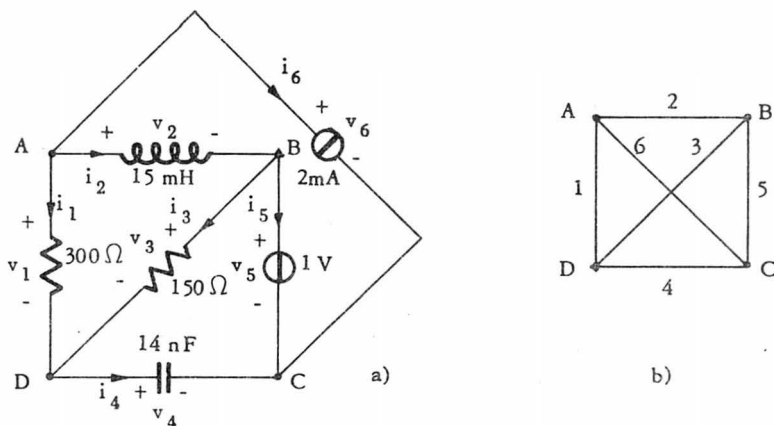


Fig. I.10.1 - Grafo di un circuito.

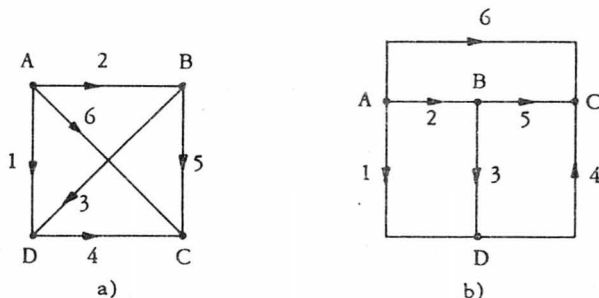


Fig. I.10.2 - Grafi orientati corrispondenti al circuito di fig. I.10.1 a).

Le proprietà del grafo che vengono usate nell'ambito delle leggi di Kirchhoff sono quelle topologiche, cioè quelle proprietà geometriche che non vengono alterate da una deformazione continua che trasformi la configurazione iniziale in un'altra configurazione riferibile alla prima mediante una corrispondenza biunivoca. Un esempio di deformazione di questo tipo è quella che fa passare dal grafo orientato di fig. I.10.2 a) a quello di fig. I.10.2 b), ambedue corrispondenti al circuito di fig. I.10.1 a).

I.10.1 - Nozioni topologiche fondamentali.

Le nozioni topologiche introdotte implicitamente fino a questo momento sono quelle di nodo e ramo, essendo il ramo il segmento che nel grafo corrisponde ad un elemento del circuito ed il nodo il punto del

grafo in cui sono attaccati due o più rami. Le nozioni successive sono quelle di maglia e taglio, che scaturiscono direttamente come ausilio alle leggi di Kirchhoff. Infatti nel caso della prima legge di Kirchhoff si considera l'equilibrio delle correnti che attraversano una superficie finita chiusa o più precisamente una linea finita chiusa, supponendo di rappresentare il circuito su un piano. Le linee chiuse che interessano sono quelle che intersecano ciascun elemento non più di una volta ed in corrispondenza ad un suo terminale. È evidente che a ciascuna di queste linee chiuse corrisponde un insieme di rami del grafo, cioè quelli che rappresentano gli elementi toccati dalla linea stessa. Questo insieme di rami prende il nome di «taglio». In particolare nel caso dei circuiti connessi, cioè dei circuiti in cui è possibile andare con continuità da un nodo a qualsiasi altro, il «taglio è un insieme di rami tali che la loro eliminazione rende il grafo risultante non connesso». In fig. I.10.3 viene mostrata una linea chiusa ed il corrispondente taglio per il circuito connesso di fig. I.10.1.

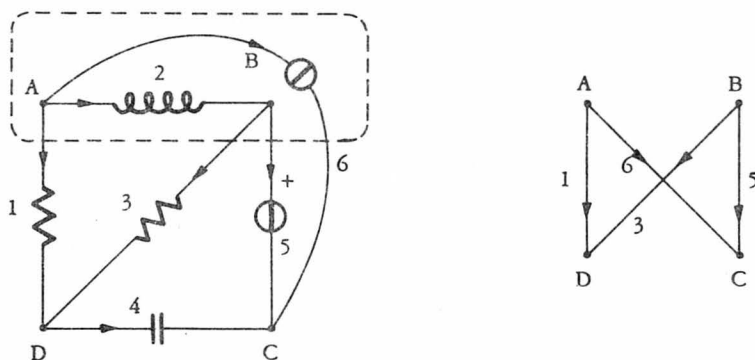


Fig. I.10.3 - Esempio di taglio.

Nel caso della seconda legge di Kirchhoff si considera nel circuito l'equilibrio delle tensioni lungo una linea chiusa e finita. Le linee che interessano sono quelle che intersecano gli elementi solo in corrispondenza ai loro morsetti (ambidue contemporaneamente). È evidente che a ciascuna di queste linee corrisponde un insieme di rami del grafo, cioè quelli che rappresentano gli elementi toccati dalla linea. Questo insieme di rami prende il nome di maglia. In fig. I.10.4 viene mostrata una linea chiusa e la corrispondente maglia per il circuito di fig. I.10.1.

Le nozioni di taglio e maglia sono fondamentali per esprimere le leggi di Kirchhoff per un circuito. Ciò risulta chiaro con riferimento agli esempi di fig. I.10.3 e I.10.4. Nel primo caso, infatti, l'equazione di equilibrio relativa alla prima legge di Kirchhoff è:

$$(I.10.1) \quad i_1 + i_6 + i_3 + i_5 = 0$$

e nel secondo caso, relativamente alla seconda legge di Kirchhoff, è:

$$(I.10.2) \quad v_1 - v_2 - v_3 = 0$$

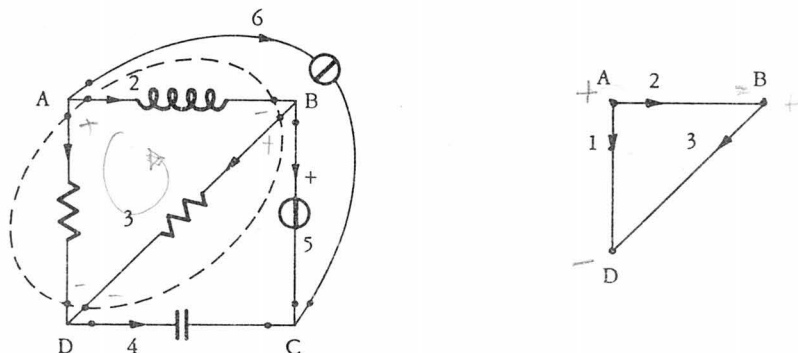


Fig.I.10.4 - Esempio di maglia.

È evidente che nel primo caso le correnti sono state considerate positive uscenti dalla linea chiusa e nel secondo caso il verso di percorrenza della linea chiusa è stato quello orario.

I.10.2 - Albero e co-albero.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che dalle leggi di Kirchhoff consegue che le tensioni e le correnti possono essere suddivise in due gruppi, da considerarsi dipendenti l'uno dall'altro. È evidente che ai fini della soluzione dei problemi di analisi interessa avere a disposizione metodi per individuare tali gruppi di variabili indipendenti. Questa individuazione è immediata se si fa uso delle nozioni topologiche di albero e co-albero.



Fig.I.10.5 - a) Un albero del circuito di fig. I.10.1; b) co-albero corrispondente all'albero mostrato in a).

L'albero è un insieme connesso di rami che comprende tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi. In fig. I.10.5 riportiamo un esempio di albero per il circuito di fig. I.10.1. Esistono per uno stesso circuito numerosi alberi. La determinazione del loro numero e delle loro configurazioni è possibile⁽¹⁾; nel caso presente tale determinazione non verrà trattata in quanto non verranno sviluppati i metodi di analisi esclusivamente topologici che la richiedono, basati sulla terza e quarta legge di Kirchhoff⁽²⁾.

Associata alla nozione di albero è quella di co-albero. Il co-albero è l'insieme dei rami del grafo non appartenenti all'albero.

È facile rendersi conto che se R sono i rami, N i nodi di un grafo connesso, allora $(N-1)$ è il numero dei rami dell'albero e quindi $R+1-N$ quello dei rami del co-albero. Per vedere ciò supponiamo di costruire l'albero con i rami del grafo. Prendiamo a questo scopo un primo ramo; esso implica la considerazione contemporanea di due nodi, cioè quelli tra cui esso è attaccato. Il secondo ramo da considerare deve necessariamente essere uno di quelli attaccati ad uno qualunque dei due nodi precedenti, in quanto per definizione l'albero è connesso. D'altra parte tale ramo esiste in quanto per ipotesi anche il circuito è connesso. Procedendo così, si potrà ogni volta inserire un nuovo ramo, in modo da conservare la connessione dell'insieme di rami che si sta costituendo, aggiungendo sempre un nuovo nodo. Infatti ogni ramo aggiunto non può essere attaccato tra due nodi già facenti parti dell'insieme in questione, altrimenti tale aggiunta provocherebbe un percorso chiuso contro la definizione di albero. La costruzione precedente termina quando tutti i nodi del grafo sono stati inclusi. È evidente che ogni ramo inserito ha implicato l'aggiunta di un nodo, ad eccezione del primo che ne ha implicati due. Quindi il numero dei rami dell'albero è $N-1$.

L'aggiunta di un ramo qualsiasi del co-albero all'albero provoca una maglia, come conseguenza della definizione di albero. Esistono perciò per un dato albero $R - N + 1$ maglie di questo tipo, a cui si dà il nome di maglie fondamentali associate all'albero. Per il circuito di figura I.10.1 e relativamente all'albero di fig. I.10.5, le maglie fondamentali sono quelle mostrate in fig. I.10.6. Per quanto detto una maglia fondamentale contiene uno ed un solo ramo del co-albero ed ogni ramo del co-albero compare in una ed una sola maglia fondamentale.

(1) - Si veda ad esempio L. Weinberg, «Network analysis and synthesis», Mc Graw - Hill Co. 1962, § 4.2.

(2) - Si veda L. Weinberg, op. cit. Cap. IV. Si veda anche Percival, «The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees», Proc. I.E.E., Vol. 100, Parte III, maggio 1953, p. 143.

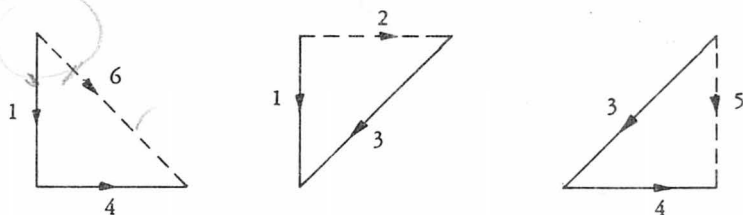


Fig. I.10.6 - Le maglie fondamentali associate all'albero di fig. I.10.5 per il circuito di fig. I.10.1.

Togliendo un ramo dell'albero, questo viene suddiviso in due parti. Ciò implica che è possibile individuare un taglio costituito da quel ramo dell'albero e da altri rami appartenenti solo al co-albero. Un taglio di questo tipo prende il nome di taglio fondamentale; è evidente che, associati ad un albero, si hanno $N - 1$ tagli fondamentali, cioè tanti quanti sono i rami dell'albero.

In fig. I.10.7 sono mostrati i tagli fondamentali del circuito di figura I.10.1 relativi all'albero di fig. I.10.5. Per quanto detto un taglio fondamentale contiene uno ed un solo ramo dell'albero ed ogni ramo dell'albero compare in uno ed un solo taglio fondamentale.

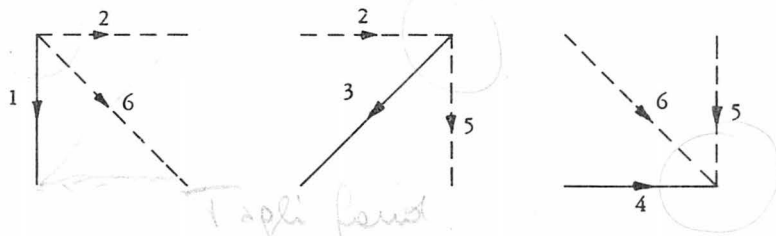


Fig. I.10.7 - I tagli fondamentali associati all'albero di fig. I.10.5 per il circuito di fig. I.10.1. Tratteggiati sono indicati i rami del co-albero.

È facile constatare che le tensioni dei rami dell'albero costituiscono un insieme di tensioni indipendenti. Basta far vedere che:

- 1) non esistono legami tra tali quantità;
- 2) le tensioni dei rami del co-albero sono esprimibili in funzione di esse.

Il punto 1) è conseguenza della definizione di albero, che implica l'assenza di maglie. Il punto 2) si deduce scrivendo le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali. Infatti tali equazioni contengono ciascuna una ed una sola tensione dei rami del co-albero e sono in numero uguale al numero di tali rami.

Per il circuito di fig. I.10.1 con l'albero di fig. I.10.5, si ha:

$$(I.10.3) \quad v_6 = v_1 + v_4 ; \quad v_2 = v_1 - v_3 ; \quad v_5 = v_3 + v_4$$

Le correnti dei rami del co-albero costituiscono un insieme di correnti indipendenti. Infatti non esistono legami tra tali quantità, poiché non vi può essere un taglio costituito solo dai rami del co-albero, essendo l'albero un insieme connesso di rami. Inoltre, le correnti dei rami dell'albero sono direttamente esprimibili in funzione di quelle del co-albero, come si deduce considerando le equazioni di equilibrio dei tagli fondamentali. Tali equazioni contengono una ed una sola delle correnti dei rami dell'albero e sono in numero esattamente uguale al numero dei rami dell'albero. Per il circuito di fig. I.10.1 con l'albero di fig. I.10.5, si ha:

$$(I.10.4) \quad i_1 = -i_2 - i_6 \quad i_3 = i_2 - i_5 \quad i_4 = -i_5 - i_6$$

I tagli e le maglie fondamentali relative ad uno stesso albero godono di alcune proprietà che mettiamo in evidenza di seguito.

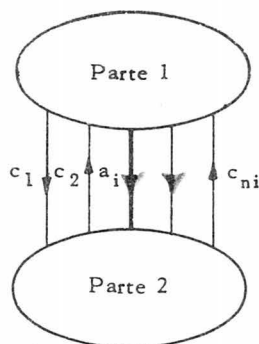
Proprietà I.10.1 - «La maglia fondamentale relativa ad un ramo del co-albero comprende tutti e soli i rami dell'albero i cui tagli fondamentali comprendono quel ramo».

Per verificare questa proprietà consideriamo la maglia fondamentale relativa ad un ramo del co-albero c_k . Siano $a_1, a_2, \dots, a_{n_k}$ i rami dell'albero che fanno parte di questa maglia. Consideriamo quindi la linea chiusa che genera il taglio fondamentale relativo a ciascuno di questi rami. La linea interseca il ramo dell'albero in questione, penetra nell'interno della maglia fondamentale che si sta considerando, deve intersecare per uscire il ramo c_k , in quanto non può toccare gli altri rami della maglia, che appartengono tutti all'albero. Ciò dimostra la proprietà.

Proprietà I.10.2 - «Il taglio fondamentale relativo ad un ramo dell'albero comprende tutti e soli i rami del co-albero le cui maglie fondamentali comprendono quel ramo».

Per verificare questa proprietà consideriamo il taglio fondamentale relativo ad un ramo dell'albero a_i . Siano $c_1, c_2, \dots, c_{n_i}$ i rami del co-albero che fanno parte di questo taglio. Consideriamo quindi la linea chiusa che genera la maglia fondamentale relativa a ciascuno di questi rami. Con riferimento a fig. I.10.8, si vede chiaramente che questa linea è costituita da una porzione coincidente con il ramo del co-albero d'in-

Fig. I.10.8 - Taglio fondamentale relativo al ramo dell'albero a_i .



$$I_{c1} - I_{c2} + I_{a_i} - \dots - I_{c_{ni}} = 0$$

teresse, da una porzione di albero inclusa nella parte 1, da una porzione di albero inclusa nella parte 2, e necessariamente dal ramo a_i in quanto questo rappresenta l'unica parte di albero che collega le due parti 1 e 2 di figura. Ciò dimostra la proprietà.

Proprietà I.10.3 - «Siano a_i e c_j rispettivamente un ramo dell'albero e del co-albero tali che il taglio fondamentale relativo ad a_i comprenda c_j , allora il segno della corrente di c_j nell'equazione di equilibrio del taglio fondamentale relativo ad a_i è opposto a quello della tensione di a_i nell'equazione di equilibrio della maglia fondamentale relativa a c_j . Si suppone che le equazioni di equilibrio siano scritte in modo che la grandezza elettrica del ramo a cui si riferiscono appaia con il segno positivo».

La verifica di questa proprietà è immediata se facciamo riferimento a fig. I.10.8, supponendo che c_j sia uno dei rami del co-albero che fanno parte del taglio fondamentale relativo ad a_i . Infatti, se c_j ed a_i sono concordi come verso nell'andare dalla parte 1 alla parte 2, allora la corrente di c_j ha segno positivo nell'equazione di equilibrio del taglio fondamentale di a_i . Contemporaneamente, nell'equazione di equilibrio della maglia fondamentale relativa a c_j , il segno della tensione di a_i è negativo, perchè percorrendo la linea chiusa di questa maglia nel senso concorde con quello di c_j , s'incontra in senso opposto il verso di a_i . Un discorso del tutto simile vale se i versi di c_j ed a_i sono discordi. Ciò dimostra la proprietà.

Dalle proprietà precedenti scaturisce come conseguenza più importante che, note le equazioni di equilibrio relative ai tagli fondamentali, si possono scrivere direttamente quelle relative alle maglie fondamentali e viceversa. Per vedere ciò, scriviamo le equazioni di equilibrio, relative ai tagli ed alle maglie fondamentali, come segue:

$$(I.10.5) \quad \text{Kirchhoff} \quad [I_a] + [A][I_c] = 0$$

$$(I.10.6) \quad [V_c] + [B][V_a] = 0$$

in cui: $[I_a]$ è il vettore la cui k -sima componente è la corrente del k -simo ramo dell'albero; $[V_a]$ è l'analogo su base tensioni; $[I_c]$ e $[V_c]$ sono definiti in modo simile per il co-albero; $[A]$ e $[B]$ si ottengono applicando direttamente le prime due leggi di Kirchhoff. Di conseguenza, queste matrici hanno come termini solo: $\pm 1, 0$.

Come conseguenza delle prime due proprietà si deduce che se il termine $a_{ij} = 0$, allora $b_{ji} = 0$; analogamente se $a_{ij} \neq 0$, allora $b_{ji} \neq 0$. Inoltre, in base alla terza proprietà, risulta che $b_{ji} = -a_{ij}$. Ciò dimostra che:

$$(I.10.7) \quad [B] = -[A]^t$$

in cui t indica la trasposizione della matrice $[A]$.

La (I.10.7) può essere verificata direttamente sul circuito di figura I.10.1, relativamente all'albero di fig. I.10.5. Infatti, dalla (I.10.4) si ha:

$$(I.10.8) \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e dalla (I.10.3)

$$(I.10.9) \quad [B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

avendo scelto:

$$[I_a] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}; \quad [V_a] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; \quad [I_c] = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}; \quad [V_c] = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

La proprietà espressa dalla (I.10.7) ha una conseguenza assai interessante, cioè che «il sotto-spazio descritto dai vettori aventi come componenti le tensioni dei rami di un grafo è ortogonale al sotto-spazio descritto dai vettori aventi come componenti le relative correnti, prese con versi positivi coordinati». Infatti ordinando i due vettori in questione in modo che:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(I. 10. 10) \quad [I] = \begin{bmatrix} [I_a] \\ [I_c] \end{bmatrix} ; \quad [V] = \begin{bmatrix} [V_a] \\ [V_c] \end{bmatrix}$$

si ha per il loro prodotto scalare:

$$(I. 10. 11) \quad [I]^t [V] = [I_a]^t [V_a] + [I_c]^t [V_c] = - [I_c]^t [A]^t [V_a] - \\ - [I_c]^t [B] [V_a] = - [I_c]^t [A]^t [V_a] + [I_c]^t [A]^t [V_a] = 0$$

L'ortogonalità dei due vettori sussiste anche se i due vettori si riferiscono a circuiti diversi, purchè aventi lo stesso grafo.

I.10.3 - Conseguenze topologiche delle leggi di Kirchhoff: principio della conservazione della potenza e teorema di Tellegen.

Il circuito ideale, senza perdita di generalità, può considerarsi costituito solo da elementi a due terminali. Usando la convenzione coordinata per i versi positivi delle tensioni e delle correnti, si ottiene che la potenza globalmente assorbita da esso è:

$$(I. 10. 12) \quad P(t) = \sum_{k=1}^R v_k(t) i_k(t)$$

Poichè ogni scambio e trasformazione di energia è tenuta in conto nel circuito tramite i suoi elementi, la potenza $P(t)$ deve essere identicamente nulla affinché il modello usato abbia significato e quindi soddisfi il fondamentale principio della conservazione della potenza. È facile accertare che il modello usato, cioè il circuito ideale, è valido da questo punto di vista. Infatti richiedere l'annullarsi di $P(t)$ equivale a richiedere che il vettore delle tensioni del circuito sia incondizionatamente ortogonale a quello delle correnti. Ciò è stato dimostrato con la (I. 10. 11) alla fine del paragrafo precedente. D'altra parte è stato messo in evidenza che la suddetta ortogonalità trascende anche il singolo circuito, nel senso che è una conseguenza delle leggi di Kirchhoff relative al solo grafo. Come tale perciò può riferirsi anche a circuiti diversi, purchè aventi lo stesso grafo. Questa semplice osservazione è il teorema di Tellegen, di fondamentale importanza nel calcolo dell'effetto delle variazioni del valore degli elementi e nel progetto automatico dei circuiti, come vedremo nel Cap. VIII. L'enunciato del teorema è il seguente:

Teorema di Tellegen - *Per due circuiti aventi uno stesso grafo orientato, risulta:

$$(I.10.13) \quad \begin{aligned} [I_1]^t [V_2] &= 0 \\ [I_2]^t [V_1] &= 0 \end{aligned}$$

avendo indicato con $[I_1]$, $[V_1]$ i vettori delle correnti e delle tensioni dei rami del primo circuito e con $[I_2]$ e $[V_2]$ gli analoghi vettori del secondo circuito».

Esempio I.10.1

Verificare la validità del teorema di Tellegen per i due circuiti di fig.I.10.9.

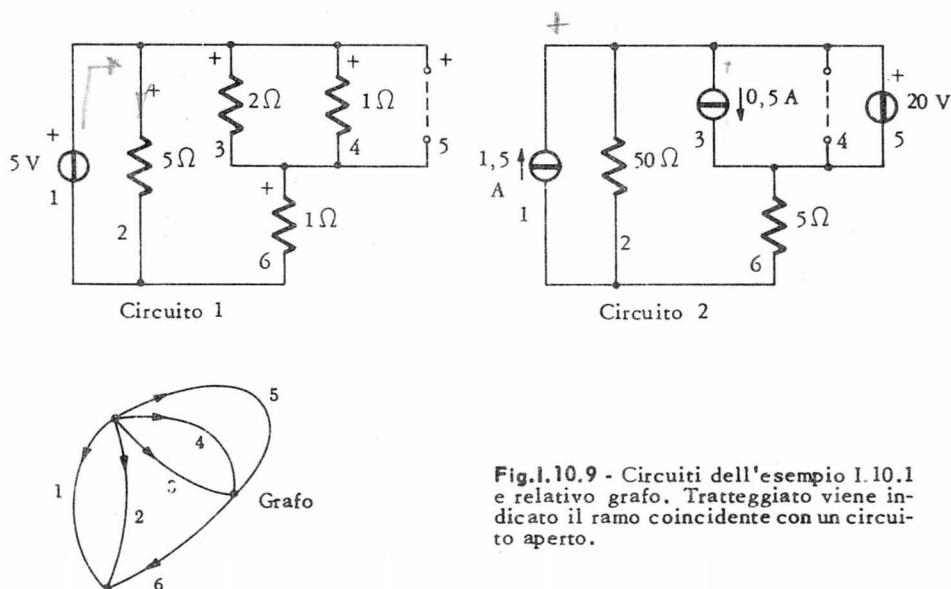


Fig.I.10.9 - Circuiti dell'esempio I.10.1 e relativo grafo. Trattteggiato viene indicato il ramo coincidente con un circuito aperto.

Determinando direttamente le tensioni e le correnti di questi due circuiti, si hanno i risultati seguenti (volt, ampère)

	ramo 1		ramo 2		ramo 3		ramo 4		ramo 5		ramo 6	
	v	i	v	i	v	i	v	i	v	i	v	i
circuito 1	5	-4	5	1	2	1	2	2	2	0	3	3
circuito 2	25	-1,5	25	0,5	20	0,5	20	0	20	0,5	5	1

La prima delle (I.10.13) vale:

$$-100 + 25 + 20 + 40 + 15 = 0$$

La seconda delle (I.10.13) vale:

$$-7,5 + 2,5 + 1 + 1 + 3 = 0$$

Dall'esame della figura si rileva che i due circuiti hanno elementi completamente diversi. In particolare, può accadere che uno di essi non abbia un ramo; in questo caso si sopperisce alla sua mancanza mediante un circuito aperto.

I.10.4 - Circuiti non connessi.

Il grafo di un circuito può risultare non-connesso quando il circuito è costituito di due o più parti distinte. È ovvio che se queste parti non si influenzano tra di loro è del tutto arbitrario considerare l'insieme come un circuito. Il caso che ha qualche interesse pratico è quello in cui le parti si influenzano per la presenza di elementi del tipo generatore controllato, trasformatore, ecc. con uno dei loro rami in una parte del circuito e l'altro ramo in una parte differente, come mostrato in figura I.10.10. La trattazione del grafo del circuito in questo caso è del

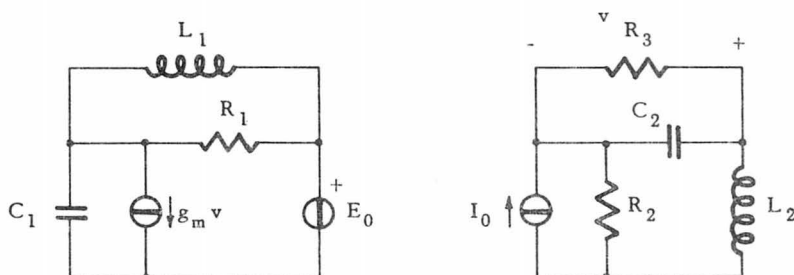


Fig.I.10.10 - Circuito costituito da due parti separate.

tutto simile a quanto fatto nel caso connesso; vale a dire l'albero è costituito dall'insieme di tanti alberi quante sono le parti separate. Gli insiemi indipendenti di grandezze elettriche sono quindi deducibili nella stessa maniera. Unica osservazione da tenere presente è che cambia il numero delle variabili indipendenti in relazione al numero dei rami e dei nodi del circuito. Infatti se R_k ed N_k è il numero dei rami e dei nodi della k -sima parte, per essa, essendo connessa, sappiamo che l'albero ha $N_k - 1$ rami ed il co-albero $R_k - N_k + 1$. Perciò l'albero dell'intero circuito, se P sono le parti separate che lo costituiscono, ha un numero di rami uguale a:

$$(I.10.14) \quad \sum_{k=1}^P (N_k - 1) = N - P$$

ed il co-albero complessivo del circuito ha quindi un numero di rami:

(I.10.15)

$$R - N + P$$

Il numero delle tensioni indipendenti del circuito con P parti è perciò dato dalla (I.10.14) e quello delle correnti indipendenti dalla (I.10.15).

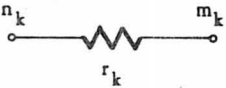
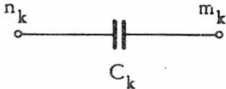
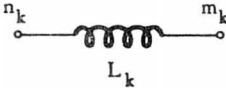
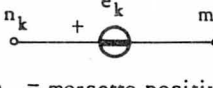
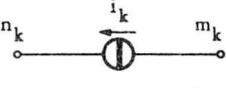
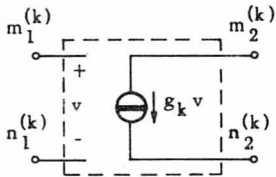
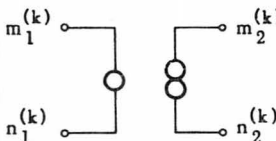
I.11 - Rappresentazione di un circuito sul calcolatore.

L'impiego del calcolatore numerico per l'analisi dei circuiti richiede che allo stesso siano forniti i dati sufficienti a caratterizzare il circuito. Da quanto detto nei paragrafi precedenti è facile dedurre che un qualsiasi circuito reale può essere rappresentato mediante la connessione di pochi elementi ideali; in particolare, ad esempio, il resistore, il condensatore ed il nullore. Tuttavia, dal punto di vista pratico, risulta spesso conveniente prevedere sovrabbondante l'insieme degli elementi ideali da usare e quindi non limitarsi ad un insieme minimo, come il precedente.

L'insieme che considereremo di seguito è costituito dal resistore, condensatore, induttore, transammettenza, nullore e generatori indipendenti. Gli altri elementi ideali introdotti possono essere rappresentati mediante circuiti opportuni, costituiti da questi elementi, come in parte è stato messo in evidenza nei paragrafi precedenti. Di conseguenza, assegnato un circuito questo dovrà essere preventivamente trasformato in modo da contenere solo gli elementi ideali previsti. È necessario precisare, tuttavia, che tale limitazione può essere facilmente rimossa, ampliando l'insieme degli elementi ideali previsti, se ciò fa comodo.

I dati da fornire al calcolatore sono di due tipi: quelli che riguardano il grafo e quelli che riguardano gli elementi. Sviluppando numericamente il solo metodo di analisi su base nodi che vedremo nel Cap.II, i dati riguardanti il grafo sono impliciti nei secondi. È sufficiente infatti numerare preventivamente i nodi del circuito che si sta considerando, avendo cura di scegliere quello di riferimento per il metodo di analisi su base nodi come l'ultimo. Quindi si fornisce al calcolatore, oltre al numero dei nodi, il numero degli elementi dei sei tipi previsti presenti nel circuito. Per ciascuna categoria di elementi a due terminali occorre fornire per ogni componente il valore del parametro che lo caratterizza ed i nodi a cui sono attaccati i suoi morsetti. Per i generatori indipendenti occorre precisare anche l'orientazione della grandezza elettrica impressa.

Tabella I.11.1 - Vettori utilizzati per rappresentare nel calcolatore gli elementi di un circuito.

Elemento	Simbolo	Definizione dei vettori	Ordine dei vettori	Numero di vettori
Resistore		$R(K) = r_k$ $N1(K) = n_k$ $N2(K) = m_k$	NR (numero dei resistori presenti)	3
Condensatore		$ZQ(K) = C_k$ $NQ1(K) = n_k$ $NQ2(K) = m_k$	NQ (numero dei condensatori presenti)	3
Induttore		$ZL(K) = L_k$ $NL1(K) = n_k$ $NL2(K) = m_k$	NL (numero degli induttori presenti)	3
Generatore indipendente di tensione	 $n_k = \text{morsetto positivo}$	$T(K) = e_k$ $NT1(K) = n_k$ $NT2(K) = m_k$	NT (numero dei generatori indipendenti di tensione presenti)	3
Generatore indipendente di corrente	 $n_k = \text{morsetto su cui punta la corrente}$	$C(K) = i_k$ $NC1(K) = n_k$ $NC2(K) = m_k$	NC (numero dei generatori indipendenti di corrente presenti)	3
Transammettenza	 $m_1^{(k)} = \text{morsetto positivo del ramo di controllo}$ $n_2^{(k)} = \text{morsetto su cui punta la corrente del generatore}$	$CT(K) = g_k$ $NCT1(K) = m_1^{(k)}$ $NCT2(K) = n_1^{(k)}$ $NCT3(K) = m_2^{(k)}$ $NCT4(K) = n_2^{(k)}$	NCT (numero delle transammettenze presenti)	5
Nullori		$NN1(K) = m_1^{(k)}$ $NN2(K) = n_1^{(k)}$ $NN3(K) = m_2^{(k)}$ $NN4(K) = n_2^{(k)}$	NN (numero dei nullori presenti)	4

Nel caso della transammettenza oltre al valore della transconduttanza occorre fornire i quattro nodi a cui sono attaccati i morsetti dell'elemento, precisando le orientazioni. Nella tab.I.11.1 vengono elencati i vettori utilizzati per rappresentare i vari elementi, precisando il loro ordine ed il numero necessario per la rappresentazione completa. Nel caso dei generatori indipendenti e_k ed i_k sono o numeri reali nel caso dell'analisi in continua, o numeri complessi nel caso dell'analisi in regime sinusoidale o funzioni note del tempo.

L'utilizzazione della tabella è di per se stessa chiara, come risulta evidente dal seguente esempio⁽¹⁾.

Esempio I.11.1

Determinare i dati di ingresso del circuito di fig.I.11.1, rappresentante un amplificatore di tensione per bassa frequenza impiegante due transistori AC125, accoppiati a resistenza e capacità e collegati con emettitore comune⁽²⁾.

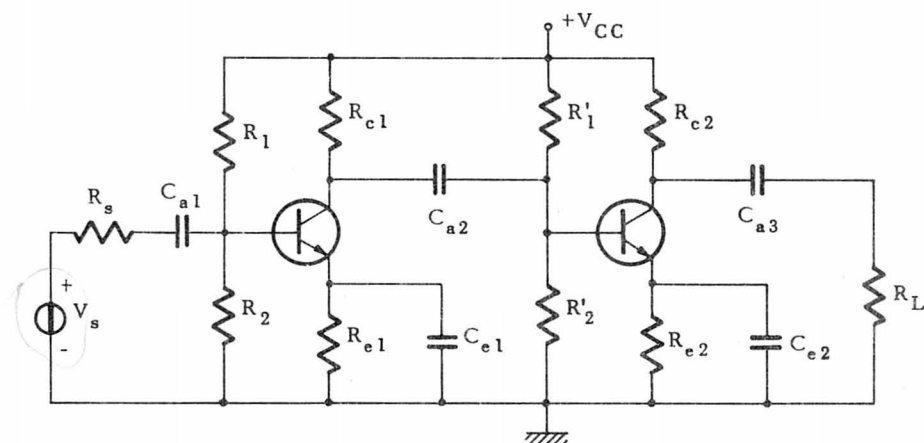


Fig.I.11.1 - Amplificatore con due BJT ad emettitore comune in cascata.

I transistori sono già stati considerati nel § I 9.1 per condizioni diverse di polarizzazione; infatti nel caso presente, supponendo i seguenti valori dei componenti:

(1) - Occorre ricordare che, oltre ai dati dell'esempio I.II.1, al calcolatore vanno forniti altri dati riguardanti quello che interessa ottenere, come vedremo successivamente.

(2) - L'amplificatore è dimensionato nell'esempio 9.31 del Vol.2. di M. Gasparini e D. Mirri, op. cit.

$$R_{e1} = R_{e2} = 330 \Omega$$

$$C_{a1} = 90 \mu F$$

$$R_L = 1 k\Omega$$

$$R_{c1} = R_{c2} = 2 k\Omega$$

$$C_{a2} = 20 \mu F$$

$$R_S = 0$$

$$C_{e1} = 300 \mu F$$

$$C_{a3} = 16,5 \mu F$$

$$V_S = 1 V$$

$$C_{e2} = 150 \mu F$$

R_1 ed R_2 tali che il parallelo valga $1,7 k\Omega$

$$R_1 = R'_1 ; \quad R_2 = R'_2$$

e per una tensione di alimentazione $V_{CC} = 9 V$, si ha per il transistor $I_C = 3 mA$ $V_{CB} = 2 V$, a cui corrisponde un circuito equivalente in bassa frequenza caratterizzato da:

$$h_{ie} = 800 \Omega$$

$$h_{re} \approx h_{oe} \approx 0$$

$$h_{fe} = 47$$

e rappresentato come specificato in fig. I.11.2, dovendo usare transammettenze. Il circuito finale, dopo la sostituzione dei circuiti equivalenti dei transistori è quello mostrato in fig. I.11.3. L'individuazione dei dati da fornire al calcolatore richiede la numerazione preventiva dei nodi, scegliendo per ultimo quello che s'intende prendere come riferimento. La numerazione è riportata in fig. I.11.3. Facendo riferimento ad essa, i dati da fornire al calcolatore sono:

Fig. I.11.2 - Circuito equivalente dei transistori di fig. I.11.1.

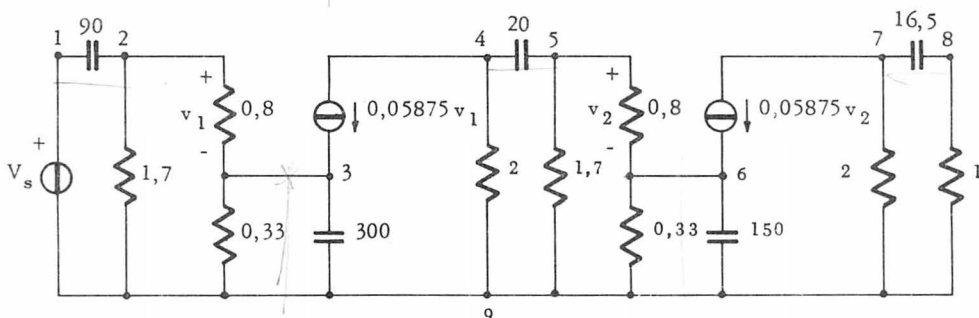
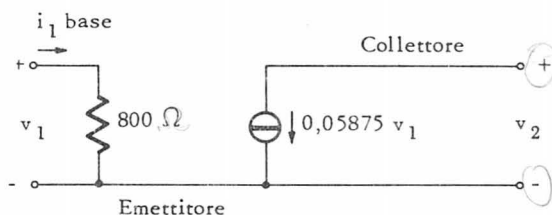


Fig. I.11.3 - Circuito finale dell'esempio I.11.1. Le resistenze sono espresse in $k\Omega$ e le capacità in μF .

ND = numero dei nodi = 9

NR = 9 ; NL = 0 ; NQ = 5 ; NCT = 2 ; NC = 0 ; NT = 1 ; NN = 0

$$T = 1 \quad ; \quad NT1 = 1 \quad ; \quad NT2 = 9$$

$$R = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 0,8 \\ 0,33 \\ 2,0 \\ 1,7 \\ 0,8 \\ 0,33 \\ 2,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \quad ; \quad N1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad N2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad ZQ = \begin{bmatrix} 90,0 \\ 300,0 \\ 20,0 \\ 150,0 \\ 16,5 \end{bmatrix} \quad ; \quad NQ1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad NQ2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 58,75 \\ 58,75 \end{bmatrix} \quad ; \quad NCT1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad NCT2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad NCT3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad NCT4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ulteriori dati da fornire al calcolatore sono le unità di misura delle resistenze ($k\Omega$), delle capacità (μF) e delle transconduttanze (mA/V).

I.12 - Riferimenti bibliografici.

Gli argomenti sviluppati nel presente capitolo sono trattati con maggiore o minore dettaglio nella maggior parte dei testi riguardanti i circuiti. Non è stato fatto alcun cenno ai circuiti non-lineari, per ragioni di spazio. Per questa ragione citiamo alcuni testi ed articoli che possono essere di guida a chi avesse necessità di conoscere questo importante argomento. In particolare, una trattazione introduttiva, ben coordinata con gli argomenti del presente capitolo, può essere trovata in C.A. Desoer, E.S. Kuh, «Basic circuit theory», Mc Graw-Hill, 1969. Dettagli sui vari tipi di elementi non-lineari sono riportati in L.O. Chua, «Introduction to non-linear network theory» Mc Graw-Hill, 1969. In questo testo sono riportate anche le proprietà dei circuiti non-lineari; maggiori dettagli su questo punto sono tuttavia reperibili in: A. Wilson: «Some aspects of the theory of non-linear networks», Proc. IEEE, agosto 1973, pp. 1092-1113. Per quanto riguarda la soluzione numerica del problema dell'analisi dei circuiti non-lineari, particolarmente interessante si presenta l'approccio che consiste nel considerare i componenti con caratteristiche lineari a tratti. Ciò implica in particolare che l'unico elemento non lineare da introdurre accanto a quelli già visti è il diodo ideale. Un metodo tipico basato su questo approccio è quello descritto in: F. Blasi, G. Martinelli, «Simplex approach to the analysis of piecewise-linear networks consisting of transistors, resistors, diodes and independent sources», Alta Frequenza, agosto 1976, pp. 494-506.

*

CAPITOLO II

ANALISI DI CIRCUITI SENZA MEMORIA IN PRESENZA DI ECCITAZIONI COSTANTI NEL TEMPO

II.1 - Il problema dell'analisi.

L'analisi di un circuito elettrico consiste nella determinazione del suo comportamento quando sono note le sue caratteristiche (cioè il tipo ed il valore dei componenti presenti ed il modo in cui sono interconnessi) e le sollecitazioni a cui è sottoposto (cioè l'andamento nel tempo delle eccitazioni presenti). È evidente che la complessità dei metodi da usare per analizzare un circuito elettrico dipende dal tipo dei componenti presenti e dall'andamento nel tempo delle funzioni di eccitazione. Una classe molto semplice di metodi è quella relativa ai circuiti contenenti componenti lineari caratterizzati da una relazione costitutiva in cui non compaiono legami integro-differenziali; per questi circuiti il valore assunto da ciascuna grandezza elettrica in un certo istante di tempo non dipende dai valori assunti in altri istanti. In tale caso il circuito viene detto senza memoria e la trattazione può essere limitata, senza perdita di generalità, ad eccitazioni costanti nel tempo.

I circuiti senza memoria, pur corrispondendo a strutture fisiche di scarsa importanza pratica, rivestono una grande importanza teorica in quanto ad essi è possibile ricondurre la maggior parte degli altri circuiti che interessano in pratica. Per questa ragione il presente capitolo verrà dedicato esclusivamente all'analisi di questi circuiti nell'ipotesi di eccitazioni costanti nel tempo.

La soluzione del problema dell'analisi richiede l'individuazione di tutte le grandezze elettriche presenti, utilizzando a questo scopo sia le relazioni costitutive dei componenti sia le equazioni di equilibrio associate alle leggi di Kirchhoff. L'utilizzazione razionale delle leggi di Kirchhoff richiede l'impiego delle nozioni topologiche sviluppate nel

§ I.10. Infatti, se non si ricorresse a tali nozioni e si scrivessero le equazioni di equilibrio senza un piano organizzato, si rischierebbe:

- 1) di arrivare ad un sistema di equazioni risolventi non valido, cioè tale da non ammettere soluzione;
- 2) di considerare un numero di incognite eccessivamente grande rispetto alla complessità del circuito da analizzare.

I vari metodi di analisi differiscono per il modo in cui vengono scelte le incognite (dette *variabili ausiliarie*) e vengono scritte le equazioni lineari del sistema risolvante. Nel presente capitolo la trattazione verrà limitata ai metodi più noti, importanti di per sé stessi ed in ogni caso propedeutici ai metodi più complessi richiesti nel caso dei circuiti di grandi dimensioni e speciali. Verranno considerati inizialmente circuiti contenenti solo componenti a due terminali e quindi si passerà al caso più generale.

II.2 - Analisi su base maglie di circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti.

$$[I_0] + [A][I_d] = 0$$

Come messo in evidenza nel § I.10, le correnti dei rami di un co-albero costituiscono un insieme di quantità tra loro indipendenti e tale da permettere l'individuazione delle correnti dei rami rimanenti tramite la (I.10.5). Tale insieme si presta ad essere scelto direttamente come l'insieme delle incognite, quando è possibile dedurre la tensione dalla corrente per ciascun componente del circuito in esame. Questo è il caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di tensione, di cui ci occuperemo nei § II.2.1 e II.2.2. Nel caso invece che siano presenti anche i generatori indipendenti di corrente, tale scelta non è più sufficiente ed occorre introdurre alcune modifiche, come verrà discusso nel § II.2.3.

II.2.1 - Caso in cui siano presenti generatori indipendenti solo di tensione.

Il metodo di analisi su base maglie, nel caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti solo di tensione, si basa sulla scelta delle correnti dei rami di un co-albero come incognite. Le equazioni del sistema risolvante si ottengono scrivendo le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali associate all'albero

$$[V_c] + [B][V_A]$$

scelto. Tale insieme di equazioni è valido in quanto, come vedremo di seguito:

- a) il numero di equazioni è pari al numero delle incognite; *correnti del co-albero*
- b) le equazioni sono indipendenti tra loro; *In questa si compaiono le correnti dei rami del co-albero*
- c) le uniche incognite presenti sono le variabili ausiliarie scelte, cioè le correnti dei rami del co-albero.

Il punto a) è conseguenza del fatto che il numero delle equazioni coincide con il numero delle maglie fondamentali e quindi, come messo in evidenza nel § I.10, con il numero dei rami del co-albero. Tale numero è un indice della complessità del sistema risolvibile ed è dato per un circuito costituito da R rami, N nodi e P parti separate dalla (I.10.15), cioè:

$$(II.2.1) \quad N_c = R - N + P$$

Il punto b) consegue dall'osservazione che ciascuna equazione esprime l'equilibrio delle tensioni di una maglia fondamentale. Poiché in ogni maglia fondamentale è presente un ramo del co-albero non presente nelle altre, ne deriva che ciascuna equazione contiene dei termini sicuramente non presenti nelle altre. Ciò è sufficiente a garantire la loro indipendenza. Infine il punto c) è conseguenza del fatto che ciascuna tensione facente parte di un'equazione di equilibrio coincide o con un termine noto (se il ramo corrispondente è un generatore di tensione) oppure con una combinazione lineare delle variabili ausiliarie con coefficienti noti. Per dimostrare ciò introduciamo le seguenti matrici:

$[R_c]$: matrice diagonale di ordine pari al numero dei rami del co-albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo del co-albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde la relativa resistenza; ad un generatore di tensione corrisponde il valore zero;

$[R_a]$: matrice diagonale definita come la $[R_c]$, ma per i rami dell'albero;

$[V_{gc}]$: vettore colonna di ordine pari al numero dei rami del co-albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo del co-albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde il valore zero; ad un generatore di tensione corrisponde il valore della relativa tensione impressa,

$[V_{ga}]$: vettore colonna definito come il vettore $[V_{gc}]$, ma per i rami dell'albero.

Utilizzando le matrici precedenti e le relazioni costitutive, otteniamo le seguenti espressioni per le tensioni dei componenti:

$$(II.2.2) \quad \text{rami del co-albero} \quad [V_c] = [R_c] [I_c] + [V_{gc}]$$

$$(II.2.3) \quad \text{rami dell'albero} \quad [V_a] = [R_a] [I_a] + [V_{ga}]$$

La (II.2.3) diviene, tenendo conto della (I.10.5):

$$(II.2.4) \quad [V_a] = - [R_a] [A] [I_c] + [V_{ga}]$$

L'esame delle (II.2.2) e (II.2.4) dimostra il punto c).

Quanto detto è sufficiente per enunciare il seguente procedimento di analisi:

Primo procedimento di analisi su base maglie.

(Valido per circuiti contenenti solo resistori e generatori indipendenti di tensione)

- 1) Scegliere un albero sul grafo orientato del circuito.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le correnti dei rami del co-albero, con le rispettive orientazioni.
- 3) Scrivere le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali associate all'albero scelto.
- 4) Esprimere le tensioni dei rami resistivi in funzione delle correnti dei rami del co-albero, facendo uso delle resistenze dei rami; assegnare alle tensioni dei rami contenenti generatori di tensione il valore imposto dai generatori. È bene sottolineare che le resistenze dei rami resistivi ed i valori delle tensioni dei generatori sono quantità note.
- 5) Sostituire le espressioni ottenute nel punto 4) nelle equazioni di equilibrio ottenute nel punto 3). Il sistema risultante deve avere come quantità incognite solo le variabili ausiliarie $[I_c]$.
- 6) Risolvere il sistema ottenuto al punto 5) e determinare le correnti $[I_c]$.
- 7) Determinare le altre grandezze elettriche del circuito⁽¹⁾. In particolare, le altre correnti del circuito si ottengono mediante la (I.10.5) e le tensioni mediante le relazioni costitutive dei componenti.

(1) - In molti casi non sono richieste tutte le grandezze elettriche del circuito, ma solo qualche tensione o qualche corrente. In tal caso il punto 7) viene sviluppato solo parzialmente.

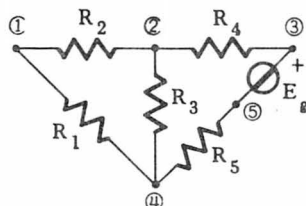
Esempio II.2.1

Applicare passo per passo il primo procedimento di analisi su base maglie al circuito mostrato in fig.II.2.1.

Fig.II.2.1 - Circuito considerato nello esempio II.2.1. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 0,5 ; R_2 = R_4 = R_5 = 1 ; R_3 = 1/3$$

$$E_g = 1 \quad (\Omega, V) .$$



Passi 1 e 2 : Disegnato il grafo orientato del circuito, scegliamo l'albero indicato in fig.II.2.2 b). Le variabili ausiliarie sono le correnti i_1 e i_3 .

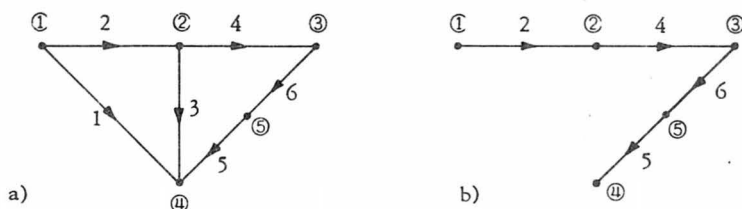


Fig.II.2.2 - a) Grafo orientato del circuito mostrato in fig.II.2.1; b) albero scelto.

Passo 3 : Le equazioni di equilibrio delle tensioni delle maglie fondamentali (che si ottengono aggiungendo i rami 1 e 3) sono:

$$\text{ramo 1} \quad v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

$$\text{ramo 3} \quad v_3 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

Passo 4 : Esprimiamo le tensioni dei rami del circuito in funzione delle correnti dei rami del co-albero i_1 e i_3 e delle grandezze note: resistenze dei rami resistivi e tensioni dei generatori di tensione. Si ha:

$$v_1 = R_1 i_1$$

$$v_2 = -R_2 i_1$$

$$v_3 = R_3 i_3$$

$$v_4 = -R_4 (i_1 + i_3)$$

$$v_5 = -R_5 (i_1 + i_3)$$

$$v_6 = E_g$$

Passo 5 : Sostituendo le espressioni delle tensioni trovate nel passo 4 nelle equazioni di equilibrio scritte nel passo 3 si ha:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 + R_5 & R_4 + R_5 \\ R_4 + R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g \\ E_g \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici indicati in fig. II.2.1, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 3,5 & 2 \\ 2 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 6 : Risolvendo il sistema ottenuto nel passo 5, si ottengono i seguenti valori delle variabili ausiliarie:

$$i_1 = \frac{2}{25} \quad ; \quad i_3 = \frac{9}{25} \quad (A)$$

Passo 7 : Le correnti dei rami dell'albero si ottengono mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_1 = -2/25 & i_5 &= -i_1 - i_3 = -11/25 \\ i_4 &= -i_1 - i_3 = -11/25 & i_6 &= -i_1 - i_3 = -11/25 \end{aligned} \quad (A)$$

Le tensioni dei rami resistivi si ottengono moltiplicando le correnti per le relative resistenze:

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 = 1/25 & v_4 &= R_4 i_4 = -11/25 \\ v_2 &= R_2 i_2 = -2/25 & v_5 &= R_5 i_5 = -11/25 \\ v_3 &= R_3 i_3 = 3/25 \end{aligned} \quad (V)$$

11.2.2 - Correnti fittizie di maglia e loro uso nell'analisi su base maglie dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di tensione.

Il procedimento di analisi su base maglie visto nel § II.2.1 può essere notevolmente semplificato, se si esamina ed interpreta opportunamente il sistema risolvibile nella sua forma finale. Facciamo ciò inizialmente per il circuito considerato nell'esempio II.2.1. Vediamo che per la maglia fondamentale associata al ramo 1 (maglia 1), l'equazione risolvibile relativa è (passo 5):

$$(II.2.5) \quad (R_1 + R_2 + R_4 + R_5) i_1 + (R_4 + R_5) i_3 = E_g$$

Dall'esame della (II.2.5) si può dedurre che le tensioni presenti nella maglia 1 sono dovute: 1) alla corrente del ramo 1, che circola in tutti i resistori facenti parte della maglia 1; 2) alla corrente del ramo 3

che circola nei resistori facenti parte contemporaneamente della maglia 1 e della maglia 2 (maglia associata al ramo 3). Queste tensioni sono di segno uguale tra loro ed opposto a quello della tensione del generatore presente nella maglia 1. I risultati di questo esame possono essere interpretati nel senso che l'equazione (II.2.5) è «*come se fosse dovuta alla presenza nella maglia 1 di una corrente fittizia coincidente con la corrente i_1 del ramo 1 e nella maglia 2 di una corrente fittizia coincidente con la corrente i_3 del ramo 3*». È facile controllare che anche la equazione risolvente associata alla maglia 2 è in accordo con tale interpretazione.

Passiamo ora a considerare il caso generale. A questo scopo sostituiamo nelle equazioni di equilibrio (I.10.6) l'espressione di $[B]$ data dalla (I.10.7) e le espressioni delle tensioni dei rami del circuito fornite dalle (II.2.2) e (II.2.4). Si ottiene:

$$(II.2.6) \quad [R_c][I_c] + [V_{gc}] + [A]^t[R_a][A][I_c] - [A]^t[V_{ga}] = 0$$

Mettendo in evidenza $[I_c]$ e portando a secondo membro i termini noti, si ha:

$$(II.2.7) \quad \{[R_c] + [A]^t[R_a][A]\}[I_c] = [V_{gc}] + [A]^t[V_{ga}]$$

Detta $[R_M]$ la matrice dei coefficienti e $[V_M]$ il vettore dei termini noti del sistema (II.2.7), si ottiene il sistema risolvente nella sua forma finale:

$$(II.2.8)$$

$$[R_M][I_c] = [V_M]$$

In base a quanto detto nel § I.10 si deduce dalla (II.2.7) che:

- 1) il termine (k, k) della matrice $[R_M]$ coincide con la somma delle resistenze dei rami resistivi che fanno parte della maglia fondamentale k -esima;
- 2) il termine (k, j) della matrice $[R_M]$ coincide con la somma algebrica delle resistenze dei rami resistivi che fanno parte contemporaneamente della maglia fondamentale k -esima e j -esima. Tali resistenze vanno considerate con il segno positivo se i versi di percorrenza delle maglie, stabiliti dalle correnti dei relativi rami del co-albero, sono concordi; negativo in caso contrario.

Le deduzioni precedenti giustificano in generale la nozione di correnti fittizie di maglia.

È opportuno discutere in qualche dettaglio le implicazioni della nuova nozione introdotta. Ciò viene fatto in fig.II.2.3. In tale figura viene mostrato il grafo orien-

tato di un circuito nel quale i rami dell'albero sono indicati con tratto continuo, mentre quelli del co-albero con linee tratteggiate. Le tre maglie individuate dai rami del co-albero sono formate dai rami (1, 4, 5, 6) per la maglia 1, dai rami (2, 5, 7) per la maglia 2, dai rami (3, 6, 7) per la maglia 3; si può allora pensare che le suddette maglie siano percorse da tre correnti i_{m1} , i_{m2} , i_{m3} . Tali correnti non coincidono con le correnti di ramo, salvo che per i rami del co-albero; infatti nel ramo 1 scorre solo la corrente i_{m1} , nel ramo 2 solo la corrente i_{m2} e nel ramo 3 solo la corrente i_{m3} . Per tale motivo i versi delle correnti di maglia sono stati scelti concordi con quelli dei rami del co-albero. D'altra parte le correnti dei rami dell'albero si possono considerare come dovuti alla sovrapposizione delle correnti delle maglie che contengono tali rami. Ad esempio per il ramo 6 del grafo di fig.II.2.3 si ha:

(II.2.9)

$$i_6 = i_{m3} - i_{m1}$$

Inoltre l'equilibrio delle tensioni in una maglia si ottiene immediatamente esplicitando le cadute di tensione sui rami resistivi in funzione delle correnti di maglia. Ad esempio per la maglia 1 del grafo di fig.II.2.3, nell'ipotesi che i rami 1, 5, 6 siano resistivi e che il ramo 4 sia un generatore di tensione V_g con morsetto positivo tale che i_{m1} sia uscente da esso, si ha:

(II.2.10)

$$(R_5 + R_6 + R_1)i_{m1} - R_5i_{m2} - R_6i_{m3} = V_g$$

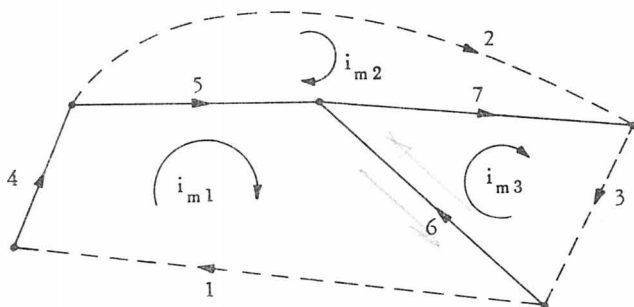


Fig.II.2.3 - Grafo orientato in cui sono messe in evidenza le correnti fittizie di maglia.

Quanto detto permette di giustificare il seguente procedimento semplificato di analisi su base maglie, eseguibile semplicemente per ispezione visiva del circuito da analizzare.

Secondo procedimento di analisi su base maglie.

(Valido per circuiti contenenti solo resistori e generatori indipendenti di tensione)

1) Scegliere un albero sul grafo orientato del circuito⁽¹⁾.

(1) - La scelta dell'albero è arbitraria. Si ottiene, tuttavia, una notevole economia di termini nelle equazioni risolventi se lo si sceglie in modo che le maglie si sovrappongano il meno possibile.

- 2) Prendere come variabili ausiliarie le correnti di maglia, che risultano uguali a quelle dei rami del co-albero con le rispettive orientazioni.
- 3) Scrivere il sistema risolvante determinando la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti nel modo seguente:
 - a) il termine (k, k) della matrice dei coefficienti coincide con la somma delle resistenze dei rami resistivi della maglia k -sima⁽¹⁾;
 - b) il termine (k, i) della matrice dei coefficienti coincide con la somma algebrica delle resistenze dei rami resistivi comuni alle maglie k ed i . Il segno da mettere dinanzi a ciascuna di queste resistenze è positivo o negativo a seconda che su quel ramo le correnti delle maglie k ed i siano concordi ovvero discordi⁽¹⁾;
 - c) la componente k -sima del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle tensioni dei generatori di tensione presenti nella maglia k -sima. Il segno con cui considerare ciascuna di queste tensioni è positivo o negativo a seconda che la corrente della maglia k -sima esca ovvero entri dal morsetto positivo del generatore considerato.
- 4) Risolvere il sistema ottenuto al punto 3) e determinare le correnti di maglia.
- 5) Determinare le altre correnti e tensioni del circuito.

Osservazione II.2.1

Dall'esame della matrice dei coefficienti $[R_M]$, quale risulta dalla (II.2.7), si deduce che essa è simmetrica. Infatti si ottiene che:

$$(II.2.11) \quad [R_M]^t = [R_c]^t + \{ [A]^t [R_a] [A] \}^t = [R_c] + [A]^t [R_a] [A] = [R_M]$$

Di tale risultato, che riassumiamo di seguito sotto forma di una proprietà dei circuiti, va tenuto conto per introdurre semplificazioni nel procedimento di analisi precedente.

Proprietà II.2.1 - « La matrice dei coefficienti del sistema di equazioni risolvanti su base maglie per circuiti contenenti resistori e generatori di tensione è simmetrica.

(1) - Per il modo in cui è stato ottenuto l'elemento (k, k) della matrice dei coefficienti viene anche detto *resistenza totale della maglia k -sima*, mentre l'elemento (k, i) viene detto *resistenza mutua tra le maglie k -sima ed i -sima*.

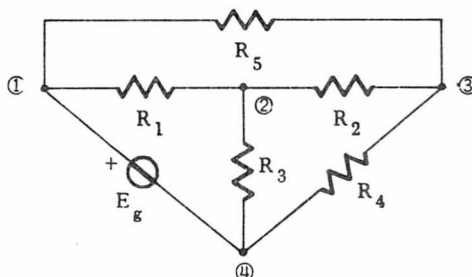
Esempio II.2.2

Applicare il secondo procedimento di analisi su base maglie al circuito di figura II.2.4, sviluppando in dettaglio i singoli passi.

Fig.II.2.4 - Circuito considerato nell'esempio II.2.2. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_4 = 2 \quad ; \quad R_2 = R_3 = R_5 = 1 ;$$

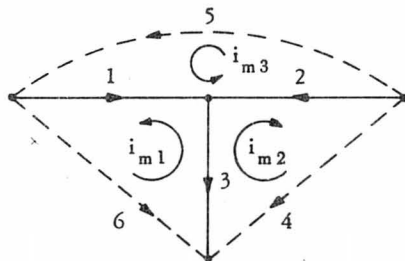
$$E_g = 2 \text{ (}\Omega, \text{ V)}$$



Passi 1 e 2 : Scegliamo l'albero indicato a tratto pieno in fig.II.2.5, in cui i rami del co-albero sono indicati tratteggiati. Le variabili ausiliarie sono le correnti fittizie di maglia i_{m1} , i_{m2} , i_{m3} coincidenti con le correnti dei rami del co-albero. Si ha rispettivamente:

$$i_{m1} = i_6 \quad ; \quad i_{m2} = i_4 \quad ; \quad i_{m3} = i_5$$

Fig.II.2.5 - Albero e co-albero del circuito di fig.II.2.4.



Passo 3 : Scriviamo le equazioni di equilibrio delle tensioni su base maglie, si ha:

$$\text{maglia 1} \quad (R_1 + R_3) i_{m1} + R_3 i_{m2} - R_1 i_{m3} = -E_g$$

$$\text{maglia 2} \quad R_3 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4) i_{m2} + R_2 i_{m3} = 0$$

$$\text{maglia 3} \quad -R_1 i_{m1} + R_2 i_{m2} + (R_1 + R_2 + R_5) i_{m3} = 0$$

Sostituendo i valori numerici di fig.II.2.4, si ha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema di equazioni si ha:

$$i_{m1} = -\frac{10}{7} \quad i_{m2} = \frac{4}{7} \quad i_{m3} = -\frac{6}{7}$$

Passo 5 : Le altre correnti del circuito valgono:

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_{m1} + i_{m3} = \frac{4}{7} & i_2 &= -i_{m2} - i_{m3} = \frac{2}{7} & i_3 &= -i_{m1} - i_{m2} = \frac{6}{7} \\ i_4 &= i_{m2} = \frac{4}{7} & i_5 &= i_{m3} = -\frac{6}{7} & i_6 &= i_{m1} = -\frac{10}{7} \end{aligned} \quad (A)$$

Le tensioni dei rami resistivi si ottengono moltiplicando le correnti precedenti per le rispettive resistenze.

II.2.3 - Analisi su base maglie in presenza di generatori indipendenti di corrente.

La presenza di generatori di corrente in un circuito rende impossibile l'applicazione diretta del metodo di analisi su base maglie, in quanto le variabili ausiliarie usate in questo caso, cioè le correnti del co-albero, non sono sufficienti ad esprimere le tensioni ai capi di ciascun generatore di corrente presente. Per tali componenti infatti la tensione ai capi è indipendente dalla corrente che li attraversa e quindi deve essere considerata come una grandezza incognita.

Pertanto, in tale caso devono considerarsi inizialmente come incognite sia le variabili ausiliarie precedenti sia le tensioni ai capi dei generatori di corrente; a tale aumento del numero delle incognite corrisponde tuttavia un uguale aumento del numero delle equazioni, in quanto ogni generatore di corrente introduce un vincolo fra le correnti del circuito e quindi una nuova equazione. Da quanto detto potrebbe sembrare che la presenza dei generatori di corrente dia luogo sempre a sistemi risolutivi di maggiore complessità; tale fatto è invece non vero nella maggioranza dei casi, se si ha l'accortezza di scegliere l'albero del circuito opportunamente, come verrà detto in seguito.

Per risolvere un circuito su base maglie in presenza di generatori di corrente si possono seguire due vie differenti a seconda che si operi direttamente sul circuito assegnato ovvero si effettuino delle trasformazioni circuitali che permettono di ottenere un nuovo circuito equivalente al primo ma privo di generatori di corrente. Nel primo caso si parla di *metodo misto* in quanto sono presenti come incognite sia correnti che tensioni; nel secondo caso si parla di *metodo diretto*, in quanto,

dopo aver effettuato le opportune trasformazioni circuitali, si può usare il metodo introdotto nei paragrafi precedenti senza alcuna modifica.

II.2.4 - Metodo misto di analisi su base maglie.

Si ha il metodo misto di analisi su base maglie quando si effettua l'analisi del circuito con il metodo delle maglie senza effettuare trasformazioni circuitali. Il procedimento considerato nel paragrafo precedente può essere seguito fino al passo 3b. Successivamente occorre introdurre le nuove incognite, coincidenti con le tensioni ai capi dei generatori indipendenti di corrente presenti e le ulteriori equazioni che esprimono i vincoli sulle correnti del circuito, dovuti a questi generatori. Precisamente per ogni generatore di corrente occorre scrivere un'equazione in cui compaiono le correnti incognite di maglia e come termine noto la sua corrente impressa.

Prima di procedere ulteriormente, applichiamo quanto detto al circuito di fig. II.2.6.

Esempio II.2.3

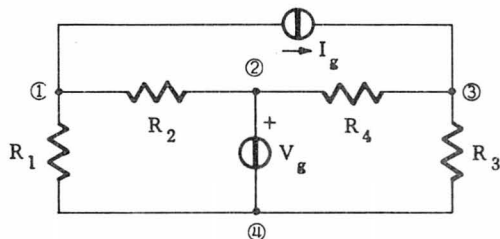
103045

Analizzare con il procedimento abbozzato in precedenza il circuito di figura II.2.6.

Fig. II.2.6 - Circuito considerato nell'esempio II.2.3. I valori dei componenti sono:

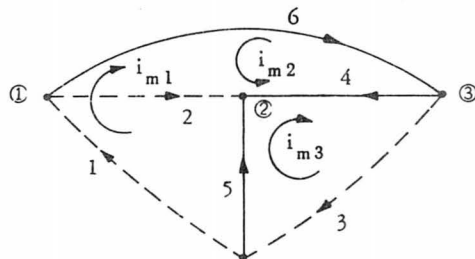
$$R_1 = R_4 = 2 ; R_2 = R_3 = 1 ;$$

$$V_g = -1 ; I_g = 2 \text{ (}\Omega, \text{V, A)} .$$



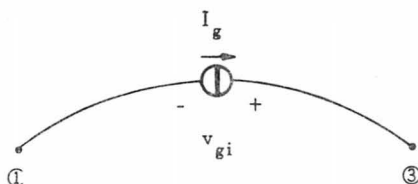
Passi 1 e 2 : Scegliamo l'albero indicato a tratto pieno in fig. II.2.7, in cui i rami del co-albero sono indicati tratteggiati. Le variabili ausiliarie sono le correnti di maglia

Fig. II.2.7 - Albero e co-albero del circuito di fig. II.2.6.



i_{m1} , i_{m2} , i_{m3} , mentre risulta anche incognita la tensione ai capi del generatore di corrente, che verrà rappresentata come mostrato in fig.II.2.8.

Fig.II.2.8 - Scelta del verso della tensione incognita del generatore di corrente del circuito di fig.II.2.6.



Passo 3 : Scriviamo il sistema di equazioni di equilibrio delle tensioni per le varie maglie, trattando il generatore di corrente *come se fosse un generatore di tensione di valore v_{gi}* ; si ha:

$$\text{maglia 1} \quad (R_1 + R_4) i_{m1} - R_4 i_{m2} - R_4 i_{m3} = v_{gi} - V_g$$

$$\text{maglia 2} \quad -R_4 i_{m1} + (R_2 + R_4) i_{m2} + R_4 i_{m3} = -v_{gi}$$

$$\text{maglia 3} \quad -R_4 i_{m1} + R_4 i_{m2} + (R_3 + R_4) i_{m3} = V_g$$

Scriviamo quindi l'equazione del vincolo imposto dal generatore di corrente; si ha:

$$\text{Equazione del vincolo} \quad i_{m1} - i_{m2} = I_g$$

Sostituendo ai coefficienti ed alle grandezze impresse nelle equazioni precedenti i valori riportati in fig.II.2.6, si ha:

$$\begin{bmatrix} +4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & +3 & +2 & +1 \\ -2 & +2 & +3 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \\ v_{gi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema precedente si ottiene:

$$i_{m1} = 1 \quad ; \quad i_{m2} = -1 \quad ; \quad i_{m3} = 1 \quad ; \quad v_{gi} = 3 \quad (A, V)$$

Passo 5 : Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

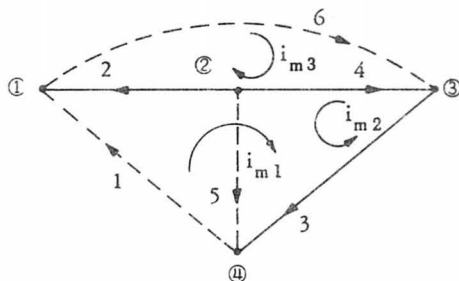
$$\begin{aligned} i_4 &= i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} = 1 & v_1 &= 2 & v_3 &= 1 \\ i_5 &= -i_{m1} + i_{m3} = 0 & v_2 &= -1 & v_4 &= 2 \end{aligned} \quad (A, V)$$

Il sistema risolvante nell'esempio precedente è più complesso di quello che si avrebbe nel caso che i generatori fossero tutti di tensione, per la presenza di una nuova incognita (la tensione v_{gi}) e di una nuova equazione (l'equazione del vincolo). Si può però osservare che con un'opportuna scelta dell'albero, cioè scegliendo il generatore di corrente su un ramo del co-albero (invece che su un ramo dell'albero come fatto nello esempio), l'equazione del vincolo diviene un'identità, nella quale una variabile ausiliaria viene identificata con la corrente impressa del generatore. Con tale scelta si ha inoltre un secondo vantaggio: la tensione incognita v_{gi} compare in una sola delle equazioni risolventi (invece che in due, come nell'esempio visto). In conclusione il sistema si riduce da quattro equazioni in quattro incognite, ad un sistema di due equazioni in due incognite. Risolviamo perciò lo stesso circuito dell'esempio II.2.3 seguendo le osservazioni precedenti.

Esempio II.2.4

Per il circuito di fig.II.2.6 scegliamo l'albero come indicato a tratto pieno in fig.II.2.9, in modo tale che il generatore di corrente sia presente su un ramo del co-albero.

Fig.II.2.9 - Albero e co-albero del circuito di fig.II.2.6 considerati nell'esempio II.2.4.



Le variabili ausiliarie sono le correnti i_{m1} , i_{m2} , i_{m3} fra le quali i_{m3} è una quantità nota poiché si identifica con la corrente del generatore di corrente. L'ulteriore incognita v_{gi} è scelta con le stesse modalità indicate in fig.II.2.8.

Le equazioni risultanti sono le seguenti:

$$\text{maglia 1} \quad (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_{m1} - (R_3 + R_4)i_{m2} - (R_2 + R_4)i_{m3} = 0$$

$$\text{maglia 2} \quad -(R_3 + R_4)i_{m1} + (R_3 + R_4)i_{m2} + R_4 i_{m3} = -V_g$$

$$\text{maglia 3} \quad -(R_2 + R_4)i_{m1} + R_4 i_{m2} + (R_2 + R_4)i_{m3} = v_{gi}$$

Sostituendo i valori numerici riportati in fig.II.2.6, si ha:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ v_{gi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Le prime due equazioni del sistema precedente, corrispondenti alle maglie in cui non è presente il generatore di corrente, contengono solo le due incognite corrispondenti alle variabili ausiliarie i_{m1} ed i_{m2} , mentre la terza equazione è la sola a contenere l'incognita v_{gi} . Risolvendo il sistema costituito dalle prime due equazioni si ha:

$$i_{m1} = 1 \qquad i_{m2} = 0 \qquad (A)$$

Quindi il valore di v_{gi} vale:

$$v_{gi} = 3 \text{ V}$$

Tale soluzione coincide con quella trovata nell'esempio II.2.3 risolvendo un sistema di quattro equazioni in quattro incognite.

Quanto detto permette di giustificare il seguente procedimento di analisi.

Terzo procedimento di analisi su base maglie (metodo misto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

1) Scegliere, se possibile, un albero del circuito tale che i generatori di corrente presenti siano contenuti tutti nel co-albero (si veda l'osservazione II.2.2).

2) Prendere come variabili ausiliarie le correnti di maglia, che risultano uguali a quelle del co-albero con le rispettive orientazioni. Tali variabili sono note per le maglie aventi un generatore di corrente come ramo di chiusura, per cui le incognite sono le rimanenti.

3) Introdurre come ulteriori incognite le tensioni ai capi dei generatori di corrente.

4) Scrivere il sistema risolvante secondo le modalità indicate al punto 3) del secondo procedimento di analisi su base maglie, con l'avvertenza che il punto c) diviene come segue:

c) la componente k-sima del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle tensioni ai capi di tutti i generatori sia di tensione che di corrente presenti nella maglia k-sima. Il segno con cui considerare ciascuna di queste tensioni è positivo o negativo a seconda che la corrente della maglia k-sima esca oppure entri nel morsetto positivo del generatore considerato.

5) Scrivere le equazioni di vincolo per quei generatori di corrente che eventualmente si trovassero sui rami dell'albero (tale eventualità deve essere evitata in base al punto 1).

6) Risolvere il sistema di equazioni ottenute nel punto 4) e nel punto 5), le cui incognite sono:

- le correnti delle maglie nei cui rami di chiusura non sono presenti generatori di corrente;
- le tensioni ai capi dei generatori di corrente.

7) Determinare le altre correnti e tensioni del circuito.

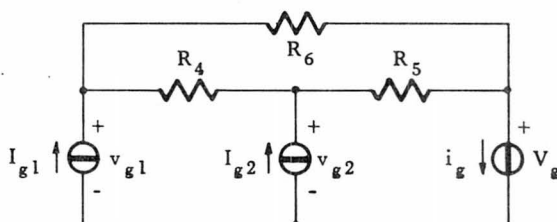
Esempio II.2.5

Risolvere con il metodo misto di analisi su base maglie il circuito di figura II.2.10.

Fig.II.2.10 - Circuito considerato nell'esempio II.2.5. I valori dei componenti sono:

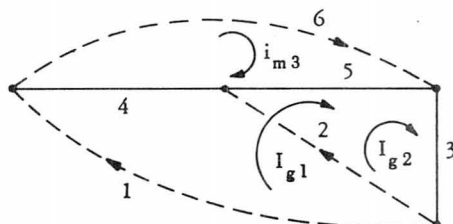
$$I_{g1} = 2, \quad I_{g2} = 1, \quad V_g = 1$$

$$R_4 = R_5 = 1, \quad R_6 = 2 \quad (\text{A}, \text{V}, \Omega)$$



1) Scegliamo un albero del circuito in modo che i generatori di corrente presenti siano sul co-albero (fig.II.2.11).

Fig.II.2.11 - A tratto pieno è indicato l'albero del circuito di fig.II.2.10.



2) Le variabili ausiliarie sono tre e precisamente: I_{g1} ed I_{g2} (correnti relative alle maglie 1 e 2), di valore noto; i_{m3} , corrente incognita della maglia 3.

3) Ulteriori incognite sono le tensioni ai capi dei due generatori di corrente. Indichiamo tali tensioni con v_{g1} e v_{g2} con il verso indicato in fig.II.2.10.

4) Scriviamo il sistema risolvante:

$$\text{maglia 1} \quad (R_4 + R_5) I_{g1} + R_5 I_{g2} - (R_4 + R_5) i_{m3} = v_{g1} - V_g$$

$$\text{maglia 2} \quad R_5 I_{g1} + R_5 I_{g2} - R_5 i_{m3} = v_{g2} - V_g$$

$$\text{maglia 3} \quad -(R_4 + R_5) I_{g1} - R_5 I_{g2} + (R_4 + R_5 + R_6) i_{m3} = 0$$

Sostituiamo i valori numerici alle grandezze note; si ha:

$$4 + 1 - 2 i_{m3} = v_{g1} - 1$$

$$2 + 1 - i_{m3} = v_{g2} - 1$$

$$- 4 - 1 + 4 i_{m3} = 0$$

5) Poichè tutti i generatori di corrente si trovano sul co-albero non occorre aggiungere alcuna equazione di vincolo e quindi il sistema precedente è il sistema risolvante completo per il circuito considerato.

6) La soluzione di tale sistema è molto semplice in quanto i_{m3} può essere calcolata direttamente dall'ultima equazione. Il valore ottenuto può essere quindi sostituito nelle prime due equazioni ottenendo le altre incognite, cioè:

$$i_{m3} = 5/4 \quad v_{g1} = 7/2 \quad v_{g2} = 11/4 \quad (A, V)$$

7) le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

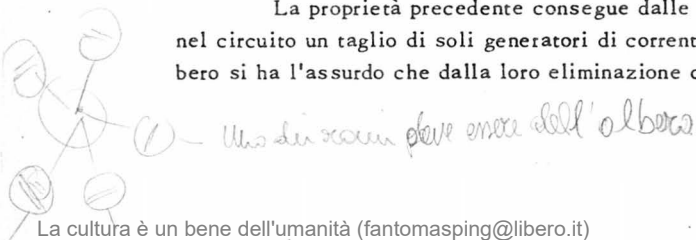
$$\begin{aligned} i_g &= I_{g1} + I_{g2} = 3 & v_{R4} &= R_4 i_{R4} = 3/4 \\ i_{R4} &= I_{g1} - i_{m3} = 3/4 & v_{R5} &= R_5 i_{R5} = 7/4 & (A, V) \\ i_{R5} &= I_{g1} + I_{g2} - i_{m3} = 7/4 & v_{R6} &= R_6 i_{R6} = 5/2 \end{aligned}$$

Osservazione II.2.2

Al punto 1) del metodo misto di analisi su base maglie è stata posta una riserva sulla possibilità di scegliere un albero del circuito tale che tutti i generatori di corrente presenti siano contenuti nel co-albero. Può infatti accadere che in qualche caso non sia possibile scegliere un albero siffatto e che qualche generatore di corrente debba di conseguenza coincidere con un ramo dell'albero; in tal caso non sarà possibile evitare di scrivere le equazioni aggiuntive di vincolo indicate al punto 5), con conseguente complicazione del sistema risolvante. I casi in cui non è possibile evitare tale situazione sono messi in evidenza dalla seguente proprietà:

Proprietà II.2.2 - « Non esiste un albero del circuito tale che tutti i generatori di corrente siano contenuti sul co-albero, se e solo se è presente nel circuito un taglio costituito da soli generatori di corrente. »

La proprietà precedente consegue dalle seguenti osservazioni. Se è presente nel circuito un taglio di soli generatori di corrente e questi fanno parte tutti del co-albero si ha l'assurdo che dalla loro eliminazione consegue la separazione del circuito



in due parti. Sappiamo infatti che per separare in due parti un circuito occorre eliminare sempre almeno un ramo dell'albero (§ I.10). D'altra parte se non è presente un taglio di soli generatori di corrente è sempre possibile scegliere un albero che non contiene alcuno di essi. Un modo semplice per ottenere ciò è quello di eliminare preliminarmente tutti i generatori di corrente, ciò che non provoca la separazione in due parti del circuito, e quindi scegliere sul circuito rimanente l'albero.

I circuiti contenenti tagli costituiti da soli generatori di corrente sono anomali, in quanto le correnti impresse da tali generatori debbono soddisfare la prima legge di Kirchhoff. Perciò si possono avere due eventualità:

a) Le correnti impresse non soddisfano la prima legge di Kirchhoff. *In tal caso il circuito considerato non è valido* e va riesaminato il procedimento di modellamento da cui è derivato dalla struttura fisica che vuol rappresentare.

b) Le correnti impresse soddisfano la prima legge di Kirchhoff. *In tal caso il problema di analisi ha soluzione indeterminata*, in quanto è possibile sostituire uno qualunque dei generatori di corrente considerati con un generatore di tensione di valore arbitrario, senza alterare il resto del circuito (la corrente nel generatore suddetto di tensione, per la legge di Kirchhoff delle correnti, è proprio uguale alla corrente del generatore sostituito di corrente, come è messo chiaramente in evidenza in fig. II.2.12).

Si può quindi concludere che, salvo i casi anomali indicati, la riserva effettuata al punto 1) del metodo misto di analisi su base maglie si può sciogliere in senso affermativo e quindi il punto 5) del suddetto procedimento può essere evitato.

Illustriamo quanto detto con un esempio.

Esempio II.2.6

Risolvere con il metodo misto di analisi su base maglie il circuito di figura II.2.13.

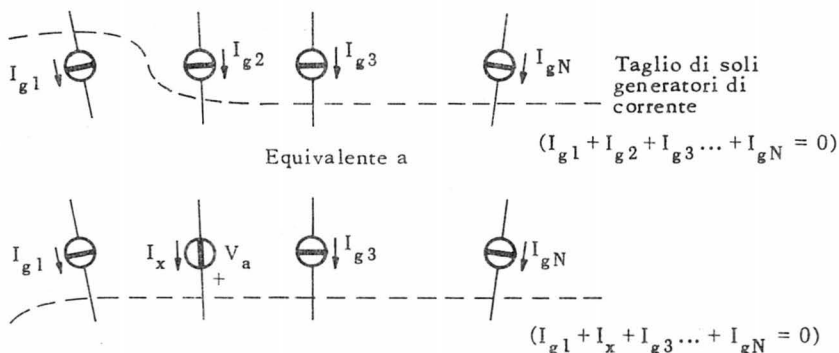


Fig. II.2.12 - Equivalenza di un generatore di tensione ad un generatore di corrente in un taglio di soli generatori di corrente.

Il circuito in esame si trova nella situazione anomala b) considerata nell'osservazione II.2.2; infatti c'è un taglio di soli generatori di corrente (I_{g1} , I_{g2} , I_{g4}) e le relative correnti impresse soddisfano la prima legge di Kirchhoff.

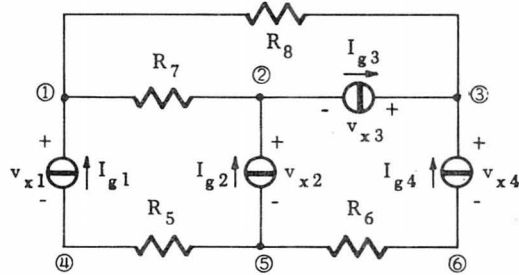
Applichiamo il metodo misto di analisi passo per passo.

1) Non è possibile trovare un albero i cui rami non contengano i generatori di corrente. Scegliamolo allora come in fig.II.2.14, con il generatore I_{g2} presente.

Fig.II.2.13 - Circuito considerato nell'esempio II.2.6. I valori dei componenti sono:

$$I_{g1} = -1, \quad I_{g2} = I_{g3} = 2, \quad I_{g4} = -1$$

$$R_5 = R_8 = 2, \quad R_6 = R_7 = 1 \quad (\text{A}, \Omega)$$



2) Le variabili ausiliarie sono tutte note e uguali a I_{g1} , I_{g3} , I_{g4} .

3) Sono incognite le tensioni ai capi dei generatori di corrente; indichiamole con v_{x1} , v_{x2} , v_{x3} , v_{x4} (fig.II.2.13).

4) Le equazioni di equilibrio delle tensioni per le tre maglie sono:

$$(R_5 + R_7) I_{g1} + R_7 I_{g3} + R_7 I_{g4} = v_{x1} - v_{x2}$$

$$R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x3}$$

$$R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_6 + R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x4} - v_{x2}$$

5) L'equazione aggiuntiva relativa al vincolo imposto dal generatore di corrente I_{g2} è:

$$I_{g1} + I_{g4} = -I_{g2}$$

6) Il sistema risolvante contiene le equazioni ottenute nei passi 4) e 5), cioè:

$$\begin{cases} (R_5 + R_7) I_{g1} + R_7 I_{g3} + R_7 I_{g4} = v_{x1} - v_{x2} \\ R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x3} \\ R_7 I_{g1} + (R_7 + R_8) I_{g3} + (R_6 + R_7 + R_8) I_{g4} = v_{x4} - v_{x2} \\ I_{g1} + I_{g4} = -I_{g2} \end{cases}$$

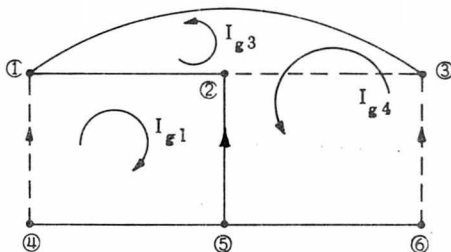
Le incognite sono v_{xk} , $k = 1, 2, 3, 4$. Fino a questo punto del procedimento, il sistema contiene un numero di incognite uguale al numero di equazioni. Sostituiamo ora i valori numerici; si ha:

$$\begin{aligned}
 -3 + 2 - 1 &= v_{x1} - v_{x2} \\
 -1 + 6 - 3 &= v_{x3} \\
 -1 + 6 - 4 &= v_{x4} - v_{x2} \\
 -1 - 1 &= -2
 \end{aligned}$$

Si vede che la quarta equazione è un'identità e quindi il sistema risolvibile è indeterminato. Per renderlo determinato possiamo seguire l'accorgimento proposto nell'osservazione II.2.2 e sostituire un generatore di tensione di valore assegnato (in modo arbitrario) al posto di uno dei tre generatori di corrente I_{g1} , I_{g2} , I_{g4} . Ciò equivale ad assegnare un valore ad una delle tre tensioni v_{x1} , v_{x2} , v_{x4} . Ad esempio scegliendo $v_{x2} = 100$ Volt, si ha:

$$\begin{cases}
 -2 = v_{x1} - 100 \\
 2 = v_{x3} \\
 1 = v_{x4} - 100
 \end{cases}$$

Fig. II.2.14 - Albero (a tratto pieno) del circuito di figura II.2.13



Quindi risolvendo, risulta:

$$\begin{aligned}
 v_{x1} &= 98 & v_{x3} &= 2 & v_{x4} &= 101 \\
 (v_{x2} &= 100) & & & & (V)
 \end{aligned}$$

Le altre grandezze elettriche del circuito possono essere facilmente individuate.

II.2.5 - Metodo diretto di analisi su base maglie.

Un modo molto semplice per ovviare all'inconveniente dovuto alla presenza dei generatori di corrente è quello di sostituire quest'ultimi con generatori di tensione tramite opportune trasformazioni. Si riduce in questo modo il circuito da analizzare ad uno avente solo resistori e generatori di tensione. Unico svantaggio è che il circuito ottenuto è diverso da quello assegnato, in corrispondenza ad alcuni suoi rami e perciò

occorre sempre tenere presente tale fatto nella determinazione finale delle tensioni e correnti del circuito iniziale.

La trasformazione viene effettuata in due passi successivi. Dapprima si sostituisce al generico generatore di corrente un opportuno numero di generatori di corrente aventi in parallelo uno ed un solo ramo. Ciò si può sempre fare, considerando una maglia che comprende il generatore di corrente che si vuole eliminare, come indicato in fig. II.2.15 ed osservando che l'equilibrio delle correnti nei nodi A_k , $k = 1, 2, \dots, N+1$ rimane invariato. È ovvio che tale passo non è necessario se il generatore di corrente già si trova in parallelo o ad una resistenza o ad un generatore di tensione.

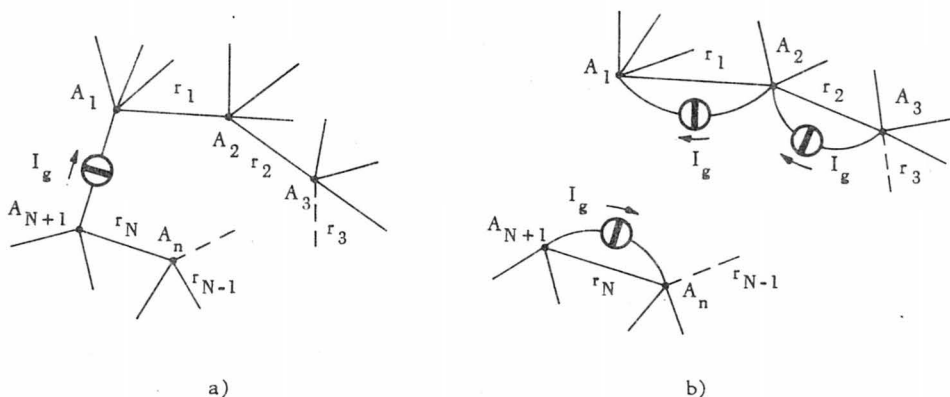


Fig. II.2.15 - a) Circuito in cui è messo in evidenza il generatore di corrente che si vuole eliminare. b) Circuito trasformato, in cui il generatore di corrente di partenza è stato sostituito da N generatori di corrente di uguale valore, essendo N il numero dei rami della maglia.

Successivamente si utilizzano le equivalenze di fig. II.2.16 per eliminare definitivamente i generatori di corrente introdotti, come indicato esplicitamente in fig. II.2.17. La trasformazione globale, mostrata in fig. II.2.17, porta ad un circuito equivalente a quello di partenza dal punto di vista elettrico con l'esclusione della maglia interessata dalla trasformazione. È inoltre evidente che viene eliminato mediante essa un generatore di corrente alla volta; perciò, se è necessario, occorre applicarlo ripetutamente per eliminare tutti i generatori di corrente presenti.

In conclusione con la trasformazione precedente possiamo sempre ricondurre un circuito assegnato, contenente generatori di corrente e tensione, ad uno contenente solo generatori di tensione equivalente a quello di partenza, fatta eccezione per alcune parti. Il problema dell'analisi, perciò, risolto su quest'ultimo va completato, individuando successivamente le tensioni e correnti dei rami del circuito di partenza, eliminati dalla trasformazione.

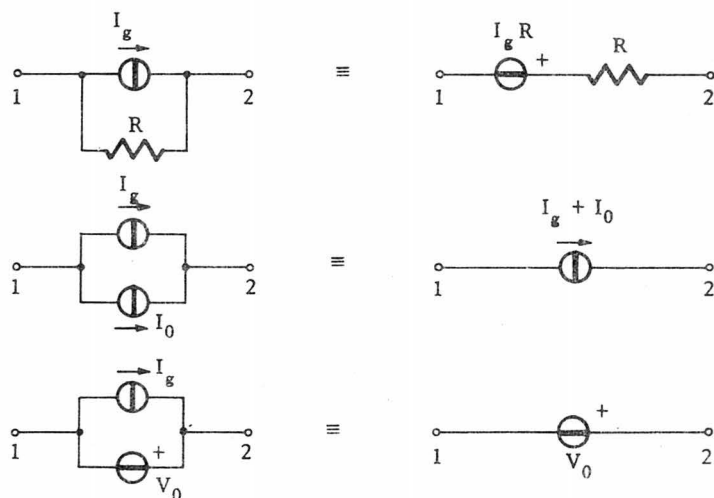


Fig.II.2.16 - Equivalenze che si utilizzano per eliminare un generatore di corrente I_g da un circuito. Le equivalenze sono valide solo dal punto di vista elettrico esterno ai nodi 1 e 2.

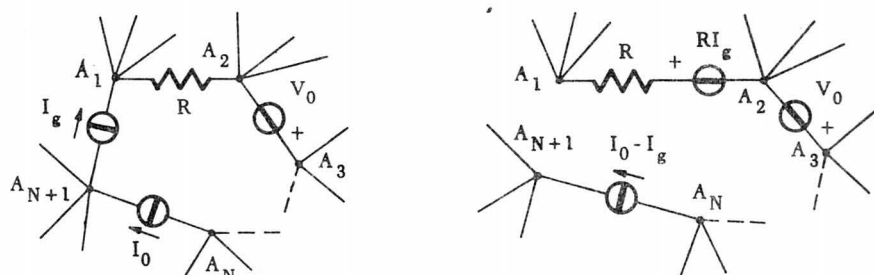


Fig.II.2.17 - Trasformazione finale per l'eliminazione del generatore di corrente I_g .

In base a quanto detto è possibile enunciare il seguente procedimento di analisi su base maglie:

Quarto procedimento di analisi su base maglie (metodo diretto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

1) Applicare ripetutamente le trasformazioni indicate nelle fig.II.2.15 e II.2.16, fino ad ottenere un circuito privo di generatori di corrente. Sia T tale circuito.

2) Effettuare l'analisi del circuito T, applicando il secondo procedimento di analisi su base maglie.

3) Determinare le tensioni e le correnti dei rami contenuti nelle parti del circuito di partenza distrutte dalle trasformazioni, utilizzando i risultati ottenuti in 2) e le trasformazioni in senso inverso.

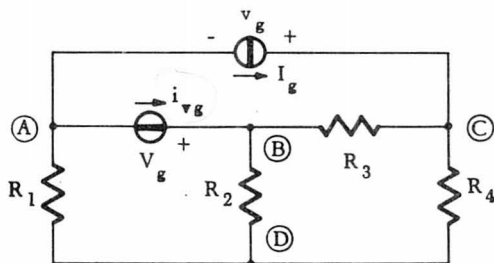
Esempio II.2.7

Applicare passo per passo il quarto procedimento di analisi su base maglie al circuito di fig.II.2.18.

Fig.II.2.18 - Circuito considerato nell'esempio II.2.7. I valori dei componenti sono:

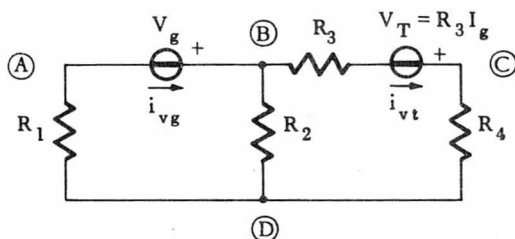
$$R_1 = R_3 = 2, \quad R_2 = R_4 = 1,$$

$$I_g = 2, \quad V_g = 1 \quad (\Omega, A, V)$$



1) Il circuito assegnato contiene un solo generatore di corrente I_g , il quale fa parte di una maglia contenente due ulteriori rami: un generatore di tensione ed un resistore. Applicando le trasformazioni indicate nelle fig.II.2.15 e II.2.16 a tale maglia, si ottiene il circuito equivalente di fig.II.2.19 (circuito T).

Fig.II.2.19 - Circuito trasformato dell'esempio II.2.7 (circuito T).



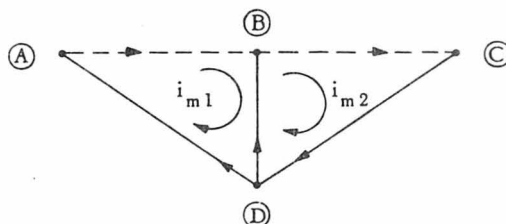
2) Analizziamo il circuito di fig.II.2.19 con il secondo procedimento di analisi su base maglie, scegliendo l'albero indicato a tratto pieno in fig.II.2.20. Si ottiene:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)i_{m1} - R_2i_{m2} &= V_g \\ -R_2i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4)i_{m2} &= R_3I_g \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{aligned} 3i_{m1} - i_{m2} &= 1 \\ -i_{m1} + 4i_{m2} &= 4 \end{aligned}$$

Fig.II.2.20 - Albero (a tratto pieno) del circuito di figura II.2.19.



Da cui si ottiene:

$$i_{m1} = 8/11 \quad i_{m2} = 13/11 \quad (A)$$

In conclusione si ottengono i seguenti valori per le grandezze elettriche del circuito T:

$$\begin{aligned} i_{R1} &= i_{m1} = 8/11 & v_{R1} &= 16/11 \\ i_{R2} &= i_{m2} - i_{m1} = 5/11 & v_{R2} &= 5/11 \\ i_{R3} &= i_{m2} = 13/11 & v_{R3} &= 26/11 \\ i_{R4} &= i_{m2} = 13/11 & v_{R4} &= 13/11 \\ i_{vg} &= i_{m1} = 8/11 & & \\ i_{vt} &= i_{m2} = 13/11 & & \end{aligned} \quad (A, V)$$

3) Ricaviamo le tensioni e le correnti dei rami del circuito di partenza. Le grandezze elettriche v_{R1} , i_{R1} , v_{R2} , i_{R2} , v_{R4} , i_{R4} sono uguali a quelle già calcolate, in quanto relative a rami non interessati dalle trasformazioni. Per quanto riguarda la corrente i_{vg} del generatore di tensione, si ha dalla fig.II.2.21:

$$i_{vg} + I_g = (i_{vg})_T$$

e quindi:

$$i_{vg} = \frac{8}{11} - 2 = -\frac{14}{11} A$$

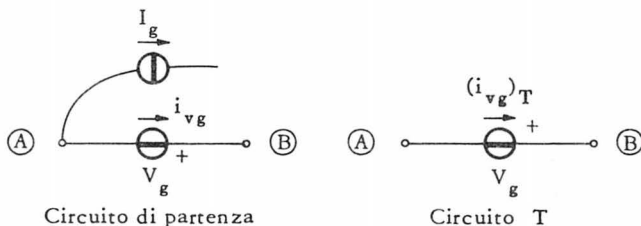


Fig.II.2.21 - Derivazione della corrente del generatore di tensione dell'esempio II.2.7.

Per quanto riguarda la corrente i_{R3} si ha dalla fig.II.2.22:

$$i_{R3} + I_g = (i_{R3})_T$$

e quindi:

$$i_{R3} = \frac{13}{11} - 2 = -\frac{9}{11} \text{ A}$$

$$v_{R3} = R_3 i_{R3} = -\frac{18}{11} \text{ V}$$

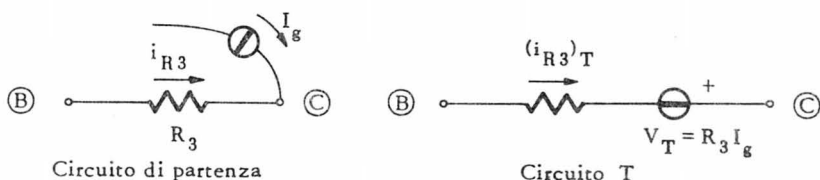


Fig.II.2.22 - Derivazione della corrente del resistore R_3 dell'esempio II.2.7.

Infine la tensione di capi del generatore di corrente I_g risulta pari a:

$$v_g = v_{R4} + v_{R1} = \frac{13}{11} + \frac{16}{11} = \frac{29}{11} \text{ V}$$

II.3 - Analisi su base tagli di circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti.

Come messo in evidenza nel § I.10 le tensioni dei rami di un albero costituiscono un insieme di quantità tra loro indipendenti e tale da permettere l'individuazione delle tensioni dei rami rimanenti tramite le (I.10.6). Tale insieme si presta ad essere scelto direttamente come l'insieme delle incognite, quando è possibile dedurre la corrente dalla tensione per ciascun componente del circuito in esame. Questo è il caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di corrente, di cui ci occuperemo nei § II.3.1 e II.3.2. Nel caso invece che siano presenti anche i generatori indipendenti di tensione, tale scelta non è più sufficiente ed occorre introdurre alcune modifiche, come vedremo nel § II.3.3.

II.3.1 - Caso in cui siano presenti generatori indipendenti solo di corrente.

Il metodo di analisi su base tagli, nel caso dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti solo di corrente, si basa sulla

scelta delle tensioni dei rami di un albero come incognite. Le equazioni del sistema risolvibile si ottengono scrivendo le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali associati all'albero scelto. Tale insieme di equazioni è valido in quanto, come vedremo di seguito:

- a) il numero di equazioni è pari al numero delle incognite;
- b) le equazioni sono indipendenti tra loro;
- c) le uniche incognite presenti sono le variabili ausiliarie scelte, cioè le tensioni dei rami dell'albero.

Il punto a) è conseguenza del fatto che il numero delle equazioni coincide con il numero dei tagli fondamentali e quindi, come messo in evidenza nel § I.10, con il numero dei rami dell'albero. Tale numero è un indice della complessità del sistema risolvibile ed è dato per un circuito costituito da N nodi e P parti separate dalla (I.10.14), cioè:

$$(II.3.1) \quad N_a = N - P$$

Il punto b) consegue dall'osservazione che ciascuna equazione esprime l'equilibrio delle correnti di un taglio fondamentale. Poichè in ogni taglio fondamentale è presente un ramo dell'albero non presente negli altri, ne deriva che ciascuna equazione contiene dei termini sicuramente non presenti nelle altre. Ciò è sufficiente a garantire la loro indipendenza. Infine il punto c) è conseguenza del fatto che ciascuna corrente facente parte di un'equazione di equilibrio coincide o con un termine noto (se il ramo corrispondente è un generatore di corrente) oppure con una combinazione lineare delle variabili ausiliarie con coefficienti noti. Per dimostrare ciò introduciamo le seguenti matrici:

$[G_a]$ matrice diagonale di ordine pari al numero dei rami dell'albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo dell'albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde la relativa conduttanza; ad un generatore di corrente corrisponde il valore zero;

$[G_c]$ matrice diagonale definita come la $[G_a]$, ma per i rami del co-albero;

$[I_{ga}]$ vettore colonna di ordine pari al numero dei rami dell'albero. Ciascun elemento corrisponde ad un ramo dell'albero nel seguente modo: ad un resistore corrisponde il valore zero; ad un generatore di corrente corrisponde il valore della relativa corrente impressa.

$[I_{gc}]$ vettore colonna definito come il vettore $[I_{ga}]$, ma per i rami del co-albero.

Utilizzando le matrici precedenti e le relazioni costitutive, otteniamo le seguenti espressioni per le correnti dei componenti:

$$(II.3.2) \quad \text{rami dell'albero} \quad [I_a] = [G_a][V_a] + [I_{ga}]$$

$$(II.3.3) \quad \text{rami del co-albero} \quad [I_c] = [G_c][V_c] + [I_{gc}]$$

La (II.3.3) diviene, tenendo conto della (I.10.6) e (I.10.7)

$$(II.3.4) \quad [I_c] = [G_c][A]^t[V_a] + [I_{gc}]$$

L'esame delle (II.3.2) e (II.3.4) dimostra il punto c).

Quanto detto è sufficiente per enunciare il seguente procedimento di analisi:

Primo procedimento di analisi su base tagli.

(Valido per circuiti contenenti solo resistori e generatori indipendenti di corrente)

- 1) Scegliere un albero sul grafo orientato del circuito.
- 2) Prendere come *variabili ausiliarie* le tensioni dei rami dell'albero, con le rispettive orientazioni.
- 3) Scrivere le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali associati all'albero scelto.
- 4) Esprimere le correnti dei rami resistivi in funzione delle tensioni dei rami dell'albero, facendo uso delle conduttanze dei rami; assegnare alle correnti dei rami contenenti generatori di corrente il valore imposto dai generatori. È bene sottolineare che le conduttanze dei rami resistivi ed i valori delle correnti dei generatori sono quantità note.
- 5) Sostituire le espressioni ottenute al punto 4) nelle equazioni di equilibrio ottenute nel punto 3). Il sistema risultante deve avere come quantità incognite solo le variabili ausiliarie V_a .
- 6) Risolvere il sistema ottenuto nel punto 5) e determinare le tensioni V_a .
- 7) Determinare le altre grandezze elettriche del circuito⁽¹⁾. In particolare, le altre tensioni del circuito si ottengono mediante le (I.10.6) e (I.10.7) e le correnti mediante le relazioni costitutive dei componenti.

(1) - In molti casi non sono richieste tutte le grandezze elettriche del circuito, ma solo qualche tensione o qualche corrente. In tal caso il punto 7) viene sviluppato solo parzialmente.

Osservazione II.3.1

Se si effettua un confronto tra quanto detto nel presente paragrafo e quanto detto nel § II.2.1, relativo al metodo di analisi su base maglie, si nota una notevole analogia formale. Tale analogia può essere inquadrata nel principio di dualità dei circuiti elettrici. In base a tale principio si ottengono enunciati e proprietà equivalenti, sostituendo nel discorso alle grandezze elettriche e topologiche le duali. Una lista di corrispondenze è la seguente:

Grandezze elettriche e topologiche	Grandezze duali
Tensione	Corrente
Corrente	Tensione
Resistenza	Conduttanza
Conduttanza	Resistenza
Albero	Co-albero
Co-albero	Albero
Maglia	Taglio
Taglio	Maglia
Matrice topologica A	Matrice topologica B
Matrice topologica B	Matrice topologica A
Generatore di tensione	Generatore di corrente
Generatore di corrente	Generatore di tensione

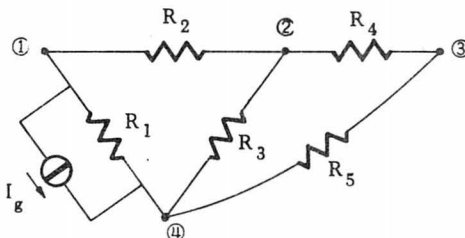
Applicando le corrispondenze previste in questa lista è possibile derivare il metodo di analisi su base tagli da quello su base maglie.

Esempio II.3.1

Applicare il primo procedimento di analisi su base tagli al circuito di figura II.3.1.

Fig.II.3.1 - Circuito considerato nell'esempio II.3.1. I valori dei componenti sono:

$$I_g = 2, \quad R_1 = 0,5, \quad R_2 = R_4 = 1, \quad R_3 = 1/3 \quad (A, \Omega)$$



Passi 1 e 2 : Scegliamo l'albero nel modo mostrato in fig.II.3.2. Le variabili ausiliarie sono v_2, v_4, v_5 , orientate secondo i versi indicati in fig.II.3.2a.

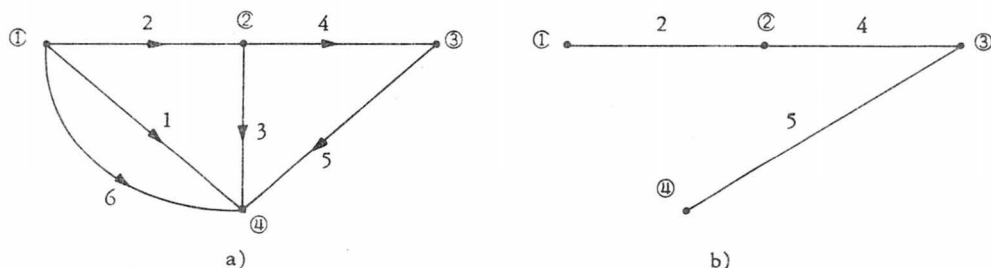


Fig. II.3.2 - a) Grafo orientato del circuito di fig. II.3.1; b) Albero scelto.

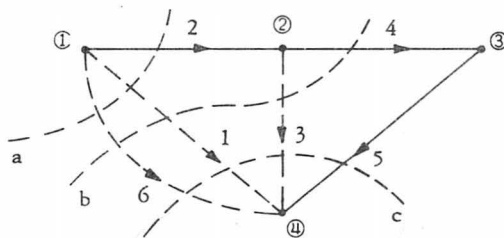
Passo 3 : Scriviamo le equazioni di equilibrio delle correnti per i tre tagli fondamentali, con la convenzione di supporre positivo il verso di attraversamento delle superfici di taglio stabilito dal relativo ramo dell'albero (fig. II.3.3):

taglio a $i_2 + i_1 + i_6 = 0$

taglio b $i_4 + i_3 + i_1 + i_6 = 0$

taglio c $i_5 + i_3 + i_1 + i_6 = 0$

Fig. II.3.3 - Tagli fondamentali considerati nell'esempio II.3.1.



Passo 4 : Esprimiamo le correnti dei rami del circuito in funzione delle tensioni dei rami dell'albero v_2, v_4, v_5 e delle grandezze note (conduttanze e correnti impresse):

$$i_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5)$$

$$i_4 = G_4 v_4$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i_5 = G_5 v_5$$

$$i_3 = G_3(v_4 + v_5)$$

$$i_6 = I_g$$

Passo 5 : Sostituendo le espressioni ricavate nel passo 4 nelle equazioni di equilibrio, si ottiene il seguente sistema di equazioni risolvibili:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ -I_g \\ -I_g \end{bmatrix}$$

Considerando i valori numerici dei componenti, si ha:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Passo 6 : Risolvendo il sistema si ottengono i valori delle variabili ausiliarie:

$$v_2 = -\frac{14}{25} \quad v_4 = -\frac{2}{25} \quad v_5 = -\frac{2}{25} \quad (V)$$

Passo 7 : Le tensioni dei rami del co-albero v_1 e v_3 si ottengono tramite le relazioni:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_4 + v_5 = -18/25 \\ v_3 = v_4 + v_5 = -4/25 \end{cases} \quad (V)$$

Le correnti dei rami resistivi si ottengono moltiplicando le tensioni per le relative conduttanze:

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 = -36/25 \\ i_2 = G_2 v_2 = -14/25 \\ i_3 = G_3 v_3 = -12/25 \end{cases} \quad \begin{cases} i_4 = G_4 v_4 = -2/25 \\ i_5 = G_5 v_5 = -2/25 \end{cases} \quad (A)$$

II.3.2 - Espressioni esplicite delle equazioni risolventi nel metodo di analisi su base tagli, nel caso di circuiti contenenti resistori e generatori di corrente.

Il procedimento di analisi su base tagli può essere semplificato, se si riesce ad esprimere direttamente il sistema risolvante nella sua forma definitiva. Tale forma è quella ottenuta nel passo 5 del primo procedimento di analisi dopo, aver determinato le equazioni di equilibrio delle correnti nei tagli fondamentali (passo 3) ed aver espresso tali correnti in funzione delle variabili ausiliarie (passo 4). Si veda per maggiori dettagli l'esempio II.3.1.

L'espressione esplicita del sistema risolvante in cui compaiono le sole variabili ausiliarie può essere facilmente ottenuto. È sufficiente a tale scopo sostituire nelle equazioni di equilibrio (I.10.5) le espressioni delle correnti (II.3.2) e (II.3.4); si ha:

$$(II.3.5) \quad [G_a] [V_a] + [I_{ga}] + [A] [G_c] [A]^t [V_a] + [A] [I_{gc}] = 0$$

Dalla (II.3.5), mettendo in evidenza $[V_a]$ e portando a secondo membro i termini noti, si ha:

$$(II.3.6) \quad \{ [G_a] + [A][G_c][A]^t \} [V_a] = -[I_{ga}] - [A][I_{gc}]$$

Detta $[G_T]$ la matrice dei coefficienti ed $[I_T]$ il vettore dei termini noti del sistema di equazioni (II.3.6), si ottiene il sistema risolvibile su base tagli nel modo seguente:

$$(II.3.7) \quad [G_T][V_a] = [I_T]$$

Dall'esame della matrice $[G_T]$, quale risulta dalla (II.3.6), si può ricavare una prima importante proprietà:

Proprietà II.3.1 - «La matrice dei coefficienti del sistema di equazioni su base tagli per i circuiti costituiti da resistori e generatori di corrente è simmetrica».

La proprietà può essere verificata direttamente andando a calcolare la trasposta della matrice $[G_T]$, cioè:

$$(II.3.8) \quad [G_T]^t = [G_a]^t + \{ [A][G_c][A]^t \}^t = \\ = [G_a] + [A][G_c][A]^t = [G_T]$$

La semplificazione maggiore del procedimento di analisi consegue tuttavia dall'interpretazione fisica degli elementi della matrice $[G_T]$ e del termine noto $[I_T]$. Tale interpretazione, infatti, permette di legare i valori di detti elementi alla struttura del circuito da analizzare. Da ciò consegue la possibilità di determinare direttamente il sistema (II.3.7) per semplice ispezione visiva, evitando di effettuare i passi 3, 4, 5 del primo procedimento di analisi già descritto.

Tali legami sono i seguenti:

a) il termine (k, k) della matrice $[G_T]$ è uguale alla somma delle conduttanze dei rami resistivi che attraversano la linea tagliante del taglio k-simo;

b) il termine (i, k) della matrice $[G_T]$ è uguale alla somma algebrica delle conduttanze dei rami resistivi che attraversano contemporaneamente le linee taglianti dei tagli i-simo e k-simo. Il segno da mettere dinanzi a ciascuna conduttanza è positivo, se il ramo relativo è nelle stesse condizioni rispetto alle due linee taglianti (concorde o discorde in ambedue i casi). Il segno è negativo nel caso contrario. Inoltre il termine

(i, k) è nullo se nessun ramo resistivo è attraversato contemporaneamente dalle linee taglienti i-sima e k-sima;

c) il termine k-simo del vettore dei termini noti coincide con la somma delle correnti impresse dai generatori, che fluiscono attraverso la linea tagliente del taglio k-simo, in senso opposto a quello considerato positivo.

Le proprietà precedenti si possono facilmente dedurre, andando ad interpretare ciascun termine nelle singole equazioni del sistema (II.3.7). Consideriamo pertanto la k-sima equazione, relativa al taglio fondamentale k-simo. In fig.II.3.4 sono indicati i rami interessati a tale taglio; in particolare il resistore di resistenza R_k è supposto coincidente con il ramo dell'albero di cui si sta considerando il taglio. |

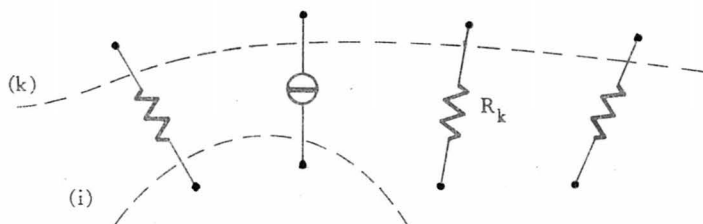


Fig.II.3.4 - Interpretazione fisica dei termini delle equazioni risolventi nel metodo di analisi su base tagli.

La k-sima equazione esprime l'equilibrio delle correnti che attraversano la linea tagliente k-sima, cioè che la somma delle correnti dei rami resistivi che attraversano la linea tagliente in senso concorde con quello del resistore R_k è uguale alla somma delle correnti impresse dai generatori in senso opposto. Ciò rende conto del punto c). Il termine proporzionale alla tensione v_k (tensione del ramo k-simo dell'albero) coincide con la corrente che attraversa la linea tagliente k-sima quando agisce solo v_k , cioè quando le tensioni di tutti gli altri rami dell'albero sono nulle e non agiscono i generatori di corrente. In tale caso la tensione v_k è applicata a tutti i rami del taglio e nello stesso senso. Ciò rende conto del punto a).

Per quanto riguarda il punto b), vediamo che il termine proporzionale alla tensione v_i , sempre nell'equazione k-sima, coincide con la corrente che attraversa la linea tagliente k-sima, quando agisce solo la tensione v_i e cioè quando sono soggetti a tale tensione i rami resistivi tagliati contemporaneamente dalle linee taglienti k-sima ed i-sima.

Il verso di tale corrente è concorde con quello della linea tagliante k-sima, ovvero discorde, a seconda che i versi associati con le linee taglienti k-sima ed i-sima siano congruenti o meno nell'attraversare il ramo considerato.

Quanto detto permette di enunciare il seguente procedimento semplificato di analisi su base tagli.

Secondo procedimento di analisi su base tagli.

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori di corrente)

- 1) Scegliere un albero sul grafo orientato del circuito;
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni dei rami dell'albero con le relative orientazioni;
- 3) Scrivere il sistema risolvante determinando la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti nel modo precisato nei punti a), b), e c), sviluppati precedentemente nel presente paragrafo;
- 4) Risolvere il sistema ottenuto nel punto 3) e determinare le tensioni dei rami dell'albero;
- 5) Determinare le altre correnti e tensioni del circuito.

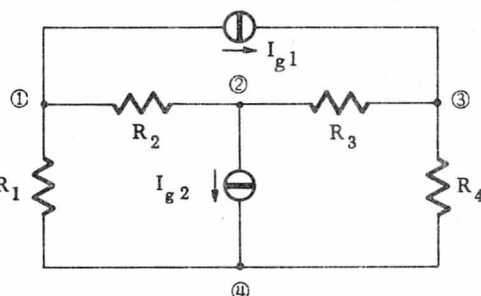
Esempio 11.3.2

Applicare il procedimento semplificato di analisi su base tagli al circuito mostrato in fig. 11.3.5.

Fig. 11.3.5 - Circuito considerato nell'esempio 11.3.2. I valori dei componenti sono:

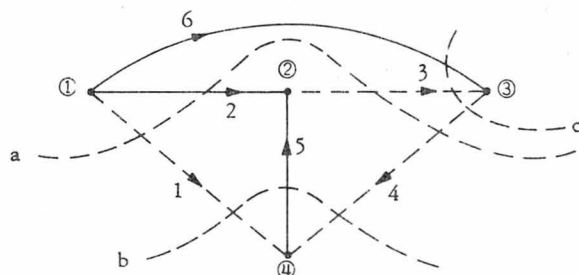
$$I_{g1} = 2, \quad I_{g2} = 1, \quad R_1 = R_4 = 1$$

$$R_2 = 0,5, \quad R_3 = 1/3 \quad (\text{A}, \Omega)$$



Passi 1 e 2 : Scegliamo un albero del circuito come indicato in fig. 11.3.6. In tale figura sono chiaramente messe in evidenza le linee taglienti dei tre tagli fondamentali ed i versi da considerare positivi per i rami. Le variabili ausiliarie sono le tensioni v_2 , v_5 e v_6 .

Fig.II.3.6 - Albero (a tratto pieno), co-albero e linee taglianti del circuito di figura II.3.5.



Passo 3 : Scriviamo il sistema risolvante nel modo precisato nei punti a, b, c del presente paragrafo, cioè:

$$\text{taglio a} \quad (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) v_2 - (G_1 + G_4) v_5 - (G_3 + G_4) v_6 = 0$$

$$\text{taglio b} \quad -(G_1 + G_4) v_2 + (G_1 + G_4) v_5 + G_4 v_6 = I_{g2}$$

$$\text{taglio c} \quad -(G_3 + G_4) v_2 + G_4 v_5 + (G_3 + G_4) v_6 = -I_{g1}$$

Sostituiamo i valori numerici alle grandezze note; si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -2 & +2 & +1 \\ -4 & +1 & +4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema si ottiene:

$$v_2 = -8/17 \quad v_5 = 10/17 \quad v_6 = -19/17 \quad (V)$$

Passo 5 : Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$v_1 = v_2 - v_5 = -18/17 \quad i_1 = G_1 v_1 = -18/17 \quad i_2 = G_2 v_2 = -16/17$$

$$v_3 = -v_2 + v_6 = -11/17 \quad i_3 = G_3 v_3 = -33/17$$

$$v_4 = v_2 - v_5 - v_6 = 1/17 \quad i_4 = G_4 v_4 = 1/17 \quad (V, A)$$

II.3.3 - Analisi su base tagli in presenza di generatori indipendenti di tensione.

La presenza dei generatori indipendenti di tensione in un circuito rende impossibile l'applicazione diretta del metodo di analisi su base tagli così come è stato descritto in precedenza. In tale caso valgono considerazioni analoghe a quelle fatte all'inizio del § II.2.3 per il caso dell'analisi su base maglie in presenza dei generatori di corrente.

Sono pertanto possibili due casi:

- metodo misto di analisi su base tagli, quando il metodo di analisi è sviluppato sul circuito assegnato senza trasformazioni preventive;
- metodo diretto di analisi su base tagli, quando vengono effettuate delle trasformazioni circuitali che hanno lo scopo di eliminare tutti i generatori di tensione presenti nel circuito.

A - Metodo misto di analisi su base tagli.

Si ha il metodo misto di analisi su base tagli quando si effettua l'analisi del circuito con il metodo dei tagli senza effettuare trasformazioni circuitali. Il procedimento considerato nel paragrafo precedente può essere seguito purché s'introducano le seguenti modifiche:

- si tiene conto della corrente (incognita) di ciascun generatore di tensione, considerandola alla stessa stregua della corrente di un generatore di corrente nel relativo contributo al vettore dei termini noti;
- si aggiunge una nuova equazione per ogni generatore di tensione, in modo da esprimere il legame da esso imposto alle variabili ausiliarie.

Prima di procedere ulteriormente, applichiamo quanto detto al seguente circuito.

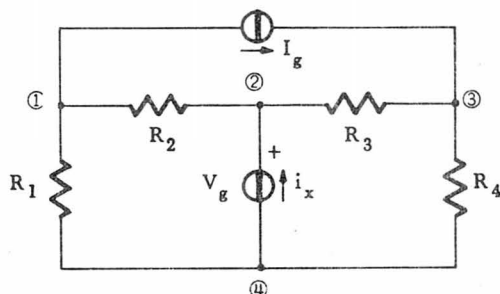
Esempio II.3.3

Analizzare con il procedimento abbozzato in precedenza il circuito di figura II.3.7.

Fig.II.3.7 - Circuito considerato nell'esempio II.3.3. I valori dei componenti sono:

$$I_g = 2, \quad V_g = 2, \quad R_1 = R_4 = 1$$

$$R_2 = 0,5, \quad R_3 = 0,5 \quad (\text{A}, \text{V}, \Omega)$$



Scegliamo un albero del circuito come indicato in fig.II.3.8 e fissiamo arbitrariamente i versi dei rami del grafo. Con linee tratteggiate sono stati indicati i rami del co-albero, mentre a tratto e punto le linee taglianti. Le variabili ausiliarie sono le tensioni v_1 , v_2 e v_3 . Introduciamo come ulteriore incognita la corrente i_x del generatore di tensione, orientata come messo in evidenza in fig.II.3.7.

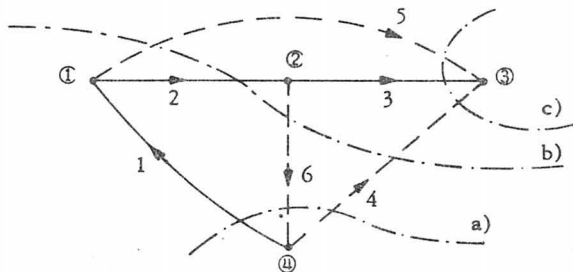


Fig.11.3.8 - Albero (a tratto pieno), co-albero e linee taglianti del circuito di fig.11.3.7.

Scriviamo le equazioni risolventi come precisato nel punto 3) del secondo procedimento di analisi su base tagli e tenendo conto della corrente i_x come se fosse la corrente impressa di un generatore di corrente. Si ha:

$$\text{taglio a} \quad (G_1 + G_4) v_1 + G_4 v_2 + G_4 v_3 = -i_x$$

$$\text{taglio b} \quad G_4 v_1 + (G_2 + G_4) v_2 + G_4 v_3 = -I_g - i_x$$

$$\text{taglio c} \quad G_4 v_1 + G_4 v_2 + (G_4 + G_3) v_3 = -I_g$$

L'equazione del vincolo imposto dal generatore di tensione è:

$$v_1 + v_2 = -V_g$$

Il sistema risolvente, costituito dalle equazioni di equilibrio e dall'equazione del vincolo, è, dopo aver sostituito i valori numerici dei componenti:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Risolviendo il sistema si ha:

$$\begin{aligned} v_1 &= -2/3 & v_3 &= 0 \\ v_2 &= -4/3 & i_x &= 8/3 \end{aligned} \quad (V, A)$$

Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$\begin{aligned} v_4 &= v_1 + v_2 + v_3 = -2 & i_1 &= G_1 v_1 = -2/3 & i_3 &= G_3 v_3 = 0 \\ v_5 &= v_2 + v_3 = -4/3 & i_2 &= G_2 v_2 = -8/3 & i_4 &= G_4 v_4 = -2 \end{aligned} \quad (V, A)$$

Il sistema risolvante nell'esempio precedente è più complesso di quello che si avrebbe nel caso che i generatori fossero tutti di corrente, per la presenza di una nuova incognita (i_x) e di una nuova equazione (l'equazione del vincolo). Si può però osservare che con un'opportuna scelta dell'albero, cioè scegliendo il generatore di tensione su un ramo dell'albero (invece che su un ramo del co-albero, come fatto nell'esempio), l'equazione del vincolo diviene un'identità, nella quale una variabile ausiliaria viene identificata con la tensione impressa del generatore. Con tale scelta si ha inoltre un secondo vantaggio: la corrente incognita i_x compare in una sola delle equazioni risolvanti (invece che in due, come nell'esempio visto). In conclusione il sistema si riduce da quattro equazioni in quattro incognite, ad un sistema di due equazioni in due incognite.

Quanto detto giustifica il seguente procedimento di analisi.

Terzo procedimento di analisi su base tagli (metodo misto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

- 1) Scegliere, se possibile, un albero del circuito tale che i generatori di tensione siano contenuti tutti sull'albero.
- 2) Prendere come *variabili ausiliarie* le tensioni dei rami dell'albero; per i rami dell'albero coincidenti con generatori di tensione tali variabili sono note.
- 3) Introdurre come ulteriori grandezze incognite le correnti che scorrono nei generatori di tensione.
- 4) Scrivere il sistema risolvante secondo le modalità indicate nel punto 3) del secondo procedimento di analisi su base tagli, con l'avvertenza che il punto c) deve essere modificato nel modo seguente:
 - c) il termine k-simo del vettore dei termini noti coincide con la somma delle correnti dei generatori sia di tensione sia di corrente, che fluiscono attraverso la linea tagliante del taglio k-simo in senso opposto a quello considerato positivo.
- 5) Scrivere le equazioni di vincolo per quei generatori di tensione che eventualmente si trovassero sui rami del co-albero (tale eventualità deve essere evitata in base al punto 1).
- 6) Risolvere il sistema ottenuto considerando tutte le equazioni ottenute nei punti 4) e 5), le cui incognite sono:

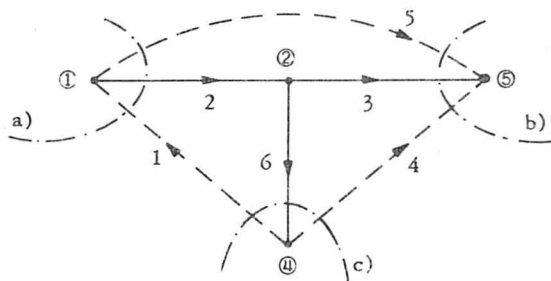
- a) le tensioni dei rami dell'albero non contenenti dei generatori di tensione;
 - b) le correnti dei generatori di tensione.
- 7) Determinare le altre grandezze del circuito.

Esempio 11.3.4

Analizzare lo stesso circuito considerato nell'esempio 11.3.3 con il terzo procedimento di analisi su base tagli. (Si noti la semplificazione del sistema risolvante che deriva da una scelta opportuna dell'albero).

Passo 1 : Scegliamo un albero che contenga in un suo ramo il generatore di tensione, come in fig.11.3.9.

Fig.11.3.9 - Albero (a tratto pieno), co-albero e linee di taglio relative all'esempio 11.3.4.



Passo 2 : Le variabili ausiliarie sono v_2, v_3, V_g , di cui solo le prime due sono incognite.

Passo 3 : Introduciamo come ulteriore incognita la corrente i_x del generatore di tensione, orientata come in fig.11.3.7.

Passo 4 : Scriviamo le equazioni di equilibrio delle correnti:

$$\text{taglio } a \quad (G_1 + G_2) v_2 + G_1 V_g = -I_g$$

$$\text{taglio } b \quad (G_3 + G_4) v_3 - G_4 V_g = -I_g$$

$$\text{taglio } c \quad G_1 v_2 - G_4 v_3 + (G_1 + G_4) V_g = i_x$$

Passo 5 : Non è necessario scrivere alcuna equazione di vincolo, poichè non vi sono generatori di tensione sui rami del co-albero;

Passo 6 : Il sistema risolvante è quello individuato nel passo 4). Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$3 v_2 + 2 = -2$$

$$3 v_3 - 2 = -2$$

$$v_2 - v_3 + 4 = i_x$$

Si può notare che il sistema risolvibile ottenuto è suddivisibile in:

- a) un sistema di due equazioni nelle due variabili ausiliarie incognite;
- b) un'equazione per il calcolo della corrente del generatore di tensione.

Risolviendo il sistema, si ha:

$$v_2 = -4/3 \quad v_3 = 0 \quad i_x = 8/3 \quad (V, A)$$

Tali valori coincidono ovviamente con quelli ottenuti nell'esempio II.3.3.

Osservazione II.3.2

Al punto 1) del metodo misto di analisi su base tagli è stata posta una riserva sulla possibilità di scegliere un albero contenente tutti i generatori di tensione presenti. Può infatti accadere che in qualche caso non sia possibile scegliere un albero siffatto e che qualche generatore di tensione debba di conseguenza coincidere con un ramo del co-albero; in tal caso non sarà possibile evitare di scrivere le equazioni aggiuntive di vincolo indicate al punto 5), con conseguente complicazione del sistema risolvibile. I casi in cui non è possibile evitare tale situazione sono messi in evidenza dalla seguente proprietà, dimostrabile con considerazioni analoghe a quelle fatte in occasione dell'osservazione II.2.2:

Proprietà II.3.2 - «Non esiste un albero del circuito tale da contenere tutti i generatori di tensione presenti se e solo se è presente una maglia costituita di soli generatori di tensione».

I circuiti che non soddisfano il punto 1) del metodo misto sono anomali, in quanto le tensioni impresse dai generatori di tensione facenti parte della maglia di soli generatori di tensione debbono soddisfare la seconda legge di Kirchhoff. Perciò si possono avere le due seguenti possibilità:

- a) le tensioni impresse non soddisfano la seconda legge di Kirchhoff. *In tal caso il circuito considerato non è valido* e va riesaminato il procedimento di modellamento da cui esso è derivato dalla struttura fisica che vuol rappresentare;
- b) le tensioni impresse soddisfano la seconda legge di Kirchhoff. *In tal caso il problema di analisi ha soluzione indeterminata*, in quanto è possibile sostituire uno qualunque dei generatori di tensione considerati con un generatore di corrente di valore arbitrario, senza alterare il resto del circuito (la tensione del generatore suddetto di corrente, per la seconda legge di Kirchhoff, è proprio uguale alla tensione del generatore di tensione sostituito).

Si può quindi concludere che, salvo i casi anomali indicati, la riserva effettuata al punto 1) del metodo misto di analisi su base maglie, si può sciogliere in senso affermativo e quindi il punto 5) del suddetto procedimento può essere evitato.

Illustriamo quanto detto con un esempio.

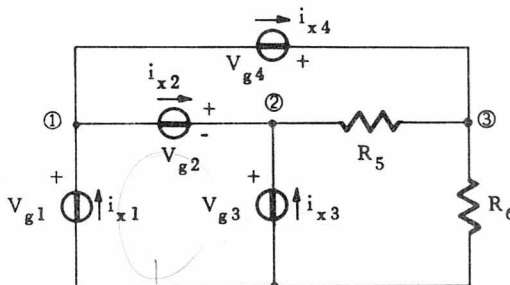
Esempio 11.3.5

Analizzare con il metodo di analisi su base tagli il circuito di fig.11.3.10.

Fig.11.3.10 - Circuito considerato nell'esempio 11.3.5. I valori dei componenti sono:

$$V_{g1}=2, V_{g2}=3, V_{g3}=5, V_{g4}=5,$$

$$R_5 = \frac{1}{2}, R_6 = \frac{1}{3} \quad (\text{V}, \Omega)$$



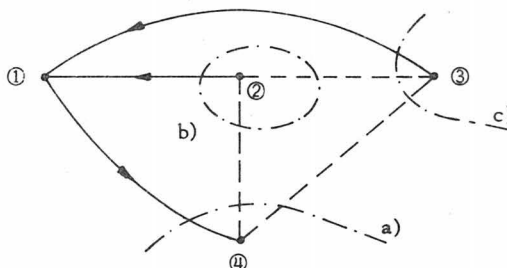
Si può notare che i generatori di tensione V_{g1} , V_{g2} e V_{g3} formano una maglia; perciò per la seconda legge di Kirchhoff deve essere:

$$V_{g1} + V_{g2} - V_{g3} = 0$$

Tale relazione è soddisfatta dai valori delle tensioni impresse dai tre generatori.

1) Non è possibile trovare un albero contenente tutti i generatori di tensione. Scegliamo allora l'albero indicato a tratto pieno in fig.11.3.11.

Fig.11.3.11 - Albero (a tratto pieno), co-albero e linee di taglio dell'esempio 11.3.5.



Il generatore di tensione V_{g3} si trova su un ramo del co-albero.

2) Le variabili ausiliarie sono tutte note e pari a:

$$V_{g1}, V_{g2}, V_{g4}$$

3) Sono incognite le correnti dei generatori di tensione e sono pari a $i_{x1}, i_{x2}, i_{x3}, i_{x4}$.

4) Le equazioni di equilibrio delle correnti nei tagli sono:

$$\text{taglio } a \quad G_6 V_{g1} + G_6 V_{g4} = i_{x1} + i_{x3}$$

$$\text{taglio } b \quad G_5 V_{g2} - G_5 V_{g4} = i_{x2} + i_{x3}$$

$$\text{taglio } c \quad G_6 V_{g1} - G_5 V_{g2} + (G_5 + G_6) V_{g4} = i_{x4}$$

5) L'equazione aggiuntiva relativa al vincolo del generatore di tensione V_{g3} risulta:

$$V_{g1} + V_{g2} = V_{g3}$$

6) Il sistema risolvibile è costituito dalle equazioni ottenute nei passi 4) e 5), cioè:

$$G_6 V_{g1} + G_6 V_{g4} = i_{x1} + i_{x3}$$

$$G_5 V_{g2} - G_5 V_{g4} = i_{x2} + i_{x3}$$

$$G_6 V_{g1} - G_5 V_{g2} + (G_5 + G_6) V_{g4} = i_{x4}$$

$$V_{g1} + V_{g2} = V_{g3}$$

Le incognite sono quattro e pari a $i_{x1}, i_{x2}, i_{x3}, i_{x4}$; sostituiamo i valori numerici. Si ha:

$$6 + 15 = i_{x1} + i_{x3}$$

$$6 - 10 = i_{x2} + i_{x3}$$

$$6 - 6 + 25 = i_{x4}$$

$$2 + 3 = 5$$

Si vede che la quarta equazione risulta essere una identità. Pertanto, dato il carattere anomalo del circuito considerato, il sistema risolvibile è indeterminato. Si può allora assegnare un valore arbitrario ad una delle tre correnti incognite i_{x1}, i_{x2}, i_{x3} . Ciò equivale a sostituire un generatore di corrente al posto di uno dei tre generatori di tensione, facenti parte della maglia di soli generatori di tensione. Ponendo ad esempio:

$$i_{x3} = 300 \text{ A}$$

si ha:

$$21 = i_{x1} + 300$$

$$25 = i_{x4}$$

$$-4 = i_{x2} + 300$$

Di conseguenza si ottiene:

$$i_{x1} = -279$$

$$i_{x4} = 25$$

$$i_{x2} = -304$$

$$(i_{x3} = 300)$$

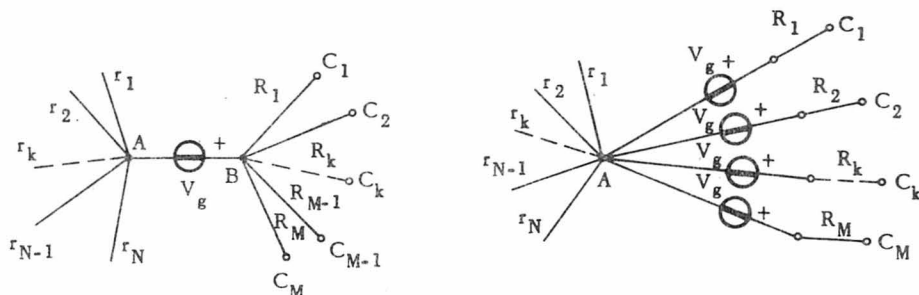
(A)

Le altre grandezze elettriche del circuito si possono facilmente determinare.

B - Metodo diretto di analisi su base tagli.

Un modo molto semplice per ovviare all'inconveniente dovuto alla presenza dei generatori di tensione è quello di sostituire quest'ultimi con generatori di corrente tramite opportune trasformazioni. Si riduce in questo modo il circuito da analizzare ad uno avente solo resistori e generatori di corrente. Unico svantaggio è che tale circuito è diverso da quello assegnato, in corrispondenza ad alcuni suoi rami e perciò occorre sempre tenere presente tale fatto nella determinazione finale delle tensioni e correnti del circuito iniziale.

La trasformazione di un circuito contenente generatori dei due tipi in uno contenente generatori solo di corrente può essere effettuata in due passi successivi. Dapprima si sostituisce al generico generatore di tensione tanti generatori di tensione quanti sono i rami che confluiscono in uno dei due nodi posti ai suoi estremi, come indicato in dettaglio in fig. II.3.12.



a) Circuito di partenza, in cui è isolato il generatore di tensione, che si vuole eliminare.

b) Eliminazione del nodo B e riduzione del generatore di partenza ad M generatori di tensione, ciascuno in serie ad un solo ramo.

Fig. II.3.12

In questa fase si elimina uno dei nodi del circuito di partenza per ogni generatore di tensione e nel circuito risultante i generatori di tensione sono tutti collegati in serie ad un solo ramo.

Successivamente si utilizzano le equivalenze di fig. II.3.13 per eliminare definitivamente i generatori di tensione introdotti, come indicato in fig. II.3.14.

È opportuno sottolineare che la trasformazione di fig. II.3.14 porta ad un circuito equivalente dal punto di vista elettrico a quello di partenza con l'esclusione della parte compresa tra i nodi $A, C_1, C_2, \dots, C_M$, cioè della parte racchiusa entro le zone tratteggiate. È anche chiaro che la trasformazione elimina un generatore di tensione alla volta e perciò è necessario applicarla ripetutamente, se è il caso, per eliminare tutti i generatori di tensione presenti.

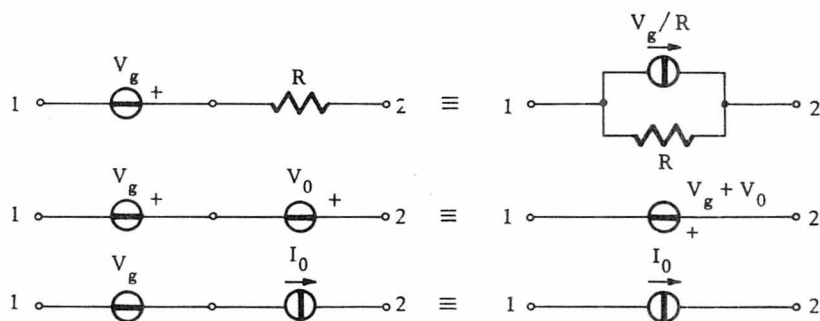


Fig. II.3.13 - Equivalenze che si utilizzano per eliminare un generatore di tensione V_g da un circuito. Le equivalenze sono valide solo dal punto di vista elettrico esterno ai nodi 1 e 2.

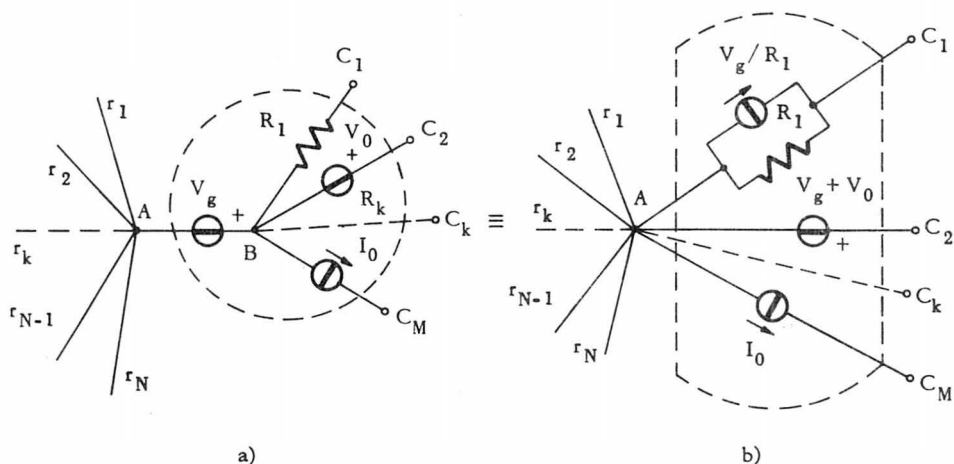


Fig. II.3.14 - Trasformazione finale per l'eliminazione del generatore di tensione V_g .

In conclusione con la trasformazione precedente possiamo sempre ricondurre un circuito assegnato, contenente generatori di tensione e corrente, ad uno contenente solo generatori di corrente, equivalente a quello di partenza, fatta eccezione per alcune parti. Il problema dell'analisi, perciò, risolto su quest'ultimo va completato, individuando successivamente le tensioni e correnti dei rami del circuito di partenza, eliminati dalla trasformazione. Riassumiamo di seguito il procedimento di analisi risultante.

Quarto procedimento di analisi su base tagli (metodo diretto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

1) Applicare ripetutamente al circuito le trasformazioni indicate nelle figure II.3.12, II.3.13, II.3.14, fino ad ottenere un circuito privo dei generatori di tensione. Sia T tale circuito.

2) Effettuare l'analisi del circuito T , applicando il secondo procedimento di analisi su base tagli.

3) Determinare le tensioni e le correnti dei rami contenuti nelle parti del circuito di partenza distrutte dalle trasformazioni, utilizzando i risultati ricavati in 2) e le trasformazioni in senso inverso.

Esempio II.3.6

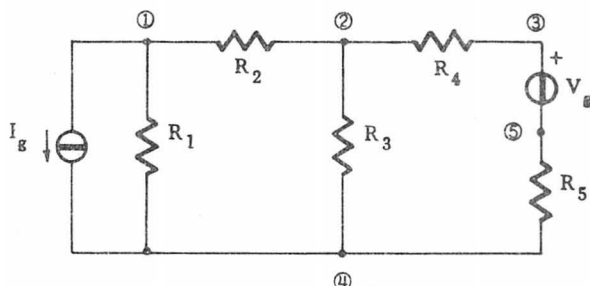
Applicare il quarto procedimento di analisi su base tagli al circuito di figura II.3.15.

Fig. II.3.15 - Circuito considerato nell'es. II.3.6. I componenti valgono:

$$R_1 = 0,5, \quad R_2 = R_4 = R_5 = 1$$

$$R_3 = \frac{1}{3}, \quad V_g = 1,$$

$$I_g = 2 \quad (\Omega, V, A)$$



1) Eliminiamo il generatore di tensione, applicando le trasformazioni indicate in figura II.3.13. Tali trasformazioni si possono applicare direttamente, poichè nel caso presente il generatore di tensione è già in serie al ramo R_5 . Si ottiene il circuito di figura II.3.16.

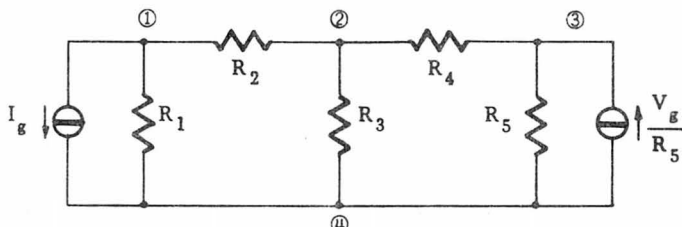


Fig. II.3.16 - Circuito ottenuto dopo la trasformazione (circuito T).

2) Scegliendo l'albero di fig.II.3.17, si ottiene il seguente sistema risolvante di equazioni:

$$\text{taglio } a \quad (G_1 + G_2) v_2 + G_1 v_3 = -I_g$$

$$\text{taglio } b \quad G_1 v_2 + (G_1 + G_3 + G_5) v_3 - G_5 v_4 = V_g/R_5 - I_g$$

$$\text{taglio } c \quad -G_5 v_3 + (G_4 + G_5) v_4 = -V_g/R_5$$

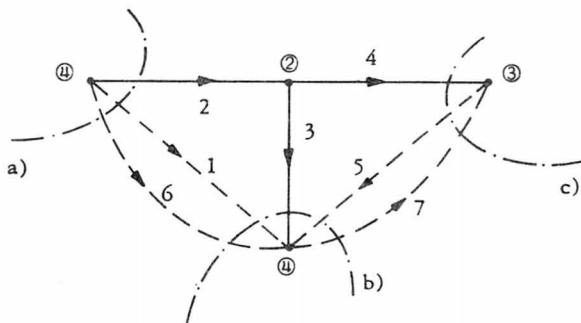


Fig.II.3.17 - Albero (a tratto pieno), co-albero e linee di taglio dello esempio II.3.6.

Sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$3 v_2 + 2 v_3 = -2$$

$$2 v_2 + 6 v_3 - v_4 = -1$$

$$-v_3 + 2 v_4 = -1$$

Risolvendo il sistema, si ha:

$$v_2 = -\frac{16}{25} \quad v_3 = -\frac{1}{25} \quad v_4 = -\frac{13}{25} \quad (V)$$

Le altre tensioni valgono:

$$v_1 = v_2 + v_3 = -\frac{17}{25} \quad v_5 = v_3 - v_4 = \frac{12}{25} \quad (V)$$

3) Le tensioni e le correnti dei rami del circuito di partenza coincidono con quelle del circuito trasformato per tutti i rami, eccetto che per il resistore R_5 ed il generatore trasformato. Per questi due componenti si ha nel circuito di partenza:

$$v_{R5} = (v_5)_{trasf.} - V_g = -13/25 \quad (V, A)$$

$$i_{R5} = G_5 v_{R5} = -13/25$$

11.4 - Caso limite del metodo dei tagli: metodo dei nodi.

11.4.1 - Il circuito aumentato.

Quando si analizza un circuito su base tagli la scelta dell'albero è arbitraria, se si eccettuano le considerazioni fatte nel caso della presenza dei generatori di tensione. Scelto comunque l'albero, si può ottenere il sistema risolvante di equazioni mediante uno dei procedimenti di analisi su base tagli visti in precedenza. In ogni caso il sistema risolvante è strettamente legato ad un albero del circuito. È possibile, tuttavia, evitare tale dipendenza, utilizzando la nozione di circuito aumentato. Introduciamo tale nozione in un esempio, considerando alla scopo il circuito di fig. 11.4.1. In tale circuito si può notare che le coppie di nodi 1-3, 1-4, 2-4 e 3-5 non sono connesse direttamente fra loro con dei bipoli, a differenza di quanto accade per le altre coppie di nodi. Si può allora considerare un nuovo circuito in cui anche tali coppie di nodi sono collegate, utilizzando dei rami resistivi a conduttanza nulla. Tale nuovo circuito, mostrato in fig. 11.4.2 viene detto *circuito aumentato* ed è equivalente al precedente dal punto di vista elettrico, poichè i rami a conduttanza nulla non contribuiscono agli equilibri di corrente.

Fig. 11.4.1 - Circuito considerato per l'introduzione della nozione di «circuito aumentato».

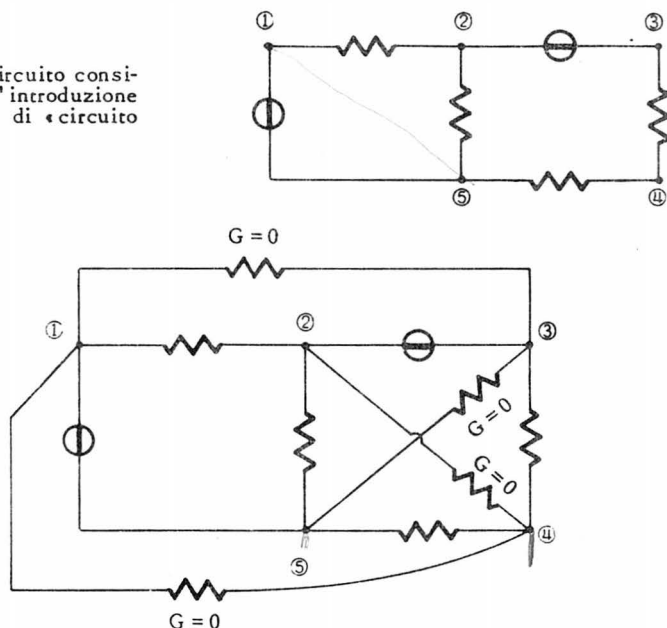


Fig. 11.4.2 - Circuito aumentato di quello mostrato in fig. 11.4.1.

Il grafo del circuito aumentato, a differenza di quello del circuito originale, gode della proprietà che tutte le coppie di nodi sono fra loro connesse; un tale grafo si dice *a maglie complete*. Quanto detto nel caso del circuito di fig.II.4.1 può essere facilmente esteso al caso di un circuito qualsiasi. Vale quindi la seguente definizione:

Definizione II.4.1 - «Si definisce come circuito aumentato di uno assegnato, il circuito ottenuto da quello assegnato aggiungendo a questo tanti rami resistivi a conduttanza nulla quanti sono necessari per connettere direttamente tutti i suoi nodi».

È importante osservare che:

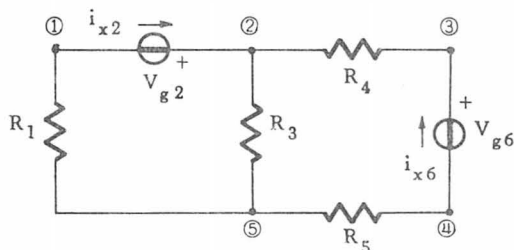
- a) nell'analisi del circuito aumentato si può ignorare il contributo dei rami fittizi aggiunti;
- b) la soluzione del problema dell'analisi per il circuito aumentato coincide con quella del circuito di partenza;
- c) il sistema risolvibile ottenuto analizzando su base tagli il circuito aumentato può non coincidere con alcun sistema risolvibile su base tagli per il circuito di partenza. Ciò accade quando l'albero scelto per il circuito aumentato non è un albero del circuito di partenza.

Esempio II.4.1

Applicare quanto detto all'analisi del circuito di fig.II.4.3.

Fig.II.4.3 - Circuito considerato nell'esempio II.4.1. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,5, \quad R_2 = R_3 = R_5 = 1, \\ R_4 &= 1/3, \quad V_{g2} = 2, \\ V_{g6} &= 1 \quad (\Omega, V) \end{aligned}$$



Consideriamo il grafo del circuito aumentato, nel quale i rami fittizi sono indicati tratteggiati (fig.II.4.4). Scegliamo per tale circuito l'albero di fig.II.4.5, formato dai rami 2, 3, 10 e 5.

Si può notare che l'albero scelto non è un albero del grafo del circuito di partenza, poichè in tale circuito non è presente il ramo 10. Per la stessa ragione l'insieme delle linee di taglio e quindi il corrispondente sistema di equazioni non avrebbe potuto essere scritto con riferimento al circuito originale.

Fig.II.4.4 - Circuito aumentato di quello mostrato in fig.II.4.3.

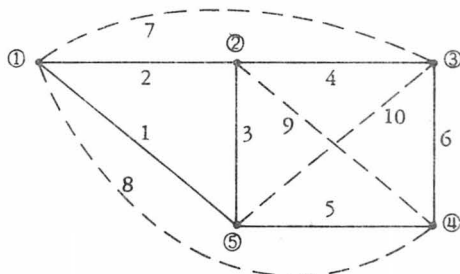
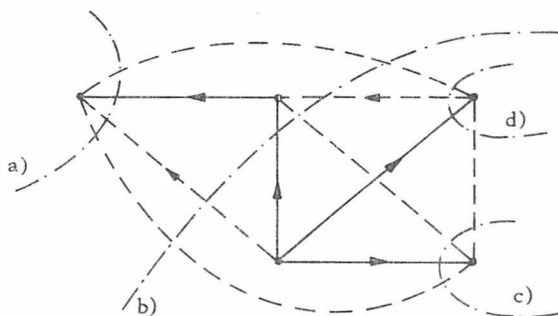


Fig.II.4.5 - Albero (a tratto pieno) e linee di taglio considerati per il circuito aumentato.



Applichiamo il terzo procedimento di analisi su base tagli. Le variabili ausiliarie sono V_{g2} , v_3 , v_5 e v_{10} . In particolare V_{g2} è nota per la presenza del generatore di tensione sul ramo 2 e v_{10} è la tensione del ramo fittizio 10, corrispondente alla differenza di potenziale fra i nodi 3 e 5 del circuito originale. Ulteriori incognite sono le correnti dei generatori di tensione i_{x2} e i_{x6} .

Il sistema, che si ottiene considerando le equazioni di equilibrio delle correnti attraverso le linee di taglio di fig.II.4.5 è:

$$G_1 V_{g2} + G_1 v_3 = i_{x2}$$

$$G_1 V_{g2} + (G_1 + G_3 + G_4) v_3 - G_4 v_{10} = 0$$

$$G_5 v_5 = i_{x6}$$

$$-G_4 v_3 + G_4 v_{10} = -i_{x6}$$

A tale sistema occorre aggiungere l'equazione del vincolo imposto dal generatore di tensione V_{g6} , che vale:

$$v_5 - v_{10} = V_{g6}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$4 + 2v_3 = i_{x2}$$

$$4 + 6v_3 - 3v_{10} = 0$$

$$v_5 = i_{x6}$$

$$-3v_3 + 3v_{10} = -i_{x6}$$

$$v_5 - v_{10} = 1$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\begin{array}{lll} v_3 = -19/15 & v_{10} = -6/5 & i_{x6} = -1/5 \\ v_5 = -1/5 & i_{x2} = 22/15 & \end{array} \quad (\text{V, A})$$

Occorre notare che la tensione v_{10} non è una tensione di ramo del circuito originale, ma coincide con la tensione esistente fra una coppia di nodi. Tutte le altre grandezze elettriche del circuito possono essere ricavate facilmente:

$$\begin{array}{lll} v_1 = V_{g2} + v_3 = 11/15 & i_1 = G_1 v_1 = 22/15 & i_3 = G_3 v_3 = -19/15 \\ v_4 = v_3 - v_{10} = -1/15 & i_4 = G_4 v_4 = -1/5 & i_5 = G_5 v_5 = -1/5 \end{array} \quad (\text{V, A})$$

II.4.2 - Il metodo dei nodi.

Il metodo di analisi su base nodi si può ottenere come caso particolare del metodo dei tagli applicato al circuito aumentato. Per ottenere tale metodo occorre scegliere in modo opportuno l'albero del circuito. Precisamente, posta l'attenzione su un generico nodo, detto *nodo di riferimento*, occorre scegliere l'albero formato dai rami che congiungono tale nodo con tutti gli altri del circuito. Considerando, ad esempio, il circuito di fig. II.4.6, si consideri l'albero mostrato in fig. II.4.7. Come nodo di riferimento è stato scelto il nodo 5 e come rami dell'albero i rami a, b, c, d, tutti connessi al nodo 5 (il nodo di riferimento è a volte contrassegnato con il simbolo di massa (fig. II.4.7)).

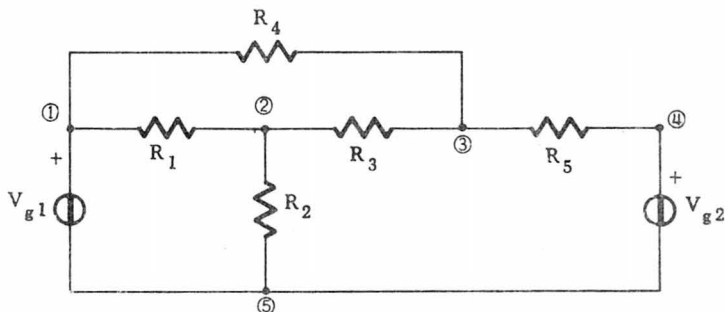


Fig. II.4.6 - Circuito considerato nell'introduzione al metodo dei nodi.

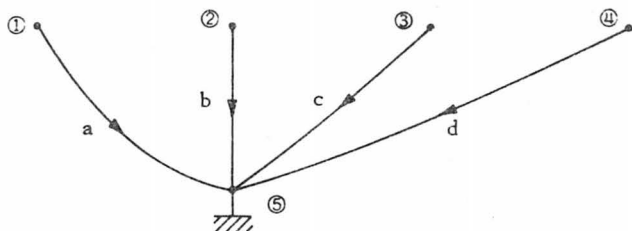


Fig.II.4.7 - Albero scelto sul circuito aumentato del circuito di fig.II.4.6.

Si vede dalle due precedenti figure che, mentre i rami a, b, d corrispondono a rami del circuito assegnato (rispettivamente il generatore V_{g1} , il resistore R_2 ed il generatore V_{g2}), il ramo c non corrisponde ad alcun ramo del circuito di fig.II.4.6; esso pertanto è stato ottenuto scegliendolo fra i rami del circuito aumentato.

Caratterizziamo ora l'insieme delle linee di taglio corrispondenti a tale particolare scelta dell'albero. Tali linee, nel caso dell'esempio di fig.II.4.6, sono indicate tratteggiate in fig.II.4.8. Si vede che esse rappresentano delle linee che racchiudono ciascun nodo del circuito, eccetto il nodo di riferimento. Ciò vale in generale. Pertanto se si sceglie la convenzione di orientare i rami dell'albero verso il nodo di riferimento, le equazioni di equilibrio che si utilizzano nel caso presente sono quelle delle correnti uscenti da ciascun nodo del circuito, eccetto il nodo di riferimento. Per tale motivo esse prendono il nome di equazioni ai nodi.

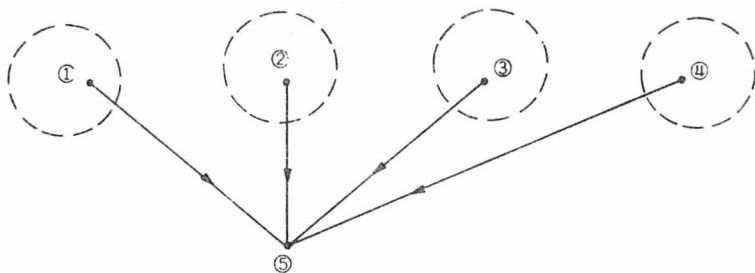
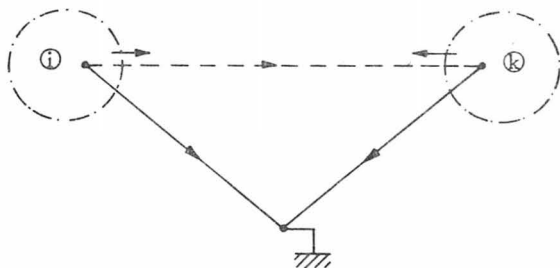


Fig.II.4.8 - Linee di taglio associate all'albero di fig.II.4.7.

Si può ancora notare che, per le equazioni ai nodi, le variabili ausiliarie risultano coincidenti con le tensioni dei nodi del circuito rispetto al nodo di riferimento; ciò vale in generale, sia che il nodo sia realmente connesso con un ramo al nodo di riferimento, sia che vi sia connesso con un ramo fittizio a conduttanza nulla. Inoltre, nello scrivere le

equazioni risolventi è facile rendersi conto che: 1) i termini della diagonale principale della matrice dei coefficienti, del tipo (k, k) , rappresentano la somma delle conduttanze dei rami resistivi connessi al nodo k -simo; 2) i termini del tipo (k, i) coincidono con la somma delle conduttanze cambiate di segno dei rami resistivi che congiungono i nodi k ed i . Il cambiamento di segno è conseguenza del fatto che il ramo che congiunge due nodi, qualunque sia la sua orientazione, risulta uscente da un nodo ed entrante nell'altro, come messo in evidenza in fig.II.4.9; 3) il termine k -simo del vettore dei termini noti coincide con la somma delle correnti entranti nel nodo k -simo.

Fig.II.4.9 - Determinazione del segno del termine (k, i) della matrice dei coefficienti.



Quanto detto permette di formulare direttamente il seguente procedimento di analisi.

Primo procedimento di analisi su base nodi.

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori di corrente)

- 1) Scegliere un nodo del circuito come nodo di riferimento.
- 2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni degli altri nodi $E_1, E_2, \dots, E_{N-1}$, rispetto al nodo di riferimento.
- 3) Scrivere il sistema risolvante determinando la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti nel modo seguente:
 - a) il termine (k, k) della matrice dei coefficienti coincide con la somma delle conduttanze dei rami resistivi connessi al nodo k , per tutti i nodi salvo quello di riferimento;
 - b) il termine (k, i) della matrice dei coefficienti è pari alla somma cambiata di segno di tutte le conduttanze dei rami resistivi che congiungono i nodi k ed i (per tutte le coppie salvo quelle che contengono il nodo di riferimento);
 - c) il componente k -simo del vettore dei termini noti è uguale alla somma algebrica delle correnti dei generatori di corrente entranti nel nodo k -simo (per tutti i nodi salvo quello di riferimento).

4) Risolvere il sistema ottenuto al punto 3) e determinare le tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento.

5) Determinare le tensioni degli altri rami del circuito come differenza fra le tensioni dei nodi a cui tali rami sono connessi. Determinare le correnti del circuito in base alle relazioni costitutive dei componenti.

Osservazione 11.4.1

Si può notare che nel procedimento di analisi su base nodi le nozioni topologiche del circuito sono ridotte al minimo e sono inoltre molto facilitate le scelte dei segni dei coefficienti del sistema risolvete. Essendo ancora valida la proprietà 11.3.1, la matrice dei coefficienti del sistema risolvete su base nodi è simmetrica; ciò può essere verificato anche direttamente, osservando che il termine (k, i) è sempre uguale al termine (i, k) della matrice dei coefficienti in conseguenza del punto 3b del procedimento precedente.

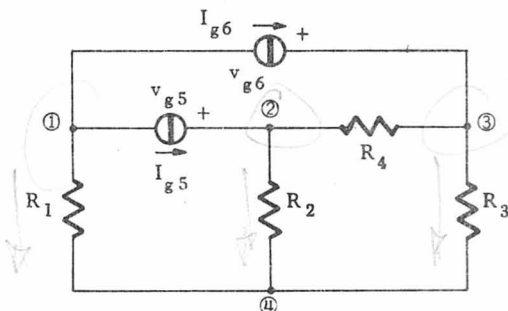
Esempio 11.4.2

Analizzare con il primo procedimento di analisi su base nodi il circuito di figura 11.4.10.

Fig. 11.4.10 - Circuito considerato nell'esempio 11.4.2. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = R_3 = R_4 = 1, R_2 = 1/3$$

$$I_{g5} = 3, I_{g6} = 2 \quad (\Omega, A)$$



Passi 1 e 2: Scegliamo il nodo 4 come nodo di riferimento e prendiamo come variabili ausiliarie le tensioni E_1, E_2, E_3 dei nodi 1, 2, 3 rispetto al nodo 4. (Si può notare che in questo semplice caso non è stato necessario considerare alcun ramo fittizio per determinare l'albero, così che le tensioni E_1, E_2, E_3 sono anche tensioni ai capi di tre componenti del circuito).

Passo 3: Scriviamo le tre equazioni ai nodi:

nodo 1

$$G_1 E_1 = -I_{g5} - I_{g6}$$

$$\text{nodo 2} \quad (G_2 + G_4) E_2 - G_4 E_3 = I_{g5}$$

$$\text{nodo 3} \quad -G_4 E_2 + (G_3 + G_4) E_3 = I_{g6}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$E_1 = -5$$

$$4 E_2 - E_3 = 3$$

$$-E_2 + 2 E_3 = 2$$

Passo 4 : Risolvendo il sistema si ottiene:

$$E_1 = -5 \quad E_2 = 8/7 \quad E_3 = 11/7 \quad (V)$$

Passo 5 : Le tre tensioni trovate nel passo precedente coincidono con le tensioni ai capi dei tre resistori R_1, R_2, R_3 ; le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$\begin{aligned} v_4 &= E_2 - E_3 = -3/7 & i_4 &= G_4 v_4 = -3/7 \\ v_{g5} &= E_2 - E_1 = 43/7 & i_3 &= G_3 E_3 = 11/7 \\ v_{g6} &= E_3 - E_1 = 46/7 & i_2 &= G_2 E_2 = 24/7 \\ & & i_1 &= G_1 E_1 = -5 \end{aligned} \quad (V, A)$$

II.4.3 - Analisi su base nodi in presenza di generatori indipendenti di tensione.

La presenza dei generatori indipendenti di tensione in un circuito rende impossibile l'applicazione diretta del metodo di analisi su base nodi, così come è stato descritto in precedenza. In tale caso valgono considerazioni del tutto simili a quelle fatte nel § II.3.3 per il caso dell'analisi su base tagli in presenza dei generatori di tensione.

Sono pertanto possibili due casi:

- a) metodo misto di analisi su base nodi, quando il metodo di analisi è sviluppato sul circuito assegnato senza trasformazioni preventive;
- b) metodo diretto di analisi su base nodi, quando vengono effettuate delle trasformazioni circuitali che hanno lo scopo di eliminare tutti i generatori di tensione presenti nel circuito.

I due procedimenti di analisi vengono riportati di seguito senza ulteriori commenti, a parte l'osservazione II.4.2, essendo la situazione identica a quella che si ha per il metodo di analisi su base tagli.

Secondo procedimento di analisi su base nodi (metodo misto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

1) Scegliere un nodo del circuito come nodo di riferimento, facendo in modo di scegliere quel nodo a cui converge il massimo numero di generatori di tensione.

2) Prendere come variabili ausiliarie le tensioni degli altri nodi, rispetto al nodo di riferimento. Alcune di queste variabili ausiliarie sono note. Ciò accade per quei nodi collegati direttamente con il nodo di riferimento per mezzo di un generatore di tensione; la variabile ausiliaria relativa ha il valore uguale alla tensione impressa dal generatore, se il relativo morsetto positivo coincide con il nodo considerato ovvero il valore con segno opposto se il morsetto positivo del generatore coincide con il nodo di riferimento.

3) Aggiungere, come ulteriori incognite, le correnti dei generatori di tensione.

4) Scrivere il sistema risolvibile con le stesse modalità del punto 3 del primo procedimento di analisi su base nodi. Tenere presente che al punto c) occorre sommare ai termini noti le correnti incognite dei generatori di tensione.

5) Aggiungere le equazioni di vincolo per quei generatori di tensione che non sono connessi al nodo di riferimento. Tali equazioni esprimono il fatto che la differenza fra due variabili ausiliarie è pari al valore della tensione del generatore in questione.

6) Risolvere il sistema e determinare le grandezze incognite. Notare che le equazioni relative ai nodi direttamente connessi al nodo di riferimento da un generatore di tensione possono essere risolte dopo il resto del sistema, poichè ciascuna di esse ha il solo scopo di determinare la corrente nel suddetto generatore di tensione.

7) Determinare le rimanenti grandezze elettriche del circuito.

Osservazione II.4.2

È necessario notare che quanto detto nell'osservazione II.3.2 ora non è più applicabile. In tale osservazione era stato fatto notare che, salvo i casi dei circuiti anomali, era sempre possibile scegliere un albero contenente tutti i generatori di tensione, come era auspicato al punto 1) del terzo procedimento di analisi su base tagli e quindi era possibile evitare di aggiungere le equazioni di vincolo al punto 5) dello stesso procedimento. Nel caso delle equazioni ai nodi, infatti, la scelta dell'albero è

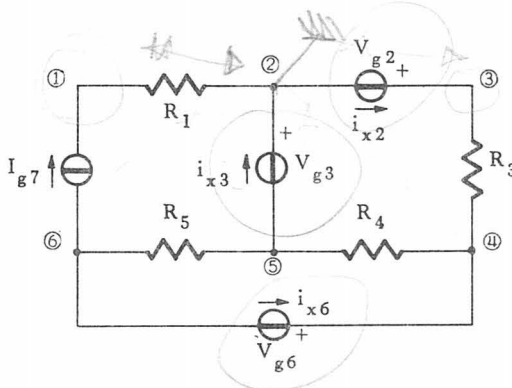
vincolata alla presenza del nodo di riferimento e quindi, salvo casi fortunati, qualche generatore di tensione compare sempre sui rami del co-albero. Si può tuttavia fare in modo che la maggior parte possibile dei generatori di tensione sia presente sull'albero e ciò si può ottenere seguendo il suggerimento detto al punto 1) del procedimento di analisi su base nodi qui descritto.

Esempio II.4.3

Analizzare con il metodo misto di analisi su base nodi il circuito di fig. II.4.11.

Fig. II.4.11 - Circuito considerato nell'esempio II.4.3. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} R_1 = R_5 = 1, \quad R_3 = 1/2 \\ R_4 = 1/3, \quad I_{g7} = 3, \quad V_{g2} = 1 \\ V_{g3} = 2, \quad V_{g6} = 1 \quad (\Omega, A, V) \end{aligned}$$



Passo 1: Conviene scegliere come nodo di riferimento il nodo 2, a cui sono connessi due generatori di tensione.

Passo 2: Le variabili ausiliarie sono E_1, E_3, E_4, E_5, E_6 , cioè le tensioni dei rimanenti nodi rispetto al nodo 2. Le tensioni E_3 ed E_5 sono già note poichè ai nodi 3 e 5 sono connessi due generatori di tensione con l'altro capo collegato al nodo 2. Risulta perciò:

$$E_3 = V_{g2} = 1 \qquad E_5 = -V_{g3} = -2 \qquad (V)$$

Notare che le tensioni E_4 ed E_6 non corrispondono ad alcun ramo del circuito dato, ma a rami del circuito aumentato.

Passo 3: Le ulteriori incognite sono le correnti che scorrono nei generatori di tensione, cioè i_{x2}, i_{x3}, i_{x6} .

Passo 4: Scriviamo il sistema di equazioni su base nodi; si ha:

$$\begin{aligned} \text{nodo 1} \quad & G_1 E_1 = I_{g7} \\ \text{nodo 3} \quad & G_3 E_3 - G_3 E_4 = i_{x2} \\ \text{nodo 4} \quad & -G_3 E_3 + (G_3 + G_4) E_4 - G_4 E_5 = i_{x6} \\ \text{nodo 5} \quad & -G_4 E_4 + (G_4 + G_5) E_5 - G_5 E_6 = -i_{x3} \\ \text{nodo 6} \quad & -G_5 E_5 + G_5 E_6 = -i_{x6} - I_{g7} \end{aligned}$$

Passo 5 : Scriviamo l'equazione relativa al vincolo introdotto dal generatore V_{g6} . Si ha:

$$E_4 - E_6 = V_{g6}$$

Passo 6 : Il sistema risolvibile si ottiene considerando l'insieme delle equazioni ottenute nei passi 4 e 5. Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{array}{ll} E_1 = 3 & -3E_4 - 8 - E_6 = -i_{x3} \\ 2 - 2E_4 = i_{x2} & 2 + E_6 = -i_{x6} - 3 \\ -2 + 5E_4 + 6 = i_{x6} & E_4 - E_6 = 1 \end{array}$$

La seconda e quarta equazione possono essere inizialmente trascurate poichè sono le sole a contenere le incognite i_{x2} ed i_{x3} .

Risolviamo le altre equazioni. Si ottiene:

$$\begin{array}{ll} E_1 = 3 & E_6 = -7/3 \\ E_4 = -4/3 & i_{x6} = -8/3 \end{array} \quad (V, A)$$

Sostituendo tali valori nella seconda e nella quarta equazione si ha:

$$\begin{array}{ll} i_{x2} = 14/3 & i_{x3} = 5/3 \end{array} \quad (A)$$

Passo 7 : Le altre grandezze elettriche del circuito valgono:

$$\begin{array}{ll} v_{R3} = E_3 - E_4 = 7/3 & i_{R3} = G_3 v_{R3} = 14/3 \\ v_{R4} = E_4 - E_5 = 2/3 & i_{R4} = G_4 v_{R4} = 2 \\ v_{R5} = E_6 - E_5 = -1/3 & i_{R5} = G_5 v_{R5} = -1/3 \\ v_{g7} = E_1 - E_6 = 16/3 & i_{R1} = G_1 E_1 = 3 \end{array}$$

Terzo procedimento di analisi su base nodi (metodo diretto).

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti dei due tipi)

1) Applicare ripetutamente al circuito le trasformazioni circuitali indicate nelle figg. II.3.12, II.3.13, II.3.14, fino ad ottenere un circuito privo di generatori di tensione. Sia T tale circuito.

2) Effettuare l'analisi del circuito T , applicando il primo procedimento di analisi su base nodi.

3) Determinare le tensioni e le correnti dei rami contenuti nelle parti del circuito di partenza distrutte dalle trasformazioni, utilizzando i risultati ricavati in 2) e le trasformazioni in senso inverso.

Esempio II.4.4

100234

Analizzare con il metodo diretto di analisi su base nodi il circuito di figura II.4.12.

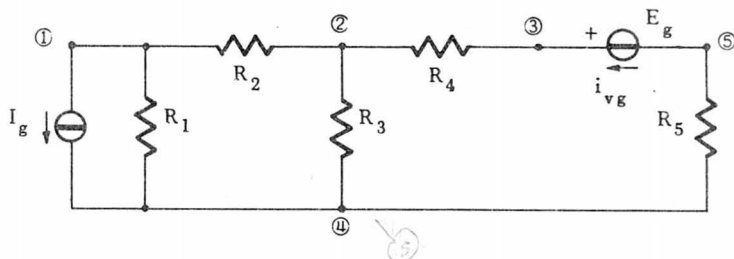


Fig.II.4.12 - Circuito considerato nell'esempio II.4.4. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 0,5, \quad R_2 = R_4 = R_5 = 1, \quad R_3 = 1/3, \quad I_g = 2, \quad E_g = 1 \quad (\Omega, A, V).$$

Passo 1 : Utilizzando le trasformazioni circuitali, otteniamo il nuovo circuito privo di generatori di tensione mostrato in fig.II.4.13 (circuito T).

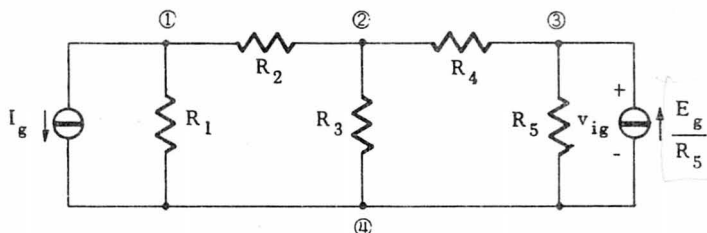


Fig.II.4.13 - Circuito trasformato ottenuto da quello di fig.II.4.12.

Passo 2 : Analizziamo il circuito di fig.II.4.13 con il primo procedimento di analisi su base nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 4. Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2) E_1 - G_2 E_2 &= -I_g \\ -G_2 E_1 + (G_2 + G_3 + G_4) E_2 - G_4 E_3 &= 0 \\ -G_4 E_2 + (G_4 + G_5) E_3 &= E_g / R_5 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{aligned} 3 E_1 - E_2 &= -2 \\ -E_1 + 5 E_2 - E_3 &= 0 \\ -E_2 + 2 E_3 &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione del sistema precedente è:

$$E_1 = -17/25 \quad E_2 = -1/25 \quad E_3 = 12/25 \quad (V)$$

Le tensioni e le correnti del circuito T sono uguali alle tensioni e correnti del circuito assegnato, salvo che per i rami coincidenti con il resistore R_5 ed il generatore di tensione trasformato. Si ottiene per i primi:

$$\begin{aligned} v_{R2} &= E_1 - E_2 = -16/25 & i_{R2} &= G_2 v_{R2} = -16/25 & i_{R1} &= G_1 E_1 = -34/25 \\ v_{R4} &= E_2 - E_3 = -13/25 & i_{R4} &= G_4 v_{R4} = -13/25 & i_{R3} &= G_3 E_2 = -3/25 \end{aligned}$$

Per i rami trasformati, nell'ambito del circuito T, si ottiene:

$$\begin{aligned} (v_{R5})_T &= E_3 = 12/25 & (i_{R5})_T &= G_5 v_{R5} = 12/25 \\ (v_{I_g})_T &= 12/25 & & (V, A) \end{aligned}$$

Possso 3: Le grandezze elettriche dei rami del circuito originale implicati nelle trasformazioni valgono:

$$\begin{aligned} v_{R5} &= E_3 - E_g = -13/25 \\ i_{R5} &= G_5 v_{R5} = -13/25 & (V, A) \\ i_{v_g} &= 13/25 \end{aligned}$$

11.5 - Estensione del metodo delle maglie e del metodo dei nodi all'analisi dei circuiti contenenti generatori controllati.

11.5.1 - Introduzione.

In questo paragrafo alcuni dei metodi di analisi descritti precedentemente verranno estesi al caso dei circuiti contenenti generatori controllati accanto ai componenti fin qui considerati. I generatori controllati sono stati definiti nel § 1.7.1, a cui si rimanda sia per le definizioni sia per i simboli usati. In particolare, ricordiamo che ciascuno dei generatori controllati è caratterizzato da un parametro di controllo, le cui dimensioni dipendono dal particolare tipo di generatore considerato. Tale parametro di controllo è una quantità reale indipendente dal tempo. Quindi l'aggiunta dei generatori controllati ai circuiti fin qui considerati conserva ad essi il carattere di essere «senza memoria», proprio del presente capitolo. Si deve tuttavia osservare che l'aggiunta dei generatori controllati amplia notevolmente la classe e l'importanza dei circuiti che si possono considerare. Infatti molti dispositivi elettronici ammettono sotto certe condizioni dei circuiti equivalenti contenenti tali componenti, come è stato già accennato nel Cap.I; d'altra parte median-

te tali componenti è possibile tener conto di eventuali blocchi a più terminali ovvero a più porte presenti nel circuito, come si vedrà in dettaglio nel § VI. 10.2.

La presenza in un circuito elettrico di un generatore controllato apre inoltre la possibilità concreta di analizzare circuiti costituiti da più parti separate, ma legate elettricamente fra loro. È infatti sufficiente che una parte del circuito contenga il ramo controllato, mentre un'altra parte contenga il ramo di controllo per stabilire il legame elettrico fra di esse. Ciò non era evidentemente possibile con circuiti contenenti unicamente resistori e generatori indipendenti.

Tutti i metodi di analisi descritti precedentemente possono essere facilmente estesi al caso dei circuiti contenenti generatori controllati; la via da seguire consiste in generale nei due seguenti punti:

- 1) Scrivere il sistema risolvante considerando i generatori controllati come se fossero dei generatori indipendenti.
- 2) Aggiungere una ulteriore equazione per ogni generatore controllato presente, per esprimere il vincolo da esso introdotto fra le variabili del sistema precedente.

È bene osservare che l'ipotesi fatta al punto 1), di considerare i generatori controllati come se fossero indipendenti, è del tutto provvisoria ed ha il solo scopo di facilitare l'impostazione del problema. Infatti mentre un generatore indipendente è caratterizzato da una grandezza elettrica impressa fissa e quindi introduce un termine noto nelle equazioni risolventi, in un generatore controllato la grandezza elettrica impressa dipende da altre grandezze elettriche del circuito (e quindi dalle variabili ausiliarie scelte per l'analisi del circuito). Pertanto un generatore controllato non introduce termini noti, ma contribuisce alla matrice dei coefficienti del sistema. Si può quindi dire che, in generale, in presenza di generatori controllati non valgono più le proprietà II. 2. 1 e II. 3. 1 e che di conseguenza la matrice dei coefficienti non è più simmetrica.

Per l'importanza che assumono nelle applicazioni, verranno di seguito estesi esplicitamente al caso dei circuiti contenenti generatori controllati il metodo di analisi su base maglie e quello su base nodi.

II.5.2 - Estensione del metodo delle maglie.

Nel caso che siano presenti generatori controllati è possibile applicare il metodo di analisi su base maglie nelle due versioni miste e diretto. In quest'ultimo caso occorre tenere presente che la trasformazione del circuito non deve coinvolgere nella porzione modificata del circuito i rami di controllo dei generatori. Il procedimento risultante è il seguente.

Quinto procedimento di analisi su base maglie.

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori di tensione e corrente sia dipendenti che indipendenti)

1) Scrivere il sistema risolvibile su base maglie seguendo uno dei procedimenti visti in precedenza, come se i generatori controllati fossero dei generatori indipendenti.

2) Aggiungere per ogni generatore controllato un'equazione di vincolo. Per i generatori di tensione controllati, tale equazione assume la seguente forma:

$$(II.5.1) \quad V_{gc} = k f(i_m, V_{gi}, R_i)$$

in cui: V_{gc} è la tensione controllata; k è il parametro di controllo; $f(\)$ è una funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo (tensione o corrente) in funzione delle correnti di maglia i_m , delle tensioni dei generatori indipendenti presenti V_{gi} e delle resistenze R_i dei resistori. Per i generatori di corrente controllati, tale equazione di vincolo assume la forma seguente:

$$(II.5.2) \quad f_i(i_m) = k f(i_m, V_{gi}, R_i)$$

in cui: la funzione lineare $f_i(\)$ esprime la corrente controllata in funzione delle correnti di maglia i_m ; k è il parametro di controllo; la funzione lineare $f(\)$ esprime la grandezza elettrica di controllo in modo analogo a quanto visto per l'espressione II.5.1.

3) Risolvere il sistema complessivo e determinare le grandezze elettriche desiderate. Se è stato usato il metodo diretto di analisi, effettuare la trasformazione inversa.

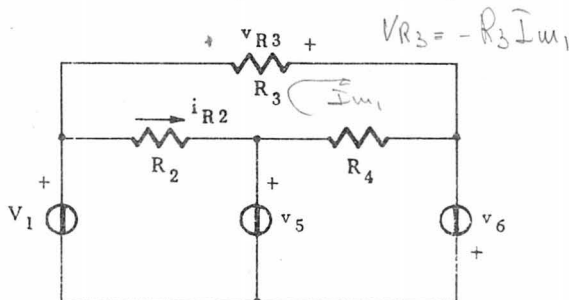
Esempio II.5.1

Applicare il metodo esteso di analisi su base maglie al circuito di fig. II.5.1.

Fig. II.5.1 - Circuito considerato nell'esempio II.5.1. I valori dei componenti sono:

$$R_2 = R_4 = 1, \quad R_3 = 2, \quad V_1 = 3,$$

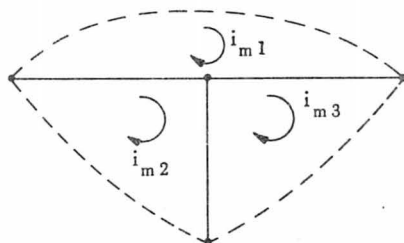
$$v_5 = 2 i_{R2}, \quad v_6 = 3 v_{R3} \quad (\Omega, V, A)$$



Passo 1 : Scegliamo l'albero e quindi le maglie come indicato in fig.II.5.2. Scriviamole equazioni di equilibrio delle tensioni di maglia, considerando i generatori controllati come se fossero indipendenti. Si ha:

$$\begin{aligned}(R_2 + R_3 + R_4) i_{m1} - R_2 i_{m2} - R_4 i_{m3} &= 0 \\ -R_2 i_{m1} + R_2 i_{m2} &= V_1 - v_5 \\ -R_4 i_{m1} + R_4 i_{m3} &= v_5 + v_6\end{aligned}$$

Fig.II.5.2 - Albero, co-albero e maglie del circuito di fig.II.5.1.



Passo 2 : Le tensioni v_5 e v_6 non sono note, ma sono controllate da altre grandezze elettriche del circuito, come risulta dalle specifiche del circuito date in fig.II.5.1. Il generatore di tensione v_5 è controllato dalla corrente i_{R2} che scorre nel resistore R_2 ; esprimendo tale corrente in funzione delle correnti di maglia si ha:

$$v_5 = 2 (i_{m2} - i_{m1})$$

che è la prima equazione di vincolo cercata.

Il generatore di tensione v_6 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_3 . Tale tensione si può esprimere a sua volta in funzione delle correnti di maglia e della resistenza R_3 . Si ha:

$$v_6 = 3 (-R_3 i_{m1})$$

che è la seconda equazione di vincolo cercata.

Passo 3 : Il sistema risolvibile si ottiene considerando l'insieme delle equazioni ottenute nei passi 1 e 2. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{aligned}4 i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} &= 0 & v_5 &= 2 (i_{m2} - i_{m1}) \\ -i_{m1} + i_{m2} &= 3 - v_5 & v_6 &= -6 i_{m1} \\ -i_{m1} + i_{m3} &= v_5 + v_6\end{aligned}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nelle prime tre si ha:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si vede da quest'ultimo sistema di equazioni che la presenza dei generatori controllati ha distrutto la simmetria della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni alle maglie. Risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{aligned} i_{m1} &= 3/8 & v_5 &= 2 \\ i_{m2} &= 11/8 & v_6 &= -9/4 & (\text{A, V}) \\ i_{m3} &= 1/8 \end{aligned}$$

Le altre grandezze elettriche del circuito possono essere facilmente determinate.

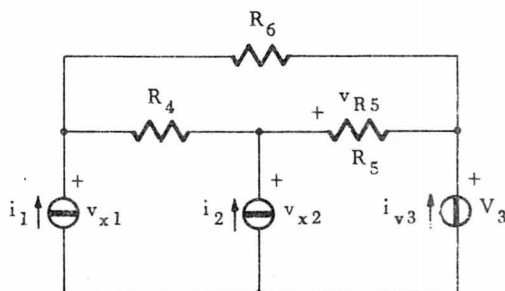
Esempio 11.5.2

Analizzare con il metodo esteso delle maglie il circuito di fig.11.5.3.

Fig.11.5.3 - Circuito considerato nell'esempio 11.5.2. I valori dei componenti sono:

$$R_4 = 2, R_5 = R_6 = 1, V_3 = 2,$$

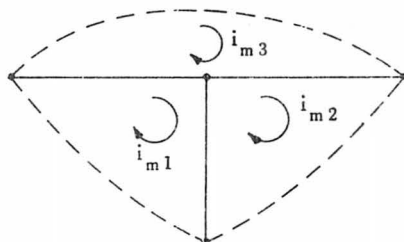
$$i_1 = 3i_{v3}, i_2 = 2v_{R5} \quad (\Omega, \text{V, A})$$



Passo 1 : Scegliamo l'albero e le maglie come indicato in fig.11.5.4. Scriviamo le equazioni alle maglie considerando i generatori controllati come se fossero indipendenti. A tale scopo occorre introdurre le tensioni incognite ai loro capi, scelte come indicato in fig.11.5.3. Il sistema di equazioni di equilibrio delle tensioni di maglia è il seguente:

$$\begin{aligned} R_4 i_{m1} - R_4 i_{m3} &= v_{x1} - v_{x2} \\ R_5 i_{m2} - R_5 i_{m3} &= v_{x2} - V_3 \\ -R_4 i_{m1} - R_5 i_{m2} + (R_4 + R_5 + R_6) i_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Fig.11.5.4 - Albero, co-albero e maglie del circuito di fig.11.5.3.



Passo 2 : Occorre ora introdurre le equazioni di vincolo imposte dai generatori controllati. Il generatore di corrente i_1 è controllato dalla corrente che scorre nel generatore indipendente V_3 . Il vincolo che si ottiene, espresso in termini delle correnti di maglia, è il seguente:

$$i_{m1} = 3 (-i_{m2})$$

Il generatore di corrente i_2 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_5 . Il vincolo in questo caso è il seguente:

$$i_{m2} - i_{m1} = 2 R_5 (i_{m2} - i_{m3})$$

Passo 3 : Sostituendo i valori numerici, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 2 i_{m1} - 2 i_{m3} &= v_{x1} - v_{x2} \\ i_{m2} - i_{m3} &= v_{x2} - 2 \\ -2 i_{m1} - i_{m2} + 4 i_{m3} &= 0 \\ i_{m1} &= -3 i_{m2} \\ i_{m2} - i_{m1} &= 2 (i_{m2} - i_{m3}) \end{aligned}$$

Risolviendo il sistema, si ha:

$$\begin{aligned} i_{m1} &= 0 & v_{x1} &= 2 \\ i_{m2} &= 0 & v_{x2} &= 2 \\ i_{m3} &= 0 & & (A, V) \end{aligned}$$

Le tensioni e le correnti dei rami resistivi sono tutte nulle.

11.5.3 - Estensione del metodo dei nodi.

Nel caso che siano presenti generatori controllati è possibile applicare il metodo di analisi su base nodi nelle due versioni misto e diretto. In quest'ultimo caso occorre tenere presente che la trasformazione del circuito non deve coinvolgere nella sua porzione modificata i rami di controllo dei generatori. Il procedimento risultante è il seguente.

Quarto procedimento di analisi su base nodi.

(Valido per circuiti contenenti resistori e generatori di tensione e corrente sia dipendenti che indipendenti)

1) Scrivere il sistema risolvibile su base nodi seguendo uno dei procedimenti visti in precedenza e considerando i generatori controllati come se fossero dei generatori indipendenti.

2) Aggiungere per ogni generatore controllato un'equazione di vincolo. Per i generatori di corrente controllati tale equazione assume la forma seguente:

(II.5.3)

$$I_{gc} = k f(E_i, I_{gi}, G_i)$$

in cui: I_{gc} è la corrente controllata; k è il parametro di controllo; $f(\)$ è la funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo (tensione o corrente) in funzione delle tensioni di nodo, delle correnti dei generatori indipendenti e delle conduttanze dei resistori. Nel caso dei generatori di tensione controllati, tale equazione di vincolo assume la forma seguente:

(II.5.4)

$$f_v(E_i) = k f(E_i, I_{gi}, G_i)$$

in cui: $f_v(E_i)$ è la funzione lineare che esprime la tensione controllata in funzione delle tensioni di nodo; k è il parametro di controllo; $f(\)$ è la funzione lineare che esprime la grandezza elettrica di controllo in modo analogo a quanto visto per la (II.5.3).

3) Risolvere il sistema e determinare le grandezze elettriche desiderate. Se è stato usato un metodo diretto di analisi effettuare la trasformazione inversa.

Esempio II.5.3

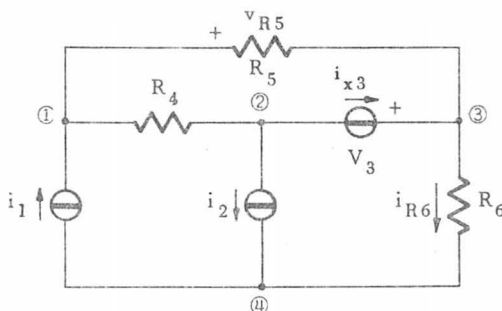
Analizzare con il metodo esteso dei nodi il circuito di fig.II.5.5.

Fig.II.5.5 - Circuito considerato nell'esempio II.5.3. I valori dei componenti sono:

$$R_4 = 1, R_5 = 0,5, R_6 = 1/3,$$

$$V_3 = 1, i_1 = 2v_{R_5},$$

$$i_2 = 3 i_{R_6} \quad (\Omega, V, A)$$



Passo 1: Scegliamo come nodo di riferimento il nodo 4; le variabili ausiliarie sono le tre tensioni E_1, E_2, E_3 . Scriviamo le equazioni ai nodi, considerando i generatori di corrente come se fossero indipendenti ed introducendo la corrente incognita che scorre nel generatore di tensione V_3 . Il sistema su base nodi risultante è il seguente:

$$\begin{aligned}
 (G_4 + G_5) E_1 - G_4 E_2 - G_5 E_3 &= i_1 \\
 - G_4 E_1 + G_4 E_2 &= -i_2 - i_{x3} \\
 - G_5 E_1 + (G_5 + G_6) E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= V_3
 \end{aligned}$$

Passo 2 : Occorre ora introdurre le equazioni di vincolo imposte dai generatori controllati. Il generatore di corrente i_1 è controllato dalla tensione ai capi del resistore R_5 , con il verso indicato in fig.II.5.5. Il vincolo che si ottiene, espresso in termini di tensioni di nodo, è il seguente:

$$i_1 = 2 (E_1 - E_3)$$

Il generatore di corrente i_2 è controllato dalla corrente del resistore R_6 con il verso indicato in fig.II.5.5. L'equazione di vincolo in questo caso assume la forma seguente:

$$i_2 = 3 G_6 E_3$$

Passo 3 : Il sistema risolvente complessivo si ottiene considerando le equazioni ottenute nei passi 1 e 2. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3 E_1 - E_2 - 2 E_3 &= i_1 \\
 - E_1 + E_2 &= -i_2 - i_{x3} \\
 - 2 E_1 + 5 E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= 1 \\
 i_1 &= 2 (E_1 - E_3) \\
 i_2 &= 9 E_3
 \end{aligned}$$

Per risolvere il sistema conviene sostituire subito le due ultime equazioni rispettivamente nella prima e nella seconda equazione. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3 E_1 - E_2 - 2 E_3 &= 2 (E_1 - E_3) \\
 - E_1 + E_2 &= -9 E_3 - i_{x3} \\
 - 2 E_1 + 5 E_3 &= i_{x3} \\
 E_3 - E_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = -7/6 & i_{x3} = 3/2 \\
 E_2 = -7/6 & i_1 = -2 \\
 E_3 = -1/6 & i_2 = -3/2
 \end{array} \quad (V, A)$$

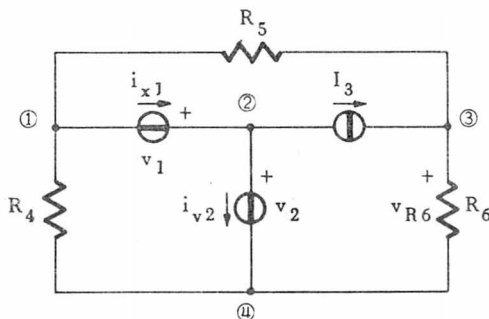
Da queste grandezze elettriche si possono ricavare gli altri valori delle tensioni e delle correnti del circuito.

Esempio 11.5.4

Analizzare con il metodo esteso dei nodi il circuito di fig.11.5.6.

Fig.11.5.6 - Circuito considerato nell'esempio 11.5.4. I valori dei componenti sono:

$$\begin{aligned} R_4 &= 0,5, \quad R_5 = 1, \quad R_6 = 0,5, \\ I_3 &= 2, \quad v_1 = 3 i_{v2}, \\ v_2 &= 2 v_{R6} \quad (\Omega, A, V) \end{aligned}$$



Passo 1 : Scegliamo come nodo di riferimento il nodo 4; le variabili ausiliarie sono le tensioni degli altri tre nodi. Ulteriori incognite sono le correnti che scorrono nei generatori di tensione. È opportuno notare che la variabile ausiliaria relativa al secondo nodo coincide con la tensione del generatore v_2 , mentre la corrente incognita i_{v2} è una grandezza di controllo.

Scriviamo le equazioni ai nodi, considerando tutti i generatori come se fossero indipendenti. Si ha:

$$\begin{aligned} (G_4 + G_5) E_1 - G_5 E_3 &= -i_{x1} \\ 0 &= i_{x1} - i_{v2} - I_3 \\ -G_5 E_1 + (G_5 + G_6) E_3 &= I_3 \end{aligned}$$

Passo 2 : Scriviamo l'equazione di vincolo del generatore controllato v_1 ; si ha:

$$v_2 - E_1 = 3 i_{v2}$$

Per il secondo generatore controllato v_2 si ha:

$$v_2 = 2 E_3$$

Passo 3 : Sostituendo i valori numerici nel sistema complessivo si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 3 E_1 - E_3 &= -i_{x1} \\ 0 &= i_{x1} - i_{v2} - 2 \\ -E_1 + 3 E_3 &= 2 \\ v_2 - E_1 &= 3 i_{v2} \\ v_2 &= 2 E_3 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -16/23 & i_{x1} &= 58/23 \\
 E_2 &= v_2 = 20/23 & i_{v2} &= 12/23 & (V, A) \\
 E_3 &= 10/23
 \end{aligned}$$

Dalle grandezze ottenute si possono calcolare tutte le altre tensioni e correnti del circuito.

II.6 - Estensione del metodo dei nodi all'analisi dei circuiti contenenti nullori.

II.6.1 - Introduzione.

Nel § I.7.4 è stato introdotto l'elemento ideale «nullore». Tale elemento costituisce ciò che si ottiene idealizzando il comportamento di dispositivi quali il transistor, l'amplificatore operazionale, ecc. Perciò esso si presta ad un esame rapido dei circuiti che contengono tali dispositivi, quando venga sostituito ad essi direttamente. D'altra parte, è sempre possibile una rappresentazione accurata dei dispositivi stessi, inserendo accanto al nullore gli elementi ideali bipolari del tipo resistore e generatore indipendente. È da tenere presente che in quest'ultimo caso, i parametri caratteristici del dispositivo reale verranno a dipendere dai valori delle resistenze dei resistori del circuito equivalente e non dal nullore che non possiede parametri caratteristici e la cui caratterizzazione è puramente topologica.

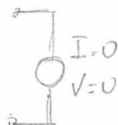
Due sono pertanto i casi in cui interessano i circuiti contenenti nullori:

a) analisi approssimata di un circuito contenente amplificatori operazionali, transistori, ecc. In questo caso è possibile ottenere un procedimento estremamente rapido, efficace e semplice per avere immediatamente un'idea di massima del funzionamento del circuito stesso. Il procedimento si presta sia ad essere usato direttamente per ispezione visiva sia sul calcolatore;

b) analisi accurata di circuiti contenenti i suddetti dispositivi. In questo caso si utilizzano i circuiti equivalenti dei dispositivi, costituiti da nullori ed altri elementi ideali bipolari. Come vedremo successivamente in questo paragrafo, la presenza dei nullori rende molto semplici ed eleganti le procedure di analisi che li contengono.

Come messo in evidenza nel § I.7.4, il comportamento del nullore in corrispondenza alle sue due porte d'ingresso è del tutto differente.

Per questa ragione conviene scinderlo nei due componenti singolarmente anomali detti nullatore e noratore, secondo quanto indicato in figura 1.7.11. In particolare il nullatore impone contemporaneamente tensione e corrente nulle ai suoi capi, mentre il noratore non dà alcuna indicazione sulla tensione e corrente da esso erogate. Si può inoltre osservare che ciascun nullatore può essere interpretato come un corto-circuito nel quale è stata imposta la condizione aggiuntiva di corrente nulla, ovvero un circuito aperto nel quale è stata imposta la condizione aggiuntiva di tensione nulla. D'altra parte il noratore può essere interpretato come un generatore di tensione, nel quale non è stata data alcuna indicazione della tensione impressa, ovvero un generatore di corrente nel quale non è stata data alcuna indicazione sulla corrente impressa.



Le considerazioni precedenti suggeriscono la possibilità di analizzare un circuito contenente nullori nel modo seguente:

- a) Sostituire a ciascun nullore la coppia di bipoli noratore e nullatore (se ciò non è già stato fatto nel circuito assegnato).
- b) Sostituire a ciascun nullatore un ramo in corto-circuito ovvero un circuito aperto (per i nullatori sostituiti da corti-circuiti è bene considerare distinti i nodi tra i quali il nullatore è inserito, anche dopo la sostituzione).
- c) Sostituire a ciascun noratore un generatore di tensione ovvero di corrente con grandezza impressa di valore incognito.
- d) Scrivere il sistema risolvete con uno qualunque dei metodi discussi nei paragrafi precedenti. Tale sistema non può essere risolto poiché contiene un numero di incognite superiore a quello delle equazioni, essendo presente una grandezza impressa incognita per ogni noratore presente.
- e) Scrivere per ogni nullatore presente un'equazione aggiuntiva di vincolo. Precisamente:
 - 1) se il nullatore è stato sostituito da un corto-circuito, imporre la condizione di corrente nulla attraverso di esso; $V=0$, $I=0$
 - 2) se il nullatore è stato sostituito da un circuito aperto, imporre la condizione di tensione nulla ai suoi capi.
- f) Risolvere il sistema di equazioni, che dopo l'aggiunta delle equazioni di vincolo, considerate nel punto e) precedente, ha un numero di di equazioni uguale al numero delle incognite⁽¹⁾.

(1) - Ciò è sempre vero in quanto le equazioni mancanti in d) sono in numero uguale al

(Segue)

Sebbene il metodo descritto non presenti difficoltà, qualunque sia il procedimento di analisi utilizzato (maglie, nodi, tagli), nel seguito verrà sviluppato in dettaglio in connessione con il metodo dei nodi, che è quello più usato nelle applicazioni.

11.6.2 - Estensione del metodo dei nodi ai circuiti contenenti nullori.

È possibile estendere al caso dei circuiti contenenti nullori sia il metodo misto che il metodo diretto; in quest'ultimo caso tuttavia la trasformazione del circuito non deve coinvolgere nella porzione modificata i noratori e nullatori presenti.

Il procedimento risultante è il seguente:

Quinto procedimento di analisi su base nodi.

(Valido per circuiti contenenti resistori, generatori dipendenti ed indipendenti dei due tipi, nullori)

- 1) Sostituire a ciascun nullore i due bipoli nullatore e noratore.
- 2) Sostituire a ciascun nullatore un circuito aperto ed a ciascun noratore un generatore di corrente avente una corrente impressa incognita.
- 3) Scrivere il sistema risolvete su base nodi per il circuito in esame, seguendo uno dei procedimenti visti nel § II.4; se in partenza i nullori sono N , tale sistema contiene N incognite aggiuntive, pari alle correnti dei noratori.
- 4) Scrivere altre N equazioni, una per ogni nullatore, esprimente il fatto che la tensione ai capi di ciascuno di essi è uguale a zero. Tali equazioni di vincolo hanno la forma:

$$(II.6.1) \quad E_i = E_j$$

se il nullatore è connesso fra i nodi i e j , ovvero

$$(II.6.2) \quad E_i = 0$$

se il nullatore è connesso fra il nodo i e quello di riferimento.

- 5) Risolvere il sistema, determinando tutte le grandezze elettriche del circuito.

numero dei noratori presenti e le equazioni aggiuntive in e) sono in numero uguale al numero dei nullatori. Infatti entrambi questi due numeri sono uguali al numero dei nullori presenti nel circuito che si sta considerando.

Si può notare che il metodo è di grande semplicità e che il sistema che occorre risolvere al punto 5) del procedimento è in definitiva più semplice di quello ai nodi scritto al punto 3), in quanto le equazioni di vincolo esprimono l'identità fra tensioni di nodo ovvero ne stabiliscono il valore nullo.

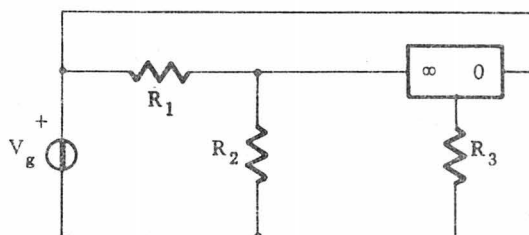
Esempio II.6.1

Analizzare con il quinto procedimento di analisi su base nodi il circuito di figura II.6.1.

Fig.II.6.1 - Circuito considerato nell'esempio II.6.1. I valori dei componenti sono:

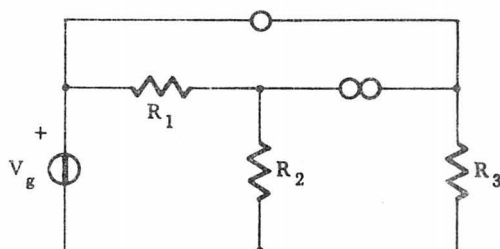
$$R_1 = 1, R_2 = 1/3, R_3 = 1/10$$

$$V_g = 2 \quad (\Omega, V)$$



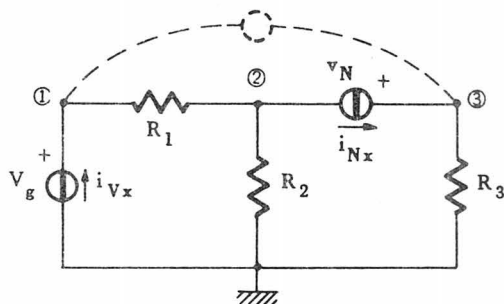
Passo 1 : Sostituiamo il nullore presente con la coppia nullatore-noratore. Si ottiene il circuito di fig.II.6.2.

Fig.II.6.2 - Circuito ottenuto da quello di fig.II.6.1, sostituendo al nullore la coppia nullatore-noratore.



Passo 2 : Sostituiamo al posto del nullatore un circuito aperto ed al posto del noratore un generatore di corrente di valore incognito i_{N_x} (fig.II.6.3); nella stessa figura è anche indicata la corrente incognita i_{V_x} , che scorre nel generatore di tensione.

Fig.II.6.3 - Circuito ottenuto da quello fig.II.6.2, ponendo al posto del nullatore e del noratore rispettivamente un circuito aperto ed un generatore di corrente.



Passo 3 : Scegliamo come nodo di riferimento quello indicato in fig.II.6.3; pertanto le tensioni dei nodi sono: V_g , E_2 , E_3 . Il sistema di equazioni ai nodi è il seguente:

$$\begin{aligned} G_1 V_g - G_1 E_2 &= i_{Vx} \\ -G_1 V_g + (G_1 + G_2) E_2 &= -i_{Nx} \\ G_3 E_3 &= i_{Nx} \end{aligned}$$

Nel sistema precedente le grandezze incognite sono: E_2 , E_3 , i_{Vx} ed i_{Nx} . Di conseguenza è necessaria un'ulteriore equazione.

Passo 4 : Scriviamo l'equazione di vincolo per il nullatore. Essa impone che sia nulla la differenza di tensione ai suoi estremi, cioè:

$$E_3 = V_g$$

Passo 5 : Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{aligned} 2 - E_2 &= i_{Vx} \\ -2 + 4 E_2 &= -i_{Nx} \\ 10 E_3 &= i_{Nx} \\ E_3 &= 2 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} E_2 &= -9/2 & i_{Vx} &= 13/2 \\ E_3 &= 2 & i_{Nx} &= 20 \end{aligned} \quad (V, A)$$

Le altre grandezze elettriche del circuito si ricavano immediatamente. Ad esempio la tensione ai capi del noratore vale:

$$v_N = E_3 - E_2 = 13/2 \text{ V}$$

II.7 - Analisi automatica di un circuito elettrico senza memoria: programma NODI.

II.7.1 - Generalità.

L'analisi dei circuiti elettrici mediante il calcolatore numerico riveste una grande importanza da molti punti di vista. È infatti evidente che, appena un circuito elettrico raggiunge la complessità di una decina di nodi connessi fra loro da qualche decina di componenti, diviene estremamente onerosa e poco affidabile la relativa analisi, effettuata con mezzi manuali. D'altra parte circuiti della complessità suddetta o anche mol-

to maggiore si incontrano usualmente nelle applicazioni, sia quando è assegnato direttamente un circuito di grandi dimensioni, sia quando si voglia tenere conto in un circuito strutturalmente di piccole dimensioni degli schemi equivalenti molto accurati dei componenti e dispositivi in esso contenuti.

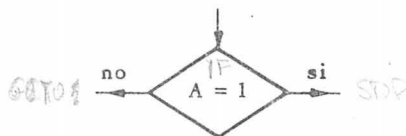
L'utilizzazione del calcolatore per l'analisi dei circuiti elettrici diviene assolutamente necessaria quando l'analisi stessa costituisce un passo del procedimento di progetto, come messo in evidenza nella figura 1 della premessa al presente testo. In questo caso infatti l'operazione di analisi può essere richiesta nell'ambito dell'algoritmo di ottimizzazione del circuito innumerevoli volte.

Nel presente paragrafo il problema dell'analisi automatica verrà sviluppato ad un livello elementare ed introduttivo, rimandando ai testi specifici, citati nell'appendice 2D, per un approfondimento. In particolare, limiteremo la trattazione al metodo dei nodi nella sua formulazione più estesa riguardante i circuiti che contengono resistori, generatori indipendenti dei due tipi, generatori di corrente controllati in tensione e nullori.

La descrizione di un metodo automatico di analisi, adatto ad essere implementato sul calcolatore, può essere effettuata in vari modi. Il modo più vicino all'applicazione consiste ovviamente nell'assegnare il programma di calcolo, cioè la sequenza delle istruzioni che devono essere eseguite dal calcolatore. Tale modo tuttavia presuppone l'utilizzazione di un linguaggio simbolico e quindi la conoscenza del medesimo da parte del lettore. Per evitare ciò si è preferito descrivere il metodo automatico mediante diagrammi di flusso, che prescindono dal linguaggio utilizzato e che sono di immediata comprensione. Essi consistono di più blocchi funzionali eseguiti in sequenza. I blocchi sono di due tipi:

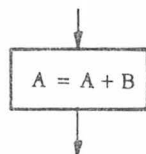
a) *blocchi logici*, caratterizzati da un ingresso e due uscite. Si ha un'uscita oppure l'altra a seconda che sia verificata o meno la relazione indicata nel blocco (fig. II.7.1);

Fig. II.7.1 - Blocco logico.



b) *blocchi operativi*. In essi viene effettuato il calcolo dell'espressione indicata a destra del segno di «uguale» ed il suo valore viene assegnato alla variabile a sinistra di detto segno (fig. II.7.2).

Fig. II.7.2 - Blocco operativo.



Occorre prestare molta attenzione al fatto che in nessun caso le relazioni indicate nei blocchi funzionali devono essere interpretate nell'usuale senso algebrico di uguaglianza. Ad esempio nel caso di figura II.7.1 la variabile A può anche non essere uguale ad uno, poichè l'espressione $A = 1$ ha in tal caso un carattere interrogativo, mentre nel caso di fig. II.7.2 la variabile A è stata incrementata della quantità B (nell'usuale linguaggio algebrico da $A = A + B$ si ricaverebbe $B = 0$).

La traduzione del diagramma di flusso in un linguaggio simbolico è immediata. A titolo di esempio verrà data in appendice II.B la traduzione in linguaggio FORTRAN del metodo di analisi descritto di seguito.

II.7.2 - Analisi automatica dei circuiti senza memoria con il metodo dei nodi⁽¹⁾.

Nel presente paragrafo verrà sviluppato in dettaglio un metodo per l'analisi automatica dei circuiti elettrici, limitatamente ai circuiti senza memoria a cui è dedicato il presente capitolo ed al metodo dei nodi.

Lo schema a grandi linee del programma di calcolo automatico sviluppato è quello mostrato in fig. II.7.3.

Per quanto riguarda il blocco I (ingresso dati), per esso si rimanda al § I.11 con l'avvertenza che nel nostro caso non sono presi in considerazione gli elementi con memoria, cioè condensatori ed induttori. I componenti previsti sono perciò: resistori, generatori indipendenti dei due tipi, generatori di corrente controllati in tensione e nullori.

Per quanto riguarda il blocco S (determinazione del si-

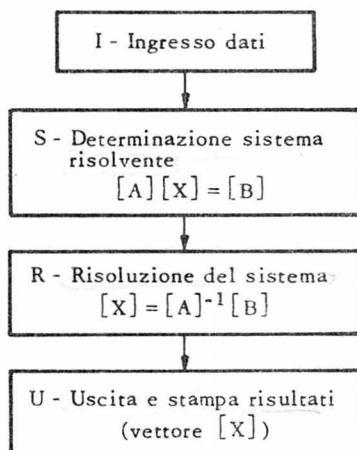


Fig. II.7.3 - Schema a grandi linee del programma di calcolo automatico considerato.

(1) - Nell'appendice II.B viene fornita la traduzione in FORTRAN del programma presentato in questo paragrafo mediante schemi a blocchi. Inoltre numerosi esempi numerici, ottenuti con tale programma, sono riportati nell'appendice II.C.

stema risolvante), esso rappresenta la parte centrale del metodo di analisi e verrà sviluppato di seguito, mentre per il blocco R (risoluzione del sistema) si rimanda all'appendice II.A. Il blocco U, infine, non presenta difficoltà.

Per ottenere il sistema risolvante su base nodi occorre inizialmente scegliere il nodo di riferimento. Per un circuito avente ND nodi, numerati da 1 fino ad ND , tale problema equivale a scegliere uno qualunque di tali nodi ed, essendo la numerazione arbitraria, prenderemo nel seguito come nodo di riferimento quello indicato con il numero più alto, cioè ND . Tale scelta dà la possibilità di fissare a priori il nodo di riferimento quando si effettua l'ingresso dei dati.

Il numero delle incognite è uguale al numero delle tensioni dei nodi escluso quello di riferimento, cioè:

(II.7.1)

$$N = ND - 1$$

Il numero delle equazioni è anch'esso pari ad N e corrisponde alle equazioni di equilibrio delle correnti uscenti dai vari nodi con la esclusione di quello di riferimento.

In presenza di generatori di tensione l'ordine del sistema deve essere aumentato. Precisamente, per ogni generatore di tensione occorre aggiungere una incognita (corrente nel generatore di tensione) ed una equazione (equazione di vincolo). Detto pertanto NT il numero dei generatori di tensione, l'ordine del sistema è in questo caso:

(II.7.2)

$$NA = N + NT$$

Un ulteriore incremento all'ordine del sistema deve essere considerato in presenza di nullori. Precisamente ogni nullore dà luogo ad una ulteriore incognita (corrente nel nullatore) ed a un ulteriore vincolo (tensione nulla ai capi del nullatore). Detto pertanto NN il numero dei nullori, l'ordine totale del sistema è pari a:

(II.7.3)

$$NB = NA + NN$$

Il sistema risolvante ha di conseguenza la struttura indicata in fig.II.7.4. Esso verrà determinato operando riga per riga e procedendo secondo lo schema di flusso mostrato in fig.II.7.5, che rappresenta una descrizione dettagliata del blocco S di fig.II.7.3. Tale schema consiste in un ciclo percorso N volte ($K = 1, 2, \dots, N$) nel quale vengono determinate le N equazioni relative all'equilibrio delle correnti nei nodi ed in due blocchi aggiuntivi, nei quali sono determinate le equazioni di vincolo. Da notare che è stata prevista l'esclusione dei blocchi S2 ed S4, relativi ai generatori di tensione, in assenza di tali componenti ($NT = 0$) e l'esclusione dei blocchi S3 ed S5, relativi ai nullori, in assenza di tali componenti ($NN = 0$).

	Termini noti	Incognite uguali alle tensioni dei nodi	Incognite uguali alle correnti dei generatori di tensione	Incognite uguali alle correnti dei noratori
Equazioni di equilibrio correnti nei nodi	$B_1 =$ $\dots$ $B_N =$	$A_{1,1} E_1 + \dots A_{1,N} E_N +$ $\dots$ $A_{N,1} E_1 + \dots A_{N,N} E_N +$	$A_{1,N+1} I_{T1} + \dots A_{1,NA} I_{TNT} +$ $\dots$ $A_{N,N+1} I_{T1} + \dots A_{N,NA} I_{TNT} +$	$A_{1,NA+1} I_{N1} + \dots A_{1,NB} I_{NN}$ $\dots$ $A_{N,NA+1} I_{N1} + \dots A_{N,NB} I_{NN}$
Equazioni di vincolo generatori di tensione	$VT_1 =$ $\dots$ $VT_{NT} =$	$E_{J,1} - E_{K,1}$ $\dots$ $E_{J,NT} - E_{K,NT}$		
Equazioni di vincolo nullori	$0 =$ $\dots$ $0 =$	$E_{I,1} - E_{M,1}$ $\dots$ $E_{I,NN} - E_{M,NN}$		

Fig. II.7.4 - Sistema di equazioni, in cui: E_K , $K = 1, \dots, N$ sono le tensioni dei nodi indipendenti; I_{T_K} , $K = 1, \dots, \dots, NT$, sono le correnti dei generatori di tensioni e VT_K le relative tensioni impresse; I_{N_K} , $K = 1, 2, \dots, NN$ sono le correnti dei noratori.

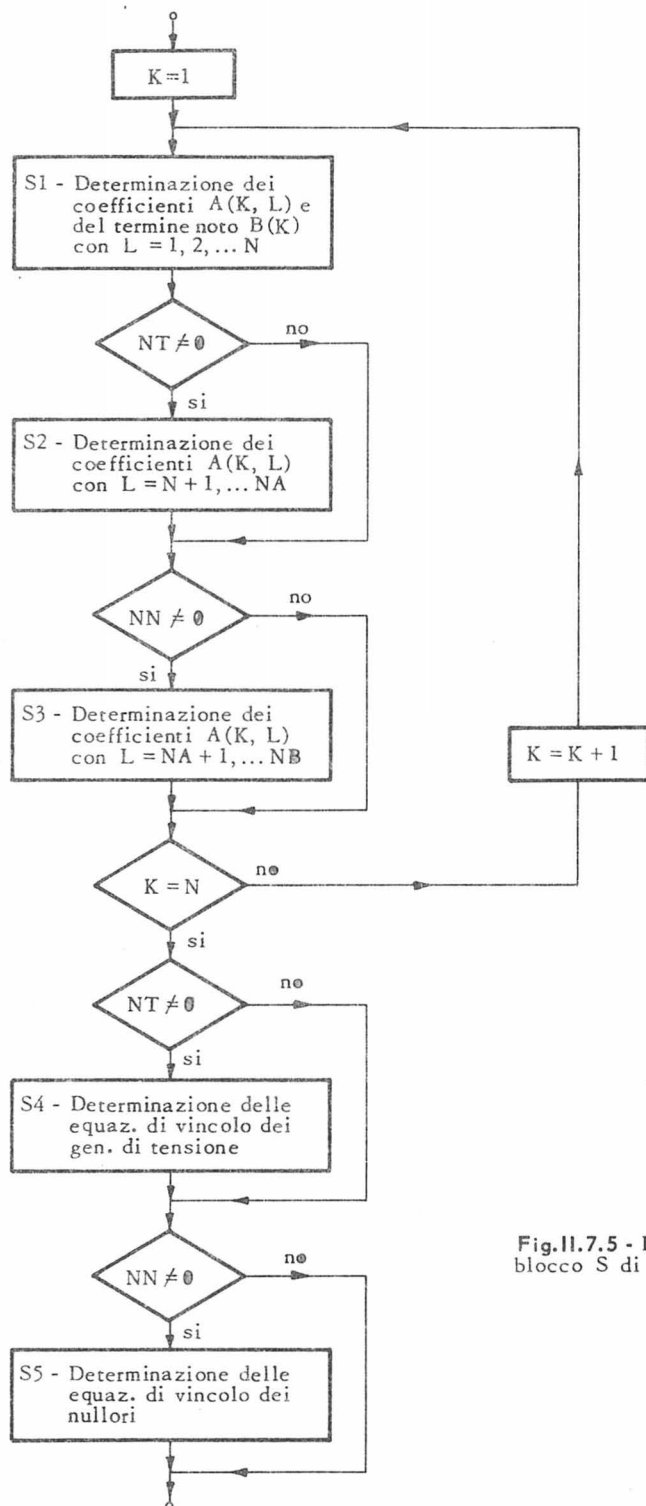


Fig.II.7.5 - Descrizione del blocco S di fig.II.7.3.

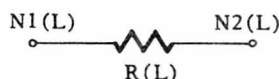
Vediamo in dettaglio la struttura dei vari blocchi presenti nello schema di fig.II.7.5.

Blocco S1.

Tale blocco è sempre presente nel diagramma di flusso. Ad esso contribuiscono i seguenti componenti: resistori, generatori indipendenti di corrente, generatori di corrente controllati in tensione.

a) *Resistori*. Occorre prevedere un ciclo che prenda in esame un resistore per volta. Consideriamo il resistore L-simo (fig.II.7.6). Si possono avere tre casi:

Fig.II.7.6 - Resistore generico.



1) $N1(L) = K$

Il resistore L-simo è connesso al nodo k-simo e quindi contribuisce alla k-sima equazione, che corrisponde all'equilibrio delle correnti uscenti dal nodo k-simo. I contributi in questione sono:

$$(II.7.4) \quad A(K, K) = A(K, K) + 1/R(L)$$

per la diagonale principale; inoltre, detto $K1$ l'altro nodo a cui è connesso il resistore L-simo, cioè:

$$(II.7.5) \quad K1 = N2(L)$$

si ha, nel caso in cui $K1 \neq ND$ (nodo di riferimento):

$$(II.7.6) \quad A(K, K1) = -1/R(L) + A(K, K1)$$

2) $N2(L) = K$

Il resistore è ancora connesso al nodo k-simo. In tal caso si hanno dei contributi analoghi a quelli già visti e cioè:

$$(II.7.7) \quad A(K, K) = A(K, K) + 1/R(L)$$

e posto:

$$(II.7.8) \quad K2 = N1(L)$$

se $K2 \neq ND$

$$(II.7.9) \quad A(K, K2) = -1/R(L) + A(K, K2)$$

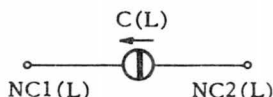
3) $N1(L) \neq K$ e $N2(L) \neq K$

In tal caso il resistore non è connesso al nodo k-simo e quindi non vi sono contributi alla k-sima equazione.

Nella fig.II.7.9 è riportato lo schema di calcolo completo per il caso dei resistori (blocco indicato con S11).

b) *Generatori di corrente indipendenti.* Occorre prevedere un ciclo che prenda in esame un generatore per volta. Consideriamo il generatore L-simo (fig.II.7.7). Si possono avere tre casi:

Fig.II.7.7 - Generatore indipendente di corrente generico.



$$1) \text{ NC1(L) = K}$$

In tal caso la corrente $C(L)$ entra nel nodo k-simo ed allora risulta:

$$(II.7.10) \quad B(K) = B(K) + C(L)$$

$$2) \text{ NC2(L) = K}$$

In tal caso la corrente $C(L)$ esce dal nodo k-simo e quindi risulta:

$$(II.7.11) \quad B(K) = B(K) - C(L)$$

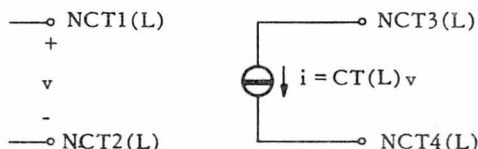
$$3) \text{ NC1(L) } \neq \text{ K e NC2(L) } \neq \text{ K}$$

In questo caso il generatore L-simo non contribuisce alla k-sima equazione.

Nella fig.II.7.9 è riportato lo schema di calcolo completo per il caso dei generatori di corrente (blocco S12).

c) *Generatori di corrente controllati in tensione.* Occorre prevedere un ciclo che prenda in esame un generatore controllato per volta. Consideriamo il generatore controllato L-simo (fig.II.7.8). Si possono avere tre casi:

Fig.II.7.8 - Generatore di corrente controllato in tensione generico.



$$1) \text{ NCT3(L) = K}$$

In tal caso la corrente i esce dal nodo k-simo. Quindi detti:

$$(II.7.12) \quad K1 = \text{NCT1(L)} \quad K2 = \text{NCT2(L)}$$

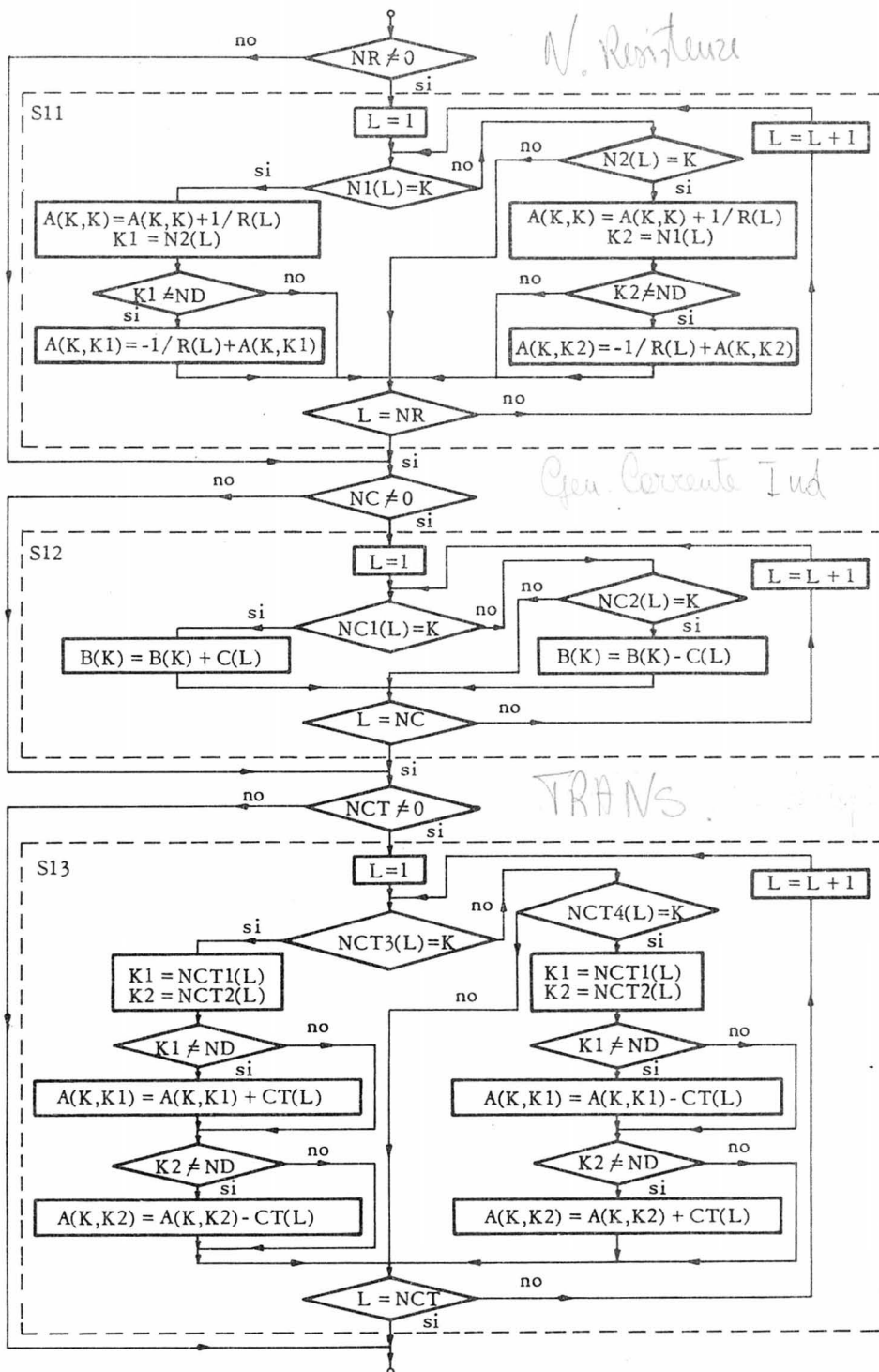


Fig.II.7.9 - Descrizione del blocco S1 di fig.II.7.5.

i nodi a cui è connesso il ramo di controllo, la corrente i vale:

$$(II.7.13) \quad i = CT(L) E(K1) - CT(L) E(K2)$$

e pertanto vi sono dei contributi alla matrice dei coefficienti $[A]$; precisamente, se $K1 \neq ND$, si ha:

$$(II.7.14) \quad A(K, K1) = A(K, K1) + CT(L)$$

se $K2 \neq ND$, si ha:

$$(II.7.15) \quad A(K, K2) = A(K, K2) - CT(L)$$

2) $NCT4(L) = K$

In tal caso la corrente i entra nel nodo k -simo. Analogamente al caso precedente, posto:

$$(II.7.16) \quad K1 = NCT1(L) \quad K2 = NCT2(L)$$

se $K1 \neq ND$, si ha:

$$(II.7.17) \quad A(K, K1) = A(K, K1) - CT(L)$$

se $K2 \neq ND$, si ha:

$$(II.7.18) \quad A(K, K2) = A(K, K2) + CT(L)$$

3) $NCT3(L) \neq K$ e $NCT4(L) \neq K$

In questo caso il generatore controllato considerato non dà contributo all'equazione k -sima.

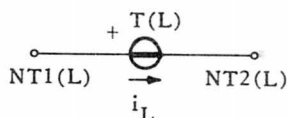
Nella fig. II.7.9 è riportato lo schema di calcolo completo per il caso dei generatori di corrente controllati in tensione (blocco S13).

Nel diagramma di flusso di fig. II.7.9 sono anche riportate delle parti accessorie, per verificare l'effettiva presenza dei resistori ovvero dei generatori indipendenti di corrente ovvero dei generatori controllati. Tali controlli sono effettuati, verificando che sia diverso da zero il numero di tali componenti, prima di entrare nel blocco relativo.

Blocco S2.

Tale blocco viene eseguito solo in presenza di generatori di tensione, come è indicato in fig. II.7.5. Occorre prevedere un ciclo che consideri ciascun generatore di tensione, uno per volta. Consideriamo il generatore di tensione L -simo (fig. II.7.10). Nella fig. II.7.10 è indicato il verso convenzionale della corrente incognita i_L , che percorre tale generatore. Si possono avere tre casi:

Fig.II.7.10 - Generatore di tensione generico.

a) $NT1(L) = K$

In questo caso la corrente i_L esce dal nodo k-simo e vi è quindi un contributo alla k-sima equazione. La corrente i_L rappresenta una nuova incognita e pertanto va posta dopo le N incognite coincidenti con le tensioni di nodo. A tale incognita assegniamo la colonna (N + L)-esima della matrice dei coefficienti. Perciò, posto:

$$(II.7.19) \quad NL = N + L$$

si ha:

$$(II.7.20) \quad A(K, NL) = 1$$

b) $NT2(L) = K$

Tale caso è del tutto analogo a quello precedente, salvo che la corrente i_L entra nel nodo k-simo. Perciò, si ha:

$$(II.7.21) \quad A(K, NL) = -1$$

c) $NT1(L) \neq K$ e $NT2(L) \neq K$

In tal caso non vi è contributo all'equazione k-sima ed è nullo di conseguenza il coefficiente dell'incognita i_L , posto in posizione

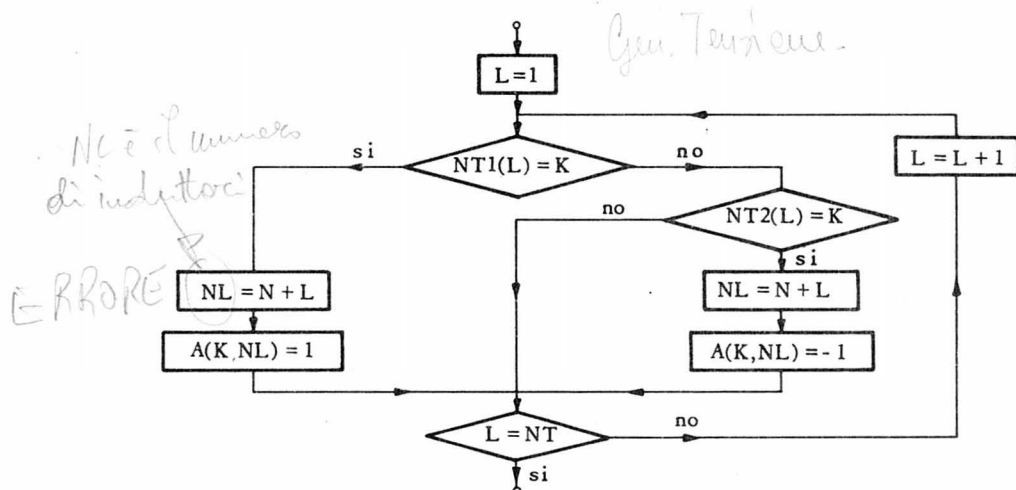


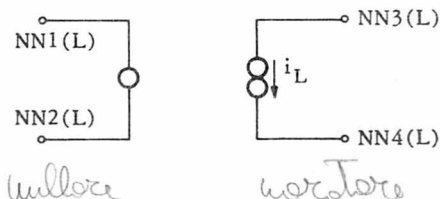
Fig.II.7.11 - Descrizione del blocco S2 di fig.II.7.5.

$A(K, NL)$; si supporrà implicitamente verificato tale fatto, avendo provveduto all'azzeramento preliminare di tutta la matrice A . Il diagramma di flusso completo del blocco S2 è riportato in fig.II.7.11.

Blocco S3.

Tale blocco viene eseguito solo in presenza di nullori. Occorre prevedere un ciclo che prenda in esame un nullore per volta. Consideriamo pertanto il nullore L-simo (fig.II.7.12). Nella fig.II.7.12 è anche indicato il verso positivo per la corrente i_L incognita, che scorre nel nortore. Si possono avere tre casi:

Fig.II.7.12 - Nullore generico.



a) $NN3(L) = K$

In questo caso la corrente i_L esce dal nodo k -simo. Si deve quindi portare in conto un contributo alla matrice $[A]$ simile a quanto fatto nel caso dei generatori di tensione. La posizione dell'incognita i_L deve essere considerata al di là delle N tensioni incognite di nodo e delle NT correnti incognite dei generatori di tensione. Perciò, posto:

$$(II.7.22) \quad \textcircled{NL} = NA + L$$

si ha:

$$(II.7.23) \quad A(K, NL) = 1$$

b) $NN4(L) = K$

Analogamente al caso precedente, si ha:

$$(II.7.24) \quad A(K, NL) = -1$$

c) $NN3(L) \neq K$ e $NN4(L) \neq K$

In questo caso non vi è alcun contributo alla matrice $[A]$.

Il diagramma di flusso del blocco S3 è riportato in figura II.7.13.

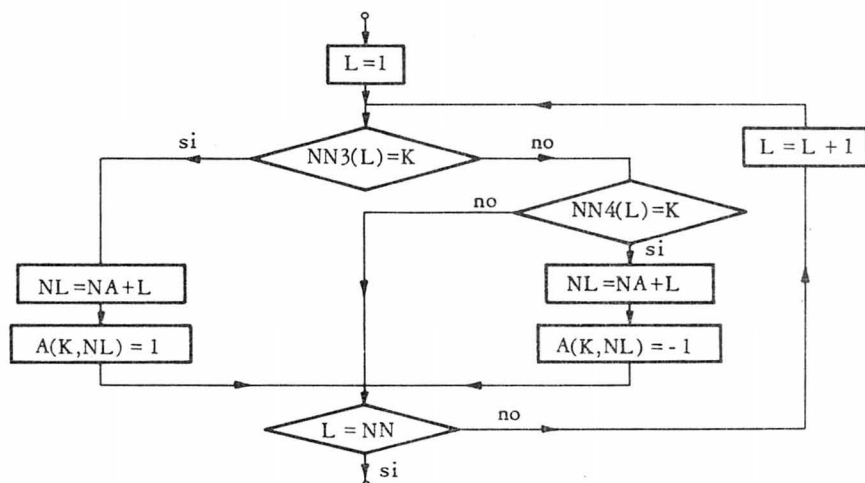


Fig.II.7.13 - Descrizione del blocco S3 di fig.II.7.5.

Blocco S4.

Il blocco S4 è relativo alla determinazione delle equazioni di vincolo imposte dai generatori di tensione. Considerando un ciclo esteso a tutti questi generatori, esaminiamo in dettaglio l'equazione relativa al generato L-simo (fig.II.7.10). Tale equazione corrisponde alla riga $NL = N + L$ della matrice A ed all'elemento NL del vettore dei termini noti B. Indicando con:

$$(II.7.25) \quad \begin{aligned} K1 &= NT1(L) \\ K2 &= NT2(L) \end{aligned}$$

i nodi a cui è connesso il generatore, l'equazione di vincolo corrispondente assume una delle tre seguenti forme, a seconda che K1 e K2 siano uguali o diversi dal nodo di riferimento ND. Precisamente, si ha:

- se $K1 \neq ND$ e $K2 \neq ND$

$$(II.7.26) \quad E(K1) - E(K2) = T(L)$$

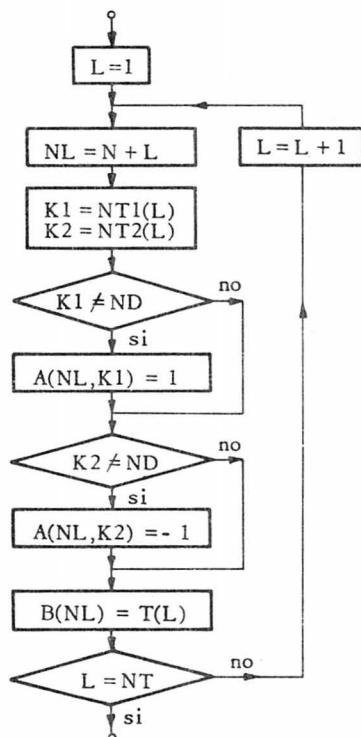


Fig.II.7.14 - Descrizione del blocco S4 di fig.II.7.5.

- se $K1 = ND$

$$(II.7.27) \quad E(K2) = -T(L)$$

- se $K2 = ND$

$$(II.7.28) \quad E(K1) = T(L)$$

Con $T(L)$ si è indicato il valore della tensione impressa. Tenendo conto delle equazioni (II.7.26), (II.7.27), (II.7.28), il diagramma di flusso del blocco S4 risulta quello riportato in fig.II.7.14.

Blocco S5.

Il blocco S5 è relativo alla determinazione delle equazioni di vincolo imposte dai nullori. Tali equazioni esprimono il fatto che la tensione ai capi di ciascun nullatore è uguale a zero. In un ciclo esteso a tutti i nullori, esaminiamo l'equazione di vincolo relativa al nullore L-simo. Tale equazione corrisponde alla riga $NL = NA + L$ della matrice A ed all'elemento NL del vettore B dei termini noti.

La struttura delle equazioni è identica a quella vista nel caso dei generatori di tensione (eq.II.7.26 - II.7.28), salvo il fatto che in questo caso $T(L) = 0$.

Pertanto il diagramma di flusso relativo al blocco S5 è quello riportato in fig.II.7.15, essendo sottinteso l'azzeramento preliminare del vettore B.

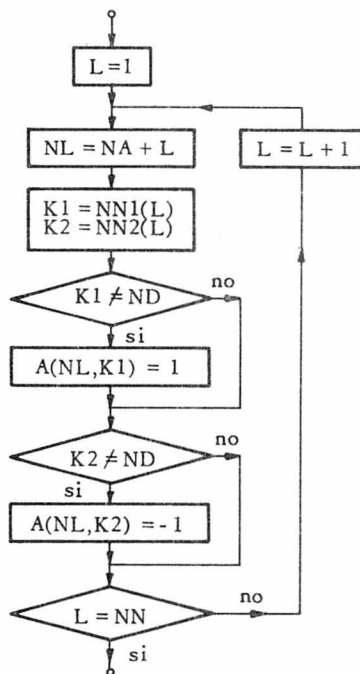


Fig.II.7.15 - Descrizione del blocco S5 di fig.II.7.5.

*

APPENDICI AL CAPITOLO II

APPENDICE II.A – Introduzione alla soluzione dei sistemi di equazioni lineari.

L'analisi di un circuito resistivo prevede sempre come ultimo passo la soluzione di un sistema di N equazioni lineari a coefficienti reali in N incognite. La soluzione del sistema di equazioni può risultare di difficile ed incerta determinazione per ragioni numeriche, legate essenzialmente al numero di cifre utilizzate per rappresentare le quantità in gioco. Ciò dipende da due fattori: 1) malcondizionamento della matrice dei coefficienti; 2) valore eccessivo di N . Nel seguito esporremo alcune nozioni preliminari ed introduttive relative all'uso del calcolatore in questo ambito, rimandando ai testi citati nell'appendice II.D per l'eventuale approfondimento.

11.A.1 - Descrizione dello schema a blocchi del metodo di eliminazione di Gauss.

Tenendo conto del carattere introduttivo di questa appendice, limitiamo l'attenzione al noto metodo di eliminazione di Gauss per la soluzione di un sistema di equazioni lineari. Esso consiste nel ridurre passo per passo le incognite presenti, eliminandole una dopo l'altra. Sia il sistema in esame rappresentato mediante la:

[illegible]

Supponendo $a_{11} \neq 0$, ricaviamo dalla prima equazione:

$$(II. A. 2) \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \dots a_{1N}x_N}{a_{11}}$$

Sostituendo tale valore nelle ultime $N - 1$ equazioni, si ottiene il nuovo sistema di $N - 1$ equazioni nelle incognite $x_2 \dots x_N$, cioè:

$$(II. A. 3) \quad \left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \dots \left(a_{2N} - a_{21} \frac{a_{1N}}{a_{11}} \right) x_N = b_2 - a_{21} \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left(a_{N2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{N1} \right) x_2 + \dots \left(a_{NN} - \frac{a_{1N}}{a_{11}} a_{N1} \right) x_N = b_N - \frac{a_{N1} b_1}{a_{11}}$$

Eliminando quindi una alla volta le incognite, si giunge al sistema equivalente di equazioni:

$$(II. A. 4) \quad \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 \dots + a_{1N}^{(1)} x_N &= b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 \dots + a_{2N}^{(2)} x_N &= b_2^{(2)} \\ &\vdots \\ &\dots \\ x_N &= b_N^{(N)} \end{aligned}$$

in cui il coefficiente (j, k) del sistema di equazioni ottenuto nel passo i -esimo vale, indicando con lo zero il sistema iniziale (II. A. 1):

$$(II. A. 5) \quad \begin{aligned} a_{ik}^{(i)} &= \frac{a_{ik}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad ; \quad b_i^{(i)} = \frac{b_i^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad i = 1, 2, \dots, N \\ &\quad j, k = i + 1, i + 2, \dots, N \end{aligned}$$

$$a_{jk}^{(i)} = a_{jk}^{(i-1)} - \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}} a_{ik}^{(i-1)}$$

$$b_j^{(i)} = b_j^{(i-1)} - \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}} b_i^{(i-1)}$$

Mettiamo sotto forma di schema a blocchi il procedimento precedente (fig. II. A. 1). I dati di ingresso sono la matrice dei coefficienti $[A]$ e il vettore dei termini noti $[B]$. Dall'esame dello schema a blocchi si

vede che dopo l'esecuzione risulta: $[A]$ coincidente, a parte gli elementi sulla diagonale principale, con la matrice dei coefficienti dell'ultimo sistema di equazioni, cioè il (II.A.4), e $[B]$ contiene la soluzione, cioè $B(k) = x_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

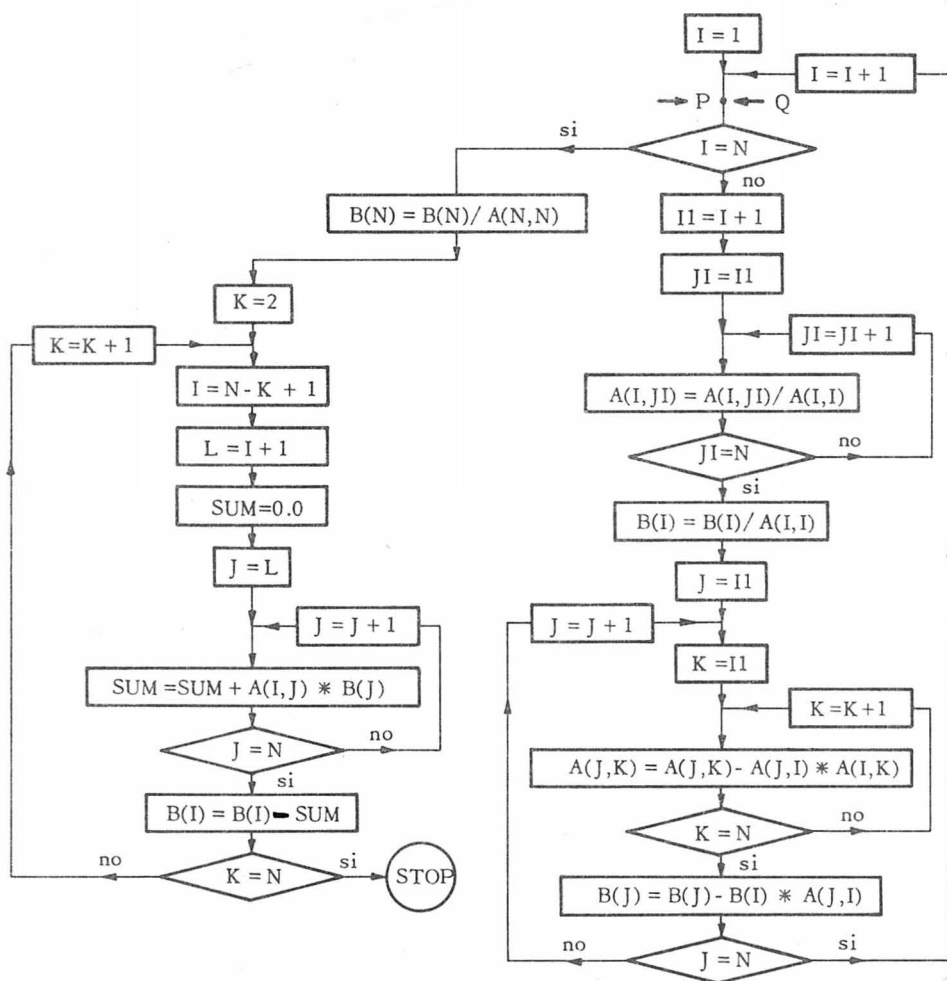


Fig.II.A.1 - Schema a blocchi del metodo di eliminazione di Gauss per la soluzione di un sistema di equazioni lineari.

II.A.2 - Inconvenienti connessi con il metodo di eliminazione di Gauss.

Il calcolatore lavora con un numero limitato di cifre; quindi le operazioni aritmetiche effettuate sono affette da errore. Ad esempio risolvendo il seguente sistema di equazioni con cinque cifre significative in virgola fissa:

$$0,00034x_1 + 56,231x_2 = 0,0647$$

$$1,0112x_1 + 3,1334x_2 = -0,7259$$

si ottiene:

$$x_1 = 0,09150$$

$$x_2 = 0,00115$$

al posto della soluzione esatta:

$$x_1 = -0,53527$$

$$x_2 = 0,001151066$$

che si ottiene lavorando in doppia precisione (quindici cifre significative). Una riduzione dell'effetto della limitatezza delle cifre si ottiene riordinando le equazioni nel sistema assegnato in modo da evitare la divisione per numeri piccoli (nello schema di fig.II.A.2 è stato scelto uguale a 10^{-10} il limite inferiore oltre il quale non andare con le divisioni).

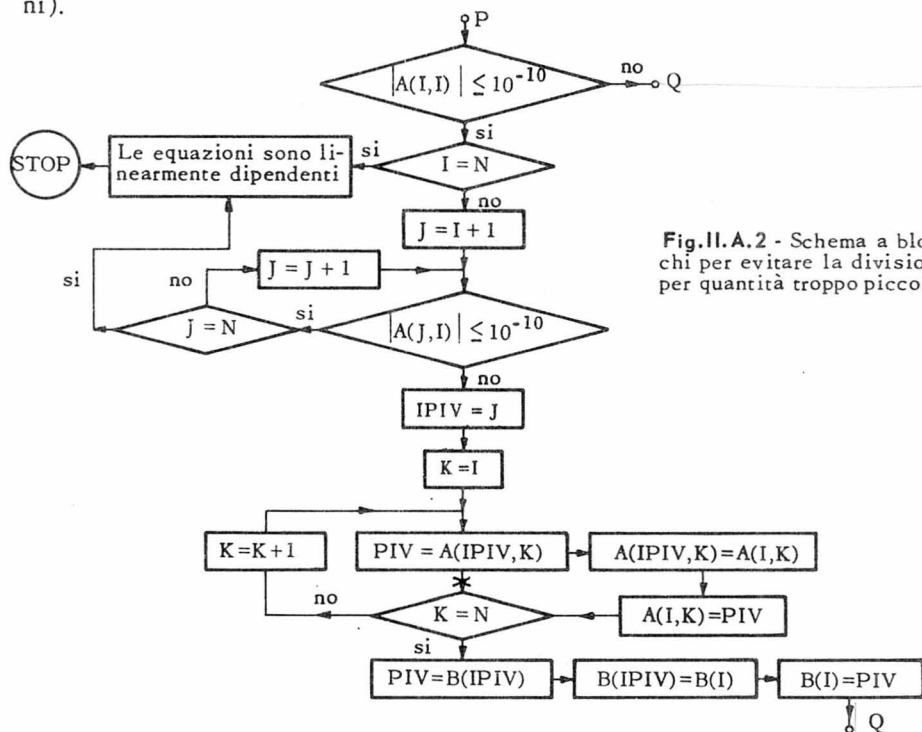


Fig.II.A.2 - Schema a blocchi per evitare la divisione per quantità troppo piccole.

Tale riordinamento è assolutamente necessario quando il coefficiente per cui occorre dividere è nullo. Occorre inoltre notare che il riordinamento è sempre possibile, eccetto il caso in cui le equazioni non sono linearmente indipendenti.

Le osservazioni precedenti vanno incorporate nel programma, che di conseguenza si modifica come appresso indicato. La modifica nel sottoprogramma GAUSS viene introdotta inserendo in un ramo dello schema di fig.II.A.1 un opportuno insieme di blocchi. Nel ramo in questione sono indicati esplicitamente i punti P e Q terminali del nuovo insieme di blocchi, riportato in fig.II.A.2, che va perciò esaminato congiuntamente con quello di fig.II.A.1.

La traduzione in FORTRAN degli schemi a blocchi considerati nella presente appendice è riportata nell'appendice II.B. L'utilizzazione di tale programma in esempi numerici è fatta in connessione con l'applicazione del programma di analisi descritto in tale appendice. I risultati sono riportati in dettaglio nell'appendice II.C.

APPENDICE II.B - Programma NODI⁽¹⁾.

Nella presente appendice viene riportata la lista in FORTRAN del programma NODI, che permette di analizzare un circuito senza memoria costituito da resistori, generatori indipendenti dei due tipi, generatori di corrente controllati in tensione e nullori, nell'ipotesi che le grandezze impresse siano indipendenti dal tempo e coincidenti con quantità reali. Tale programma è la traduzione fedele del metodo automatico di analisi descritto nel § II.7 mediante schemi a blocchi⁽²⁾. La subroutine GAUSS, chiamata in questo programma per la soluzione del sistema risolvete di equazioni, è a sua volta la traduzione fedele del metodo di eliminazione di Gauss, descritto mediante uno schema a blocchi nell'appendice II.A.

Di seguito precisiamo: 1) il modo in cui debbono essere presentati al calcolatore i dati che descrivono il circuito; 2) le stampe di uscita del calcolatore.

(1) - È importante tenere presente che il programma descritto in questa appendice è ad un livello elementare ed introduttivo. In particolare, la forma in cui debbono essere presentati i dati di ingresso è intuitiva ma onerosa. Per un approfondimento su questo punto si rimanda ai testi specializzati elencati in appendice II.D.

(2) - Per comodità di programmazione, le istruzioni relative al presente metodo di analisi sono state suddivise in un programma principale, denominato «NODI» ed una subroutine denominata «NODI 1».

Nell'appendice II.C verranno riportati vari esempi di applicazione di questo programma; in particolare per ogni esempio verranno mostrate le schede di ingresso dati e le stampe di uscita.

II.B.1 - Dati di ingresso⁽³⁾.

Le schede che formano l'ingresso di ogni problema che si vuole risolvere con il programma NODI sono nell'ordine:

a) Una scheda dati nella quale vengono assegnate nell'ordine le seguenti quantità:

- il numero dei nodi ND
- il numero dei resistori NR
- il numero dei generatori di corrente NC
- il numero dei generatori di tensione NT
- il numero dei generatori controllati NCT
- il numero dei nullori NN

Il formato d'ingresso è il seguente: 6I3.

b) Una scheda dati per ogni resistore, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della resistenza;
- il primo nodo a cui il resistore è connesso;
- il secondo nodo a cui il resistore è connesso.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

c) Una scheda dati per ogni generatore di corrente, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della corrente impressa;
- il nodo in cui entra la corrente impressa;
- il nodo da cui esce la corrente impressa.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

d) Una scheda dati per ogni generatore di tensione, nella quale viene indicato, nell'ordine:

(3) - Per maggior chiarezza si consiglia di esaminare contemporaneamente alla lettura di questo paragrafo uno degli esempi riportati nel § II.C.2.

- il valore della tensione impressa;
- il nodo corrispondente al morsetto positivo;
- il secondo nodo a cui è connesso il generatore.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

e) Una scheda dati per ogni generatore di corrente controllato in tensione, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della conduttanza di trasferimento;
- il nodo corrispondente al morsetto positivo del controllo;
- il nodo corrispondente al morsetto negativo del controllo;
- il nodo da cui esce la corrente del generatore;
- il nodo in cui entra la corrente del generatore.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 4I3.

f) Una scheda dati per ogni nullore, nella quale sono indicati nell'ordine i seguenti nodi:

- primo nodo a cui è connesso il nullatore;
- secondo nodo a cui è connesso il nullatore;
- primo nodo a cui è connesso il noratore;
- secondo nodo a cui è connesso il noratore.

Il formato d'ingresso è il seguente: 4I3.

Uno o più settori relativi ai dati d'ingresso, indicati nei punti b), c), d), e), f) possono essere omessi, qualora non sia presente alcun componente del tipo considerato.

II.B.2 - Dati in uscita.

Prima di presentare i dati relativi alla soluzione del circuito, vengono stampati, a scopo di controllo, i dati d'ingresso relativi al circuito stesso.

I dati di uscita, relativi alla soluzione del circuito sono i seguenti:

- a) tensioni dei nodi del circuito, rispetto al nodo di riferimento (nodo ND);
- b) correnti relative ai generatori di tensione eventualmente presenti. Il verso di ognuna di tali correnti è scelto convenzionalmente dal morsetto positivo verso l'altro morsetto (fig. II. 7. 10);

c) correnti relative ai noratori eventualmente presenti. Il verso di tale corrente è scelto convenzionalmente dal primo al secondo morsetto a cui è connesso il noratore stesso (fig.II.7.12).

Nel caso in cui si verificassero inconvenienti nel corso della soluzione del sistema di equazioni da parte del sottoprogramma GAUSS, viene interrotta l'elaborazione e viene effettuata la stampa di controllo:

LE EQUAZIONI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

II.B.3 - Lista del programma.

```

1      C      PROGRAMMA NODI
2      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
3      DIMENSION A(60,60),B(60)
4      DIMENSION R(100),N1(100),N2(100)
5      DIMENSION C(10),NC1(10),NC2(10)
6      DIMENSION T(10),NT1(10),NT2(10)
7      DIMENSION CT(20),NCT1(20),NCT2(20),NCT3(20),NCT4(20)
8      DIMENSION NN1(20),NN2(20),NN3(20),NN4(20)
9
10     C
11     C
12     C
13     READ(5,1) NO,NR,NC,NT,NCT,NN
14     1      FORMAT(6I3)
15     WRITE(6,2) NO,NR,NC,NT,NCT,NN
16     2      FORMAT(1H0,5X,'CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI=',I3/
17     *6X,'NUMERO RESISTORI=',I3/
18     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE=',I3/
19     *6X,'NUMERO GENERATORI DI TENSIONE=',I3/
20     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.=',I3/
21     *6X,'NUMERO NULLORI=',I3//)
22     IF(NR)11,11,12
23     12     READ(5,3)(R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
24     3      FORMAT (D10.3,2I3)
25     WRITE(6,4)(L,R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
26     4      FORMAT(1X,'RES.N.',I3,D12.3,2I4)
27     11     CONTINUE
28     IF(NC)13,13,14
29     14     READ(5,3)(C(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
30     WRITE(6,5)(L,C(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
31     5      FORMAT(1X,'G.CORR.N.',I3,D12.3,2I4)
32     13     CONTINUE
33     IF(NT)15,15,16
34     16     READ(5,3)(T(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
35     WRITE(6,6)(L,T(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
36     6      FORMAT(1X,'GEN.TENSIONE: N.',I3,D12.3,2I4)
37     15     CONTINUE
38     IF(NCT)17,17,18
39     18     READ(5,7)(CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
40     7      FORMAT(D10.3,4I3)
41     WRITE(6,8)(L,CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
42     8      FORMAT(1X,'GEN.CONTR.TENS.N:',I3,D12.3,4I3)
43     17     CONTINUE
44     IF(NN)20,20,19
45     19     READ(5,9)(NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
46     9      FORMAT(4I3)
47     WRITE(6,10)(L,NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
48     20     CONTINUE
49     10     FORMAT(1X,'NULLORE N:',I3,2X,4I3)
50     N=NO-1
51     NA=N+NT
52     NB=NA+NN

```

(segue)

```

53      C      CALL NODI1(A,B,N,NA,NB,ND,R,N1,N2,NR,CT,NCT1,NCT2,NCT3,
54      *      NCT4,NCT,T,NT1,NT2,NT,C,NC1,NC2,NC,NN1,NN2,
55      *      NN3,NN4,NN)
56
57      C
58      C      STAMPA DEI RISULTATI
59      WRITE(6,210)ND
60      210  FORMAT(1H0,5X,'SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO')
61      *6X,'TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO ',I3)
62      DO212L=1,N
63      WRITE(6,214)LL,B(L)
64      214  FORMAT(1X,'TENSIONE NODO ',I3,' = ',D15.5)
65      212  CONTINUE
66      IF(NT)216,216,218
67      218  WRITE(6,220)
68      220  FORMAT(1H0,5X,'CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE')
69      DO222L=ND,NA
70      LL=L-N
71      WRITE(6,224)LL,B(L)
72      224  FORMAT(1X,'CORRENTE GEN. ',I3,' = ',D15.5)
73      222  CONTINUE
74      216  IF(NN)226,226,228
75      228  WRITE(6,230)
76      230  FORMAT(1H0,5X,'CORRENTI NEI NORATORI')
77      NY=NA+1
78      DO232L=NY,NB
79      LL=L-NA
80      WRITE(6,234)LL,B(L)
81      234  FORMAT(1X,'CORRENTE NOR. ',I3,' = ',D15.5)
82      232  CONTINUE
83      226  CONTINUE
84
85      C
86      C      STOP
87      END

```

```

1      SUBROUTINE NODI1(A,B,N,NA,NB,ND,R,N1,N2,NR,CT,NCT1,NCT2,NCT3,
2      *      NCT4,NCT,T,NT1,NT2,NT,C,NC1,NC2,NC,NN1,NN2,
3      *      NN3,NN4,NN)
4      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
5      DIMENSION A(60,60),B(60)
6      DIMENSION R(1),N1(1),N2(1)
7      DIMENSION C(1),NC1(1),NC2(1)
8      DIMENSION T(1),NT1(1),NT2(1)
9      DIMENSION CT(1),NCT1(1),NCT2(1),NCT3(1),NCT4(1)
10     DIMENSION NN1(1),NN2(1),NN3(1),NN4(1)
11
12     C
13     C      AZZERAMENTI
14     DO 30 L=1,NB
15     31  A(L,LL)=0.00
16     B(L)=0.00
17     30  CONTINUE
18     C      CICLO SUI NODI
19     DO 40 K=1,N
20     C      RESISTORI
21     C
22     IF(NR)42,42,43
23     43  DO 44 L=1,NR
24     IF(N1(L)-K)130,46,130
25     46  A(K,K)=A(K,K)+1.00/R(L)
26     K1=N2(L)
27     IF(K1.LT.ND) A(K,K1)=-1.00/R(L)+A(K,K1)
28     GO TO 45
29     130 IF(N2(L)-K)45,47,45

```

(segue)

```

30      47  A(K,K)=A(K,K)+1.00/R(L)
31      K2=N1(L)
32      IF(K2.LT.ND) A(K,K2)=-1.000/R(L)+A(K,K2)
33      45  CONTINUE
34      44  CONTINUE
35      42  CONTINUE
36      C   GEN.CORR.CONTR.IN TENSIONE
37      C
38      IF(NCT)48,48,49
39      49  DO 50 L=1,NCT
40      K1=NCT1(L)
41      K2=NCT2(L)
42      IF(NCT3(L)-K)52,51,52
43      51  IF(K1.LT.ND) A(K,K1)=A(K,K1)+CT(L)
44      IF(K2.LT.ND) A(K,K2)=A(K,K2)-CT(L)
45      52  IF(NCT4(L)-K)54,53,54
46      53  IF(K1.LT.ND) A(K,K1)=A(K,K1)-CT(L)
47      IF(K2.LT.ND) A(K,K2)=A(K,K2)+CT(L)
48      54  CONTINUE
49      50  CONTINUE
50      48  CONTINUE
51      C   GEN. TENSIONE
52      C
53      IF(NT)58,58,59
54      59  DO 60 L=1,NT
55      IF(NT1(L)-K)62,61,62
56      61  NL=N+L
57      A(K,NL)=1.00
58      IF(NT2(L)-K)64,63,64
59      63  NL=N+L
60      A(K,NL)=-1.00
61      64  CONTINUE
62      60  CONTINUE
63      58  CONTINUE
64      C   NULLORI
65      C
66      IF(NN)68,68,69
67      69  DO 70 L=1,NN
68      IF(NN3(L)-K)72,71,72
69      71  NL=NA+L
70      A(K,NL)=1.00
71      IF(NN4(L)-K)74,73,74
72      73  NL=NA+L
73      A(K,NL)=-1.00
74      74  CONTINUE
75      70  CONTINUE
76      68  CONTINUE
77      C   GEN. DI CORRENTE
78      C
79      IF(NC)78,78,79
80      79  DO 80 L=1,NC
81      IF(NC1(L)-K)82,81,82
82      81  B(K)=B(K)+C(L)
83      IF(NC2(L)-K)84,83,84
84      83  B(K)=B(K)-C(L)
85      84  CONTINUE
86      80  CONTINUE
87      78  CONTINUE
88      C
89      40  CONTINUE
90      C   EQUAZIONI AGGIUNTIVE GENERATORI TENSIONE
91      IF(NT)110,110,111
92      111 DO 112 L=1,NT

```

(segue)

```

93      NL=N+L
94      K1=NT1(L)
95      K2=NT2(L)
96      IF(K1.LT.ND) A(NL,K1)=1.D0
97      IF(K2.LT.ND) A(NL,K2)=-1.D0
98      B(NL)=T(L)
99      112 CONTINUE
100     110 CONTINUE
101     C   EQUAZIONI AGGIUNTIVE NULLORI
102     C
103      IF(NN)120,120,121
104     121 DO 123 L=1,NN
105          NL=NA+L
106          K1=NN1(L)
107          K2=NN2(L)
108          IF(K1.LT.ND) A(NL,K1)=1.D0
109          IF(K2.LT.ND) A(NL,K2)=-1.D0
110     123 CONTINUE
111     120 CONTINUE
112      CALL GAUSS(NB,A,B)
113     C
114      RETURN
115      END

```

```

1      SUBROUTINE GAUSS(N,A,B)
2      DIMENSION A(60,60),B(60)
3      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
4      C   WRITE (6,103) N,((A(I,J),I=1,N),J=1,N),(B(I),I=1,N)
5     103 FORMAT(5X,'SISTEMA DI EQUAZIONI'//5X,'ORDINE N=',I2//
6          *5X,'MATRICE DEI COEFFICIENTI'//5X,'(1X,4D15.5)')
7      IF(N.GT.60) STOP
8      I=1
9      8   AB=0ABS(A(I,I))
10      I1=I+1
11      IF(AB.LE.1.0D-10) GO TO 20
12      9   DO 11 J=I1,N
13      11   A(I,J1)=A(I,J1)/A(I,I)
14      B(I)=B(I)/A(I,I)
15      DO 10 J=I1,N
16      DO 12 K=I1,N
17      12   A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K)
18      10   B(J)=B(J)-B(I)*A(J,I)
19      I=I+1
20      IF (I.LT.N) GO TO 8
21      AB=0ABS(A(N,N))
22      IF(AB.LE.1.0D-10)GOTO40
23      B(N)=B(N)/A(N,N)
24      DO 30 K=2,N
25      I=N-K+1
26      L=I+1
27      SUM=0.0
28      DO 31 J=L,N
29      31   SUM=SUM+A(I,J)*B(J)
30      30   B(I)=B(I)-SUM
31     C   WRITE (6,101) (B(I),I=1,N)
32     101 FORMAT(5X,'SOLUZIONE'//5X,'(1X,4D15.5)')
33      RETURN

```

(segue)

```

34      20 IF (I.GE.N) GO TO 40
35      DO 41 J=I,N
36      AB=DABS(A(J,I))
37      IF (AB-1.0D-10) 42,42,43
38      42 IF (J.EQ.N) GO TO 40
39      41 CONTINUE
40      43 DO 44 K=I,N
41      PIV=A(J,K)
42      A(J,K)=A(I,K)
43      44 A(I,K)=PIV
44      PIV=B(J)
45      B(J)=B(I)
46      B(I)=PIV
47      GO TO 9
48      40 WRITE (6,102)
49      102 FORMAT(5X,'LE EQUAZIONI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI')
50      STOP
51      END

```

APPENDICE II.C - Esempi.

Nella presente appendice riportiamo vari esempi di applicazione dei metodi descritti in questo capitolo. La maggior parte degli esempi riguarda circuiti contenenti transistori, considerati nel loro funzionamento lineare ed in assenza di elementi reattivi. I transistori s'intendono polarizzati opportunamente e sostituibili con il loro circuito equivalente in bassa frequenza. (Nei casi considerati si prescinde usualmente dal circuito di polarizzazione).

Gli esempi sono divisi in due gruppi. Il primo gruppo riguarda i circuiti analizzati manualmente ed in cui interessa l'espressione esplicita delle grandezze incognite in funzione dei valori dei componenti, indicati simbolicamente. Il secondo gruppo riguarda circuiti più complessi, in cui si utilizza il programma di analisi riportato in appendice II.B.

II.C.1 - Esempi del primo gruppo⁽¹⁾.

Negli esempi considerati si suppone che il transistor sia polarizzato opportunamente e sia sostituibile con lo schema di fig.I.9.3, che si riporta per comodità in fig.II.C.1. I valori numerici di tale figura si riferiscono ai valori tipici del transistor AC 125 della Philips Elcona nelle condizioni di polarizzazione considerate nel § I.9.

(1) - I tre esempi di questo gruppo forniscono gli elementi di base degli schemi amplificatori a transistori. Si veda ad esempio il § XI.6 di J. Millman, C.C. Halkias, « Electronic devices and circuits », Mc Graw-Hill, 1967.

In ogni esempio considereremo sia l'espressione simbolica esatta della grandezza elettrica richiesta, sia l'eventuale espressione approssimata, sia il valore numerico relativo al caso del transistor AC125 suddetto.

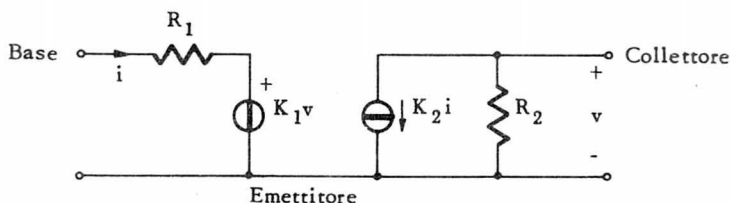


Fig.II.C.1 - Schema equivalente del transistor. I valori dei componenti sono nel caso dell'AC125 della Philips Elcona: $R_1 = 1,7 \text{ K}\Omega$, $R_2 = 100/8 \text{ K}\Omega$, $K_1 = 6,5 \cdot 10^{-4}$, $K_2 = 125$.

Esempio II.C.1

Determinare nello stadio amplificatore in bassa frequenza costituito da un transistor con emettitore a massa le resistenze di ingresso e di uscita, i guadagni di tensione e di corrente, definiti come precisato in tab.II.C.1.

Per ricavare le grandezze richieste consideriamo il circuito di fig.II.C.2, ottenuto sostituendo al transistor lo schema di fig.II.C.1 e chiudendo opportunamente i lati di base e collettore.

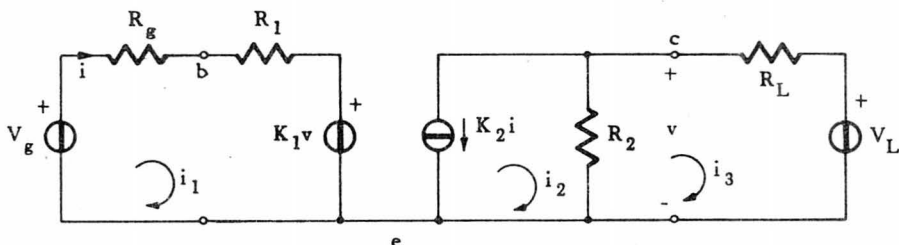


Fig.II.C.2 - Circuito relativo al transistor con emettitore a massa.

Analizziamo tale circuito su base maglie, introducendo le relazioni costitutive dei generatori controllati:

$$\begin{cases} V_g = K_1 v + (R_1 + R_g) i_1 \\ -V_L = R_2 (i_3 - i_2) + R_L i_3 \\ v = R_2 (i_2 - i_3) \end{cases} \quad i_2 = -K_2 i_1$$

Eliminando i_2 e v , si ottiene:

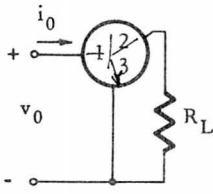
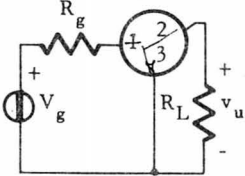
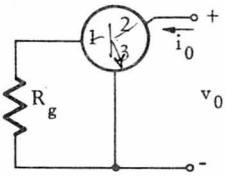
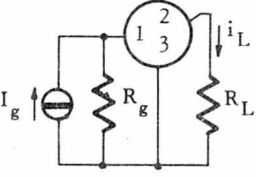
$$V_g = i_1(R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2) - K_1 R_2 i_3$$

$$V_L = -K_2 R_2 i_1 - (R_2 + R_L) i_3$$

Risolvendo il sistema si ha:

$$i_1 = -\frac{R_2 + R_L}{\Delta} V_g + \frac{K_1 R_2}{\Delta} V_L \quad ; \quad i_3 = \frac{K_2 R_2}{\Delta} V_g + \frac{R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2}{\Delta} V_L$$

TABELLA II.C.1 - Schemi per il calcolo delle grandezze caratteristiche di uno stadio amplificatore costituito da un transistor.

Grandezza d'interesse	Schema di calcolo	Formula di definizione	Tipo di connessione
Resistenza d'ingresso (R_i)		$R_i = \frac{v_0}{i_0}$	<i>Elettore a massa</i> 1 base 2 collettore 3 elettore
Guadagno di tensione (A_v)		$A_v = \frac{v_u}{V_g}$	<i>Base a massa</i> 1 elettore 2 collettore 3 base
Resistenza di uscita (R_u)		$R_u = \frac{v_0}{i_0}$	
Guadagno di corrente (A_I)		$A_I = \frac{i_L}{I_g}$	<i>Collettore a massa</i> 1 base 2 elettore 3 collettore

in cui:

$$\Delta = - \{ K_1 K_2 R_2^2 + (R_2 + R_L) (R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2) \}$$

Calcoliamo ora le varie grandezze richieste.

— *Resistenza d'ingresso* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.2 poniamo $V_L = 0$, $V_g = 1$. Si ha:

$$i_1 = - \frac{R_2 + R_L}{\Delta} \quad i_3 = \frac{K_2 R_2}{\Delta}$$

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = i_1 \quad ; \quad v_0 = K_1 v + R_1 i_1 = K_1 R_2 (-K_2 i_1 - i_3) + R_1 i_1$$

Quindi risulta:

$$R_i = \frac{v_0}{i_0} = R_1 + K_1 R_2 \left(-K_2 - \frac{i_3}{i_1} \right) = R_1 - K_1 K_2 \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

Usualmente il termine dipendente da R_L conta poco; per esempio per il transistor AC125 risulta, per $R_L = 1 \text{ K}\Omega$:

$$R_i = 1,7 \cdot 10^3 - \frac{8,125 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} + 8 \cdot 10^{-5}} = 1700 - 75,2 \simeq 1625 \Omega$$

— *Resistenza di uscita* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.2 poniamo $V_g = 0$, $V_L = 1$; si ha:

$$i_1 = \frac{K_1 R_2}{\Delta} \quad i_3 = \frac{1}{\Delta} (R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2)$$

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = -i_3 \quad v_0 = v = -R_2 (K_2 i_1 + i_3)$$

Quindi risulta:

$$R_u = \frac{v_0}{i_0} = R_2 \left(1 + K_2 \frac{i_1}{i_3} \right) = R_2 \left(1 + \frac{K_1 K_2 R_2}{R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2} \right) = \frac{R_2 (R_1 + R_g)}{R_1 + R_g - K_1 K_2 R_2}$$

La conduttanza di uscita vale perciò:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{R_2} - \frac{K_1 K_2}{R_1 + R_g}$$

Nel caso del transistor AC125, per $R_g = 1\text{ K}\Omega$, risulta:

$$\frac{1}{R_u} = 80 \cdot 10^{-6} - \frac{8,125 \cdot 10^{-2}}{1700 + 1000} \simeq 50 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$$

– *Guadagno di tensione* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.2 poniamo $V_L = 0$, $V_g = 1$; si ha:

$$i_1 = -\frac{R_2 + R_L}{\Delta} \quad ; \quad i_3 = \frac{K_2 R_2}{\Delta}$$

Vediamo inoltre che:

$$v_u = v = -R_2 (K_2 i_1 + i_3)$$

Perciò risulta:

$$A_V = \frac{v_u}{V_g} = -\frac{K_2 R_2 R_L}{(R_2 + R_L)(R_1 + R_g) - K_1 K_2 R_2 R_L} = -\frac{K_2}{(G_2 + G_L)(R_1 + R_g)}$$

Con i valori usuali, dell'ordine di $1\text{ K}\Omega$, per R_g ed R_L , si ha:

$$A_V \simeq -\frac{K_2 R_L}{R_1 + R_g}$$

Nel caso del transistor AC125, con $R_g = R_L = 1\text{ K}\Omega$, si ha:

$$A_V = -\frac{125}{(8 \cdot 10^{-5} + 10^{-3})(1625 + 1000)} \simeq -44$$

Con la formula approssimata si ottiene:

$$A_V \simeq -\frac{125 \cdot 10^3}{1700 + 1000} \simeq -46$$

– *Guadagno di corrente* (tab.II.C.1).

Siamo in condizioni simili a quelle considerate per il guadagno di tensione. Precisamente poniamo $V_L = 0$, $V_g = R_g I_g$, $I_g = 1$. In queste condizioni si ha:

$$R_L i_L = A_V R_g I_g$$

Quindi risulta:

$$A_I = A_V \frac{R_g}{R_L}$$

Esempio II.C.2

Determinare nello stadio amplificatore in bassa frequenza, costituito da un transistor con base a massa, le resistenze di ingresso e di uscita, i guadagni di tensione e di corrente, definiti come precisato in tab.II.C.1.

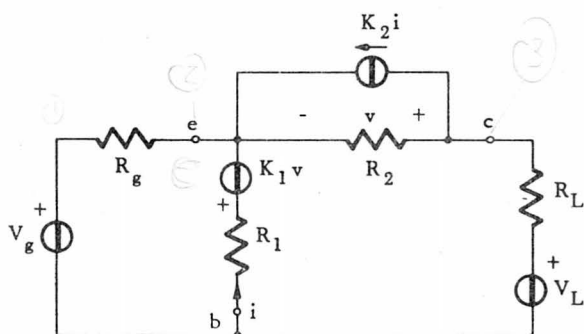


Fig.II.C.3 - Circuito relativo al transistor con base a massa.

Applichiamo il metodo diretto di analisi su base maglie; a questo scopo trasformiamo il circuito come mostrato in fig.II.C.4, eliminando il generatore di corrente.

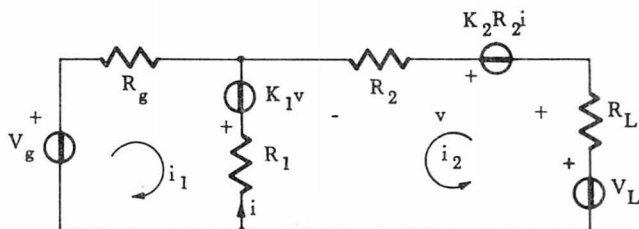


Fig.II.C.4 - Circuito trasformato di quello di fig.II.C.3.

Le equazioni di equilibrio delle tensioni delle maglie e le relazioni costitutive dei generatori controllati sono:

$$\begin{cases} V_g + K_1 v = R_g i_1 + R_1 (i_1 + i_2) \\ V_L + K_2 R_2 i + K_1 v = R_2 i_2 + R_1 (i_1 + i_2) + R_L i_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v = R_2 i_2 - K_2 R_2 i \\ i = -(i_1 + i_2) \end{cases}$$

Eliminando v ed i , si ottiene il sistema risolvante:

$$\begin{bmatrix} R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2 & R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 \\ R_1 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2 & R_L + R_2 + R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_L \end{bmatrix}$$

La soluzione vale:

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} [(R_L + R_2 + R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2) V_g + (K_1 R_2 + K_1 K_2 R_2 - R_1) V_L]$$

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} [(R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2) V_L + (K_1 K_2 R_2 - R_1 - K_2 R_2) V_g]$$

$$\Delta = R_1 R_2 + R_g (R_1 - K_1 K_2 R_2 + R_2 - K_1 R_2 + K_2 R_2) + R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2)$$

Calcoliamo le varie grandezze richieste.

— Resistenza d'ingresso (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.4 poniamo $V_L = 0$, $V_g = 1$; si ha:

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} [R_L + R_2 + R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2] \quad ; \quad i_2 = \frac{1}{\Delta} [K_1 K_2 R_2 - R_1 - K_2 R_2]$$

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = i_1 \quad ; \quad v_0 = V_g - R_g i_1 = 1 - R_g i_1$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} R_i = \frac{v_0}{i_0} &= \frac{1}{i_1} - R_g = \frac{R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2) + R_1 R_2 + R_g (R_1 - K_1 K_2 R_2 + R_2 - K_1 R_2 + K_2 R_2)}{R_L + R_2 + R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2} - R_g = \\ &= \frac{R_1 R_2 + R_L (R_1 - K_1 K_2 R_2)}{R_L + R_2 + R_1 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 + K_2 R_2} \end{aligned}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$R_i \approx \frac{R_1 R_2 + R_L (R_1 - K_1 K_2 R_2)}{R_2 (1 + K_2) + R_L}$$

L'influenza di R_L nei casi usuali è molto modesta e quindi:

$$R_i \approx \frac{R_1}{1 + K_2}$$

Per esempio nel caso del transistor AC125 con $R_L = 1 \text{ K}\Omega$, si ha:

$$R_i = \frac{R_1 R_2 + R_L (R_1 - K_1 K_2 R_2)}{R_2 (1 + K_2) + R_L} = 13,9 \text{ K}\Omega \quad ; \quad R_i \simeq \frac{R_1}{1 + K_2} = 13,5 \text{ K}\Omega$$

– *Resistenza di uscita* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.4 poniamo $V_g = 0$, $V_L = 1$; si ha:

$$i_1 = \frac{K_1 R_2 + K_1 K_2 R_2 - R_1}{\Delta} \quad ; \quad i_2 = \frac{R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2}{\Delta}$$

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = i_2 \quad ; \quad v_0 = V_L - R_L i_2 = 1 - R_L i_2$$

Quindi risulta:

$$\begin{aligned} R_u = \frac{v_0}{i_0} &= \frac{1}{i_2} - R_L = \frac{R_1 R_2 + R_g (R_1 - K_1 K_2 R_2 + R_2 - K_1 R_2 + K_2 R_2 + R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2))}{R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2} - R_L = \\ &= \frac{R_1 R_2 + R_g (R_1 - K_1 K_2 R_2 + R_2 - K_1 R_2 + K_2 R_2)}{R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2} \end{aligned}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$R_u \simeq \frac{R_1 R_2 + R_g R_2 (1 + K_2)}{R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2}$$

Nel caso del transistor AC125 con $R_g = 1 \text{ K}\Omega$, si ha:

$$R_u \simeq 948 \text{ K}\Omega$$

– *Guadagno di tensione* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.4 poniamo $V_g = 1$, $V_L = 0$; si ottengono per i_1 ed i_2 i valori già visti nel caso della resistenza d'ingresso. Inoltre si ha:

$$v_u = - R_L i_2$$

Perciò risulta:

$$A_V = - R_L \frac{K_1 K_2 R_2 - R_1 - K_2 R_2}{R_1 R_2 + R_g (R_1 - K_1 K_2 R_2 + R_2 - K_1 R_2 + K_2 R_2) + R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2)}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$A_V \simeq \frac{R_L K_2 R_2}{R_1 R_2 + R_g R_2 (1 + K_2) + R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2)}$$

Ad esempio nel caso del transistor AC125 con $R_g = 680 \Omega$ ed $R_L = 6,8 K\Omega$, si ha:

$$A_V = \frac{1,0625 \cdot 10^{10}}{2,125 \cdot 10^7 + 1,071 \cdot 10^9 + 9,2777 \cdot 10^6} = 9,65$$

Con buona approssimazione si ha con i valori usuali di R_g ed R_L :

$$A_V \simeq \frac{R_L}{R_g}$$

Nel caso dell'esempio precedente tale formula approssimata fornisce:

$$A_V \simeq 10$$

– *Guadagno di corrente* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.4 poniamo $V_g = R_g I_g$, $I_g = 1$, $V_L = 0$. Siamo in condizioni simili a quelle considerate nel caso della resistenza d'ingresso, salvo che i_1 ed i_2 sono moltiplicate per R_g . Quindi risulta:

$$A_I = A_V \frac{R_g}{R_L}$$

Utilizzando la formula approssimata si vede che:

$$A_I \simeq 1$$

al posto dell'espressione più accurata:

$$A_I = \frac{R_g K_2 R_2}{R_1 R_2 + R_g R_2 (1 + K_2) + R_L (R_g + R_1 - K_1 K_2 R_2)}$$

Nel caso del transistor AC125 con $R_g = 680 \Omega$ ed $R_L = 6,8 K\Omega$, si ha:

$$A_I = \frac{9,65}{10} = 0,965$$

Esempio II.C.3

Determinare nello stadio amplificatore in bassa frequenza, costituito da un transistor con collettore a massa, le resistenze di ingresso e di uscita, i guadagni di tensione e di corrente, definiti come precisato in tab.II.C.1.

Per ricavare le grandezze richieste consideriamo il circuito di fig.II.C.5, ottenuto sostituendo al transistor lo schema equivalente di fig.II.C.1 e chiudendo opportunamente i lati di emettitore e base.

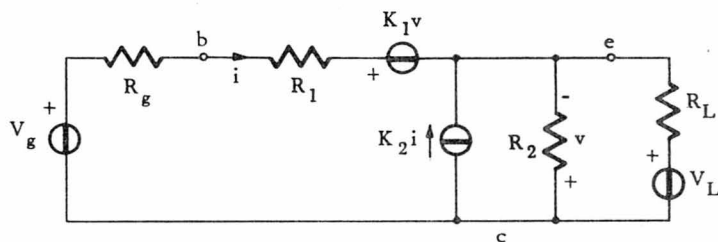


Fig.II.C.5 - Circuito considerato nell'esempio II.C.3 e relativo al transistor con collettore a massa.

Applichiamo il metodo diretto di analisi su base maglie; a questo scopo trasformiamo il circuito in esame come mostrato in fig.II.C.6, eliminando il generatore di corrente.

Le equazioni di equilibrio delle tensioni delle maglie e le relazioni costitutive dei generatori controllati sono:

$$V_g - K_2 R_2 i - K_1 v = R_1 i_1 + R_g i_1 + R_2 (i_1 + i_2)$$

$$V_L - K_2 R_2 i = R_L i_2 + R_2 (i_1 + i_2)$$

$$v = -K_2 R_2 i - R_2 (i_1 + i_2)$$

$$i = i_1$$

Eliminando v ed i , si ottiene il sistema risolvete:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2 & R_2 - K_1 R_2 \\ R_2 + K_2 R_2 & R_2 + R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_L \end{bmatrix}$$

La soluzione vale:

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} [(R_2 + R_L) V_g + (K_1 R_2 - R_2) V_L]$$

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} [-(R_2 + K_2 R_2) V_g + (R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) V_L]$$

$$\Delta = R_L (R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) + R_2 (R_1 + R_g)$$

Calcoliamo ora le varie grandezze richieste.

– Resistenza d'ingresso (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.6 poniamo $V_L = 0$, $V_g = 1$; si ha:

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} (R_2 + R_L) \quad ; \quad i_2 = -\frac{1}{\Delta} (R_2 + K_2 R_2)$$

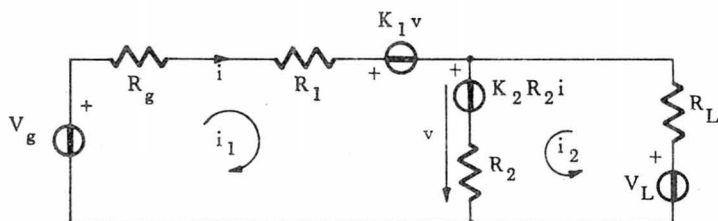


Fig.II.C.6 - Circuito trasformato di quello di fig.II.C.5.

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = i_1 \quad ; \quad v_0 = V_g - R_g i_1 = 1 - R_g i_1$$

Quindi risulta:

$$R_i = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{i_1} - R_g = \frac{R_L(R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) + R_2(R_1 + R_g)}{R_2 + R_L} - R_g =$$

$$= \frac{R_L(R_1 + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) + R_1 R_2}{R_2 + R_L}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$R_i \simeq \frac{R_L R_2 (1 + K_2)}{R_2 + R_L}$$

Nei casi usuali $R_L \ll R_2$ e quindi:

$$R_i \simeq R_L (1 + K_2)$$

Nel caso del transistor AC125 con $R_L = 1 \text{ K}\Omega$, si ha:

$$R_i = \frac{R_L R_2 (1 + K_2)}{R_2 + R_L} = 116,7 \text{ K}\Omega \quad ; \quad R_i \simeq R_L (1 + K_2) = 126 \text{ K}\Omega$$

– Resistenza di uscita (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.6 poniamo $V_g = 0$, $V_L = 1$; si ha:

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} (K_1 R_2 - R_2) \quad ; \quad i_2 = \frac{1}{\Delta} (R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2)$$

Vediamo inoltre che:

$$i_0 = i_2 \quad ; \quad v_0 = V_L - R_L i_2$$

Quindi risulta:

$$\begin{aligned} R_u = \frac{1}{i_2} - R_L &= \frac{R_L (R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) + R_2 (R_1 + R_g)}{R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2} - R_L = \\ &= \frac{R_2 (R_1 + R_g)}{R_1 + R_g + R_2 (1 + K_2 - K_1 - K_1 K_2)} \end{aligned}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$R_u \simeq \frac{R_2 (R_1 + R_g)}{R_g + R_2 (1 + K_2)}$$

Usualmente è $R_g \ll R_2 (1 + K_2)$, per cui:

$$R_u \simeq \frac{R_1 + R_g}{1 + K_2}$$

Nel caso del transistor AC125 con $R_g = 1 \text{ K}\Omega$, si ha:

$$R_u \simeq \frac{R_2 (R_1 + R_g)}{R_g + R_2 (1 + K_2)} = 21,41 \Omega \quad ; \quad R_u \simeq \frac{R_1 + R_g}{1 + K_2} = 21,43 \Omega$$

- *Guadagno di tensione* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.6 poniamo $V_g = 1$, $V_L = 0$; si ottengono per i_1 ed i_2 i valori già visti nel caso della determinazione della resistenza d'ingresso. Vediamo che si ha:

$$v_u = - R_L i_2$$

Perciò risulta:

$$A_V = R_L \frac{R_2 (1 + K_2)}{R_L (R_1 + R_g + R_2 + K_2 R_2 - K_1 R_2 - K_1 K_2 R_2) + R_2 (R_1 + R_g)}$$

Tenendo conto che $K_2 \gg K_1$ ed $R_2 \gg R_1$, si ha:

$$A_V \simeq \frac{R_L R_2 (1 + K_2)}{R_L R_2 (1 + K_2) + R_2 (R_1 + R_g)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_g}{R_L (1 + K_2)}}$$

Con i valori usuali di R_g ed R_L , si ha:

$$A_V \simeq 1$$

Nel caso del transistor AC125 con $R_L = 10 \text{ K}\Omega$ ed $R_g = 1 \text{ K}\Omega$ si ha:

$$A_V \simeq \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_g}{R_L(1+K_2)}} = 0,9979$$

— *Guadagno di corrente* (tab.II.C.1).

Nel circuito di fig.II.C.6 poniamo $V_g = R_g I_g$, $I_g = 1$, $V_L = 0$. Siamo in condizioni simili a quelle considerate nel caso della resistenza di ingresso, salvo la moltiplicazione di i_1 ed i_2 per R_g . Quindi risulta:

$$A_I = A_V \frac{R_g}{R_L} = \frac{R_g/R_L}{1 + \frac{R_1 + R_g}{R_L(1+K_2)}}$$

Con i valori usuali di R_g ed R_L , si ha con buona approssimazione:

$$A_I \simeq \frac{R_g}{R_L}$$

II.C.2 - Esempi del secondo gruppo.

In questo paragrafo riportiamo i risultati ottenuti analizzando vari circuiti con il programma NODI illustrato nell'appendice II.B. Per ogni esempio si riporta lo schema del circuito con i valori dei componenti in ohm, volt, ampere (quando non sia esplicitamente indicato un multiplo o sottomultiplo di tali unità), le schede di ingresso al calcolatore, la stampa di uscita. È necessario precisare che quando viene riportato nel circuito un transistor, s'intende usare lo schema di fig.II.C.7, ottenuto⁽¹⁾ da quello di fig.II.C.1, utilizzando solo i componenti permessi dal programma NODI. I valori dei componenti di questo circuito sono, in funzione di quelli del circuito di fig.II.C.1:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R_1 & \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{R_2} - \frac{K_1 K_2}{R_1} \\ h_1 &= \frac{K_1}{R_1} & h_2 &= \frac{K_2}{R_1} \end{aligned}$$

(1) - La derivazione dello schema di fig.II.C.7 da quello di fig.II.C.1 è immediata con le tecniche sviluppate nel Cap.VI.

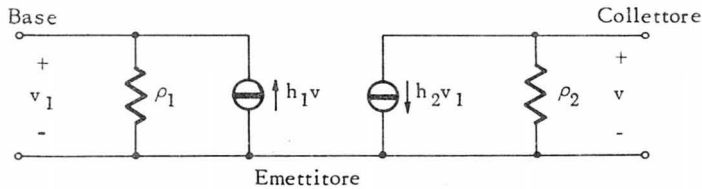


Fig. II.C.7 - Schema equivalente del transistor, ottenuto da quello mostrato in fig. II.C.1 mediante l'utilizzazione dei soli generatori di corrente controllati in tensione, oltre ai resistori.

Nel caso particolare del transistor AC125 della Philips Elcona, che si supponrà di usare, i valori di questi componenti sono:

$$\rho_1 = 1,7 \text{ K}\Omega$$

$$\rho_2 = 3,10 \cdot 10^4 \Omega$$

$$h_1 = 3,82 \cdot 10^{-7} \Omega^{-1}$$

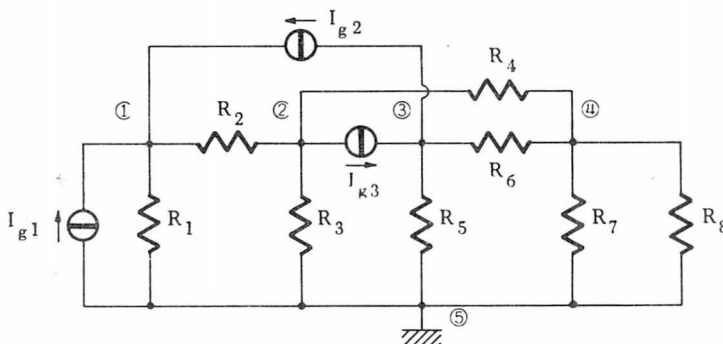
$$h_2 = 7,35 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$$

Tali valori verranno utilizzati per ogni transistor indicato negli schemi successivi (sia NPN che PNP).

Esempio II.C.4

303213

Analizzare con il programma NODI il circuito di fig. II.C.8, comprendente solo resistori e generatori indipendenti di corrente.



$$R_1 = \frac{1}{2}; \quad R_2 = \frac{1}{3}; \quad R_3 = \frac{1}{4}; \quad R_4 = \frac{1}{3}; \quad R_5 = \frac{1}{5}; \quad R_6 = 1; \quad R_7 = 1; \quad R_8 = \frac{1}{4}$$

$$I_{g1} = 1; \quad I_{g2} = 2; \quad I_{g3} = 6$$

Fig. II.C.8 - Circuito considerato nell'esempio II.C.4.

– Schede di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		5			8			3			0			0			0
		•	5	0	0	D	+	0	0	0			1			5	
		•	3	3	3	D	+	0	0	0			1			2	
		•	2	5	0	D	+	0	0	0			2			5	
		•	3	3	3	D	+	0	0	0			2			4	
		•	2	0	0	D	+	0	0	0			3			5	
		•	1	0	0	D	+	0	0	1			3			4	
		•	1	0	0	D	+	0	0	1			4			5	
		•	2	5	0	D	+	0	0	0			4			5	
		•	1	0	0	D	+	0	0	1			1			5	
		•	2	0	0	D	+	0	0	1			1			3	
		•	6	0	0	D	+	0	0	1			3			2	

– Uscita del programma.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 8
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 3
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 0
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0

```

```

RES.N. 1 .500+000 1 5
RES.N. 2 .333+000 1 2
RES.N. 3 .250+000 2 5
RES.N. 4 .333+000 2 4
RES.N. 5 .200+000 3 5
RES.N. 6 .100+001 3 4
RES.N. 7 .100+001 4 5
RES.N. 8 .250+000 4 5
G.CORR.N. 1 .100+001 1 5
G.CORR.N. 2 .200+001 1 3
G.CORR.N. 3 .600+001 3 2

```

```

SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 5
TENSIONE NODO 1 = .26766+000
TENSIONE NODO 2 = -.55308+000
TENSIONE NODO 3 = .64791+000
TENSIONE NODO 4 = -.11252+000

```

Esempio II.C.5

Analizzare con il programma NODI il circuito di fig.II.C.9, comprendente generatori indipendenti dei due tipi, resistori, ed un generatore di corrente controllato in tensione.

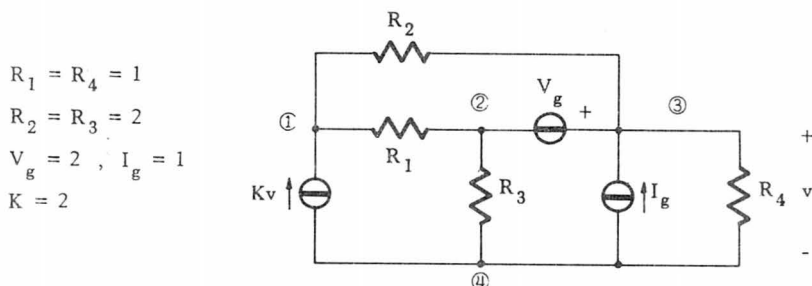


Fig.II.C.9 - Circuito considerato nell'esempio II.C.5.

- Schede di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
		4			4				1			1			1			0			
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			1				2				
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			1				3				
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			2				4				
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			3				4				
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			3				4				
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			3				2				
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			3				4		4		1

- Uscita del programma.

CIRCUITO ASSEGNATO: NUMERO NODI= 4
 NUMERO RESISTORI= 4
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 1
 NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 1
 NUMERO NULLORI= 0

RES.N. 1 .100+001 1 2
 RES.N. 2 .200+001 1 3
 RES.N. 3 .200+001 2 4
 RES.N. 4 .100+001 3 4
 G.CORR.N. 1 .100+001 3 4
 GEN.TENSIONE: N. 1 .200+001 3 2
 GEN.CONTR.TENS.N: 1 .200+001 3 4 4 1

(segue)

SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO

TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 4

TENSIONE NODO 1 = $-.10667+002$

TENSIONE NODO 2 = $-.60000+001$

TENSIONE NODO 3 = $-.40000+001$

CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE

CORRENTE GEN. 1 = $.16667+001$

Esempio II.C.6

Analizzare con il programma NODI il circuito di fig.II.C.10 comprendente generatori indipendenti dei due tipi, resistori, un generatore di corrente controllato in tensione ed un nullo.

$$R_1 = 1, R_2 = 1, R_3 = 2$$

$$R_4 = 3, R_5 = 4, R_6 = 3$$

$$K = 2, V_g = 1, I_g = 1$$

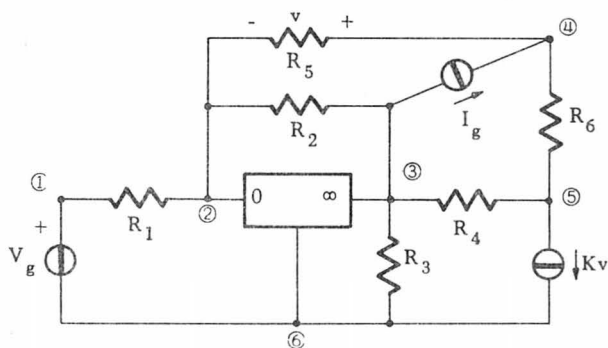


Fig.II.C.10 - Circuito considerato nell'esempio II.C.6.

— Schede di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
		6			6			1			1			1			1				
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			1			2					
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			2			3					
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			3			6					
		.	3	0	0	D	+	0	0	1			3			5					
		.	4	0	0	D	+	0	0	1			2			4					
		.	3	0	0	D	+	0	0	1			4			5					
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			4			3					
		.	1	0	0	D	+	0	0	1			1			6					
		.	2	0	0	D	+	0	0	1			4			2			5		6
		2			6			3			6										

— Uscita del programma.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 6
NUMERO RESISTORI= 6
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 1
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 1
NUMERO NULLORI= 1

RES.N. 1 .100+001 1 2
RES.N. 2 .100+001 2 3
RES.N. 3 .200+001 3 6
RES.N. 4 .300+001 3 5
RES.N. 5 .400+001 2 4
RES.N. 6 .300+001 4 5
G.CORR.N. 1 .100+001 4 3
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 6
GEN.CONTR.TENS.N: 1 .200+001 4 2 5 6
NULLORE N: 1 2 6 3 6

SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 6
TENSIONE NODO 1 = .10000+001
TENSIONE NODO 2 = -.26021-017
TENSIONE NODO 3 = -.11429+001
TENSIONE NODO 4 = .57143+000
TENSIONE NODO 5 = -.20000+001

CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
CORRENTE GEN. 1 = -.10000+001

CORRENTI NEI NORATORI
CORRENTE NOR. 1 = .42857+000

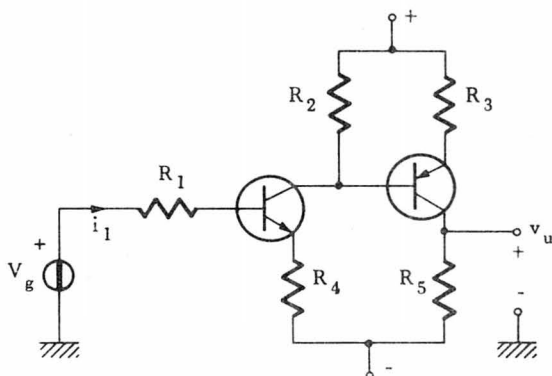
```

Esempio II.C.7

Determinare il guadagno di tensione v_u/V_g e la resistenza d'ingresso V_g/i_1 per l'amplificatore a due stadi di fig.II.C.11.

Fig.II.C.11 - Amplificatore a due stadi. I valori dei componenti sono:

$R_1 = 12 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$
 $R_3 = 120 \Omega$
 $R_4 = 570 \Omega$
 $R_5 = 3,5 \text{ k}\Omega$
 $V_g = 1 \text{ mV}$



Sostituiamo ai transistori il circuito equivalente di fig.II.C.7, eliminando la polarizzazione. Si ha lo schema di fig.II.C.12, in cui risulta:

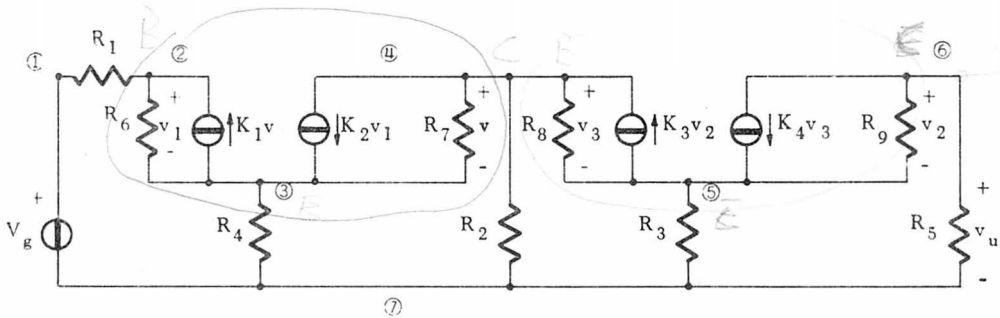


Fig.II.C.12 - Schema equivalente di quello di fig.II.C.11.

$$R_6 = R_8 = \rho_1 \quad ; \quad R_7 = R_9 = \rho_2 \quad ; \quad K_1 = K_3 = h_1 \quad ; \quad K_2 = K_4 = h_2$$

Applichiamo il programma NODI, ponendo per comodità $V_g = 1$; ciò implica che le tensioni dei nodi sono espresse in mV e la corrente del generatore in mA.

— Schede di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
		7			9			0			1			4				0			
		•	1	2	0	D	+	0	0	5			1			2					
		•	1	0	0	D	+	0	0	5			4			7					
		•	1	2	0	D	+	0	0	3			5			7					
		•	5	7	0	D	+	0	0	3			3			7					
		•	3	5	0	D	+	0	0	4			6			7					
		•	1	7	0	D	+	0	0	4			2			3					
		•	3	1	0	D	+	0	0	5			4			3					
		•	1	7	0	D	+	0	0	4			4			5					
		•	3	1	0	D	+	0	0	5			6			5					
		•	1	0	0	D	+	0	0	1			1			7					
		•	3	8	2	D	-	0	0	6			4			3			3		2
		•	7	3	5	D	-	0	0	1			2			3			4		3
		•	3	8	2	D	-	0	0	6			6			5			5		4
		•	7	3	5	D	-	0	0	1			4			5			6		5

- Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 7
NUMERO RESISTORI= 9
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 4
NUMERO NULLORI= 0
```

```
RES.N. 1 .120+005 1 2
RES.N. 2 .100+005 4 7
RES.N. 3 .120+003 5 7
RES.N. 4 .570+003 3 7
RES.N. 5 .350+004 6 7
RES.N. 6 .170+004 2 3
RES.N. 7 .310+005 4 3
RES.N. 8 .170+004 4 5
RES.N. 9 .310+005 6 5
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 7
GEN.CONTR.TENS.N: 1 .382-006 4 3 3 2
GEN.CONTR.TENS.N: 2 .735-001 2 3 4 3
GEN.CONTR.TENS.N: 3 .382-006 6 5 5 4
GEN.CONTR.TENS.N: 4 .735-001 4 5 6 5
```

```
SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 7
TENSIONE NODO 1 = .10000+001
TENSIONE NODO 2 = .80445+000
TENSIONE NODO 3 = .78226+000
TENSIONE NODO 4 = -.77204+001
TENSIONE NODO 5 = -.68605+001
TENSIONE NODO 6 = .19805+003
```

```
CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
CORRENTE GEN. 1 = -.16296-004
```

Il guadagno di tensione vale:

$$\frac{v_u}{V_g} = \frac{198,05}{1} \approx 198$$

La resistenza d'ingresso vale:

$$R_i = \frac{V_g}{-i_g} = \frac{1}{1,6296 \cdot 10^{-5}} \approx 61,4 \text{ k}\Omega$$

Esempio II.C.8

Determinare il guadagno di tensione $v_u / (V_{g1} - V_{g2})$ per l'amplificatore differenziale controeazionato di fig.II.C.13.

Sostituiamo ai transistori il circuito equivalente di fig.II.C.7, eliminando le polarizzazioni. Si ha lo schema di fig.II.C.14 in cui risulta:

$$K_1 = K_4 = K_5 = K_7 = 3,82 \cdot 10^{-7} \Omega^{-1}$$

$$K_2 = K_3 = K_6 = K_8 = 7,35 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$$

$$R_1 = R_7 = R_6 = R_{12} = 1700 \Omega$$

$$R_2 = R_5 = R_9 = R_{15} = 3,1 \cdot 10^4 \Omega$$

$$V_{g1} = 2 \text{ mV} ; \quad V_{g2} = 1 \text{ mV}$$

$$R_3 = 12 \text{ k}\Omega ; \quad R_4 = 12 \text{ k}\Omega$$

$$R_8 = 4,5 \text{ k}\Omega ; \quad R_{10} = 12 \text{ k}\Omega$$

$$R_{11} = 100 \text{ k}\Omega ; \quad R_{13} = 12 \text{ k}\Omega$$

$$R_{14} = 12 \text{ k}\Omega ; \quad R_{16} = 50 \text{ k}\Omega$$

$$R_{17} = 150 \text{ k}\Omega$$

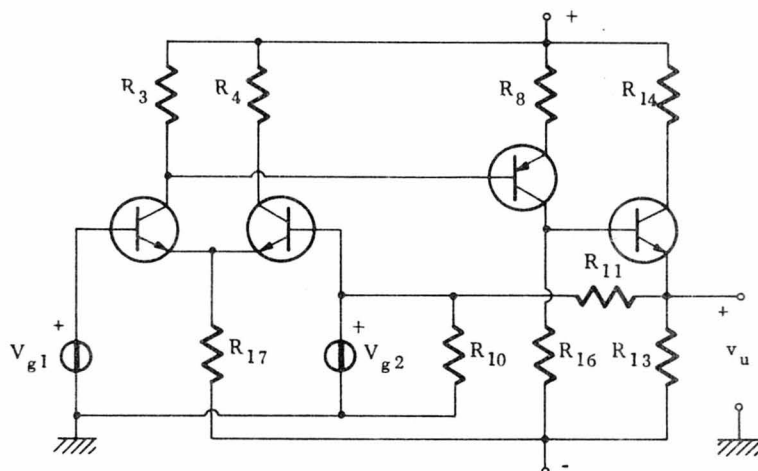


Fig.II.C.13 - Circuito considerato nell'esempio II.C.8. I valori dei componenti sono:

$$R_3 = R_4 = R_{13} = R_{14} = R_{10} = 12 \text{ k}\Omega ; \quad R_8 = 4,5 \text{ k}\Omega ; \quad R_{11} = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_{16} = 50 \text{ k}\Omega ; \quad R_{17} = 150 \text{ k}\Omega ; \quad V_{g1} = 2 \text{ mV} ; \quad V_{g2} = 1 \text{ mV}.$$

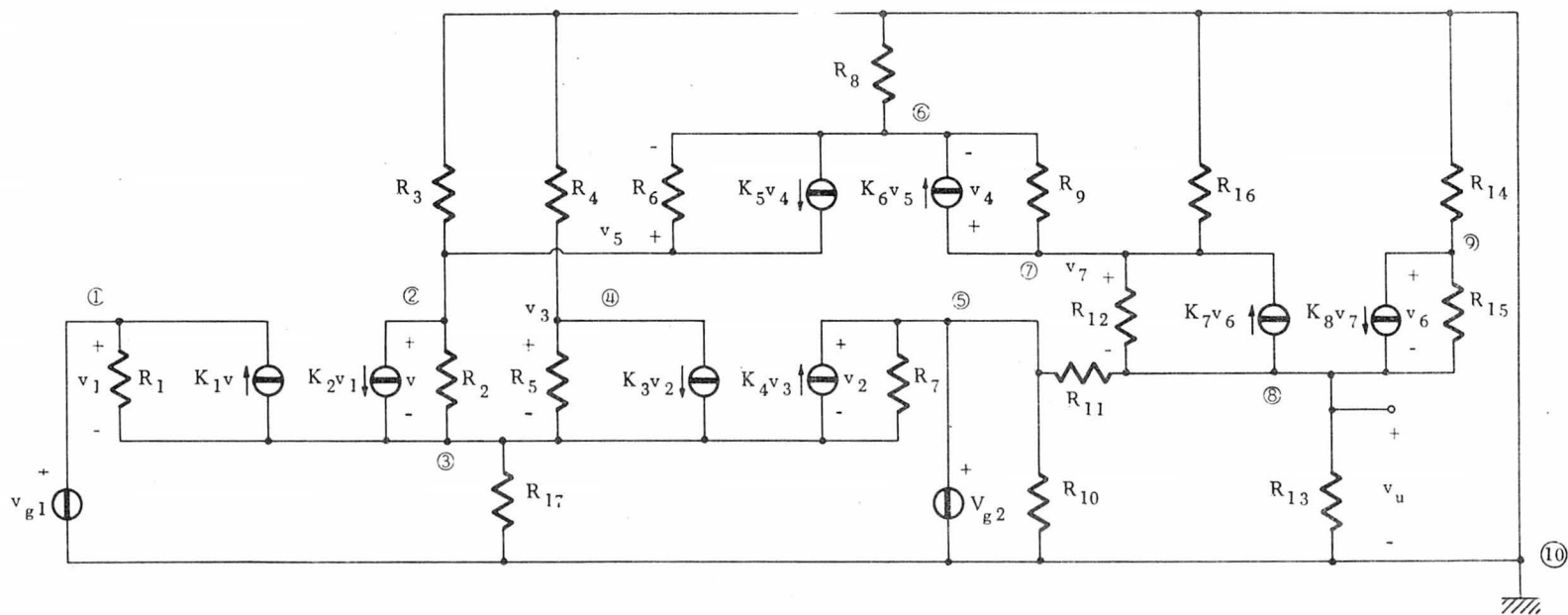


Fig.II.C.14 - Schema equivalente di quello di fig.II.C.13.

– Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 10
NUMERO RESISTORI= 17
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 2
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 8
NUMERO NULLORI= 0
```

```
RES.N. 1 .170+004 1 3
RES.N. 2 .310+005 2 3
RES.N. 3 .120+005 2 10
RES.N. 4 .120+005 4 10
RES.N. 5 .310+005 4 3
RES.N. 6 .170+004 2 6
RES.N. 7 .170+004 5 3
RES.N. 8 .450+004 6 10
RES.N. 9 .310+005 7 6
RES.N. 10 .120+005 5 10
RES.N. 11 .100+006 5 8
RES.N. 12 .170+004 7 8
RES.N. 13 .120+005 8 10
RES.N. 14 .120+005 9 10
RES.N. 15 .310+005 8 9
RES.N. 16 .500+005 7 10
RES.N. 17 .150+006 3 10
GEN.TENSIONE: N. 1 .200-002 1 10
GEN.TENSIONE: N. 2 .100-002 5 10
GEN.CONTR.TENS.N: 1 .382-006 2 3 3 1
GEN.CONTR.TENS.N: 2 .735-001 1 3 2 3
GEN.CONTR.TENS.N: 3 .382-006 4 3 3 5
GEN.CONTR.TENS.N: 4 .735-001 5 3 4 3
GEN.CONTR.TENS.N: 5 .382-006 7 6 6 2
GEN.CONTR.TENS.N: 6 .735-001 2 6 7 6
GEN.CONTR.TENS.N: 7 .382-006 9 8 8 7
GEN.CONTR.TENS.N: 8 .735-001 7 8 9 8
```

```
SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 10
TENSIONE NODO 1 = .20000-002
TENSIONE NODO 2 = -.29247+000
TENSIONE NODO 3 = .15056-002
TENSIONE NODO 4 = .32192+000
TENSIONE NODO 5 = .10000-002
TENSIONE NODO 6 = -.29026+000
TENSIONE NODO 7 = .28106+001
TENSIONE NODO 8 = .28045+001
TENSIONE NODO 9 = -.30712+001
```

```
CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
CORRENTE GEN. 1 = -.40311-006
CORRENTE GEN. 2 = .28372-004
```

Il guadagno di tensione vale:

$$\frac{v_u}{V_{g1} - V_{g2}} = \frac{2,8045}{10^{-3}} = 2804,5$$

Esempio II.C.9

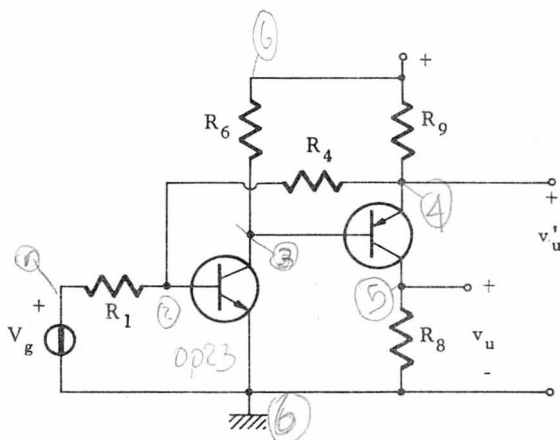
Determinare il guadagno di tensione e la resistenza d'ingresso dell'amplificatore a due stadi controeazionato di fig.II.C.15.

Fig.II.C.15 - Amplificatore a due stadi controeazionato. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 18 \text{ k}\Omega$$

$$R_6 = R_8 = R_9 = 12 \text{ k}\Omega$$

$$V_g = 1 \text{ V}$$



Sostituiamo ai transistori il circuito equivalente di fig.II.C.7, eliminando le polarizzazioni. Si ha lo schema di fig.II.C.16 in cui risulta:

$$R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega$$

$$K_1 = K_3 = 3,82 \cdot 10^{-7} \Omega^{-1} \quad A/V$$

$$R_2 = R_5 = 1700 \Omega$$

$$K_2 = K_4 = 7,35 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$$

$$R_3 = R_7 = 3,1 \cdot 10^4 \Omega$$

$$V_g = 1 \text{ V}$$

$$R_4 = 18 \text{ k}\Omega$$

$$R_6 = R_8 = R_9 = 12 \text{ k}\Omega$$

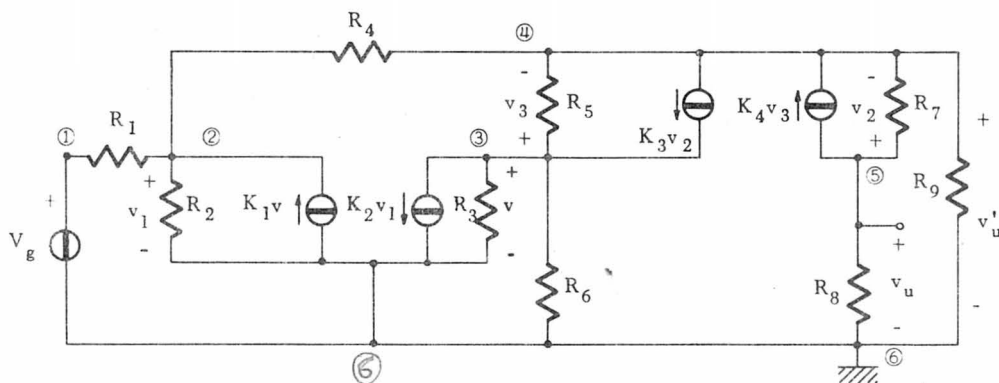


Fig.II.C.16 - Schema equivalente di quello di fig.II.C.15.

Applichiamo il programma NODI.

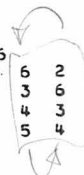
– Schede d'ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
		6			9			0			1			4			0				
	.	1	2	0	D	+	0	0	4			1			2						
	.	1	7	0	D	+	0	0	4			2			6						
	.	3	1	0	D	+	0	0	5			3			6						
	.	1	8	0	D	+	0	0	5			2			4						
	.	1	7	0	D	+	0	0	4			4			3						
	.	1	2	0	D	+	0	0	5			3			6						
	.	3	1	0	D	+	0	0	5			5			4						
	.	1	2	0	D	+	0	0	5			5			6						
	.	1	2	0	D	+	0	0	5			4			6						
	.	1	0	0	D	+	0	0	1			1			6						
	.	3	8	2	D	-	0	0	6			3			6			6			2
	.	7	3	5	D	-	0	0	1			2			6			3			6
	.	3	8	2	D	-	0	0	6			5			4			4			3
	.	7	3	5	D	-	0	0	1			3			4			5			4

– Uscita del programma.

CIRCUITO ASSEGNATO: NUMERO NODI= 6
 NUMERO RESISTORI= 9
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
 NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 4
 NUMERO NULLORI= 0

RES.N.	1	.120+004	1	2
RES.N.	2	.170+004	2	6
RES.N.	3	.310+005	3	6
RES.N.	4	.180+005	2	4
RES.N.	5	.170+004	4	3
RES.N.	6	.120+005	3	6
RES.N.	7	.310+005	5	4
RES.N.	8	.120+005	5	6
RES.N.	9	.120+005	4	6
GEN.TENSIONE: N.	1	.100+001	1	6
GEN.CONTR.TENS.N:	1	.382-006	3	6
GEN.CONTR.TENS.N:	2	.735-001	2	6
GEN.CONTR.TENS.N:	3	.382-006	5	4
GEN.CONTR.TENS.N:	4	.735-001	3	4



(segue)

SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
 TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 6
 TENSIONE NODO 1 = .10000+001
 TENSIONE NODO 2 = .23077+001
 TENSIONE NODO 3 = -.14331+002
 TENSIONE NODO 4 = -.14288+002
 TENSIONE NODO 5 = .23352+002
 CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
 CORRENTE GEN. 1 = -.81410-003

I guadagni di tensione corrispondenti alle due uscite valgono:

$$A_V = \frac{v_u}{V_g} = 23,25$$

$$A'_V = \frac{v'_u}{V_g} = -14,3$$

$$A_d = \frac{v'_u - v_u}{V_g} = 27,7$$

La resistenza d'ingresso vale:

$$R_i = \frac{V_g}{\text{corrente generatore tensione}} = \frac{1}{0,81410 \cdot 10^{-3}} = 1228 \Omega$$

Esempio II.C.10

GIRATORE RIORDAN

Verificare per due valori della resistenza di carico ($10 \text{ k}\Omega$ e $100 \text{ k}\Omega$) che la resistenza di ingresso del giratore di Riordan, mostrato in fig.II.C.17, soddisfa la formula:

$$R_i = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_3 R_5}$$

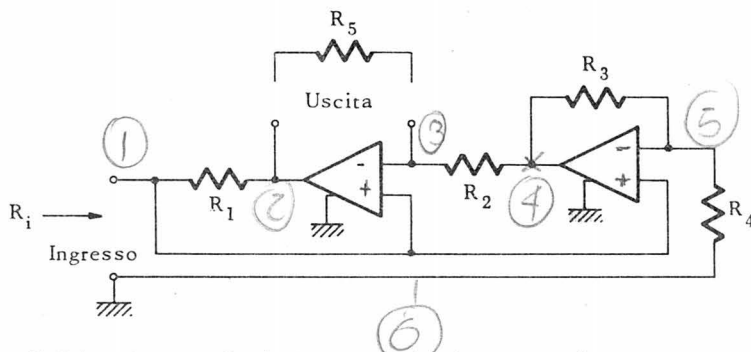


Fig.II.C.17 - Giratore di Riordan. I valori dei componenti sono: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$.

Sostituiamo agli amplificatori operazionali gli schemi equivalenti approssimati costituiti dai nullori ed a questi le coppie nullatore-noratore. Si ha lo schema equivalente approssimato di fig.II.C.18, in cui R_5 assume i valori $10 \text{ k}\Omega$ e $100 \text{ k}\Omega$. Occorre perciò applicare due volte il programma NODI.

- Uscita del programma.

$$R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

32782

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 6
NUMERO RESISTORI= 5
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 2
```

```
RES.N. 1 .100+004 1 2
RES.N. 2 .100+004 3 4
RES.N. 3 .100+004 4 5
RES.N. 4 .100+004 5 6
RES.N. 5 .100+005 2 3
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 6
NULLORE N: 1 3 1 2 6
NULLORE N: 2 5 1 4 6
```

```
SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 6
TENSIONE NODO 1 = .10000+001
TENSIONE NODO 2 = -.90000+001
TENSIONE NODO 3 = .10000+001
TENSIONE NODO 4 = .20000+001
TENSIONE NODO 5 = .10000+001
```

```
CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
CORRENTE GEN. 1 = -.10000-001
```

```
CORRENTI NEI NORATORI
CORRENTE NOR. 1 = .11000-001
CORRENTE NOR. 2 = -.20000-002
```

$$R_5 = 100 \text{ k}\Omega$$

32783

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 6
NUMERO RESISTORI= 5
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 2
```

```
RES.N. 1 .100+004 1 2
RES.N. 2 .100+004 3 4
RES.N. 3 .100+004 4 5
RES.N. 4 .100+004 5 6
RES.N. 5 .100+006 2 3
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 6
NULLORE N: 1 3 1 2 6
NULLORE N: 2 5 1 4 6
```

```
SOLUZIONE DEL CIRCUITO ASSEGNATO
TENSIONI DEI NODI, RISP. AL NODO 6
TENSIONE NODO 1 = .10000+001
TENSIONE NODO 2 = -.99000+002
TENSIONE NODO 3 = .10000+001
TENSIONE NODO 4 = .20000+001
TENSIONE NODO 5 = .10000+001
```

```
CORRENTI NEI GEN. DI TENSIONE
CORRENTE GEN. 1 = -.10000+000
```

```
CORRENTI NEI NORATORI
CORRENTE NOR. 1 = .10100+000
CORRENTE NOR. 2 = -.20000-002
```

Il valore della resistenza d'ingresso nei due casi è:

$$R_i = \frac{\text{tensione impressa del generatore di tensione}}{\text{corrente del generatore di tensione cambiata di segno}}$$

$$R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_i = 100 \Omega$$

$$R_5 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_i = 10 \Omega$$

APPENDICE II.D – *Bibliografia.*

I metodi di analisi descritti nel presente capitolo costituiscono la base dell'analisi dei circuiti lineari, permanenti a costanti concentrate. Con maggiore o minore dettaglio essi sono trattati in innumerevoli testi, disponibili nella letteratura tecnica e facilmente reperibili. Per questa ragione limiteremo di seguito le citazioni bibliografiche solo a quei metodi non considerati per il loro carattere specialistico oppure trattati ad un livello introduttivo, come è stato fatto per i metodi basati sull'uso del calcolatore.

Metodi topologici.

La base dei metodi topologici sono la terza e quarta legge di Kirchhoff. Le nozioni fondamentali a questo riguardo sono reperibili in:

- L. Weinberg, «Network analysis and synthesis», Mc Graw-Hill, 1962, Cap. IV.

Una trattazione esauriente nel caso dei circuiti reciproci e non-reciproci è disponibile in:

- W.S. Percival, «The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees», J. Inst. Elec. Engrs, Vol. 100, Parte III, maggio 1953, p. 143.
- S.J. Mason, «Topological analysis of linear non-reciprocal networks», Proc. IRE, Vol. 45, giugno 1957, p. 829.
- A. Talbot, «Topological analysis of general linear networks», IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-12, giugno 1965, p. 170.

Metodi basati sull'uso del calcolatore.

L'utilizzazione del calcolatore nell'analisi dei circuiti è l'oggetto specifico dei seguenti testi, scelti tra i molti riguardanti questa materia. In essi vengono trattati quindi anche gli argomenti considerati nel presente capitolo. I testi sono citati in ordine di difficoltà crescente:

- J. Staudhammer, «Circuit analysis by digital computer», Prentice-Hall, 1975.
- L.P. Huelsman, «Basic circuit theory with digital computations», Prentice-Hall, 1972.
- S.W. Director, «Circuit theory: a computational approach», J. Wiley, 1975.
- L.O. Chua e Pen-Min Lin, «Computer-aided analysis of electronic circuits», Prentice-Hall, 1975.

L'utilizzazione del calcolatore è assolutamente necessaria quando i circuiti sono di grandi dimensioni. In questo caso però diviene indispensabile l'osservazione che le matrici dei coefficienti dei sistemi di equazioni a cui si perviene con i metodi di analisi sono sparse, cioè hanno uguali a zero la maggior parte dei loro termini. Ciò è conseguenza del fatto che i vari nodi di un circuito sono usualmente collegati solo a pochi nodi posti nelle vicinanze. La soluzione del problema dell'analisi nel caso dei circuiti di grandi dimensioni è affrontabile solo con algoritmi particolari, che sfruttano le proprietà delle matrici «sparse». Si citano di seguito alcuni testi ed articoli significativi al riguardo:

- D.J. Rose e R.A. Willoughby, «Sparse matrices and their applications», New York: Plenum 1972.
- R.D. Berry, «An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution», IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, gennaio 1971, p. 40.
- H.Y. Hsieh e M.S. Ghausi, «A probabilistic approach to optimal pivoting and prediction of fill-in for random sparse matrices», IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, luglio 1972, p. 329.
- G.D. Hatchel, R.K. Brayton e F.G. Gustavson, «The sparse tableau approach to network analysis and design», IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, gennaio 1971, p. 101.

Metodi iterativi.

La soluzione di un sistema di equazioni lineari mediante i procedimenti iterativi è molto interessante dal punto di vista della sempli-

cità degli schemi di calcolo a cui si perviene. Tali procedimenti possono essere facilmente associati ai metodi di analisi di un circuito.

I fondamenti dei procedimenti iterativi classici possono essere trovati in:

- V.N. Faddeeva, «Computational methods of linear algebra», Dover Pub. 1959.

Una trattazione approfondita con molte applicazioni è reperibile in:

- D.H. Young, «Iterative solution of large linear systems», Academic Press, 1971

Alcune notizie relative all'applicazione specifica di tali metodi all'analisi dei circuiti sono disponibili in:

- G. Martinelli e M. Salerno, «Metodo iterativo convergente per l'analisi di reti lineari», N.R.N., Vol. 20, maggio 1971, p. 478.

Infine si citano due altre vie possibili seguite nell'analisi dei circuiti, basate rispettivamente sull'applicazione del calcolo tensoriale e dei metodi matematici di ottimizzazione. Per la prima via si rimanda al testo fondamentale:

- G. Kron, «Tensor analysis of networks», J. Wiley, 1939.

Per la seconda via, alcuni risultati sono disponibili in:

- G. Martinelli, F. Riciniello e M. Salerno, «Possibilità d'impiego dei metodi di ottimizzazione nell'analisi delle reti elettriche», Alta Freq., Vol. 42, dic. 1973, p. 674.

*

CAPITOLO III

ANALISI DEI CIRCUITI CON MEMORIA

III.1 - La presenza della variabile tempo nell'analisi dei circuiti lineari e permanenti.

Nel capitolo secondo è stato affrontato il problema dell'analisi dei circuiti elettrici costituiti da componenti senza memoria, cioè da quei componenti nella cui relazione costitutiva non intervengono legami integro-differenziali. In tal caso è stato visto che il valore assunto da ciascuna grandezza elettrica (tensione o corrente) non dipende dai valori assunti in istanti precedenti dalla stessa o da altre grandezze elettriche del circuito. Come conseguenza di tale fatto accade che, dato un circuito lineare senza memoria, contenente una sola grandezza impressa il cui andamento nel tempo è descritto dalla funzione $f(t)$, tutte le altre grandezze elettriche avranno un andamento nel tempo del tipo $A f(t)$, in cui A è una costante reale che può essere determinata analizzando il circuito ed il cui valore non cambia, qualunque sia l'andamento della funzione di eccitazione $f(t)$. Illustriamo l'affermazione precedente con un esempio.

Esempio III.1.1

Analizzare il circuito di fig.III.1.1 nell'ipotesi che la tensione impressa del generatore abbia l'andamento di fig.III.1.2.

Applichiamo il primo procedimento di analisi su base maglie. Riferendoci al grafo di fig.III.1.3, si ha:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ -v_3 + v_4 + v_5 = 0 \\ -v_4 - v_2 - v_6 = 0 \end{cases}$$

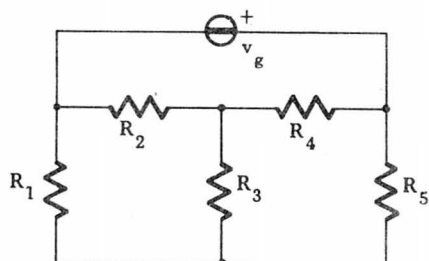


Fig. III.1.1 - Circuito considerato nell'esempio III.1.1. I valori dei componenti sono: $R_1 = R_4 = 2$, $R_2 = R_3 = R_5 = 1 (\Omega)$.

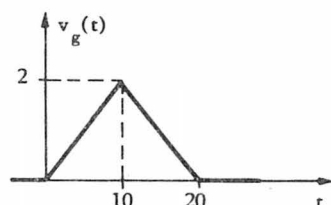


Fig. III.1.2 - Andamento nel tempo della tensione impressa del generatore del circuito di figura III.1.1 (V,S).

dove tutte le grandezze v_i sono funzioni del tempo⁽¹⁾.

Esprimendo quindi le tensioni dei rami del circuito in funzione delle correnti di maglia, si ottiene:

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_{m1} \\ v_2 = R_2 (i_{m1} - i_{m3}) \\ v_3 = R_3 (i_{m1} - i_{m2}) \\ v_4 = R_4 (i_{m2} - i_{m3}) \\ v_5 = R_5 i_{m2} \\ v_6 = v_g(t) \end{cases}$$

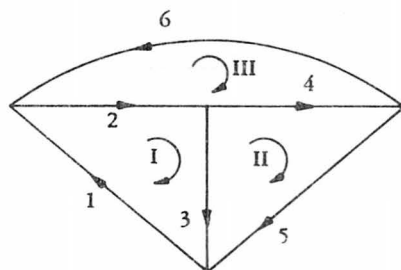


Fig. III.1.3 - Grafo del circuito di fig. III.1.1.

Sostituendo le espressioni precedenti nelle equazioni di equilibrio ed assegnando i valori numerici alle resistenze, si ricava il sistema risolvibile su base maglie:

$$\begin{aligned} 4 i_{m1} - i_{m2} - i_{m3} &= 0 \\ - i_{m1} + 4 i_{m2} - 2 i_{m3} &= 0 \\ - i_{m1} - 2 i_{m2} + 3 i_{m3} &= v_g(t) \end{aligned}$$

(1) - Salvo avviso contrario, nel presente capitolo tutte le grandezze funzioni del tempo verranno indicate con le lettere minuscole.

La soluzione di questo sistema non presenta difficoltà e si ottiene:

$$i_{m1} = \frac{2}{7} v_g(t) ; \quad i_{m2} = \frac{3}{7} v_g(t) ; \quad i_{m3} = \frac{5}{7} v_g(t)$$

Pertanto considerando una qualsiasi tensione o corrente del circuito, essa avrà lo stesso andamento nel tempo della tensione $v_g(t)$, a meno di una costante moltiplicativa. Ad esempio la tensione ai capi del resistore R_3 vale:

$$v_{R3}(t) = R_3 (i_{m1} - i_{m2}) = - \frac{1}{7} v_g(t) \quad (V)$$

il cui andamento è indicato in fig.III.1.4.

Le considerazioni precedenti mostrano che per i circuiti senza memoria il problema dell'analisi in presenza di un'eccitazione, avente andamento qualsiasi in funzione del tempo, è equivalente al problema dell'analisi in presenza di eccitazioni costanti. Un risultato analogo vale quando sono presenti più eccitazioni variabili nel tempo. Infatti, in base al principio di sovrapposizione degli effetti, che vale per il circuito con-

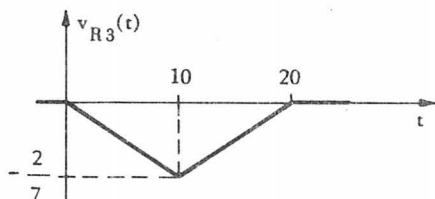


Fig.III.1.4 - Andamento della tensione ai capi del resistore R_3 (V, S).

siderato in quanto per ipotesi è lineare, qualsiasi grandezza elettrica è la somma degli effetti delle singole eccitazioni considerate come se agissero da sole e non contemporaneamente. Perciò, se le eccitazioni presenti sono $e_i(t)$, $i=1, \dots, N$, la generica grandezza elettrica $u(t)$ avrà una espressione

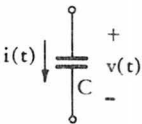
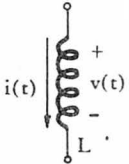
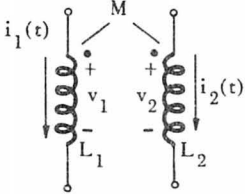
(III.1.1)

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i e_i(t)$$

dove le costanti A_i possono essere determinate come fatto nell'esempio III.1.1, supponendo presente un'eccitazione alla volta.

La presenza della variabile tempo modifica sostanzialmente il problema dell'analisi dei circuiti quando siano presenti componenti con memoria, cioè componenti che presentino nelle loro relazioni costitutive operazioni di derivazione ed integrazione rispetto al tempo. Tali componenti sono il condensatore ideale, l'induttore ideale e gli induttori mutuamente accoppiati, già definiti nei § I.6.2 I.6.3 ed I.8.1 e le cui relazioni costitutive si riportano per comodità in Tab.III.1.1.

TABELLA III.1.1 - Componenti con memoria⁽¹⁾.

Componente	Simbolo	Relazioni costitutive
Condensatore		$i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0)$
Induttore		$v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0)$
Induttori mutuamente accoppiati		$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$

La presenza di operazioni di derivazione rispetto al tempo fa sì che le grandezze elettriche dipendano non solo dai valori attuali delle eccitazioni ma anche dalla loro rapidità di variazione nel tempo. Analo-

(1) - Nella tabella si riporta solo l'elemento costituito da due induttori accoppiati.

gamente le operazioni di integrazione estendono tale dipendenza anche a tutti gli istanti precedenti a quello attuale. È quindi evidente che se in un circuito con memoria è presente una funzione di eccitazione $f(t)$, qualunque altra grandezza del circuito avrà un andamento nel tempo che, salvo casi molto particolari, è del tutto differente rispetto a $f(t)$. Viene perciò a cadere la semplice proprietà, valida per i circuiti senza memoria, che ogni grandezza elettrica del circuito è proporzionale ad $f(t)$.

Quanto detto in precedenza si può esprimere analiticamente, affermando che, mentre per un circuito senza memoria il sistema risolutivo è di tipo algebrico, nel caso dei circuiti con memoria il sistema risolutivo è di tipo integro-differenziale. L'analisi di un circuito con memoria richiede quindi l'esecuzione dei due seguenti passi:

- a) individuazione del sistema integro-differenziale risolvete;
- b) risoluzione del sistema integro-differenziale.

Esaminiamo separatamente i due punti precedenti.

Punto a: *individuazione del sistema integro-differenziale risolvete.*

Il sistema risolvete nel caso presente può essere individuato impiegando i metodi visti nel capitolo secondo con semplici modifiche. Ricordiamo che tutti i suddetti metodi comprendono le due seguenti fasi:

- 1) scelta delle grandezze elettriche incognite e scrittura delle equazioni di equilibrio in base alla prima od alla seconda legge di Kirchhoff, applicate ad opportune linee chiuse;
- 2) esplicitazione delle grandezze elettriche note ed incognite nelle equazioni di equilibrio precedenti, utilizzando le relazioni costitutive dei componenti.

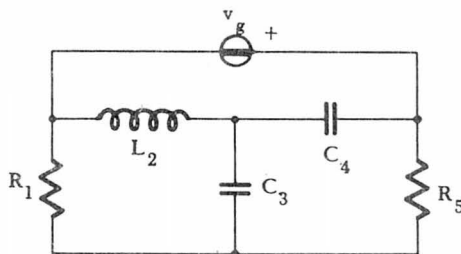
La prima fase può essere applicata senza modifiche nel caso presente, in quanto basata sulle leggi di Kirchhoff che sono indipendenti dalla natura dei componenti. La seconda fase va opportunamente modificata per tenere conto del carattere integro-differenziale delle relazioni costitutive dei componenti. Tale modifica risulta del tutto intuitiva, come è chiaramente messo in evidenza dal seguente esempio.

Esempio III.1.2.

Determinare il sistema risolvete del circuito di fig.III.1.5, dove la tensione impressa dal generatore ha l'andamento di fig.III.1.6.



Fig.III.1.5 - Circuito considerato nell'esempio III.1.2. I valori dei componenti sono: $R_1=2$, $R_5=1$, $L_2=1$, $C_3=1$, $C_4=2$ (Ω , H, F).



Applichiamo il primo procedimento di analisi su base maglie. Riferendoci al grafo di fig.III.1.7, si ha:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ -v_3 + v_4 + v_5 &= 0 \\ -v_4 - v_2 - v_6 &= 0 \end{aligned}$$

ove tutte le tensioni indicate devono essere considerate funzioni del tempo. Si può notare che fino a questo punto il procedimento è identico a quello seguito nell'esempio III.1.1, relativo ad un circuito senza memoria, avente lo stesso grafo del circuito qui considerato.

Esprimiamo ora le tensioni dei rami del circuito in funzione delle correnti di maglia; si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{m1} \\ v_2 &= L_2 \frac{d}{dt} [i_{m1} - i_{m3}] \\ v_3 &= \frac{1}{C_3} \int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau + v_{c3}(0) \\ v_4 &= \frac{1}{C_4} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau + v_{c4}(0) \\ v_5 &= R_5 i_{m2} ; \quad v_6 = v_g(t) \end{aligned} \right.$$

Fig.III.1.6 - Andamento nel tempo della tensione impressa dal generatore del circuito di fig.III.1.5 (V, S).

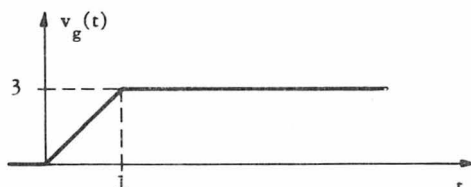
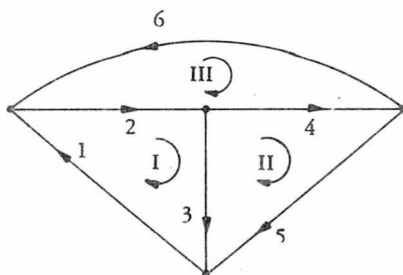


Fig.III.1.7 - Grafo del circuito di fig.III.1.5.



Sostituendo le equazioni precedenti nelle equazioni di equilibrio ed i valori numerici ai componenti, si ottiene il sistema risolvibile su base maglie:

$$2i_{m1} + \frac{d}{dt}(i_{m1} - i_{m3}) + \int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau + v_{c3}(0) = 0$$

$$-\int_0^t [i_{m1}(\tau) - i_{m2}(\tau)] d\tau - v_{c3}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau + v_{c4}(0) + i_{m2} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^t [i_{m2}(\tau) - i_{m3}(\tau)] d\tau - v_{c4}(0) - \frac{d}{dt}(i_{m1} - i_{m3}) = v_g(t)$$

In tale sistema sono incognite le funzioni del tempo i_{m1} , i_{m2} ed i_{m3} , mentre sono note le quantità $v_{c3}(0)$ e $v_{c4}(0)$, che rappresentano i valori delle tensioni ai capi dei condensatori all'istante $t=0$.

Punto b: risoluzione del sistema integro-differenziale.

Il sistema integro-differenziale a cui si giunge nell'analisi dei circuiti lineari permanenti a costanti concentrate, che stiamo considerando, gode delle seguenti proprietà:

- 1) l'unica variabile presente è il tempo e quindi tutte le derivate presenti sono derivate totali. Ciò è conseguenza dell'ipotesi «costanti concentrate», che permette di escludere dalla trattazione del circuito ogni variabile spaziale ed ogni dimensione;
- 2) il sistema è lineare, nel senso che le funzioni incognite compaiono sempre alla prima potenza ed i coefficienti non dipendono da tali incognite. Ciò è conseguenza del carattere lineare del circuito;

3) i coefficienti delle equazioni che compongono il sistema sono indipendenti dal tempo; quindi essi sono costanti e reali. Ciò è conseguenza del carattere permanente (o tempo-invariante) del circuito.

La complessità del sistema risolvibile dipende da due fattori: 1) il numero delle funzioni incognite e quindi delle equazioni disponibili. Tale numero è legato alla complessità topologica del circuito, cioè al numero dei rami dell'albero e del co-albero; 2) l'ordine del sistema differenziale, definito come la somma degli ordini di derivazione rispetto alle singole incognite, dopo aver eliminato le operazioni di integrazione (derivando le equazioni che le contengono) e tutte le relazioni istantanee che sussistono fra le incognite (effettuando le opportune sostituzioni). L'importanza di questo fattore è conseguenza delle seguenti proprietà, per la cui dimostrazione si rimanda alla teoria dei sistemi differenziali ordinari:

- a) la soluzione di un sistema differenziale di ordine n può essere ricondotta alla risoluzione di una singola equazione differenziale dello stesso ordine;
- b) la soluzione di un sistema differenziale di ordine n (integrale generale) dipende da n costanti arbitrarie.

È importante mettere in evidenza che l'ordine del sistema differenziale risolvibile non è mai superiore al numero degli elementi con memoria presenti nel circuito. Infatti il sistema risolvibile può essere sempre scritto come un insieme di equazioni algebriche (relative alle leggi di Kirchhoff ed ai componenti senza memoria) più n equazioni differenziali del primo ordine, relative ciascuna ad un singolo componente con memoria. L'ordine è inferiore ad n solo se il circuito presenta una configurazione particolare dei componenti con memoria, come discusso in dettaglio nel capitolo nono, a cui si rimanda.

Per una trattazione in generale della risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali ordinari si rimanda ai testi di analisi matematica. Nel seguito del presente paragrafo tale problema verrà trattato con riferimento ad alcuni esempi tipici di particolare importanza e semplicità.

III.1.1 - Esempi del primo ordine.

Il caso più semplice da trattare è quello in cui il sistema risolvibile è costituito da un'unica equazione del primo ordine. Tale situazione si ha ad esempio per un circuito composto da un resistore, un condensatore ed un generatore di tensione. Tratteremo in dettaglio questo tipo di circuito, iniziando dal caso in cui il generatore di tensione è disattivato⁽¹⁾.

(1) - È importante notare che nei circuiti con memoria ha senso considerare anche il caso
(segue)

Esempio III.1.3.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.8 supponendo che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ ed il condensatore sia carico ad una certa tensione $v_c(0)$.

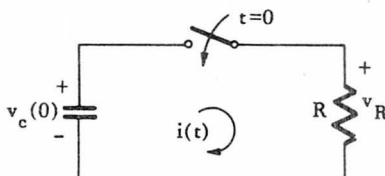


Fig.III.1.8 - Circuito considerato nell'esempio III.1.3.

Il comportamento elettrico del circuito considerato può essere facilmente previsto analizzando il problema dal punto di vista fisico. All'atto della chiusura dell'interruttore, la tensione $v_c(0)$ presente ai capi del condensatore provoca un passaggio di corrente attraverso il resistore; tale corrente a sua volta provoca una diminuzione della carica del condensatore e quindi della sua tensione. Perciò, al passare del tempo, la carica del condensatore tenderà a zero, così come la tensione ai suoi capi e la corrente nel circuito. Il fenomeno si esaurisce in un tempo infinito quando tutta l'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore è stata dissipata nel resistore.

Effettuiamo ora l'analisi del circuito operando con il metodo delle equazioni differenziali. Il circuito si compone di una sola maglia, per cui si ottiene la seguente equazione di equilibrio delle tensioni:

$$(III.1.2) \quad -v_c(t) + v_R(t) = 0$$

Le relazioni costitutive dei componenti sono:

$$(III.1.3) \quad v_R(t) = R i(t) ; \quad v_c(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0)$$

in cui il segno negativo nella (III.1.3) è dovuto al fatto che la corrente $i(t)$ esce dal morsetto positivo del condensatore. Sostituendo le relazioni costitutive nell'equazione di equilibrio, si ha:

$$(III.1.4) \quad \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0) + R i(t) = 0$$

so in cui sono assenti le eccitazioni, a differenza dei circuiti senza memoria, in cui una tale situazione corrisponde alla soluzione banale di avere tutte le grandezze elettriche nulle.

L'equazione precedente, a causa della presenza dell'interruttore, descrive il circuito in esame solo per gli istanti $t \geq 0$ ⁽¹⁾.

Derivando la (III.1.4) rispetto al tempo e ricordando che la quantità $v_c(0)$ è una costante, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$(III.1.5) \quad RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad t \geq 0$$

Osserviamo che la (III.1.5) è lineare, a coefficienti costanti, del primo ordine ed omogenea, non essendo presente nel circuito alcuna eccitazione. Per risolvere la (III.1.5) occorre determinare l'*integrale generale*, che è del tipo seguente:

$$(III.1.6)$$

$$i(t) = A e^{at}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \alpha A$$

ove la quantità A è una costante arbitraria dipendente dalle condizioni iniziali ed α si determina risolvendo la seguente equazione caratteristica associata all'equazione (III.1.5)⁽²⁾:

$$(III.1.7)$$

$$RC \alpha + 1 = 0$$

Si ottiene:

$$(III.1.8)$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC}$$

Per quanto riguarda la quantità A , occorre ricordare che per $t=0$, essendo il condensatore carico alla tensione $v_c(0)$, la corrente risulta pari a:

$$(III.1.9)$$

$$i(0) = \frac{v_c(0)}{R}$$

Confrontando la (III.1.9) con la (III.1.6) si ha:

$$(III.1.10)$$

$$i(0) = A = \frac{v_c(0)}{R}$$

(1) - Per $t < 0$, essendo aperto l'interruttore si ha ovviamente $i(t) = 0$.

(2) - L'equazione caratteristica si ottiene sostituendo l'integrale generale (III.1.6) nell'equazione omogenea (III.1.5), cioè:

$$RC \alpha A e^{at} + A e^{at} = 0$$

ed osservando che tale relazione deve essere valida per ogni t .

Quindi la soluzione dell'equazione differenziale (III.1.5) diviene:

$$(III.1.11) \quad i(t) = \frac{v_c(0)}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

Dalla (III.1.11) appare chiaramente che la corrente di scarica di un condensatore attraverso un resistore R ha un andamento esponenziale (fig.III.1.9). Un andamento simile (fig.III.1.10) ha la tensione ai capi del condensatore, data da:

$$(III.1.12) \quad v_c(t) = R i(t) = v_c(0) e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

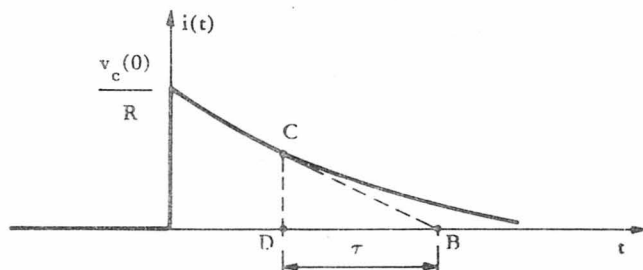


Fig.III.1.9 - Andamento della corrente nel circuito di fig.III.1.8. Il segmento BD è uguale alla costante di tempo del circuito e CB è tangente in C alla curva.

Osservazione III.1.1.

La quantità RC che compare nelle espressioni (III.1.11) e (III.1.12) ha le dimensioni di un tempo; essa è chiamata la «costante di tempo» del circuito e viene comunemente indicata con la lettera τ .

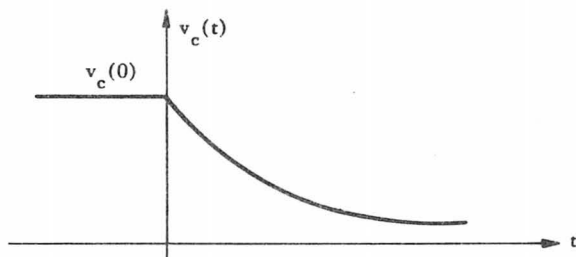


Fig.III.1.10 - Andamento della tensione ai capi del condensatore del circuito di fig.III.1.8.

Dalla (III.1.12) vediamo che:

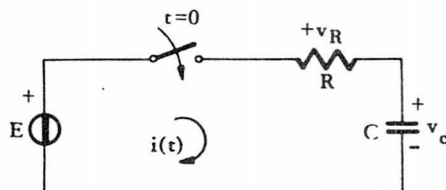
$$(III.1.13) \quad v_c(\tau) = v_c(0) \frac{1}{e}$$

quindi la costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario per ridurre la tensione ad $1/e$ del suo valore iniziale. Il valore della costante di tempo è facilmente deducibile per via grafica, disegnando la retta tangente in un punto qualsiasi alla curva della corrente o della tensione e poi considerando il segmento intercettato sull'asse delle ascisse, come mostrato in fig.III.1.9.

Esempio III.1.4.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.11, supponendo che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ e che il condensatore sia scarico.

Fig.III.1.11 - Circuito considerato nell'esempio III.1.4.



Il comportamento del circuito di fig.III.1.11 può essere facilmente analizzato da un punto di vista fisico. All'istante iniziale, essendo il condensatore scarico, la corrente che scorre nel circuito è pari ad E/R . Tale corrente provoca la carica del condensatore e conseguentemente dà luogo ad una tensione v_c che si oppone alla tensione del generatore. Pertanto la corrente diminuisce con il passare del tempo, tendendo a zero. Dopo un tempo infinito non scorre più corrente e la tensione del condensatore risulta pari ad E .

Effettuiamo ora l'analisi del circuito operando con il metodo delle equazioni differenziali. Il circuito si compone di una sola maglia, per cui si ottiene la seguente equazione di equilibrio delle tensioni:

$$(III.1.14) \quad v_g(t) = v_R(t) + v_c(t)$$

avendo indicato con $v_g(t)$ la tensione del generatore.

Sostituendo nella (III.1.14) le relazioni costitutive dei componenti, si ottiene la seguente equazione differenziale lineare, del primo ordine, con coefficienti costanti:

$$(III.1.15) \quad RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = E \quad t \geq 0$$

L'equazione (III.1.15) non è omogenea, per la presenza a secondo membro della tensione di eccitazione, che nel caso presente è supposta costante nel tempo. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione (III.1.15), che verrà poi particolarizzato imponendo la seguente condizione iniziale:

$$(III.1.16) \quad v_c(0) = 0$$

L'integrale generale dell'equazione (III.1.15) si può determinare con il seguente procedimento, valido per ogni equazione differenziale lineare ordinaria non omogenea:

- a) si considera l'integrale generale $v_0(t)$ dell'equazione omogenea associata, ottenuta dall'equazione data ponendo a zero l'eccitazione;
- b) si somma a $v_0(t)$ un integrale particolare $v_p(t)$ che soddisfi l'equazione data.

Nel nostro caso l'equazione omogenea associata ha l'espressione seguente:

$$(III.1.17) \quad RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

L'integrale generale $v_0(t)$ della (III.1.17) è il seguente:

$$(III.1.18) \quad v_0(t) = A e^{\alpha t}$$

$$\text{con } \alpha = -\frac{1}{RC}$$

Occorre ora determinare un integrale particolare dell'equazione (III.1.15). Tale determinazione risulta in generale più o meno complicata a seconda della forma della funzione di eccitazione⁽¹⁾. Essendo nel nostro caso costante, si vede facilmente che la funzione:

$$(III.1.19) \quad v_p(t) = E$$

soddisfa l'equazione data e costituisce quindi l'integrale particolare cercato.

In conclusione l'integrale generale dell'equazione (III.1.15) è:

$$(III.1.20) \quad v_c(t) = v_0(t) + v_p(t) = A e^{-t/RC} + E$$

(1) - Un metodo che può essere seguito in ogni caso è quello del nucleo risolvante, per il quale si rimanda ai testi di analisi matematica.

Per particolareggiare l'integrale generale al circuito in esame, occorre conoscere come ulteriore dato del problema la tensione del condensatore in un qualsiasi istante di tempo. Nel caso presente sappiamo che $v_c(0) = 0$; quindi si ha:

$$(III.1.21) \quad v_c(0) = A + E = 0$$

da cui si ricava:

$$(III.1.22) \quad A = -E$$

La tensione del condensatore risulta uguale a (fig.III.1.12):

$$(III.1.23) \quad v_c(t) = E (1 - e^{-t/RC}) \quad t \geq 0$$

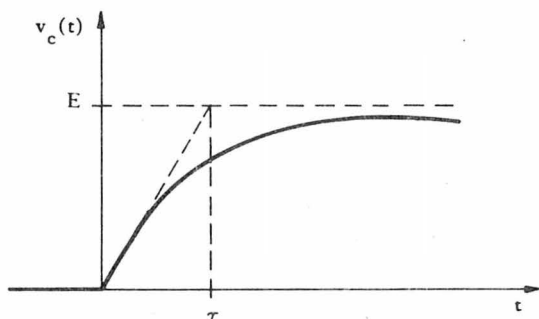


Fig.III.1.12 - Andamento della tensione ai capi del condensatore del circuito di fig.III.1.11.

Da questa espressione si ricava la corrente che scorre nel condensatore tramite la:

$$(III.1.24) \quad i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \quad t \geq 0$$

il cui andamento nel tempo è mostrato in fig.III.1.13.

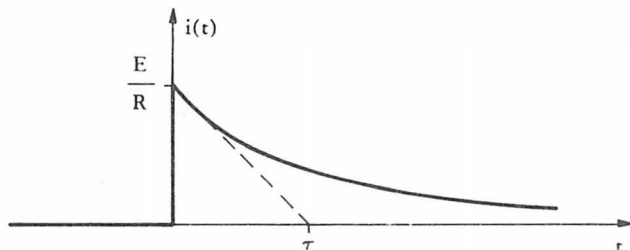


Fig.III.1.13 - Andamento della corrente che scorre nel condensatore del circuito di fig.III.1.11.

III.1.2 - Esempi del secondo ordine.

Esaminiamo nel seguente paragrafo il caso dei circuiti caratterizzati da un'equazione risolvente del secondo ordine. Tale situazione si ha ad esempio per un circuito composto da un resistore, un condensatore, un induttore ed un generatore di tensione. Questo circuito tipico, mostrato in fig.III.1.14, verrà analizzato in dettaglio di seguito nell'ipotesi che l'interruttore si chiuda all'istante $t=0$ e che la tensione impressa sia costante.

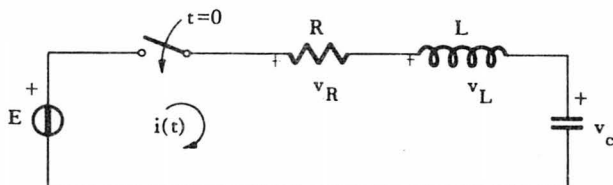


Fig.III.1.14 - Circuito considerato nel § III.1.2.

Analizziamo il circuito su base maglie; l'equazione di equilibrio delle tensioni per l'unica maglia presente è:

$$(III.1.25) \quad v_c + v_L + v_R = E$$

È da notare che tale equazione vale solo per $t \geq 0$, cioè quando è chiuso l'interruttore.

Le relazioni costitutive dei componenti sono, tenendo conto che sono percorsi dalla stessa corrente $i(t)$:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0)$$

(III.1.26)

$$v_L = L \frac{di}{dt} ; \quad v_R = Ri$$

Sostituendo le (III.1.26) nella (III.1.25), si ottiene la seguente equazione integro-differenziale:

$$(III.1.27) \quad \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_c(0) + L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad t \geq 0$$

Derivando tale equazione rispetto al tempo, tenendo conto che $v_c(0)$ ed E sono quantità costanti, si ha:

$$(III.1.28) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad t \geq 0$$

Per gli istanti $t < 0$, essendo aperto l'interruttore, l'equazione (III.1.28) non è più valida e deve essere sostituita con la seguente:

$$(III.1.29) \quad i(t) = 0 \quad t < 0$$

Determiniamo ora l'integrale generale della (III.1.28). L'equazione caratteristica associata è:

$$(III.1.30) \quad \alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

Le due radici di tale equazione valgono:

$$(III.1.31) \quad \alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Nell'ipotesi in cui le due radici α_1 ed α_2 siano fra loro distinte, cioè quando:

$$(III.1.32) \quad \frac{R^2}{4L^2} \neq \frac{1}{LC}$$

l'integrale generale dell'equazione (III.1.28) assume la forma:

$$(III.1.33) \quad i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

in cui A_1 ed A_2 sono due costanti arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Nel caso invece di radici coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -R/2L$, cioè quando:

$$(III.1.34) \quad \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

l'integrale generale dell'equazione (III.1.28) assume la forma:

$$(III.1.35) \quad i(t) = A_1 e^{\alpha t} + A_2 t e^{\alpha t}$$

Tale integrale dipende anch'esso da due costanti arbitrarie⁽¹⁾.

Si può osservare che l'espressione della soluzione considerata fino a questo punto è del tutto generale, a prescindere da qualsiasi ipotesi sulle condizioni iniziali nelle quali si trovi il circuito all'istante $t=0$. Tali condizioni dipendono dall'azione di eventuali eccitazioni agenti nel periodo di tempo $t < 0$, in conseguenza delle quali si ha un immagazzinamento prima dell'istante $t=0$ di energia negli elementi con memoria e cioè nel condensatore e nell'induttore. Come è stato messo in evidenza nei § I.6.2 ed I.6.3, l'energia immagazzinata in un condensatore è legata direttamente alla tensione presente ai suoi capi, mentre l'energia immagazzinata in un induttore è legata direttamente alla corrente che lo percorre. Perciò lo stato iniziale del circuito è individuato fisicamente dalle due seguenti quantità:

$$(III.1.36) \quad v_c(0) \quad i_L(0)$$

che devono essere considerate come dati del problema⁽²⁾.

(1) - La presenza di due costanti arbitrarie nell'integrale generale è conseguenza del fatto che l'equazione differenziale che si sta considerando è del secondo ordine.

(2) - Occorre fare attenzione al fatto che le grandezze elettriche (III.1.36) sono presenti nel circuito per cause che esulano dal fenomeno elettrico in esame e quindi dal comportamento del circuito di fig.III.1.14 dopo la chiusura dell'interruttore. Esse possono essere assegnate in modo arbitrario, come è stato precisato; tuttavia i loro valori devono soddisfare le leggi di Kirchhoff. Si può ad esempio osservare che la quantità $i_L(t)$ per $t < 0$ deve essere nulla nel circuito considerato, essendo l'interruttore aperto. Di conseguenza deve essere $i_L(0) = 0$. Valori di $i_L(0)$ diversi da zero possono tuttavia essere ancora giustificati nei due modi seguenti:

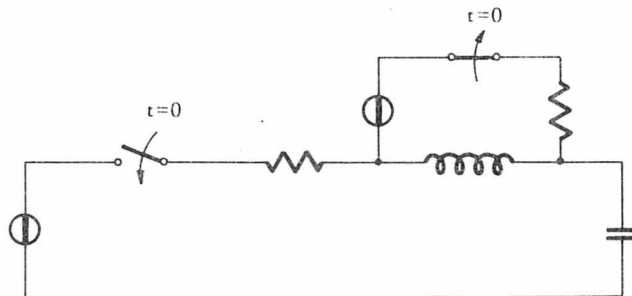


Fig.III.1.15.- Circuito che permette la circolazione di corrente nell'induttore per $t < 0$.

(segue)

Le quantità (III.1.36) permettono di determinare le costanti arbitrarie A_1 ed A_2 tramite le seguenti operazioni:

a) a partire dalle grandezze elettriche iniziali (III.1.36), determinare i valori iniziali di Cauchy associati all'equazione differenziale (III.1.28). Per un'equazione differenziale di ordine n , detti valori sono rappresentati dalla variabile e dalle sue prime $n-1$ derivate, calcolate nel punto $t=0$. Nel caso presente i valori iniziali di Cauchy sono le seguenti quantità:

$$(III.1.37) \quad i(0); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$$

b) risolvere il problema delle condizioni iniziali di Cauchy, cioè con riferimento al caso generico di un'equazione di ordine n , determinare le n costanti arbitrarie in funzione dei valori iniziali di Cauchy.

Applichiamo le operazioni precedenti al caso in esame. In relazione al passo a) otteniamo il seguente sistema di equazioni, in cui sono incognite le quantità (III.1.37):

$$(III.1.38) \quad i(0) = i_L(0); \quad L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + R i(0) + v_c(0) = E$$

Risolviendo le (III.1.38), si ottiene:

$$(III.1.39) \quad i(0) = i_L(0); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L} \{E - R i_L(0) - v_c(0)\}$$

In relazione al passo b) le equazioni che si ottengono dipendono dalla natura delle radici α_1 ed α_2 dell'equazione caratteristica (III.1.30). È necessario perciò a questo punto distinguere tre casi.

a) si può supporre l'esistenza di una causa esterna che carica istantaneamente l'induttore proprio quando l'interruttore viene chiuso;

b) si suppone $i_L(t) \neq 0$ per $t < 0$, sostituendo al circuito in esame quello di fig. III.1.15, in cui è presente un secondo interruttore che si apre all'istante $t=0$. In questo modo si è costituita una via elettrica di libera circolazione della corrente nell'induttore per $t < 0$. Il nuovo circuito coincide con quello di fig. III.1.14 per $t \geq 0$.

1) Radici α_1 ed α_2 reali e distinte.

Tale caso si verifica quando:

$$(III.1.40) \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$$

e quindi l'integrale generale della (III.1.28) ha la forma (III.1.33).

Gli esponenti delle funzioni che compongono tale integrale sono negativi quando le due radici sono negative, ciò che si verifica sempre, in base alla regola di Cartesio applicata all'equazione di secondo grado (III.1.30), quando il circuito considerato è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$). In questo caso la funzione risultante ha un andamento decrescente nel tempo.

La risoluzione del problema di Cauchy porta alle seguenti relazioni, deducibili direttamente dalla (III.1.33):

$$(III.1.41) \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 &= i(0) \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 &= \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Dal sistema precedente si possono ricavare le incognite A_1 ed A_2 e quindi la soluzione.

Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.5.

Effettuare l'analisi del circuito di fig. III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 10 \quad , \quad L = 1/2 \quad , \quad C = 2/91 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed iniziali valgano:

$$E = 2 \quad , \quad v_c(0) = 1 \quad , \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Dalle (III.1.31) si ottiene:

$$\alpha_1 = -10 + \sqrt{100 - 91} = -7 \quad ; \quad \alpha_2 = -10 - 3 = -13 \quad (S^{-1})$$

Dalle (III.1.39) si hanno i seguenti valori iniziali di Cauchy:

$$i(0) = i_L(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 2(2-1) = 2$$

Dalla (III.1.41) si ottiene:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -7A_1 - 13A_2 = 2 \end{cases}$$

da cui deriva:

$$A_1 = \frac{1}{3} \quad ; \quad A_2 = -\frac{1}{3}$$

L'andamento nel tempo della corrente $i(t)$ che scorre nel circuito di fig.III.1.14 nel caso qui considerato, assume la seguente espressione (fig.III.1.16):

$$i(t) = \frac{1}{3} (e^{-7t} - e^{-13t}) \quad (A)$$

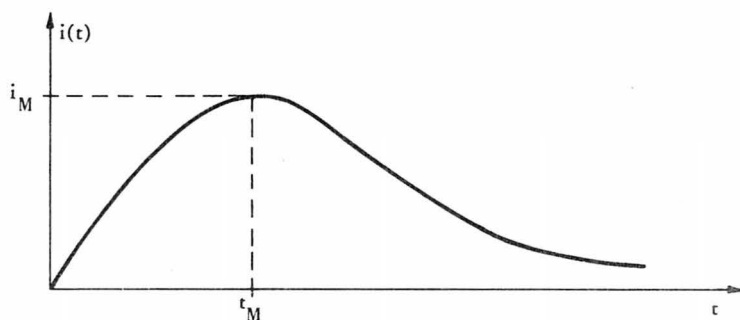


Fig.III.1.16 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso che i valori dei componenti siano quelli previsti nell'esempio III.1.5.

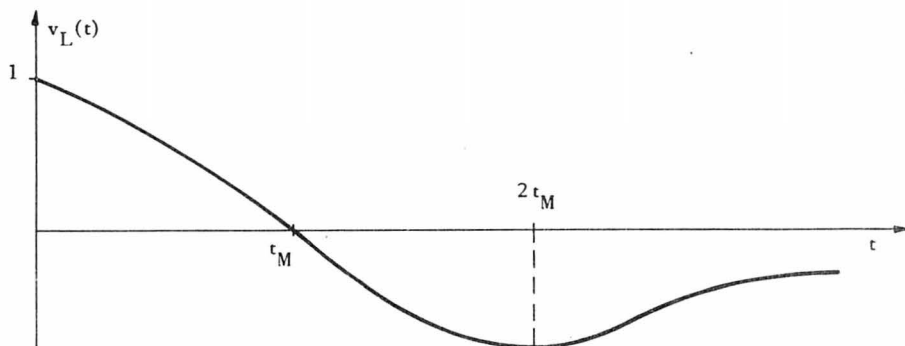


Fig.III.1.17 - Andamento della tensione $v_L(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.5.

L'andamento nel tempo di ogni altra grandezza elettrica del circuito può essere facilmente determinato. Ad esempio la tensione ai capi dell'induttore vale (fig.III.1.17):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{7}{6} e^{-7t} + \frac{13}{6} e^{-13t} \quad (V) \quad .$$

2) Radici α_1 ed α_2 coincidenti.

Tale caso si verifica quando è soddisfatta la condizione (III.1.34); $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ vale:

$$(III.1.42) \quad \alpha = -\frac{R}{2L}$$

ed è reale negativa quando il circuito è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$).

La forma dell'integrale generale nel presente caso è la (III.1.35), che porta alle seguenti relazioni per quanto riguarda il problema di Cauchy:

$$(III.1.43) \quad \begin{cases} A_1 = i(0) \\ \alpha A_1 + A_2 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Dal sistema (III.1.43) si possono ricavare le quantità incognite A_1 ed A_2 e determinare quindi l'integrale particolare. Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.6.

Effettuare l'analisi del circuito di fig.III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 4, \quad L = 1/2, \quad C = 1/8 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed iniziali valgano:

$$E = 2, \quad v_c(0) = 1, \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Essendo

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} = 16, \quad \text{si ottiene dalle (III.1.42)}$$

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = -4$$

I valori iniziali di Cauchy sono gli stessi ottenuti nell'esempio III.1.5 e cioè:

$$i(0) = 0 ; \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 2$$

Utilizzando le equazioni (III.1.43), si ottiene:

$$A_1 = 0 ; \quad A_2 = 2$$

La corrente $i(t)$, la cui espressione è del tipo III.1.35, vale (fig.III.1.18):

$$i(t) = 2t e^{-4t} \quad (A)$$

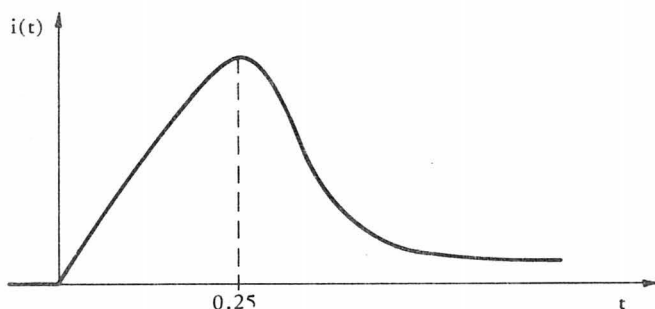


Fig.III.1.18 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso che i valori dei componenti siano quelli previsti nell'esempio III.1.6.

Determiniamo anche in questo caso, a titolo di esempio, la tensione ai capi dell'induttore. Essa vale (fig.III.1.19):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = e^{-4t} - 4t e^{-4t} \quad (V)$$

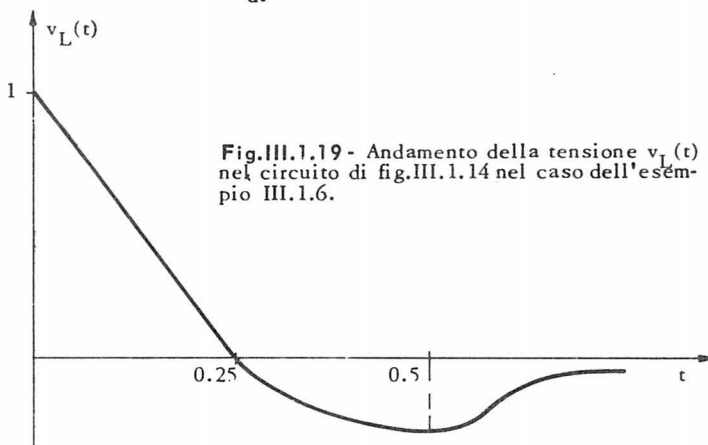


Fig.III.1.19 - Andamento della tensione $v_L(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.6.

3) Radici α_1 ed α_2 complesse coniugate.

Tale caso si verifica quando è soddisfatta la condizione:

$$(III.1.44) \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

La forma dell'integrale generale è la (III.1.33), con i valori di α_1 ed α_2 dati dalle (III.1.31), cioè:

$$(III.1.45) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{R}{2L} + j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \\ \alpha_2 &= \alpha_1^* = -\frac{R}{2L} - j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned}$$

ove j è l'unità immaginaria ($j^2 = -1$) e l'asterisco indica il complesso coniugato.

La risoluzione del problema di Cauchy porta in questo caso alle seguenti relazioni, deducibili direttamente dalle (III.1.33):

$$(III.1.46) \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = i(0) \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_1^* A_2 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Il sistema (III.1.46) gode di una proprietà fondamentale: i valori delle incognite A_1 ed A_2 sono fra loro complessi coniugati. Infatti occorre innanzi tutto osservare che i valori iniziali di Cauchy sono nel nostro caso delle quantità reali; ciò vale in generale, poiché per motivi fisici sono evidentemente possibili solo valori reali per le condizioni iniziali di un circuito elettrico. D'altra parte dalle (III.1.46), prendendo i complessi coniugati di entrambi i membri si ottiene:

$$(III.1.47) \quad \begin{cases} A_2^* + A_1^* = i(0) \\ \alpha_1 A_2^* + \alpha_1^* A_1^* = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Questo nuovo sistema coincide con il (III.1.46) salvo la sostituzione di A_1 con A_2^* ed A_2 con A_1^* . Perciò deve essere:

$$(III.1.48) \quad A_1 = A_2^*$$

In conseguenza della (III.1.48), l'integrale generale assume la forma:

$$(III.1.49) \quad i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_1^* e^{\alpha_1^* t}$$

ove ponendo:

$$(III.1.50) \quad \begin{aligned} A_1 &= A_M e^{j\varphi_A} \\ \alpha_1 &= \alpha_r + j \alpha_j \end{aligned}$$

diviene:

$$(III.1.51) \quad i(t) = 2 \operatorname{Re} [A_1 e^{\alpha_1 t}] = 2 \operatorname{Re} [A_M e^{\alpha_r t} e^{j(\alpha_j t + \varphi_A)}] = 2 A_M e^{\alpha_r t} \cos(\alpha_j t + \varphi_A)$$

avendo indicato con $\operatorname{Re} [\dots]$ l'operatore che dà la parte reale di un numero complesso.

L'espressione (III.1.51) mette in evidenza in termini espliciti il carattere reale della corrente $i(t)$, ciò che corrisponde ad un'esigenza inderogabile fisica, essendo assurda una corrente istantanea di valore complesso. La quantità α_r risulta di segno negativo, in base alla (III.1.45) quando il circuito è passivo ($R > 0, L > 0, C > 0$); in tale caso l'andamento della (III.1.51) è smorzato al crescere del tempo.

Applichiamo quanto detto ad un esempio.

Esempio III.1.7.

Effettuare l'analisi del circuito di fig. III.1.14 nell'ipotesi che i componenti abbiano i valori:

$$R = 8, \quad L = 1, \quad C = 1/25 \quad (\Omega, H, F)$$

e che le grandezze elettriche impresse ed i valori iniziali valgano:

$$E = 3; \quad v_c(0) = 1; \quad i_L(0) = 0 \quad (V, A)$$

Si ottengono i seguenti valori di α_1 ed α_2 .

$$\begin{cases} \alpha_1 = -4 + j3 \\ \alpha_2 = -4 - j3 \end{cases}$$

Dalle (III.1.39) si ottengono i seguenti valori iniziali di Cauchy:

$$i(0) = 0$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 2$$

I valori di A_1 ed A_2 si ottengono dal sistema (III.1.46), che diviene in questo caso:

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$(-4 + j3)A_1 + (-4 - j3)A_2 = 2$$

Si ottiene:

$$A_1 = -j/3; \quad A_2 = A_1^* = j/3$$

Le quantità definite nella (III.1.50) valgono:

$$\begin{cases} \alpha_r = -4 \\ \alpha_j = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A_M = 1/3 \\ \varphi_A = -\pi/2 \end{cases}$$

Quindi dalla (III.1.51) si ottiene (fig.III.1.20):

$$i(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} e^{-4t} \sin 3t \quad (A)$$

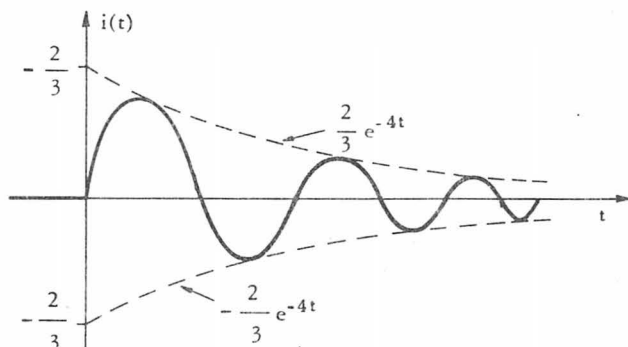


Fig.III.1.20 - Andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.7.

Calcoliamo l'andamento della tensione $v_L(t)$ ai capi dell'induttore; si ottiene (fig.III.1.21):

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = e^{-4t} \left(2\cos 3t - \frac{8}{3} \sin 3t \right)$$

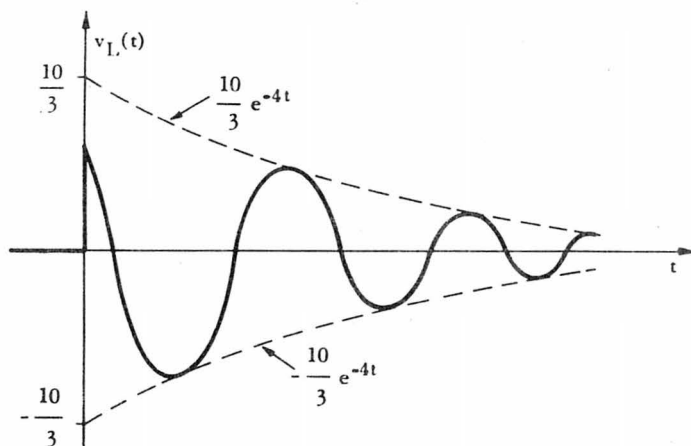


Fig.III.1.21 - Andamento della tensione ai capi dell'induttore nel circuito di fig.III.1.14 nel caso dell'esempio III.1.7.

Osservazione III.1.2.

Si può osservare che gli andamenti nel tempo che si ottengono nell'ultimo caso considerato sono sostanzialmente differenti da quelli visti nei primi due casi. Comunemente si ricorda tale fatto dicendo che nel primo caso la funzione è di tipo *sovrasmorzato*, mentre nel terzo caso è di tipo *sottosmorzato*. Il caso numero due, relativo alla coincidenza delle radici, si può considerare intermedio fra i due e viene detto a *smorzamento critico*.

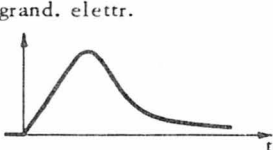
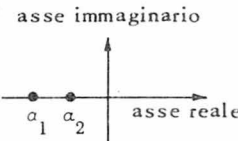
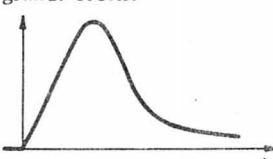
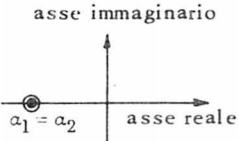
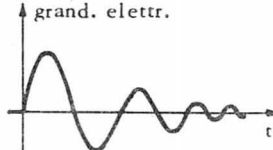
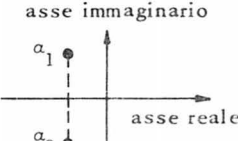
In tab.III.1.2 viene mostrato in modo riassuntivo il tipo di smorzamento in relazione alla posizione delle radici α_1 ed α_2 dell'equazione caratteristica nel piano complesso.

Osservazione III.1.2.

È opportuno considerare attentamente i passaggi analitici effettuati per ricavare l'andamento nel tempo nel terzo caso (sottosmorzato). In tal caso è risultato opportuno ottenere l'andamento reale della corrente incognita effettuando dei calcoli intermedi nel campo complesso. Tale modo di procedere si presenta molte volte nel campo dell'elettrotecnica, tipicamente in presenza di funzioni trigonometriche. La procedura in questione non è strettamente necessaria; infatti anche nel caso considerato si sarebbe potuto ottenere l'integrale generale direttamente in termini di funzioni trigonometriche; in tal modo tuttavia si sarebbero dovuti utilizzare sviluppi analitici molto più complessi e soprattutto non si sarebbero più potuti trattare in maniera unificata i tre casi che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica. È necessario ri-

ricordare infatti che solo nel campo complesso si ottiene l'unificazione delle funzioni trigonometriche e di quelle esponenziali.

Tabella III.1.2 - Andamenti nel tempo delle grandezze elettriche in un circuito del secondo ordine.

Tipo di andamento	Diagramma	Tipo delle radici	Posizione nel piano complesso delle radici
Sovrasmorzato		Reali distinte	
Sovrasmorzato critico		Reali coincidenti	
Sottosmorzato		Complesse coniugate	

III.2 - Andamenti tipici delle grandezze impresse nei circuiti con memoria.

Quando sono stati introdotti i generatori indipendenti di tensione e di corrente è stato detto che le grandezze elettriche da essi impresse potevano assumere un andamento qualsiasi. D'altra parte nel paragrafo precedente, introducendo l'argomento dell'analisi dei circuiti con memoria, è stato notato come la risposta di un circuito sia strettamente legata alle funzioni di eccitazione e come la difficoltà dei metodi di analisi dipenda dalla classe delle funzioni di eccitazione considerate.

I tipi di eccitazione che si utilizzano usualmente sono scelti in base: 1) a motivi di ordine tecnico, nel qual caso la funzione introdotta approssima in modo più o meno soddisfacente l'andamento nel tempo della grandezza impressa in un generatore reale; 2) a motivi di ordine teorico: le funzioni introdotte sono scelte con lo scopo di mettere in evidenza qualche proprietà del circuito, anche se non possono essere approssimate in modo completamente soddisfacente dai dispositivi reali. In questo ambito vengono spesso utilizzate funzioni che non sono continue nel tempo e presentano delle discontinuità.

Le funzioni di eccitazione possono essere completamente determinate oppure possono essere note tramite le loro proprietà statistiche. È evidente che la trattazione del problema dell'analisi di un circuito si modifica sostanzialmente a seconda che le funzioni di eccitazione siano del primo o del secondo tipo.

Nel presente paragrafo limiteremo l'attenzione alle eccitazioni del primo tipo, rimandando per quelle aleatorie nel tempo ai testi citati nell'appendice 3E. Le funzioni di eccitazione che vengono prese in considerazione di seguito sono quelle più usate in pratica; tuttavia, molte altre sono riportate nell'appendice III.A, a cui si rimanda.

III.2.1 - Funzione gradino unitario.

La funzione gradino unitario, indicata con il simbolo $u_{-1}(t)$, è mostrata in fig.III.2.1. Essa presenta una discontinuità in corrispondenza all'istante $t=0$, dove il suo valore passa da zero ad uno. Analiticamente viene definita con:

(III.2.1)

$$u_{-1}(t) = 0 \quad t < 0$$

$$u_{-1}(t) = 1 \quad t > 0$$

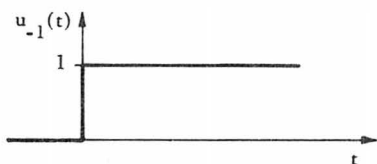


Fig.III.2.1 - Andamento della funzione gradino unitario.

Dal punto di vista fisico la sua interpretazione è immediata: essa corrisponde all'inserzione di un generatore di valore unitario all'istante $t=0$.

Nelle applicazioni è spesso necessario fare riferimento ad un generatore di ampiezza qualsiasi che inizia ad agire su un circuito elettrico all'istante $t=t_0$. In tal caso si può considerare la funzione seguente:

(III.2.2)

$$f(t) = a \cdot u_{-1}(t - t_0)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.2.2. Più in generale, supponendo che la funzione impressa dal generatore sia $g(t)$ e che essa cominci ad agire nel circuito all'istante t_0 , si ha:

(III.2.3)

$$f(t) = g(t) \cdot u_{-1}(t - t_0)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.2.3.

Fig.III.2.2 - Eccitazione costante impressa all'istante t_0 .

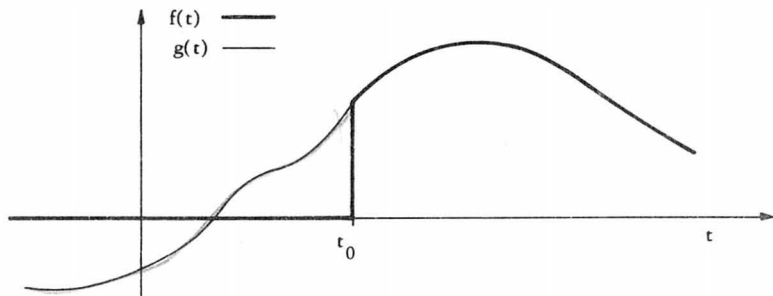
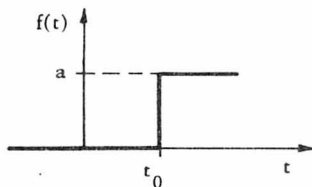


Fig.III.2.3 - Eccitazione variabile impressa all'istante t_0 .

Dal punto di vista circuitale l'inserzione di un generatore può essere ottenuta per mezzo di un opportuno interruttore o commutatore. Si può ottenere in tal modo un'interpretazione circuitale immediata per la funzione a gradino, che trova riscontro in moltissimi casi reali; tale interpretazione è mostrata nella fig.III.2.4 per il generatore di tensione e nella fig.III.2.5 per il generatore di corrente. In entrambi i casi nello schema a) è presente un interruttore o commutatore ideale che si trova nella posizione indicata per $t < t_0$, mentre viene spostato istantaneamente all'istante $t = t_0$. Nello schema b) la presenza del commutatore o dell'interruttore non è più necessaria, essendo la sua funzione svolta implicitamente dalla funzione a gradino.

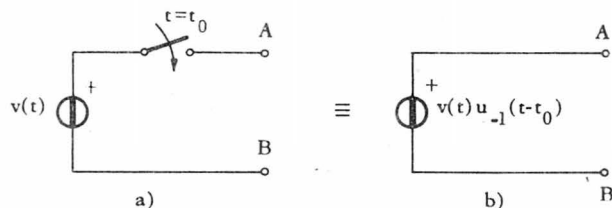


Fig. III.2.4 - Interpretazione circuitale dell'inserzione all'istante t_0 di un generatore di tensione.

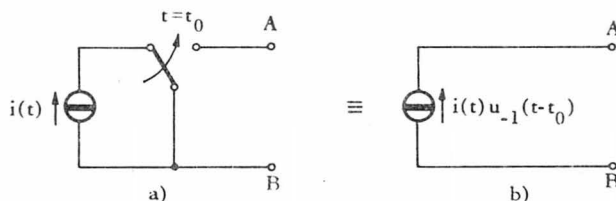


Fig. III.2.5 - Interpretazione circuitale dell'inserzione all'istante t_0 di un generatore di corrente.

Dalle (III.2.1) si deduce il carattere discontinuo della funzione gradino unitario, per cui essa non risulta definita in $t=0$. A volte può risultare conveniente, dal punto di vista analitico, utilizzare altre definizioni, che coincidono con quella data (a meno del punto $t=0$) e che propongono la funzione $u_{-1}(t)$ come limite di una classe di funzioni continue. Fra le molte definizioni che è possibile dare, ne ricordiamo due:

a) Sia $u_{-1,\epsilon}(t)$ la funzione definita come segue:

$$(III.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_{-1,\epsilon}(t) = 0 & \text{per } t \leq 0 \\ u_{-1,\epsilon}(t) = \frac{t}{\epsilon} & \text{per } 0 \leq t \leq \epsilon \\ u_{-1,\epsilon}(t) = 1 & \text{per } t \geq \epsilon \end{array} \right.$$

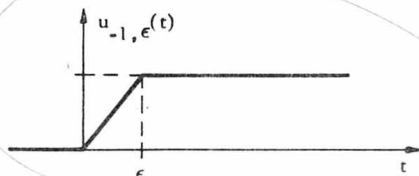
Allora il gradino unitario si può definire come:

$$(III.2.5) \quad u_{-1}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{-1,\epsilon}(t)$$

Nella fig. III.2.6 è riportato l'andamento della funzione $u_{-1,\epsilon}(t)$; si vede chiaramente che per ϵ che tende a zero, la funzione data tende al

gradino unitario, eccetto che nel punto $t=0$, ove la nuova funzione è nulla. Notare che, per ogni ϵ , la funzione $u_{-1,\epsilon}(t)$ è continua per ogni t ;

Fig.III.2.6 - Prima funzione considerata per una definizione alternativa di $u_{-1}(t)$.



b) Sia $u_{-1,\epsilon}(t)$ la funzione definita come segue:

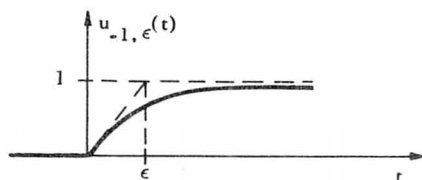
$$(III.2.6) \quad \begin{aligned} u_{-1,\epsilon}(t) &= 0 && \text{per } t \leq 0 \\ u_{-1,\epsilon}(t) &= 1 - e^{-t/\epsilon} && \text{per } t \geq 0 \end{aligned}$$

Allora il gradino unitario $u_{-1}(t)$ si può definire come:

$$(III.2.7) \quad u_{-1}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{-1,\epsilon}(t)$$

Nella fig.III.2.7 è riportato l'andamento della nuova funzione; per essa valgono le stesse considerazioni fatte nel caso a).

Fig.III.2.7 - Seconda funzione considerata per una definizione alternativa di $u_{-1}(t)$.



III.2.2 - Funzione impulso unitario.

La funzione impulso unitario, indicata con il simbolo $u_0(t)$, è molto meno intuitiva della funzione gradino unitario; per di più, come verrà accennato in seguito, in questo caso la stessa parola «funzione» è usata in modo improprio, trattandosi di un ente matematico diverso e cioè di una distribuzione⁽¹⁾. È tuttavia opportuno caratterizzare dapprima in-

(1) - Per dettagli sulla teoria delle distribuzioni si rimanda a A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, «Lezioni di complementi di matematica», Ed. Veschi, Roma 1972, cap. 5.

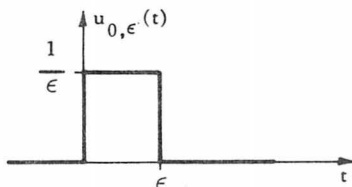
tuitivamente la funzione impulso unitario a partire da funzioni note e facilmente descrivibili. Considereremo due casi differenti.

a) Si consideri la seguente funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ definita nel modo seguente:

$$(III.2.8) \quad u_{0,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} [u_{-1}(t) - u_{-1}(t - \epsilon)] \quad \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{t}{\epsilon} - \frac{t - \epsilon}{\epsilon} \right]$$

Tale funzione è costituita dalla differenza di due gradini di ampiezza $1/\epsilon$, il secondo dei quali è traslato rispetto al primo del tempo ϵ . Si vede facilmente che la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ è nulla per $t < 0$ (essendo tutti e due i gradini nulli) e per $t > \epsilon$ (poiché il secondo gradino annulla il primo), mentre vale $1/\epsilon$ per $0 < t < \epsilon$ (poiché il primo gradino vale uno ed il secondo zero in detto intervallo).

Fig.III.2.8 - Prima funzione considerata per definire $u_0(t)$.



L'andamento della funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ è quello di fig.III.2.8. Occorre notare che al variare di ϵ , la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ possiede una proprietà invariante: il suo integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ è indipendente da ϵ . Infatti:

$$(III.2.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt = 1$$

b) Si consideri ora un'altra funzione $u_{0,\epsilon}(t)$, definita nel modo seguente:

$$(III.2.10) \quad \begin{cases} u_{0,\epsilon}(t) = 0 & \text{per } t \leq 0 \\ u_{0,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} e^{-t/\epsilon} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

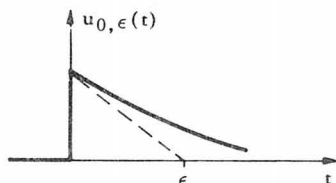
L'andamento di questa funzione è riportato in fig.III.2.9.

È facile verificare che anche questa nuova funzione possiede un invariante dato dall'integrale (III.2.9). Infatti per ogni ϵ si ha:

$$(III.2.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon} e^{-t/\epsilon} dt = \frac{1}{\epsilon} [-\epsilon e^{-t/\epsilon}]_0^{\infty} = 1$$

È abbastanza facile intuire che, al diminuire di ϵ , le due funzioni $u_{0,\epsilon}(t)$ assumono caratteristiche molto simili e tendono ad una funzione ovunque nulla, tranne che in un intorno del punto $t=0$. Tali funzioni sono quelle che ci servono per caratterizzare fenomeni che si esplicano in intervalli di tempo molto brevi con valore finito del loro integrale.

Fig. III.2.9 - Seconda funzione considerata per la definizione di $u_0(t)$.



Sorge immediato il problema di scegliere un valore di ϵ sufficientemente piccolo. In particolare è evidente che si avrebbe una notevole semplificazione analitica, se si potesse scegliere proprio il limite per $\epsilon \rightarrow 0$. Tuttavia è facile vedere che tale passaggio al limite non è possibile, in quanto si distrugge la proprietà fondamentale dell'invarianza degli integrali (III.2.9) e (III.2.11). Infatti pur rimanendo unitario il limite dell'integrale:

$$(III.2.12) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,\epsilon}(t) dt \right] = 1$$

risulta nullo l'integrale del limite:

$$(III.2.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{0,\epsilon}(t) \right] dt = 0$$

Il problema non può venire risolto nell'ambito della teoria classica delle funzioni; occorre ricorrere a quella delle distribuzioni. Nello ambito di tale teoria si dimostra che è possibile introdurre un ente $u_0(t)$, che viene detto *distribuzione impulsiva unitaria*, o di *Dirac*, tale per cui l'integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ è unitario e più precisamente:

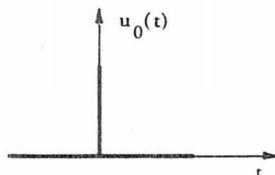
$$(III.2.14) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^T u_0(t) dt = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T u_0(t) dt = 1 & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

Più in generale si dimostra che per ogni funzione continua $f(t)$ si ha:

$$(III.2.15) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^T u_0(t) \cdot f(t) dt = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T u_0(t) \cdot f(t) dt = f(0) & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

Nella letteratura tecnica viene usualmente indicata la $u_0(t)$ con la denominazione di «funzione impulsiva di Dirac»; anche nel presente testo tale denominazione verrà usata, malgrado che sia impropria per quanto detto. Graficamente la funzione $u_0(t)$ viene rappresentata come in fig.III.2.10.

Fig.III.2.10 - Rappresentazione simbolica dell'impulso unitario.



Il concetto di funzione impulsiva unitaria può essere esteso al caso di impulsi non unitari e posizionati in istanti differenti dall'origine dei tempi. Ad esempio la funzione :

(III.2.16)

$$A u_0(t - t_0)$$

corrisponde ad un impulso di ampiezza A (intendendo con tale locuzione il fatto che il suo valore integrale definito fra $-\infty$ e $+\infty$ è uguale ad A) e posizionato nell'istante t_0 .

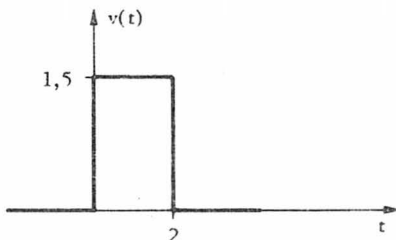
I motivi che stanno alla base dell'introduzione delle funzioni impulsive precedenti sono di ordine pratico e teorico. Rimandando la discussione per quest'ultimi al quarto capitolo, accenneremo di seguito ai primi.

Un'eccitazione impulsiva corrisponde all'inserzione nel circuito di un generatore per un intervallo di tempo molto breve rispetto a tutti i tempi di risposta del circuito stesso⁽¹⁾. Sotto questa ipotesi si può dimostrare che l'effetto dell'eccitazione sul circuito ri-

(1) - Ad esempio se si considera il circuito di fig.III.1.11 è sufficiente che la durata dell'inserzione del generatore sia molto più piccola della costante di tempo τ .

sulta poco dipendente dalla forma della funzione di eccitazione, che può quindi essere assimilata ad una funzione impulsiva. Essa non è unitaria, ma ha un'ampiezza uguale all'area della funzione rappresentante l'eccitazione considerata. Ad esempio in figura III.2.11 è rappresentata una tensione di tipo impulsivo di ampiezza uguale a $3 \text{ V} \mu\text{sec}$.

Fig. III.2.11 - Impulso di tensione ($\text{V}, \mu\text{sec}$).



Confrontando la funzione $u_{0,\epsilon}(t)$ rappresentata in fig. III.2.9 con l'andamento della corrente $i(t)$ di fig. III.1.13, si vede che esse rappresentano la stessa funzione. Si vede inoltre che la $i(t)$ possiede un integrale definito fra $-\infty$ e $+\infty$, indipendente da R e pari ad EC . Infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{E}{R} e^{-t/RC} dt = \frac{E}{R} [-RC e^{-t/RC}]_0^{\infty} = EC$$

Quindi al tendere di R a zero, la corrente $i(t)$ tende all'impulso di ampiezza EC (ossia di ampiezza pari alla carica elettrica totale immagazzinata nel condensatore dopo il processo di carica); si ha perciò una corrente impulsiva durante la carica a tensione costante di un condensatore in assenza del resistore in serie al generatore.

Osservazione III.2.1.

Confrontando le definizioni delle funzioni $u_0(t)$ e $u_{-1}(t)$, come limite di una classe di funzioni, si nota che $u_{-1}(t)$ costituisce l'integrale della prima. Infatti si ha per ogni ϵ :

$$(III.2.17) \quad u_{-1,\epsilon}(t) = \int_{-\infty}^t u_{0,\epsilon}(\tau) d\tau$$

sia che si faccia riferimento alle definizioni (a), basate sulle espressioni (III.2.4) e (III.2.8), sia che si faccia riferimento alle definizioni (b), basate sulle espressioni (III.2.6) e (III.2.10). Si può quindi affermare che:

$$(III.2.18) \quad u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t u_0(\tau) d\tau$$

Quest'ultima proprietà si può d'altra parte ricavare direttamente dalla definizione (III.2.14), interpretando l'integrale come funzione del limite di integrazione superiore. Non è invece possibile affermare il fatto opposto e cioè che la funzione $u_0(t)$ è la derivata di $u_{-1}(t)$, non essendo tale funzione derivabile. Tale difficoltà può essere superata in senso positivo solo nell'ambito della teoria delle distribuzioni, a cui si rimanda⁽¹⁾.

Osservazione III.2.2.

Le funzioni impulso unitario $u_0(t)$ e gradini unitario $u_{-1}(t)$ fanno parte di una classe numerabile di funzioni dette funzioni *singolari*. Un cenno a tali funzioni verrà dato nell'appendice A, dove verranno indicate anche le ragioni (soprattutto teoriche) della loro introduzione. Qui è sufficiente ricordare che la i -sima funzione di tale classe è indicata con il simbolo $u_i(t)$ ed è legata alla successiva tramite la relazione:

$$(III.2.19) \quad u_i(t) = \int_0^t u_{i+1}(\tau) d\tau$$

III.2.2 - Funzioni sinusoidali.

Un tipo di funzione di eccitazione molto importante nelle applicazioni è quella sinusoidale (fig.III.2.12), definita come segue:

$$(III.2.20) \quad e(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

e caratterizzata dai parametri A, ω, φ , aventi ciascuno un nome appropriato, di grande uso pratico.

La quantità A viene chiamata *ampiezza* della funzione $e(t)$, di cui conserva le dimensioni fisiche. Essa è un numero reale e positivo (il segno di $e(t)$ influisce solo su φ).

La quantità ω viene detta *pulsazione* della funzione $e(t)$ e si misura in radianti/secondo. Essa è legata ad un'altra grandezza che interessa le funzioni del tipo (III.2.20), che viene detta *frequenza*, nel modo seguente:

$$(III.2.21) \quad \omega = 2\pi f$$

(1) - Si veda ad esempio A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini «Lezioni di Complementi di matematica», Ed. Veschi, Roma, 1972, Cap. 5.

La frequenza f si misura in *Hertz* (cicli al secondo) ed ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

La quantità φ viene detta *fase iniziale* della funzione $e(t)$ e si misura in radianti, mentre il termine *fase istantanea* si riferisce a tutto l'argomento del coseno, cioè alla quantità $\omega t + \varphi$.

L'intervallo di tempo che intercorre tra due istanti successivi aventi la stessa fase istantanea prende il nome di *periodo* T della funzione $e(t)$ e si misura in secondi. Tale quantità si può ottenere immediatamente nel modo seguente:

$$(III.2.22) \quad \omega(t+T) + \varphi = \omega t + 2\pi + \varphi$$

da cui si ha:

$$(III.2.23)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

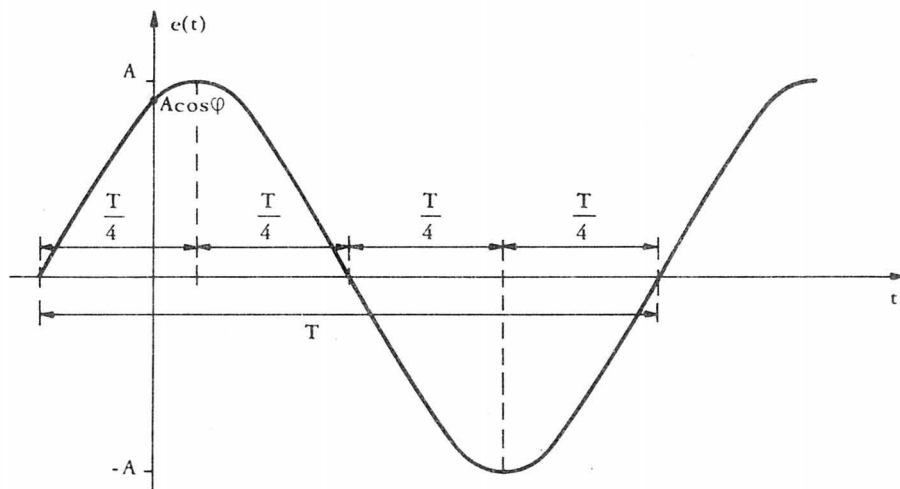


Fig.III.2.12 - Andamento della funzione sinusoidale.

L'importanza delle eccitazioni di tipo sinusoidale è sia pratico che teorico. Dal punto di vista pratico, è sufficiente ricordare che hanno un andamento sinusoidale le grandezze elettriche applicate ai circuiti di potenza. L'importanza teorica è conseguenza del fatto che qualsiasi funzione del tempo periodica è sviluppabile in una serie di funzioni del tipo (III.2.20) di pulsazione $k\omega$, $k=0, 1, 2, \dots$ (sviluppo in serie di Fourier) e che per un circuito lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti, in base

al quale l'effetto di una somma di eccitazioni è uguale alla somma degli effetti delle singole eccitazioni, considerate come se agissero da sole.

III.3 - Applicazione della trasformazione di Laplace all'analisi dei circuiti con memoria.

III.3.1 - Introduzione.

Il procedimento di analisi dei circuiti con memoria che è stato usato nei paragrafi precedenti prevede due fasi, di cui la prima consiste nella scelta delle grandezze elettriche incognite e nella determinazione delle equazioni risolventi. Tale fase, presente anche nel caso dei circuiti senza memoria, porta ad un sistema risolvibile di tipo integro-differenziale, invece che algebrico come nel caso dei circuiti senza memoria. La seconda fase del procedimento prevede i seguenti passi:

- a) dopo aver individuato il sistema integro-differenziale risolvibile, occorre ricondurre la sua risoluzione a quella di un'equazione differenziale ordinaria in cui compaia una sola funzione incognita;
- b) occorre determinare le condizioni iniziali di Cauchy relativamente alla funzione incognita prescelta, a partire dalle condizioni iniziali assegnate nel circuito (tensioni iniziali dei condensatori e correnti iniziali degli induttori);
- c) occorre integrare l'equazione differenziale in corrispondenza alle condizioni iniziali di Cauchy. In presenza di funzioni di eccitazioni generiche, per la ricerca dell'integrale particolare, può essere necessario ricorrere al metodo del nucleo risolvibile.

Il procedimento di analisi, che risulta dalla descrizione precedente, prende il nome di «analisi nel dominio del tempo», in quanto le grandezze elettriche vengono costantemente considerate funzioni del tempo. Le difficoltà di applicazione di tale procedimento sono chiaramente connesse alle sue due fasi: quelle topologiche sono analoghe a quelle che s'incontrano nei circuiti senza memoria; le altre sono relative all'esecuzione dei tre passi precedenti. È importante notare che il superamento di queste ultime può divenire estremamente oneroso, come si può intuire anche dai semplici esempi sviluppati nei paragrafi precedenti.

Una semplificazione notevole di questa parte del procedimento può essere ottenuta utilizzando una particolare operazione detta «trasformazione di Laplace», che permette di trasformare sistemi di equazioni integro-differenziali nel tempo in sistemi algebrici nel dominio di una nuova variabile s detta «variabile di Laplace».

Un modo intuitivo per comprendere l'azione di questa trasformazione è quello di confrontarla con l'azione dell'operazione «logaritmo» nel campo dei numeri reali. Tramite l'operatore logaritmo passiamo in un dominio trasformato ove le equivalenti delle operazioni di moltiplicazione e divisione sono le operazioni di somma e differenza. Nel caso della trasformazione di Laplace l'equivalente di un'equazione integro-differenziale nel tempo è un'equazione algebrica. In ambedue i casi la parte onerosa della trasformazione, in fase di applicazione, è l'operazione di individuazione dell'immagine della quantità usata e l'operazione inversa di ritorno dall'immagine alla quantità non trasformata. Tale parte onerosa, tuttavia, viene completamente eliminata mediante l'uso di opportune tabelle, già predisposte per questo scopo.

L'operazione di trasformazione secondo Laplace di una funzione del tempo $f(t)$ consiste nella seguente espressione⁽¹⁾:

$$(III.3.1) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

La funzione $F(s)$ viene detta «trasformata di Laplace» della funzione $f(t)$, mentre s è una quantità complessa detta «variabile di Laplace»⁽²⁾. L'espressione (III.3.1) può essere considerata come un operatore che permette di passare dalla funzione $f(t)$ alla funzione $F(s)$. Per brevità tale operatore viene indicato nel modo seguente:

$$(III.3.2) \quad F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$$

L'operazione inversa, che permette di passare da $F(s)$ ad $f(t)$, si può effettuare in modo univoco e prende il nome di «antitrasformazione di Laplace». Detta operazione viene indicata simbolicamente con:

$$(III.3.3) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

Le operazioni di trasformazione ed antitrasformazione secondo Laplace sono possibili solo se le funzioni considerate soddisfano opportune condizioni⁽³⁾. Accenniamo di seguito a quelle più importanti:

(1) - La trasformata in questione è quella unilatera di Laplace; per la trasformata bilatera si rimanda al § IV.8 del testo: A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, op. cit.

(2) - È utile ricordare che nella letteratura tecnica viene usata molto spesso al posto di s la lettera p .

(3) - Per un'esposizione accurata e completa di tali condizioni e per la dimostrazione delle proprietà successivamente descritte si rimanda al cap. IV di A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, op. cit.

- 1) Si dicono $\mathcal{L}$ -trasformabili le funzioni $f(t)$ per le quali esiste finito il limite indicato nell'espressione (III.3.1) per almeno un valore della variabile s ;
- 2) L'insieme dei valori della variabile s per i quali esiste finito il limite indicato nell'espressione (III.3.1) viene denominato dominio di convergenza.

Le proprietà fondamentali della trasformazione di Laplace sono le seguenti⁽¹⁾.

Proprietà I - Linearità.

Assegnate due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, $\mathcal{L}$ -trasformabili, per le quali sia:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \mathcal{L}[f_1(t)] \\ F_2(s) &= \mathcal{L}[f_2(t)] \end{aligned} \quad \text{(III.3.4)}$$

la trasformata di Laplace di una loro combinazione lineare:

(III.3.5)

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

è pari alla combinazione lineare delle corrispondenti trasformate con gli stessi coefficienti, cioè:

(III.3.6)

$$F(s) = \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Proprietà II - Trasformazione della derivazione rispetto al tempo.

Assegnata la funzione $f(t)$, $\mathcal{L}$ -trasformabile, per la quale sia:

(III.3.7)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

si ha:

(III.3.8)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s F(s) - f(0)$$

dove $f(0)$ è il valore assunto dalla funzione $f(t)$ per $t=0$ ⁽²⁾.

(1) - Ulteriori proprietà verranno descritte nell'appendice III.A.1.

(2) - In molti casi può accadere che la funzione $f(t)$ presenti una discontinuità per $t=0$, ma esistano finiti i due limiti sinistro e destro della funzione $f(t)$ nell'origine, che verranno indicati nel seguito con $f(0^+)$, il limite destro e con $f(0^-)$ il limite sinistro. In questi casi la (III.3.8) è ancora valida se per $f(0)$ si intende il limite sinistro $f(0^-)$, intendendo che la trasformata di Laplace sia stata effettuata nel senso delle distribuzioni (si veda L.A. Zadeh, C.A. Desoer, «Linear system theory (the state approach)», Mc Graw-Hill, 1963, pag. 540).

Proprietà III - Trasformazione dell'integrazione rispetto al tempo.

Assegnata la funzione $f(t)$, $\mathcal{L}$ -trasformabile, cioè per la quale sia:

(III.3.9)

$$F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$$

si ha:

(III.3.10)

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

La trasformazione delle operazioni di derivazione ed integrazione nel tempo in operazioni algebriche nel dominio della variabile di Laplace rende ragione dell'affermazione iniziale, fatta in questo paragrafo, sulla possibilità di eliminare il passo oneroso del procedimento di analisi dei circuiti con memoria, riguardante la soluzione di un sistema risolvibile di equazioni integro-differenziale. Infatti, passando nel dominio della variabile di Laplace, tali sistemi divengono algebrici. Illustriamo questo aspetto con un esempio.

Esempio III.3.1.

Consideriamo l'equazione differenziale (III.1.28) relativa al circuito del secondo ordine considerato nel § III.1.2. Tale equazione è la seguente:

$$(III.3.11) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Scriviamo l'equazione corrispondente alla (III.3.11) nel dominio della variabile di Laplace. Indichiamo con⁽¹⁾:

(III.3.12)

$$I(s) = \mathcal{L} [i(t)]$$

la trasformata di Laplace della funzione incognita $i(t)$. Applicando la proprietà della derivazione, si ha:

(III.3.13)

$$\mathcal{L} \left[\frac{di}{dt} \right] = s I(s) - i(0)$$

Applicando nuovamente la proprietà della derivazione, si ha:

(1) - Seguendo una convenzione che verrà usata anche nel seguito di questo capitolo, indichiamo con le lettere minuscole le grandezze nel tempo e con le lettere maiuscole le loro trasformate.

$$(III.3.14) \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^2 i}{dt^2} \right] = s [s I(s) - i(0)] - i'(0)$$

dove con $i'(0)$ è stata indicata la quantità $di/dt|_{t=0}$.

Effettuiamo ora la trasformata di Laplace di ambo i membri dell'equazione (III.3.11). Per il primo membro si ha, utilizzando la proprietà di linearità e le espressioni (III.3.13) e (III.3.14):

$$(III.3.15) \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i \right] = \mathcal{L} \left[\frac{d^2 i}{dt^2} \right] + \frac{R}{L} \mathcal{L} \left[\frac{di}{dt} \right] + \frac{1}{LC} \mathcal{L} [i] =$$

$$= s [s I(s) - i(0)] - i'(0) + \frac{R}{L} [s I(s) - i(0)] + \frac{1}{LC} I(s) =$$

$$= s^2 I(s) + \frac{R}{L} s I(s) + \frac{1}{LC} I(s) - \left(s + \frac{R}{L} \right) i(0) - i'(0)$$

Per quanto riguarda il secondo membro della (III.3.11) è facile vedere che ad esso corrisponde la funzione identicamente nulla. Perciò, ricordando anche la proprietà dell'unicità della trasformazione secondo Laplace, si ottiene la seguente equazione che rappresenta la traduzione nel dominio di s dell'equazione data:

$$(III.3.16) \quad s^2 I(s) + s \frac{R}{L} I(s) + \frac{1}{LC} I(s) = \left(s + \frac{R}{L} \right) i(0) + i'(0)$$

Si può notare che nell'equazione (III.3.16) non è più presente alcuna operazione di tipo integro-differenziale e che in essa sono presenti le quantità $i(0)$ ed $i'(0)$ che sono le condizioni iniziali secondo Cauchy dell'equazione (III.3.11). Nella (III.3.16) figura come incognita la funzione $I(s)$ [l'incognita nella (III.3.11) era infatti $i(t)$]; tale incognita può essere ricavata in modo immediato a causa del carattere algebrico dell'equazione (III.3.16). Si ha:

$$(III.3.17) \quad I(s) = \frac{\left(s + \frac{R}{L} \right) i(0) + i'(0)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}$$

Si può notare che la funzione $I(s)$ è di tipo razionale a coefficienti reali. Ricordando l'espressione (III.3.12), in base alla proprietà di unicità della antitrasformazione di Laplace, si ottiene:

$$(III.3.18) \quad i(t) = \mathcal{L}^{-1} [I(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\left(s + \frac{R}{L} \right) i(0) + i'(0)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} \right]$$

Per ottenere esplicitamente l'andamento nel tempo della funzione $i(t)$, sarebbe ora necessario eseguire l'operazione di antitrasformazione indicata nella (III.3.18). Il metodo da seguire è riportato nell'appendice III.A, a cui si rimanda.

Il procedimento seguito nell'esempio III.3.1 vale in generale, per ogni sistema integro-differenziale. Esso consiste nei seguenti passi:

- 1) Trasformare il sistema differenziale assegnato nel dominio del tempo in un sistema nel dominio di s , utilizzando le proprietà di linearità, di derivazione e di integrazione. Per effettuare tale passo è necessario in generale determinare le trasformate delle grandezze impresse dai generatori indipendenti⁽¹⁾;
- 2) il sistema ottenuto nel dominio di s è di tipo algebrico, contenendo come incognite le trasformate di Laplace delle funzioni incognite. Risolvere tale sistema, ottenendo l'espressione esplicita in s delle grandezze incognite;
- 3) effettuare le operazioni di antitrasformazione, ottenendo le grandezze nel dominio del tempo.

Essendo scontata la convenienza della risoluzione del sistema algebrico in s , rispetto alla soluzione diretta del sistema differenziale in t , la convenienza globale del procedimento è legata alla facilità di eseguire le operazioni di trasformazione ed antitrasformazione. A tale proposito occorre notare che non è quasi mai necessario ricorrere alla definizione della trasformata di Laplace, essendo disponibili a tale scopo delle tabelle molto estese di funzioni e relative trasformate. Alcune di queste tabelle sono riportate nell'appendice III.A, dove viene anche descritto il procedimento per eseguire l'operazione di antitrasformazione nel caso, più comune per i circuiti a costanti concentrate, di una funzione razionale reale della variabile s .

L'applicazione del metodo della trasformazione di Laplace nell'analisi di un circuito con memoria rappresenta un caso particolare dell'applicazione di tale metodo ai sistemi integro-differenziali. Tuttavia i vantaggi che si hanno in tale caso sono ancora più evidenti, non essendo necessario applicare il metodo di Laplace dopo aver ricavato il sistema risolvibile. È infatti possibile la sua applicazione ad un livello molto più elementare, ricordando che il sistema risolvibile si ottiene esprimendo un opportuno insieme di equilibri conseguenti alle leggi di Kirchhoff, in aggiunta alle relazioni costitutive dei componenti. Il metodo di Laplace può essere applicato esprimendo direttamente ciascuna di tali equazioni nel dominio della variabile s .

(1) - Nel caso considerato nell'esempio III.3.1, ciò non è stato necessario, essendo l'equazione (III.3.11) di tipo omogeneo.

III.3.2 - Trasformazioni delle relazioni costitutive dei componenti e loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace.

Individuiamo le relazioni costitutive nel dominio della variabile s per i vari componenti che costituiscono un circuito a costanti concentrate, distinguendoli in tre categorie: generatori indipendenti, componenti senza memoria, componenti con memoria.

- Generatori indipendenti.

Tali componenti sono il generatore indipendente di corrente e di tensione, caratterizzati dall'avere una delle due grandezze elettriche (la grandezza impressa) coincidente con una funzione assegnata $f(t)$. Supponendo che $f(t)$ sia una funzione $\mathcal{L}$ -trasformabile, nel dominio della variabile s la grandezza impressa diviene $\mathcal{L}[f(t)]$. In termini circuitali l'operazione che si fa è quella indicata in fig.III.3.1 per il generatore di tensione ed in fig.III.3.2 per il generatore di corrente.

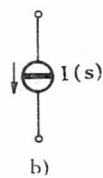
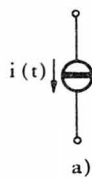
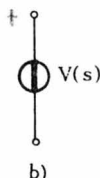
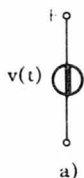


Fig.III.3.1 - Trasformazione nel dominio di Laplace del generatore indipendente di tensione. Le dimensioni di $v(t)$ sono Volt e di $V(s)$ sono Volt $\times$ secondo.

Fig.III.3.2 - Trasformazione nel dominio di Laplace del generatore indipendente di corrente. Le dimensioni di $i(t)$ sono Ampère e di $I(s)$ sono Ampère $\times$ secondo.

È opportuno notare che nei casi (a) di tali figure si hanno generatori che imprimevano al circuito delle grandezze funzioni del tempo (come avviene fisicamente), nei casi (b) le grandezze impresse sono funzioni della variabile s (e quindi fittizie, essendo ottenute tramite una trasformazione da quelle reali). Le dimensioni fisiche sono differenti, poiché, in base alla (III.3.1), si ricava che una trasformata ha le dimensioni della grandezza originaria moltiplicata per un tempo.

- Componenti senza memoria.

Tali componenti sono quelli considerati nel secondo capitolo. Le relazioni costitutive di tali componenti non contengono legami di tipo integro-differenziale. È immediato verificare che tutte le loro relazioni

costitutive possono essere trasferite nel dominio della variabile s senza alcuna modifica, sotto l'ipotesi di *linearità e permanenza*. In tabella III.3.1 tali trasformazioni sono riportate per il resistore, per i generatori controllati, per il nullore e per il trasformatore ideale.

Tabella III.3.1 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per i componenti senza memoria.

Componente	Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della var. s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
Resistore	$v(t) = R i(t)$		$V(s) = R I(s)$	
Generatore di tensione controllato in corrente	$v(t) = r i(t)$		$V(s) = r I(s)$	
Generatore di tensione controllato in tensione	$v_2(t) = A v_1(t)$		$V_2(s) = A V_1(s)$	
Generatore di corrente controllato in corrente	$i_2(t) = K i_1(t)$		$I_2(s) = K I_1(s)$	
Generatore di corrente controllato in tensione	$i(t) = g v(t)$		$I(s) = g V(s)$	
Nullore	$v_1(t) = 0$ $i_1(t) = 0$		$V_1(s) = 0$ $I_1(s) = 0$	
Trasformatore ideale	$v_1(t) = n v_2(t)$ $i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)$		$V_1(s) = n V_2(s)$ $I_1(s) = -\frac{1}{n} I_2(s)$	

Gli elementi nel dominio della variabile s non hanno un significato fisico immediato, in quanto sono percorsi dalla corrente trasformata $I(s)$ e sono sottoposti alla tensione trasformata $V(s)$. Tali grandezze elettriche fittizie hanno dimensioni fisiche differenti da quelle delle grandezze reali corrispondenti. Tuttavia è facile vedere che i parametri relativi ai componenti mantengono le dimensioni originarie. Ad esempio nel caso del resistore, il parametro $R = V(s)/I(s)$ ha non solo lo stesso valore (per la proprietà di linearità), ma anche la stessa dimensione della resistenza elettrica. Tuttavia, per ricordare che non si tratta più di un rapporto fra grandezze nel tempo, ma nel dominio della trasformata di Laplace, vengono utilizzate delle denominazioni differenti.

Precisamente nel caso del rapporto fra tensione e corrente si parla di impedenza (in luogo di resistenza); nel caso del rapporto fra corrente e tensione si parla di ammettenza (in luogo di conduttanza).

Componenti con memoria.

Tali componenti sono caratterizzati da relazioni costitutive di tipo integro-differenziale; per quanto è stato detto precedentemente, lo uso della trasformata di Laplace permette di ridurre tali relazioni a semplici relazioni algebriche.

Condensatore: La relazione costitutiva del condensatore nel dominio del tempo è la seguente:

$$(III.3.19) \quad i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

Trasformando secondo Laplace ambo i membri della relazione (III.3.19) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di condensatore lineare e permanente, si ha:

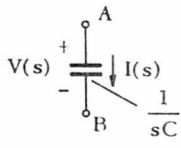
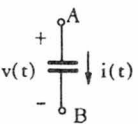
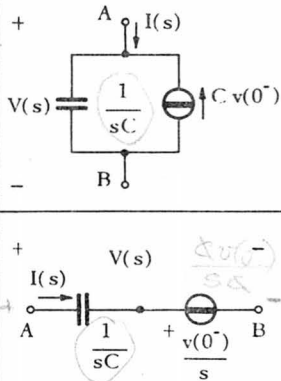
$$(III.3.20) \quad I(s) = sC V(s) - C v(0^-) \quad Z_c = \frac{1}{sC}$$

dove $v(0^-)$ rappresenta il valore iniziale della tensione ai capi del condensatore⁽¹⁾. La relazione algebrica (III.3.20) è la traduzione, nel dominio della variabile s , della relazione differenziale (III.3.19). Si può osservare che l'espressione (III.3.20) è di tipo non omogeneo per la presenza di un termine noto relativo alla condizione iniziale. Dal punto di vi-

(1) - Si considera l'istante 0^- per quanto detto in occasione della proprietà II delle trasformate di Laplace, per tenere conto di eventuali discontinuità in corrispondenza dell'origine dei tempi.

sta circuitale l'espressione (III.3.20) dà luogo alle equivalenze circuitali mostrate in tab.III.3.2, la prima delle quali si riferisce al caso in cui $v(0^-) = 0$. Da questa tabella si vede che un condensatore scarico all'istante iniziale si comporta nel dominio di s come un bipolo avente impedenza pari ad $1/sC$ (ovvero ammettenza pari ad sC). Nel caso di un condensatore carico, occorre considerare la presenza di un opportuno generatore che tenga conto della condizione iniziale; tale generatore può essere di corrente ovvero di tensione⁽¹⁾. In quest'ultimo caso si ha quindi l'equivalenza fra il condensatore carico nel dominio del tempo e l'insieme di due componenti bipolari opportunamente connessi nel dominio della variabile s .

Tabella III.3.2 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per il condensatore.

Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della variabile s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
$i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(0^-) = 0$		$I(s) = sC V(s)$ $V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	
$i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(0^-) \neq 0$		$I(s) = sC V(s) - C v(0^-)$ $V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$	

(1) - La corrente impressa $I = Cv(0^-)$ è una grandezza trasformata. Essa ha infatti dimensioni fisiche di $[\text{Farad}]^g \cdot [\text{Volt}] = [\text{Ampere}] \cdot [\text{sec}]$. Analogamente la tensione impressa $V = v(0^-)/s$ è una grandezza trasformata. Poiché le dimensioni di s sono $[\text{sec}]^{-1}$, le dimensioni di V sono $[\text{Volt}] \cdot [\text{sec}]$.

Induttore: La relazione costitutiva dell'induttore nel dominio del tempo è la seguente:

$$(III.3.21) \quad v(t) = L \frac{di}{dt}$$

Trasformando secondo Laplace ambo i membri della relazione (III.3.21) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di induttore lineare e permanente, si ha:

$$(III.3.22) \quad V(s) = sL I(s) - L i(0^-)$$

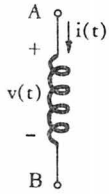
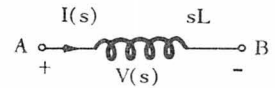
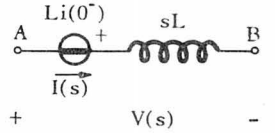
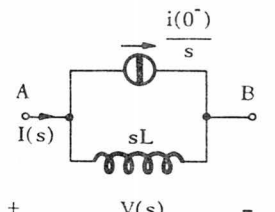
dove $i(0^-)$ rappresenta il valore della corrente che percorre l'induttore all'istante iniziale. La relazione algebrica (III.3.22) è la traduzione nel dominio della variabile s della relazione differenziale (III.3.21). Si può osservare che la relazione (III.3.22) è di tipo non omogeneo per la presenza di un termine noto relativo alla condizione iniziale. Dal punto di vista circuitale l'espressione (III.3.22) dà luogo alle equivalenze mostrate nella tab. III.3.3, la prima delle quali si riferisce al caso in cui $i(0^-) = 0$. Da questa tabella si vede che l'induttore non percorso da corrente all'istante iniziale si comporta nel dominio della variabile s come un bipolo di impedenza sL (ovvero ammettenza pari ad $1/sL$). Nel caso invece di un induttore percorso da una corrente iniziale, occorre considerare la presenza di un opportuno generatore che tenga conto della condizione iniziale; tale generatore può essere di tensione ovvero di corrente⁽¹⁾. In quest'ultimo caso si ha quindi l'equivalenza fra l'induttore carico all'istante iniziale nel dominio del tempo e l'insieme di due componenti bipolari opportunamente connessi nel dominio della variabile s .

Induttori mutuamente accoppiati: Le relazioni costitutive degli induttori mutuamente accoppiati nel dominio del tempo sono le seguenti:

$$(III.3.23) \quad \begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

(1) - La tensione impressa $V_g = Li(0^-)$ è una grandezza trasformata; essa perciò ha le dimensioni di $[Volt] \cdot [sec]^g$. Analogamente la corrente impressa $I_g = i(0^-)/s$ è una grandezza trasformata avente le dimensioni di $[Ampere] \cdot [sec]$.

Tabella III.3.3 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s per l'induttore.

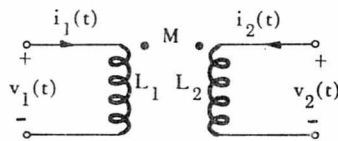
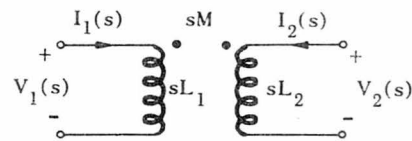
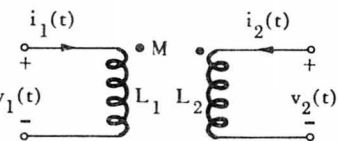
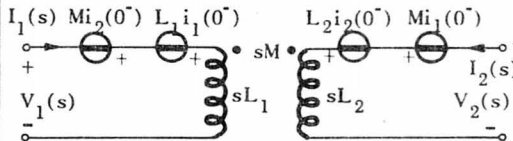
Relazione costitutiva nel tempo	Circuito nel tempo	Relazione costitutiva nel dominio della variabile s	Circuito equivalente nel dominio della variabile s
$v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(0^-) = 0$		$V(s) = sL I(s)$ $I(s) = \frac{1}{sL} V(s)$	
$v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(0^-) \neq 0$		$V(s) = sL I(s) - L i(0^-)$	
		$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$	

Trasformando secondo Laplace ambo i membri delle relazioni (III.3.23) ed applicando la proprietà di linearità e quella di derivazione, nell'ipotesi di induttori mutuamente accoppiati lineari e permanenti, si ottiene:

$$(III.3.24) \quad \begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - L_1 i_1(0^-) - M i_2(0^-) \\ V_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - M i_1(0^-) - L_2 i_2(0^-) \end{cases}$$

Le relazioni trasformate (III.3.24) sono di tipo algebrico; esse non sono omogenee per la presenza dei termini relativi alle condizioni iniziali. Dal punto di vista circuitale, tali relazioni danno luogo alle equivalenze mostrate nella tab. III.3.4.

Tabella III.3.4 - Relazioni costitutive e circuiti equivalenti nel dominio della variabile s degli induttori mutuamente accoppiati.

Relazione costitutiva e circuito nel tempo	Relazione costitutiva e circuito equivalente nel dominio della variabile s
 $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & i_1(0^-) = 0 \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} & i_2(0^-) = 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) \\ V_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) \end{cases}$ Z_{11} Z_{12} Z_{21} Z_{22}
 $\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & i_1(0^-) \neq 0 \\ v_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} & i_2(0^-) \neq 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - L_1 i_1(0^-) - M i_2(0^-) \\ V_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - M i_1(0^-) - L_2 i_2(0^-) \end{cases}$

III.3.3 - Trasformazione delle leggi di Kirchhoff nel dominio della trasformata di Laplace.

Nel paragrafo precedente è stato visto che, utilizzando le trasformate di Laplace delle grandezze elettriche al posto delle loro espressioni in funzione del tempo, è possibile ottenere dei componenti elettrici fittizi in corrispondenza a ciascun componente ideale a costanti concentrate. Le relazioni costitutive di tali componenti fittizi si ottengono trasformando (secondo Laplace) le relazioni costitutive dei componenti nel dominio del tempo. Nell'effettuare queste trasformazioni spariscono tutte le operazioni di derivazione e di integrazione; perciò i componenti fittizi si comportano nel dominio della s come se fossero senza memoria.

Nel presente paragrafo viene dimostrato che non solo i singoli componenti possono essere trasformati in componenti fittizi senza memoria nel dominio di s , ma che tale operazione è possibile anche per l'intero circuito a costanti concentrate, ottenendo in tal modo nel dominio di s un circuito fittizio senza memoria. Per far vedere ciò è sufficiente accertare che una qualunque legge fisica che caratterizza il circuito reale (nel dominio del tempo) è soddisfatta anche dalle grandezze elettriche trasformate, relative al circuito equivalente nel dominio di s . Le leggi fisiche che interessano nel caso dei circuiti sono quelle di Kirchhoff, che riguardano equilibri di correnti attraverso tagli ed equilibri di tensioni lungo maglie. Accertiamo di seguito su un esempio la validità di tali leggi per le grandezze elettriche trasformate.

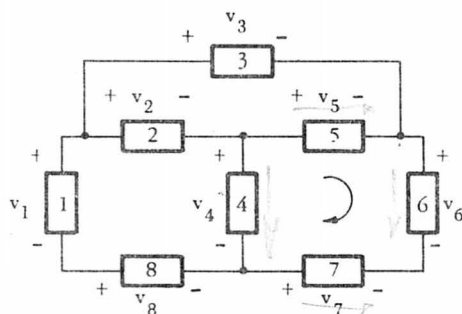


Fig.III.3.3 - Circuito considerato per la verifica delle leggi di Kirchhoff nel dominio di Laplace.

Consideriamo a questo scopo la maglia composta dai bipoli 4, 5, 6, 7 del circuito di fig.III.3.3. Per tale maglia si ha in base alla seconda legge di Kirchhoff:

$$(III.3.25) \quad -v_4(t) + v_5(t) + v_6(t) - v_7(t) = 0$$

Applichiamo la trasformazione di Laplace ad ambo i membri della (III.3.25). Tenendo conto della proprietà di linearità, si ha:

$$(III.3.26) \quad \mathcal{L}[-v_4(t) + v_5(t) + v_6(t) - v_7(t)] = -V_4(s) + V_5(s) + V_6(s) - V_7(s) = 0$$

La (III.3.26) dimostra che le trasformate delle tensioni dei bipoli del circuito di fig.III.3.3 soddisfano la seconda legge di Kirchhoff per la maglia considerata. Poiché è possibile operare nello stesso modo per ogni maglia e per ogni taglio del circuito di fig.III.3.3, si può concludere che la struttura che si ottiene, sostituendo in tale circuito a ciascun bi-

polo un nuovo bipolo, caratterizzato invece che dalla corrente e tensione dalle relative trasformate di Laplace, è un circuito a costanti concentrate.

Il ragionamento precedente può essere esteso ad ogni circuito. Infatti per ogni maglia di un circuito si ha, in base alla seconda legge di Kirchhoff:

(III.3.27)

$$\sum_{k=1}^N \pm v_k(t) = 0$$

dove N è il numero dei rami facenti parte della maglia ed il segno positivo o negativo dipende dall'orientazione di ciascun ramo nella maglia. Applicando la trasformata di Laplace ai due membri della (III.3.27), si ottiene:

$$(III.3.28) \quad \mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^N \pm v_k(t) \right] = \sum_{k=1}^N \pm \mathcal{L} [v_k(t)] = \sum_{k=1}^N \pm V_k(s) = 0$$

Ciò è valido anche per le equazioni di equilibrio delle correnti nei tagli e perciò rimane dimostrato in generale che il circuito fittizio che si ottiene, sostituendo ad ogni componente il relativo componente o circuito equivalente nel dominio di Laplace, secondo quanto visto nel § III.3.2, si comporta come un circuito fisico nel senso che soddisfa le leggi fondamentali dei circuiti a costanti concentrate, cioè le leggi di Kirchhoff.

III.4 - Analisi nel dominio di Laplace di un circuito lineare e permanente.

Come visto nel paragrafo precedente la struttura che si ottiene sostituendo a ciascun componente il relativo schema equivalente nel dominio della trasformata di Laplace è un circuito a costanti concentrate senza memoria. Tale circuito è fittizio e si differenzia profondamente dai circuiti senza memoria considerati nel secondo capitolo per la presenza della variabile di Laplace s nelle relazioni costitutive dei componenti e per il fatto che invece delle grandezze elettriche sono presenti le relative trasformate. Applicando a tale circuito fittizio i metodi di analisi sviluppati nel secondo capitolo, si ottengono le trasformate delle grandezze elettriche incognite. Tale modo di procedere, riassunto nella tabella III.4.1 prende il nome di «metodo simbolico di analisi nel dominio della variabile s » ed è valido solo se:

a) le grandezze impresse dai generatori indipendenti sono funzioni $\mathcal{L}$ -trasformabili;

b) il circuito è lineare e permanente.

L'applicazione del metodo simbolico di analisi richiede alcune precisazioni in relazione all'istante $t=0$. Infatti nella definizione della trasformata di Laplace (III.3.1) viene preso in considerazione solo l'intervallo di tempo $t \geq 0$. D'altra parte l'istante iniziale viene fissato arbitrariamente da chi effettua l'analisi del circuito. In particolare è sempre possibile nelle applicazioni scegliere tale istante iniziale in modo che per $t \leq 0$ tutte le grandezze elettriche del circuito siano identicamente nulle, cioè in modo che il circuito per $t \leq 0$ sia «a riposo». Tale scelta, però, non è obbligatoria.

Tabella III.4.1 - Metodo simbolico di analisi nel dominio di Laplace.

Passo	Operazione da eseguire
1	Trasformare i generatori indipendenti come indicato nelle figg. III.3.1 e III.3.2.
2	Trasformare i componenti senza memoria come indicato nella tab. III.3.1.
3	Trasformare i componenti con memoria come indicato nelle tab. III.3.2, III.3.3 e III.3.4.
4	Applicare al circuito fittizio senza memoria risultante dai primi tre passi del procedimento di analisi, uno qualsiasi dei metodi di analisi sviluppati nel secondo capitolo. Avvertenza: i coefficienti del sistema risolvibile algebrico sono funzioni razionali reali della variabile s .
5	Antitrasformare le funzioni della variabile s ottenute nel passo 4, ricavando le grandezze elettriche richieste in funzione del tempo, con i procedimenti sviluppati nell'appendice III.A.

Nel caso che il circuito non sia a riposo per $t \leq 0$, occorre tenere conto mediante le condizioni iniziali dei fenomeni elettrici che hanno preceduto l'istante preso come iniziale. Ciò avviene automaticamente, quando sostituiamo ai componenti con memoria i loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace. Infatti in tali circuiti equivalenti sono presenti dei generatori indipendenti la cui grandezza impressa è proporzionale o alla tensione iniziale dei condensatori o alla corrente iniziale degli induttori.

Questi generatori indipendenti fittizi costituiscono il legame del circuito trasformato nel dominio di Laplace con il passato, in contrapposizione agli altri generatori indipendenti presenti che costituiscono il legame con la realtà esterna al circuito.

La scelta dell'istante iniziale può essere tale che in corrispondenza ad esso si abbiano delle discontinuità delle grandezze elettriche. Per tenere conto di tali discontinuità, occorre considerare nella definizione (III.3.1) al posto dell'istante $t=0$, un istante infinitamente vicino posto alla sua sinistra, indicato correntemente con il simbolo 0^- .

Quando nel circuito agiscono più eccitazioni $e_1, e_2, \dots, e_n$, è usuale fornire per esse l'andamento nel tempo riferito ad istanti iniziali diversi, che corrispondono spesso al momento d'inizio delle eccitazioni stesse. In questa situazione conviene scegliere l'origine dei tempi coincidente con il valore più piccolo tra questi istanti e quindi traslare di esso tutte le eccitazioni. Il calcolo delle trasformate delle eccitazioni dopo la traslazione suddetta può essere effettuato facilmente mediante l'applicazione della proprietà IV riportata nell'appendice III.A.

Di seguito riportiamo alcuni esempi di applicazione del metodo di analisi simbolico riassunto in tab.III.4.1⁽¹⁾. Ulteriori esempi verranno sviluppati nell'appendice III.C.

Esempio III.4.1.

Nel circuito di fig.III.4.1 calcolare la corrente che percorre il condensatore nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

Dopo aver modificato il circuito come mostrato in fig.III.4.2, in modo da inglobare l'azione dell'interruttore nella funzione di eccitazione, applichiamo passo per passo il procedimento di tab.III.4.1.

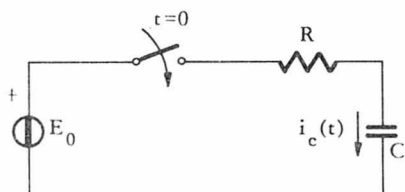


Fig.III.4.1 - Circuito considerato nell'esempio III.4.1.

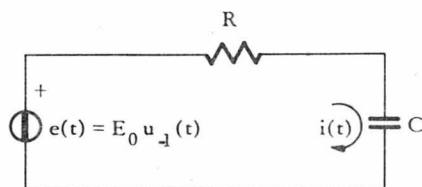


Fig.III.4.2 - Circuito ottenuto da quello di fig.III.4.1 eliminando l'interruttore.

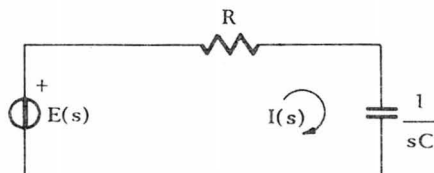
Passo 1. Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione di eccitazione. Utilizzando l'appendice III.A, si ha:

$$E(s) = \mathcal{L} [E_0 u_{-1}(t)] = \frac{E_0}{s}$$

(1) - Per una completa comprensione di tutti i passaggi analitici sviluppati negli esempi, si consiglia di leggere preventivamente l'appendice III.A.

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio della variabile s è quello di fig.III.4.3.

Fig.III.4.3 - Circuito fittizio nel dominio della variabile s , equivalente a quello di fig.III.4.2.



Passo 4. Analizziamo il circuito fittizio su base maglie; si ottiene:

$$\left(R + \frac{1}{sC} \right) I(s) = E(s)$$

Risolviendo rispetto ad $I(s)$, si ha:

$$I(s) = \frac{E_0}{s} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E_0 C}{sRC + 1}$$

Passo 5. Antitrasformiamo l'espressione di

$I(s)$:

$$I(s) = \frac{E_0/R}{s + 1/RC}$$

in base alla formula ricavata nell'appendice III.A.5:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + a} \right] = e^{-at} u_{-1}(t)$$

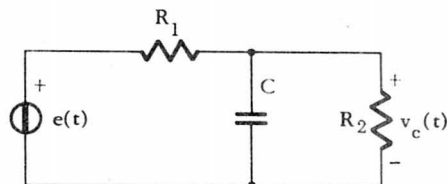


Fig.III.4.4 - Circuito considerato nell'esempio III.4.2. I valori dei componenti sono: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C = 1$, $e(t) = u_0(t)$ (V).

Si ottiene per la proprietà della linearità della trasformata di Laplace:

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} u_{-1}(t)$$

Tale espressione coincide con la (III.1.24) del § III.1, dove lo stesso circuito qui considerato è stato risolto con il metodo di analisi nel dominio del tempo.

Esempio III.4.2.

Nel circuito di fig.III.4.4 determinare l'andamento della tensione ai capi del condensatore, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

Passo 1. La trasformata della tensione impressa dal generatore è, come risulta dall'appendice III.A.2:

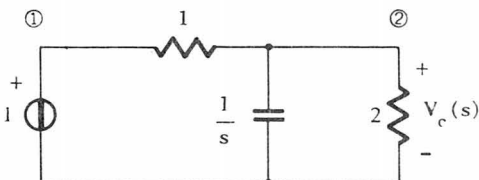
$$\mathcal{L}[u_0(t)] = 1$$

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio della variabile s è quello indicato in figura III.4.5.

Passo 4. Analizziamo il circuito di fig.III.4.5 su base nodi, prendendo come incognita la tensione $V_c(s)$ ai capi del condensatore. Si ha per il nodo 2:

$$\left(s + 1 + \frac{1}{2}\right) V_c(s) - 1 = 0$$

Fig.III.4.5 - Circuito fittizio nel dominio di s , equivalente a quello di fig.III.4.4.



L'equazione di equilibrio del primo nodo non è necessaria, in quanto non è richiesta la corrente erogata dal generatore. Dall'equazione precedente, si ha:

$$V_c(s) = \frac{1}{s + 3/2}$$

Passo 5. Antitrasformando l'espressione della tensione incognita, ottenuta nel passo 4, si ha:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1,5} \right] = e^{-1,5t} u_{-1}(t)$$

Esempio III.4.3.

Nel circuito di fig.III.4.6 determinare l'andamento della corrente che percorre l'induttore, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

Passo 1. In base all'appendice III.A.2, la trasformata della tensione impressa è:

$$\mathcal{L}[2u_{-1}(t)] = \frac{2}{s}$$

Fig.III.4.6 - Circuito considerato nell'esempio III.4.3. I valori dei componenti sono: $R=8$, $L=1$, $C=1/25$, $v_g(t)=2u_{-1}(t)$, (Ω , H, F, V).

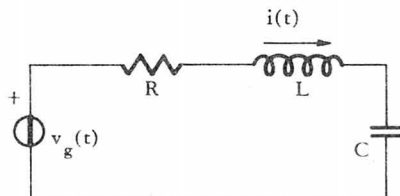
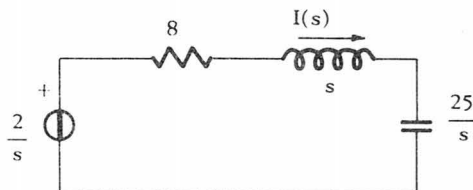


Fig.III.4.7 - Circuito fittizio nel dominio di s , equivalente a quello considerato in fig.III.4.6.



Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio di s è quello indicato in fig.III.4.7 (accanto ai bipoli R , L , C è indicata la relativa impedenza).

Passo 4. Analizzando il circuito fittizio su base maglie, si ha:

$$\left(8 + s + \frac{25}{s}\right) I(s) = \frac{2}{s}$$

da cui si ottiene:

$$I(s) = \frac{2}{s^2 + 8s + 25}$$

Passo 5. Per antitrasformare la corrente $I(s)$, occorre effettuare lo sviluppo in frazioni parziali (cfr. appendice III.A.4). Si ottiene:

$$s^2 + 8s + 25 = (s + s_0)(s + s_0^*)$$

con:

$$s_0 = 4 - j3$$

$$s_0^* = 4 + j3$$

Quindi si ha:

$$I(s) = \frac{A}{s + s_0} + \frac{A^*}{s + s_0^*}$$

dove:

$$A = I(s) \cdot (s + s_0) \Big|_{s=-s_0} = \frac{2}{s + s_0^*} \Big|_{s=-s_0} = \frac{2}{-4 + j3 + 4 + j3} = \frac{2}{j6} = -\frac{j}{3}$$

In conclusione risulta:

$$I(s) = \frac{-j/3}{s + 4 - j3} + \frac{j/3}{s + 4 + j3}$$

L'espressione precedente può essere facilmente antitrasformata, come segue:

$$i(t) = -\frac{j}{3} e^{(-4+j3)t} u_{-1}(t) + \frac{j}{3} e^{(-4-j3)t} u_{-1}(t)$$

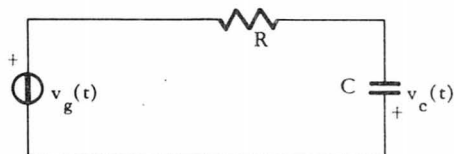
È importante mettere in evidenza che la corrente $i(t)$ deve essere una quantità reale, sia per ragioni fisiche, sia perché è l'antitrasformata di una funzione $I(s)$ razionale a coefficienti reali (cfr. appendice III.A.5). Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{3} e^{-4t} (-j e^{j3t} + j e^{-j3t}) u_{-1}(t) = \\ &= \frac{2}{3} e^{-4t} \frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j} u_{-1}(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} \sin 3t \cdot u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Esempio III.4.4.

Nel circuito di fig.III.4.8, determinare l'andamento della tensione ai capi del condensatore per $t \geq 0$.

Fig.III.4.8 - Circuito considerato nell'esempio III.4.4. I valori dei componenti sono: $R=2$, $C=1$, $v_g(t) = u_{-1}(t)$, $v_c(0)=2$ (V, F, V).



Passo 1. Si ha:

$$V_g(s) = \mathcal{L} [v_g(t)] = \frac{1}{s}$$

Passi 2,3. Il circuito equivalente nel dominio di s è indicato in fig.III.4.9. Occorre fare attenzione al fatto che tutto il bipolo connesso tra i nodi A e B e compreso entro la linea tratteggiata, corrisponde al condensatore C carico nel dominio del tempo (non vi è perciò corrispondenza in questo caso fra il condensatore ed il bipolo di impedenza $1/s$).

Passo 4. Analizzando il circuito di fig.III.4.9 su base maglie, si ha:

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right) I(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s}$$

da cui:

$$I(s) = \frac{\frac{3}{s}}{2 + \frac{1}{s}} = \frac{3}{2s + 1}$$

ed inoltre:

$$V_c(s) = V_{BA}(s) = -\frac{1}{s} I(s) + \frac{2}{s} = -\frac{3}{s(2s+1)} + \frac{2}{s}$$

Passo 5. Per antitrasformare l'espressione di $V_c(s)$, occorre effettuarne lo sviluppo in frazioni parziali (cfr. appendice III.A.4). Si ottiene:

$$V_c(s) = -\frac{3}{s(2s+1)} + \frac{2}{s} = -\frac{3/2}{s\left(s + \frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/2} + \frac{2}{s}$$

dove:

$$A = -\frac{\frac{3}{2}}{s + \frac{1}{2}} \bigg|_{s=0} = -3 ; \quad B = -\frac{\frac{3}{2}}{s} \bigg|_{s=-\frac{1}{2}} = 3$$

Si ha quindi:

$$V_c(s) = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s + \frac{1}{2}} + \frac{2}{s} = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s + \frac{1}{2}}$$

da cui si ottiene:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_c(s)] = -u_{-1}(t) + 3 e^{-0,5t} u_{-1}(t)$$

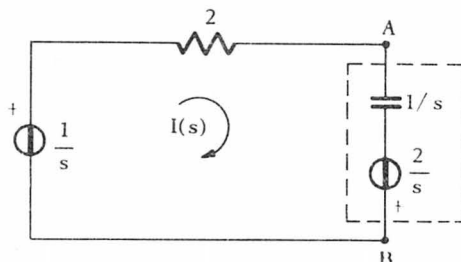


Fig.III.4.9 - Circuito fittizio nel dominio di s , equivalente a quello considerato in fig.III.4.8.

Osservazione III.4.1.

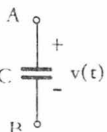
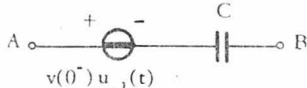
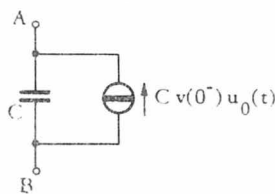
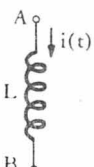
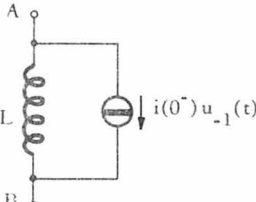
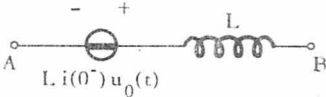
Come detto in precedenza, le eccitazioni presenti nel circuito fittizio, che si ottiene applicando il metodo simbolico di analisi, sono di due tipi:

- eccitazioni derivanti da $\mathcal{L}$ -trasformate di generatori effettivamente presenti nel circuito nel dominio del tempo;
- eccitazioni derivanti dalla presenza delle condizioni iniziali; queste ultime eccitazioni non corrispondono a generatori presenti nel dominio del tempo.

Per quanto riguarda l'analisi del circuito non vi è alcuna differenza fra le eccitazioni del tipo a) e del tipo b). Ciò rappresenta un importante vantaggio del metodo simbolico sul metodo integro-differenziale, in quanto, come si è visto nel § III.1, risulta complesso tenere conto delle condizioni iniziali nell'applicazione di quest'ultimo. Tuttavia, tale vantaggio può essere esteso anche al metodo integro-differenziale facendo in modo che i generatori del tipo b) siano esplicitamente rappresentati nel dominio del tempo. Per raggiungere questo scopo occorre ricavare dei circuiti equivalenti nel dominio del tempo per i componenti reattivi del tipo di quelli considerati nelle tabelle III.3.2, III.3.3 e III.3.4. Ciò è stato fatto, limitatamente all'induttore ed al condensatore, nella tab.III.4.2, tenendo conto delle funzioni del tempo che corrispondono alle funzioni della variabile s , presenti come grandezze impresse nei circuiti equivalenti delle tabelle del § III.3, e dei risultati riportati nel § III.A.5.

Nei circuiti equivalenti della tabella III.4.2 sono presenti degli induttori e condensatori, che debbono essere considerati scarichi all'istante $t=0^+$. La condizione i-

Tabella III.4.2 - Circuiti equivalenti nel dominio del tempo dell'induttore e del condensatore nel caso di condizioni iniziali non nulle.

Componente	Circuito equivalente con grandezza impressa a gradino	Circuito equivalente con grandezza impressa impulsiva
Condensatore 		
Induttore 		

niziale è simulata dalla presenza di un opportuno generatore che può essere di tipo impulsivo o di tipo a gradino. I due tipi di generatori hanno un comportamento differente nel circuito equivalente in cui sono contenuti. Infatti nel caso dei circuiti in cui è presente un generatore di tipo impulsivo ed un componente scarico, si ha il seguente comportamento (illustrato per il condensatore in fig.III.4.10):

1) il generatore esplica istantaneamente la propria azione per $t=0$, mentre per $t>0$ la grandezza impressa è nulla, per cui esso può non essere considerato;

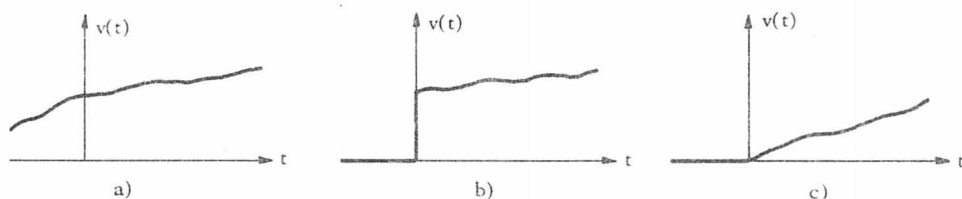


Fig.III.4.10 - Andamento della tensione ai capi di un condensatore: a) quando non si usa il circuito equivalente (di tab.III.4.2); b) quando si usa il circuito equivalente con grandezza impressa impulsiva; c) quando si usa il circuito equivalente con grandezza impressa a gradino.

- 2) il componente reattivo presente nel circuito equivalente, scarico all'istante $t=0^-$, viene istantaneamente caricato e portato in condizioni identiche a quelle del componente reale all'istante $t=0^+$ (fig.III.4.10a e b);
- 3) negli istanti $t>0^+$ il comportamento sia del resto del circuito in cui si trova il condensatore sia del condensatore è lo stesso che si ha quando non si usa il circuito equivalente.

Nel caso dei circuiti equivalenti contenenti generatori a gradino, si ha invece il seguente comportamento (illustrato per il condensatore in fig.III.4.10):

- 1) il generatore esplica la propria azione in tutto l'intervallo $t>0$, nel quale si studia il fenomeno elettrico;
- 2) il componente reattivo rimane scarico all'istante $t=0$;
- 3) negli istanti $t>0$, il comportamento del resto del circuito in cui si trova il condensatore è identico a quello che si ha quando non si usa il circuito equivalente, mentre il comportamento del condensatore è diverso, come messo in evidenza in fig.III.4.10 c. In questo caso infatti è necessario considerare in ogni istante il contributo del generatore aggiuntivo e solo la somma delle due tensioni fornisce la tensione che si avrebbe ai capi del condensatore nel caso in cui non si usasse il circuito equivalente per questo.

Le considerazioni precedenti sono di grande utilità, in quanto:

- 1) sono valide anche nei casi in cui non è applicabile il metodo simbolico (per esempio quando qualche grandezza impressa non è $\mathcal{L}$ -trasformabile);
- 2) permettono di trattare in modo unificato i generatori esterni e le condizioni iniziali;
- 3) semplificano la trattazione delle condizioni iniziali.

Esempio III.4.5.

Dato il circuito di fig.III.4.11, determinare un circuito equivalente con condizioni iniziali nulle per $t>1$ sec.

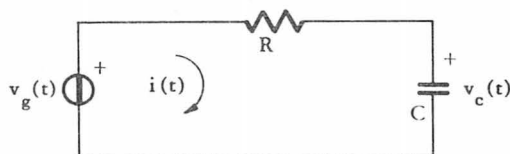


Fig.III.4.11 - Circuito considerato nell'esempio III.4.5. I valori dei componenti sono: $R=2$, $C=1$, $v_c(0)=0$, $v_g(t)=2 u_{-1}(t)$, (Ω , F, V).

L'andamento della corrente $i(t)$ nel circuito di fig.III.4.11 è dato dalla seguente equazione (vedere l'esempio III.4.1):

$$i(t) = \frac{2}{R} e^{-t/RC} u_{-1}(t) = e^{-t/2} u_{-1}(t)$$

Perciò la tensione $v_c(t)$ ha la seguente espressione:

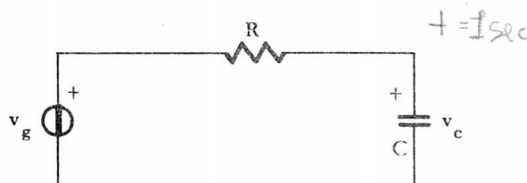
$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau/2} d\tau = -[2e^{-\tau/2}]_0^t = (2 - 2e^{-t/2}) u_{-1}(t)$$

All'istante $t = 1$, risulta:

$$v_c(1) = 2(1 - e^{-0,5}) = 0,787 \text{ V}$$

Di conseguenza all'istante $t=1$, il circuito dato è equivalente a quello mostrato in fig.III.4.12.

Fig.III.4.12 - Circuito di fig.III.4.11 all'istante $t=1$ sec. I valori delle tensioni sono: $v_g = 2$, $v_c = 0,787$ (V).



Il circuito di fig.III.4.12 può essere considerato come stadio iniziale per l'analisi dell'evoluzione successiva del fenomeno elettrico. Perciò, in base all'equivalenza riportata in tab.III.4.2, si ottiene il circuito di fig.III.4.13, in cui il condensatore è scarico all'istante iniziale $t = 1$ sec.

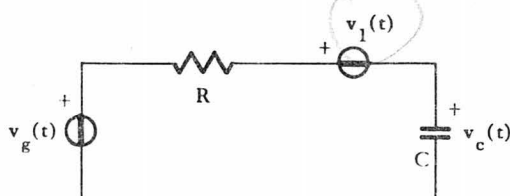


Fig.III.4.13 - Circuito da analizzare al posto di quello di fig.III.4.11 per $t > 1$ sec. I valori delle tensioni sono $v_g(t) = 2u_{-1}(t-1)$, $v_c(1) = 0$, $v_1(t) = 0,787 u_{-1}(t-1)$ (V).

III.5 - Impiego dei metodi alle differenze finite per l'analisi dei circuiti.

Quando le dimensioni del circuito da analizzare sono tali da rendere eccessivamente onerosa l'applicazione del procedimento di analisi simbolica, descritto nel paragrafo precedente, occorre prevedere l'impiego del calcolatore. I vari passi di tale procedimento, riportati in tabella III.4.1, presentano difficoltà diverse di implementazione, su cui è opportuno soffermarsi. Precisamente, il passo 1, riguardante la determinazione delle $\mathcal{L}$ -trasformate delle grandezze impresse esterne, è facilmente eseguibile solo nel caso di funzioni assegnate in forma chiusa e di cui si conosca la $\mathcal{L}$ -trasformata. In caso contrario, occorre intervenire attraverso i metodi di integrazione numerica con notevole aggravio del procedimento.

Il passo 4 richiede la determinazione delle grandezze elettriche come funzioni della variabile s . A questo riguardo mal si prestano i metodi considerati nel secondo capitolo. Occorre fare riferimento a metodi più evoluti, del tipo di quelli topologici citati nell'appendice II.D. È particolarmente sentito in questo caso il problema dell'eliminazione di fattori comuni tra denominatore e numeratore delle funzioni ottenute.

Il passo 5 presenta minori difficoltà degli altri, quando la funzione da antitrasformare è razionale reale, come accade nella maggior parte dei casi nei quali sono razionali le trasformate delle funzioni di eccitazione. Possiamo infatti applicare il procedimento dello sviluppo in frazioni parziali, riportate in tab.III.A.2, che presenta qualche difficoltà numerica solo nel caso che siano presenti poli multipli⁽¹⁾.

L'andamento nel tempo delle grandezze elettriche, fornito dal calcolatore, è relativo ovviamente ad un numero di istanti, scelti a priori ed usualmente disposti in modo uniforme sull'asse dei tempi.

Tralasciando le difficoltà legate alla scelta degli algoritmi più opportuni ed alla loro implementazione su calcolatore, si possono considerare i principali vantaggi ed inconvenienti connessi con un procedimento automatico di analisi basato sulla trasformazione di Laplace. I principali vantaggi sono:

- 1) Determinazione molto accurata dell'andamento nel dominio del tempo delle grandezze desiderate;
- 2) Possibilità di calcolare tali grandezze in istanti di tempo qualsiasi senza alcun vincolo;

(1) - Nel caso di poli multipli per ovviare a difficoltà numeriche, che sorgono in questo caso, occorre usare tecniche più evolute, quali ad esempio quelle descritte in O. Brugia, «A non iterative method for the partial fraction expansion of a rational function with high order poles», SIAM Review, vol.7, n.3, 1965.

3) Validità dei risultati senza che sia necessario effettuare verifiche particolari sul circuito in esame.

I principali inconvenienti sono:

1) Difficoltà di analisi in presenza di eccitazioni non assegnate in forma chiusa, ovvero assegnate solo per punti;

2) Necessità di effettuare tante antitrasformate quante sono le grandezze richieste;

Particolarmente rilevante è lo svantaggio indicato al punto 1), che esclude l'analisi automatica nel dominio di s per una vasta classe di situazioni di interesse pratico, nelle quali l'eccitazione è nota solo per punti. In questi casi il metodo di calcolo deve comportarsi come un «simulatore nel dominio del tempo» del circuito stesso, cioè deve avere le seguenti caratteristiche:

~~1)~~ accettare funzioni di eccitazione di andamento generico, assegnato per punti;

~~2)~~ fornire le grandezze incognite per punti, calcolando il loro valore in corrispondenza a ciascun valore delle eccitazioni.

È evidente che il metodo di analisi basato sulla trasformata di Laplace non possiede tali caratteristiche.

Nel caso dei circuiti senza memoria è molto semplice ottenere un simulatore del tipo detto. A tale scopo, infatti, è sufficiente utilizzare in modo ripetitivo il programma NODI, introdotto nel secondo capitolo, come indicato nella figura III.5.1. Supponendo infatti di scegliere sull'asse dei tempi un numero di istanti pari a KT (ugualmente intervallati oppure no), per ogni istante generico K , $K=1, 2, \dots, KT$, vengono assegnati i valori delle eccitazioni; il programma provvede a calcolare corrispondentemente i valori delle grandezze incognite.

Il simulatore indicato in figura III.5.1 non presenta difficoltà di alcun genere, poiché il circuito considerato è senza memoria. Nel caso dei circuiti con memoria, l'e-

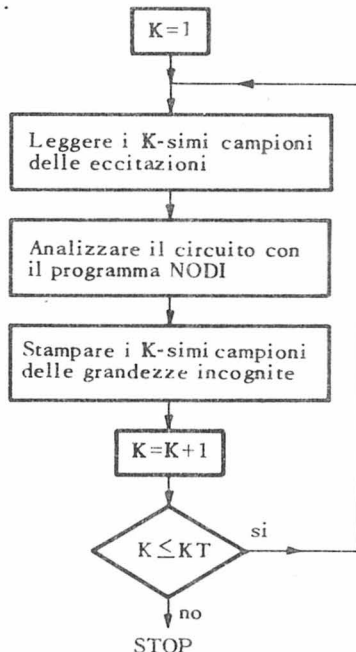


Fig. III.5.1 - Simulatori per circuiti senza memoria.

stensione del metodo di analisi indicato in fig.III.5.1 richiede l'utilizzazione di particolari algoritmi che tengano conto della presenza delle operazioni differenziali. Gli algoritmi in questione sono noti nell'analisi numerica con il nome di metodi alle differenze finite. Tali metodi si basano sul calcolo approssimato dell'operazione di derivazione, presente nella definizione dei componenti con memoria, quali il condensatore e l'induttore. Nel paragrafo seguente verranno introdotti alcuni dei principali metodi utilizzabili a questo scopo⁽¹⁾.

III.5.1 - Algoritmi alle differenze finite e relativi metodi di analisi⁽²⁾.

Si considerino due grandezze funzioni del tempo $x(t)$ ed $y(t)$, legate fra loro dalla relazione:

$$(III.5.1) \quad y = \frac{dx}{dt}$$

Si supponga inoltre che le due funzioni siano note solo in un numero finito di istanti di tempo pari a KT , con l'ulteriore ipotesi che siano ugualmente intervallati di un tempo T (intervallo di campionamento). Siano tali valori rispettivamente:

$$(III.5.2)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_K \dots x_{KT}$$

$$(III.5.3)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_K \dots y_{KT}$$

Se nella (III.5.1) l'operazione di derivazione viene approssimata mediante il rapporto incrementale calcolato per un intervallo di campionamento, si ottengono gli algoritmi di Eulero⁽³⁾.

(1) - Nel passaggio dai circuiti con memoria ai corrispondenti simulatori si effettua il passaggio dalle equazioni differenziali alle equazioni alle differenze finite. Tale trasformazione ha notevoli implicazioni di tipo numerico, per le quali si rimanda ai testi di analisi numerica. Si veda ad esempio: G.Pesamosca, «Elementi di analisi numerica», Ed. Sistema (Roma), 1976, Cap.5.

(2) - In questo paragrafo ci limiteremo a considerare solo alcuni algoritmi elementari, rimandando per ulteriori approfondimenti sull'argomento a G.Pesamosca, op. cit. ed a L. Chua e Pen-Min-Lin, op. cit. In particolare considereremo due algoritmi del primo ordine ed uno del secondo ordine.

(3) - Gli algoritmi di Eulero considerati nel testo sono del primo ordine, cioè come vedremo successivamente nel § III.5.2, l'errore che si commette nell'applicarli in ogni passo è proporzionale alla seconda potenza dell'intervallo di campionamento.

Precisamente si ha l'algoritmo di Eulero di tipo diretto quando:

(III.5.4) *diretto* $y_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$

quello di Eulero di tipo inverso quando:

(III.5.5) *inverso* $y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$

quello di Eulero modificato o trapezoidale⁽¹⁾, quando:

(III.5.6) *trapezoidale* $\frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k) = \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$

Ciascuno di questi algoritmi può essere facilmente interpretato dal punto di vista circuitale. Precisamente nel caso di un induttore, ponendo:

$$i(t) = x(t) \quad \text{e} \quad v(t) = y(t)$$

si ottengono le seguenti espressioni per i tre algoritmi partendo dalle (III.5.4), (III.5.5) e (III.5.6):

~~a)~~ Eulero diretto:

(III.5.7) $i_{k+1} = i_k + \frac{T}{L} v_k$

~~b)~~ Eulero inverso:

(III.5.8) $i_{k+1} = i_k + \frac{T}{L} v_{k+1}$

~~c)~~ trapezoidale:

(III.5.9) $i_{k+1} = i_k + \frac{T}{2L} (v_k + v_{k+1})$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, i_{k+1}$$

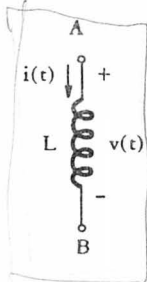
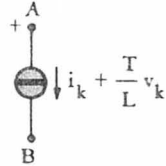
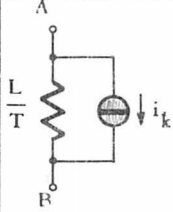
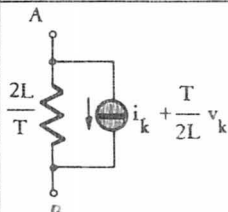
$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}$$

u sol.

(1) - L'algoritmo trapezoidale o di Eulero modificato (si veda ad esempio G. Pesamosca, op. cit., pag. 243), è un algoritmo del secondo ordine, in quanto l'errore commesso in ciascun passo è proporzionale al cubo dell'intervallo di campionamento, come vedremo successivamente nel § III.5.2.

In ciascuno di questi algoritmi le quantità v_k ed i_k debbono considerarsi note, in quanto si riferiscono all'istante precedente, mentre le quantità v_{k+1} ed i_{k+1} sono incognite. Si ottengono allora facilmente gli schemi equivalenti riportati in tab.III.5.1. Si vede che nel caso del metodo diretto di Eulero si ottiene come schema equivalente un semplice generatore di corrente, mentre negli altri due casi si ha uno schema equivalente costituito dal parallelo di un resistore e di un generatore di corrente.

Tabella III.5.1 - Algoritmi e schemi equivalenti con i metodi alle differenze finite nel caso dell'induttore.

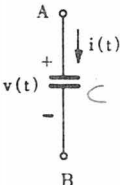
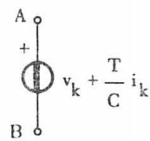
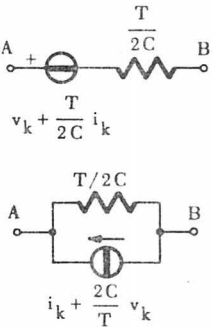
Metodo	Algoritmo	Schema del componente nel dominio del tempo	Schema equivalente
Eulero diretto	$i_{k+1} = i_k + \frac{T}{L} v_k$		
Eulero inverso	$i_{k+1} = i_k + \frac{T}{L} v_{k+1}$		
Trapezoidale	$i_{k+1} = i_k + \frac{T}{2L} (v_k + v_{k+1})$		

Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte nel caso del condensatore, ottenendo gli algoritmi e gli schemi mostrati nella tabella III.5.2.

È evidente che ciascun algoritmo alle differenze finite, essendo di tipo approssimato comporta degli errori e degli scostamenti rispetto al circuito originario. Tuttavia, nell'ambito delle approssimazioni pro-

prie di ciascun metodo alle differenze finite, un circuito elettrico con memoria può essere analizzato utilizzando gli schemi equivalenti riportati nelle tabelle III.5.1 e III.5.2. Gli stessi schemi possono essere utilizzati allo scopo di fornire le opportune condizioni iniziali. Si ottiene quindi un procedimento di analisi, come messo in evidenza in tab.III.5.3.

Tabella III.5.2 - Algoritmi e schemi equivalenti con i metodi alle differenze finite nel caso del condensatore.

Metodo	Algoritmo	Schema del componente nel dominio del tempo	Schema equivalente all'istante $(k+1) \cdot T$
Eulero diretto	$v_{k+1} = v_k + \frac{T}{C} i_k$		
Eulero inverso	$v_{k+1} = v_k + \frac{T}{C} i_{k+1}$		
Trapezoidale	$v_{k+1} = v_k + \frac{T}{2C} (i_k + i_{k+1})$		

È facile verificare che tale metodo permette di ottenere sul calcolatore un simulatore del circuito con memoria considerato, che fornisce un valore delle grandezze elettriche di interesse per ogni istante di campionamento; l'intervallo di campionamento di tale simulatore risulta costante.

Tabella III.5.3 - Analisi di un circuito con il metodo alle differenze finite.

Passo	Operazione da fare
1	Sostituire ad ogni induttore ed a ogni condensatore il rispettivo schema equivalente alle differenze finite di tab.III.5.1 e III.5.2 a seconda dell'algoritmo prescelto, con T intervallo di campionamento.
2	Analizzare il circuito risultante con $K=0$, assegnando alle eccitazioni il loro primo valore e_1; porre nel circuito per ogni condensatore: $v_0 = v_{c0}; \quad i_0 = 0$ dove v_{c0} rappresenta la tensione iniziale presente ai suoi capi ed $i_0 = i_{L0}; \quad v_0 = 0$ per ogni induttore, dove i_{L0} rappresenta la corrente iniziale che lo percorre.
3	Determinare la grandezza elettrica o le grandezze elettriche di interesse nel circuito e per ogni componente reattivo la rispettiva tensione e corrente v_1 ed i_1 .
4	Analizzare il circuito con $K=1$, assegnando alle eccitazioni il loro secondo valore e_2 ed utilizzando negli schemi equivalenti dei componenti reattivi le tensioni e correnti ottenute nel passo 3.
5	Ripetere i passi 3) e 4) per i successivi valori di K.

III.5.2 - Valutazione degli errori connessi con i procedimenti di analisi basati sui metodi alle differenze finite.

Per valutare in modo quantitativo gli errori che si commettono analizzando un circuito con il metodo alle differenze finite considerato in precedenza, si faccia riferimento all'andamento esatto che una certa grandezza ha in funzione del tempo; indichiamo con $x(t)$ tale andamento. Detto $x(t_k)$ il valore assunto all'istante t_k e posto:

(III.5.10)

$$t_{k+1} = t_k + T \quad (t_{k+1} - t_k) = T$$

si ha dalla formula di Taylor, sviluppata nell'intorno dell'istante t_k :

$$(III.5.11) \quad x(t_{k+1}) = x(t_k) + T x'(t_k) + \frac{T^2}{2} x''(t_k) + \frac{T^3}{6} x'''(t_k) + \epsilon_{IV}$$

dove ϵ_{IV} rappresenta la somma dei fattori dipendenti da potenze superiori o uguali a T^4 .

Applicando l'algoritmo diretto di Eulero, per un solo passo, a partire dal punto $x(t_k)$ si ottiene:

$$(III.5.12) \quad x_{k+1} = x(t_k) + T x'(t_k)$$

dove x_{k+1} è il valore approssimato di $x(t_{k+1})$ ottenuto tramite tale algoritmo. L'errore corrispondente, definito dalla relazione:

$$(III.5.13) \quad E_{ED} = x(t_{k+1}) - x_{k+1}$$

risulta uguale a:

$$(III.5.14) \quad E_{ED} = \frac{T^2}{2} x''(t_k) + \frac{T^3}{6} x'''(t_k) + \epsilon_{IV}$$

Tale errore viene denominato come «errore locale», in quanto si riferisce ad un solo passo di integrazione. Definendo come ordine di un algoritmo l'esponente che nell'espressione dell'errore locale moltiplica l'intervallo di campionamento, diminuito di uno, vediamo che l'algoritmo di Eulero diretto è un algoritmo del primo ordine. Procedendo in modo analogo si ha⁽¹⁾ per l'algoritmo di Eulero inverso il seguente errore locale:

$$(III.5.15) \quad E_{EI} = -\frac{T^2}{2} x''(t_k) + \frac{T^3}{2} x'''(t_k) + \epsilon'_{IV}$$

e per l'algoritmo trapezoidale:

$$(III.5.16) \quad E_T = -\frac{T^3}{12} x'''(t_k) + \epsilon''_{IV}$$

(1) - Per la derivazione delle (III.5.15) e (III.5.16) si rimanda ai testi di analisi numerica citati in precedenza.

In base alla definizione precedente di ordine si vede che l'algoritmo di Eulero inverso è del primo ordine e quello trapezoidale del secondo ordine. Si può quindi concludere che, per quanto riguarda gli errori locali, il metodo trapezoidale presenta dei vantaggi in corrispondenza a piccoli valori dell'intervallo di campionamento, mentre i due metodi di Eulero sono sostanzialmente equivalenti.

L'analisi effettuata sull'entità degli errori locali è solo un aspetto della valutazione globale degli errori associati ad un algoritmo alle differenze finite. Infatti l'errore locale si riferisce ad un singolo passo di integrazione, supponendo esatte le condizioni iniziali relative al passo precedente; in realtà il metodo delle differenze finite è adoperato per sostituire l'equazione differenziale di partenza per un numero molto elevato di passi di integrazione, per cui è necessario introdurre un criterio diverso di valutazione, detto «errore totale».

L'errore totale E_t in corrispondenza al passo $(k+1)$ -esimo è definito dalla relazione:

$$(III.5.17) \quad E_t = x(t_{k+1}) - x_{k+1}$$

dove x_{k+1} è il valore ottenuto con il metodo alle differenze finite dopo $k+1$ passi di integrazione a partire dal valore iniziale esatto:

$$(III.5.18) \quad x_0 = x(t_0)$$

L'entità dell'errore totale dipende dalle seguenti quantità:

- 1) dal valore dell'errore locale associato a ciascun passo;
- 2) dal tipo di algoritmo impiegato;
- 3) dal circuito analizzato.

Nei riguardi del punto 1), si può affermare che a parità di altre condizioni, si ottiene un errore totale inferiore se si hanno errori locali inferiori. Perciò si può concludere che, a parità di circuito analizzato, si ha:

- a) l'errore totale diminuisce al diminuire dell'intervallo di campionamento $T^{(1)}$;
- b) l'errore totale diminuisce più rapidamente al decrescere dell'intervallo T se si utilizza l'algoritmo trapezoidale.

(1) - È importante osservare che la diminuzione di T fa crescere pericolosamente gli errori aritmetici, per cui è sempre necessario controllarla in rapporto anche al numero di cifre con cui si lavora.

Nei riguardi del punto 2) e cioè del comportamento dell'algoritmo considerato nei confronti dell'errore totale⁽¹⁾, è importante stabilire se gli errori parziali si accumulano sempre con lo stesso segno ovvero si sottraggono gli uni agli altri. Nel primo caso infatti si può avere un errore totale molto grande ed al limite una *instabilità numerica* del metodo alle differenze finite.

Si può dimostrare che in alcuni casi il metodo diretto di Eulero, per alti valori di T , comporta instabilità numerica, a differenza di quanto accade per il metodo inverso di Eulero e per il metodo trapezoidale.

Per valutare il punto 3) e cioè l'effetto delle proprietà del circuito analizzato sull'errore totale, è necessario prima esaminare ulteriori proprietà del circuito stesso; perciò tale punto verrà sviluppato successivamente nell'appendice Criportata alla fine del test a cui si rimanda.

III.6 - Analisi automatica dei circuiti con memoria con il metodo alle differenze finite⁽²⁾. (o trapezoidale)

Nel presente paragrafo verrà descritto in dettaglio un metodo per l'analisi automatica dei circuiti elettrici con memoria, basato sul metodo trapezoidale (differenze finite), introdotto nel § III.5.1⁽³⁾. Lo schema a grandi linee del programma di calcolo sviluppato è quello mostrato in figura III.6.1.

Descriviamo di seguito in dettaglio i singoli blocchi:

Blocco I

Il blocco I (dati di ingresso) è strutturato come indicato in figura III.6.2, da dove si vede che esso si compone di due sottoblocchi. Il primo, sottoblocco II, ha lo scopo di assegnare i valori dei componenti del circuito ed i valori iniziali delle grandezze elettriche per i componenti reattivi. Per la descrizione di tale sottoblocco si richiama quanto det-

(1) - È interessante ricordare che può accadere in particolari condizioni che si abbia la sovrapposizione alla soluzione che si vuole calcolare di soluzioni estranee (o parassite) dovute alla propagazione di errori. Tale soluzione parassita partendo da valori iniziali anche piccoli può aumentare oscillando fino a dominare la soluzione calcolata. Per l'esame di tali fenomeni si rimanda ai testi di analisi numerica.

(2) - Nell'appendice II.B viene fornita la traduzione in FORTRAN del programma qui presentato.

(3) - Metodi di analisi che utilizzano altri metodi alle differenze finite possono essere ottenuti da quello qui descritto con poche modifiche.

to nel § I.11, con la seguente avvertenza relativa ai generatori indipendenti (di tensione o di corrente) eventualmente presenti nel circuito: per ogni generatore indipendente deve essere fornita, oltre alla posizione nel circuito, i valori che la relativa grandezza impressa assume nei vari istanti d'interesse, successivi a quello iniziale. Tali valori successivi non sono assegnati tramite il sottoblocco I1, ma nel blocco M2 descritto successivamente. Le altre quantità di ingresso, assegnate nel sottoblocco I2, sono:

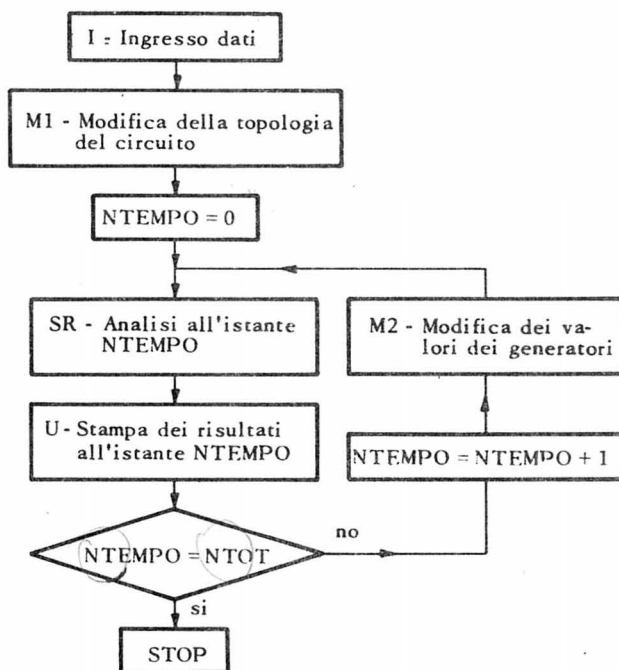


Fig.III.6.1 - Schema a blocchi a grandi linee del programma di calcolo considerato.

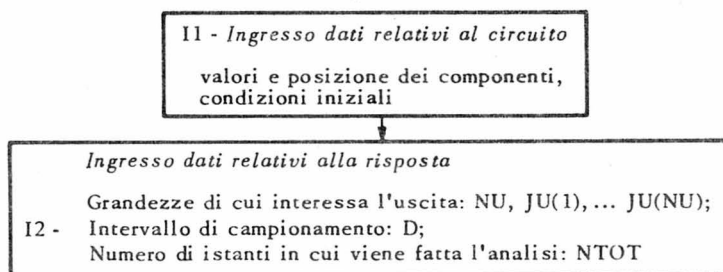


Fig.III.6.2 - Descrizione del blocco I di fig.III.6.1 relativo all'ingresso dei dati.

1) le grandezze di cui interessa l'andamento nel tempo. Poiché in generale non è conveniente fare eseguire la stampa di tutte le grandezze elettriche presenti nel circuito, è necessario indicare quali grandezze interessano. Ciò può essere fatto assegnando i numeri d'ordine dei nodi per i quali interessa la stampa delle tensioni. I dati relativi alle grandezze di uscita sono:

NU numero delle grandezze di uscita considerate;

JU(1), JU(2), ... JU(NU): numeri d'ordine dei nodi per i quali si desidera la stampa della tensione di uscita.

2) il valore dell'intervallo di campionamento: D;

3) il numero di istanti in cui viene effettuata l'analisi: NTOT.

L'analisi viene perciò effettuata nei seguenti istanti:

$$t=0, \quad t=D, \quad t=2 \cdot D, \quad \dots \quad t=NTOT \cdot D$$

intervallo di campionamento
Numero di cicli

Blocco M1.

Lo scopo di tale blocco è quello di effettuare la modifica del circuito assegnato, in modo da sostituire a ciascun componente reattivo (induttore o condensatore) il relativo circuito equivalente che deriva dal procedimento alle differenze finite utilizzato. Detto NL il numero degli induttori, NQ il numero dei condensatori ed inoltre NR ed NC i numeri dei resistori e dei generatori di corrente, il blocco M1 risulta strutturato come indicato in fig.III.6.3. Preliminarmente in tale blocco vengono memorizzati il numero dei resistori NR ed il numero dei generatori di corrente NC con i nuovi nomi NRI ed NCI. Ciò è richiesto in quanto nei sottoblocchi M11 ed M12 il numero dei resistori NR ed il numero dei generatori di corrente NC deve essere incrementato di una unità ciascuno per ogni componente reattivo presente.

La parte rimanente del diagramma a blocchi di fig.III.6.3 ha lo scopo di far eseguire il sottoblocco M11 per ogni induttore ed il sottoblocco M12 per ogni condensatore. In assenza di uno dei due tipi di componenti reattivi il sottoblocco corrispondente viene automaticamente escluso. I sottoblocchi M11 ed M12 hanno lo scopo di assegnare il circuito equivalente e la condizione iniziale per ogni componente reattivo presente nel circuito da analizzare. Descriviamo tali sottoblocchi separatamente.

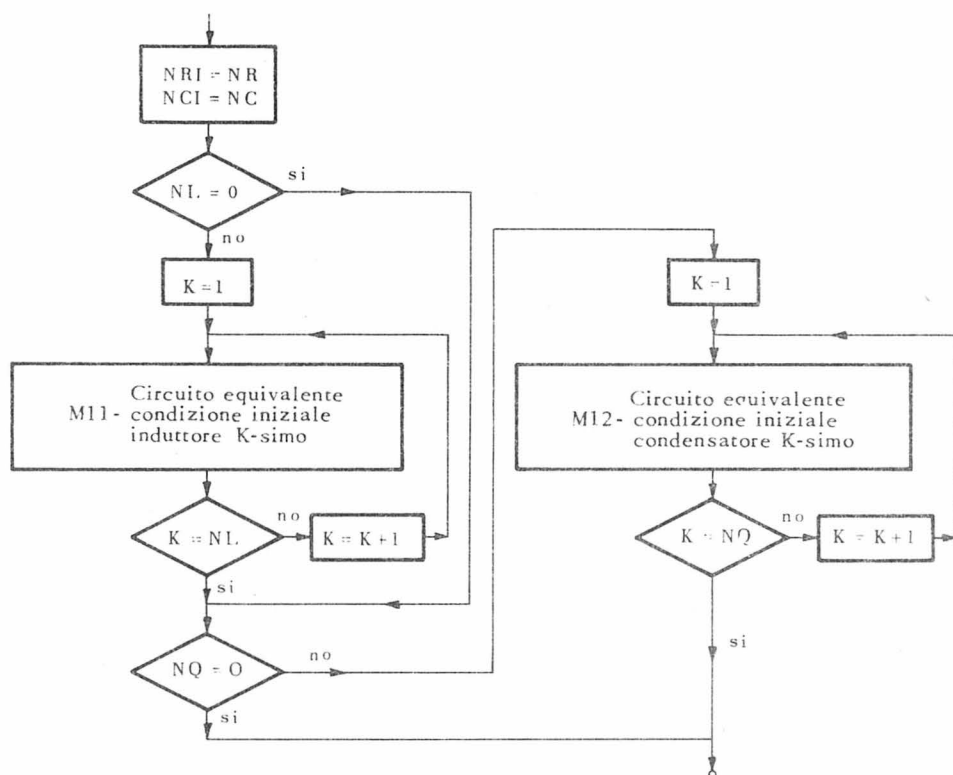


Fig.III.6.3 - Schema del blocco M1 di fig.III.6.1.

Sottoblocco M11.

Tale sottoblocco assegna il circuito equivalente e la condizione iniziale all'induttore K-simo in base all'equivalenza di fig.III.6.4, basata sul metodo trapezoidale (tab.III.5.1). Si procede nel seguente modo. Si aumenta il numero dei resistori, cioè:

$$NR = NR + 1$$

caratterizzando il nuovo resistore come segue:

$$\begin{aligned}
 R(NR) &= 2 \cdot ZL(K)/D \\
 N1(NR) &= NL1(K) \\
 N2(NR) &= NL2(K)
 \end{aligned}
 \tag{III.6.1}$$

Quindi si aumenta di uno il numero dei generatori di corrente, cioè:

$$NC = NC + 1$$

caratterizzando il nuovo generatore come segue:

$$\begin{aligned} C(NC) &= CL(K) \\ (III.6.2) \quad NC1(NC) &= NL2(K) \\ NC2(NC) &= NL1(K) \end{aligned}$$

Si ottiene in definitiva lo schema di fig.III.6.5.

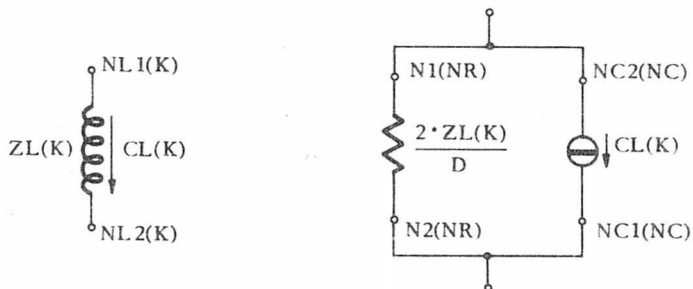
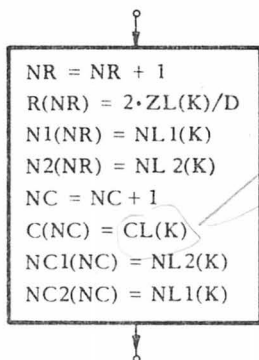


Fig.III.6.4 - Circuito equivalente dell'induttore nel primo passo, essendo $CL(K)$ la corrente iniziale che lo percorre.



corrente iniziale dell'induttore vedi III 5-9

DA DIMENSIONARE

Fig.III.6.5 - Sottoblocco M11.

Sottoblocco M12.

Tale sottoblocco assegna il circuito equivalente e la condizione iniziale al condensatore K-simo, in base all'equivalenza di fig.III.6.6, tratta da quelle riportate nella tab.III.5.2 per il metodo trapezoidale, con

l'ulteriore trasformazione del generatore aggiuntivo di tensione in uno di corrente, allo scopo di evitare l'aumento del numero totale dei nodi del circuito.

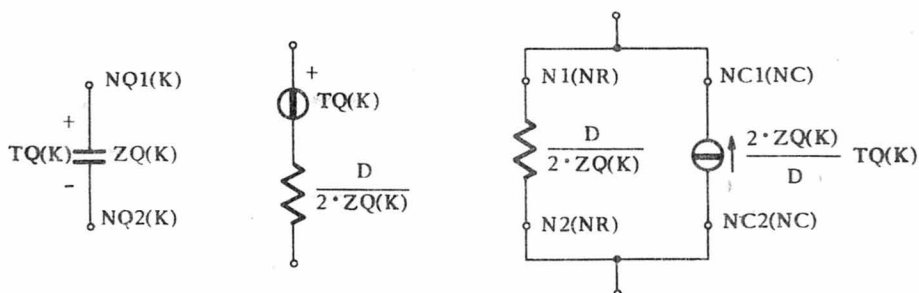


Fig. III.6.6 - Circuito equivalente del condensatore nel primo passo, essendo $TQ(K)$ la tensione iniziale ai suoi capi.

Procedendo come nel caso del sottoblocco M11, si ottiene per il sottoblocco M12 lo schema di fig. III.6.7.

Blocco SR.

Tale blocco è del tutto identico all'insieme dei blocchi S ed R indicati nel § II.7.2 (fig. II.7.3) per l'analisi dei circuiti senza memoria. In tale blocco infatti viene ottenuto e risolto il sistema di equazioni su base nodi per il circuito modificato.

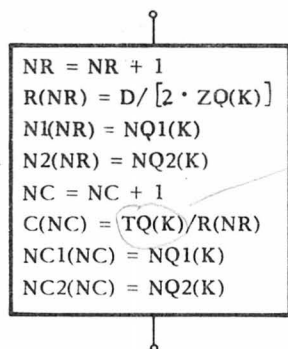


Fig. III.6.7 - Sottoblocco M12.

Nel caso presente la soluzione ottenuta si riferisce ad un singolo istante di campionamento (istante indicato con NTEMPO in figura III.6.1).

Blocco U.

Tale blocco provvede ad effettuare la stampa delle grandezze di interesse nell'istante di campionamento NTEMPO.

Blocco M2.

Tale blocco ha il compito di effettuare le modifiche dei valori dei generatori indipendenti richieste in corrispondenza a ciascun intervallo di campionamento. Tali modifiche riguardano sia gli schemi equivalenti dei componenti reattivi, nei quali i generatori di corrente debbono essere opportunamente variati in accordo con quanto previsto nelle tabelle III.5.1 e III.5.2, sia i generatori indipendenti effettivamente presenti nel circuito, in accordo con l'andamento assegnato delle grandezze impresse. Lo schema risultante per il blocco M2 è mostrato in fig.III.6.8. I sottoblocchi M21, M22 ed M23 eseguono le seguenti operazioni:

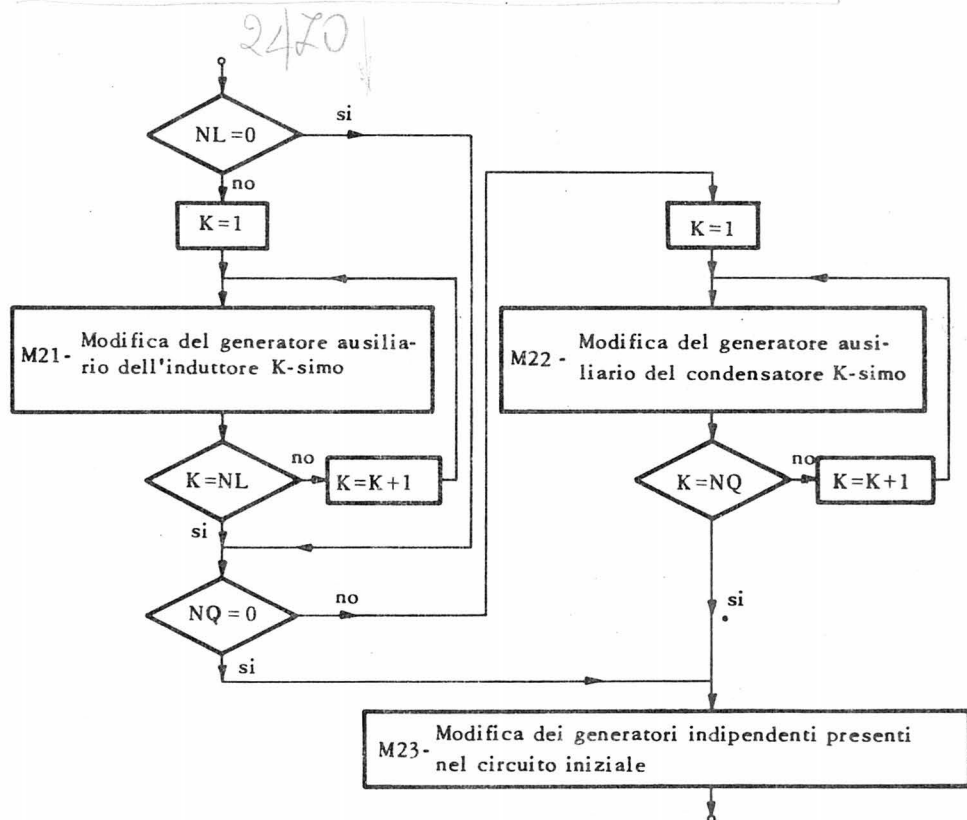


Fig.III.6.8 - Blocco M2.

Sottoblocco M21.

Tale sottoblocco ha il compito di effettuare le modifiche del valore del generatore di corrente presente nel circuito equivalente dell'induttore K-simo.

Sulla base del procedimento trapezoidale qui adottato il nuovo valore i_{k+1} della corrente del generatore ausiliario ha il seguente valore (tab.III.5.1):

$$(III.6.3) \quad i_{k+1} = CK + VK/RK$$

dove VK e CK sono i valori della tensione e della corrente nell'induttore ed RK è la resistenza del resistore del circuito equivalente. Tali quantità possono essere calcolate sulla base dei valori disponibili dal passo precedente.

1) *Calcolo di VK.* Detti con:

$$(III.6.4) \quad \begin{aligned} K1 &= NL1(K) \\ K2 &= NL2(K) \end{aligned}$$

i nodi a cui è connesso l'induttore K-simo e chiamando con B(I) il vettore delle tensioni, come fatto nel § II.7.2, si ha:

$$(III.6.5) \quad \begin{aligned} VK &= B(K1) - B(K2) & \text{se} & \quad K1 \neq ND & \text{e} & \quad K2 \neq ND \\ VK &= B(K1) & \text{se} & \quad K1 \neq ND & \text{e} & \quad K2 = ND \\ VK &= -B(K2) & \text{se} & \quad K1 = ND & \text{e} & \quad K2 \neq ND \end{aligned}$$

essendo ND il numero d'ordine del nodo di riferimento.

2) *Identificazione del valore RK.* Tale valore è stato calcolato nel blocco M1 e posto nel vettore R, cioè:

$$(III.6.6) \quad RK = R(K3)$$

essendo:

$$(III.6.7) \quad K3 = NRI + K$$

3) *Calcolo di CK.* La corrente CK che percorre l'induttore coincide con la somma di quella che percorre il resistore del circuito equivalente e di quella del generatore di corrente contenuto in tale circuito. Posto quindi:

$$(III.6.8) \quad K4 = NCI + K$$

si ha che:

$$(III.6.9) \quad CK = VK/RK + C(K4)$$

In base alla (III.6.3) ed ai punti 1), 2) e 3) precedenti si ha per il sottoblocco M21 la struttura mostrata in fig.III.6.9.

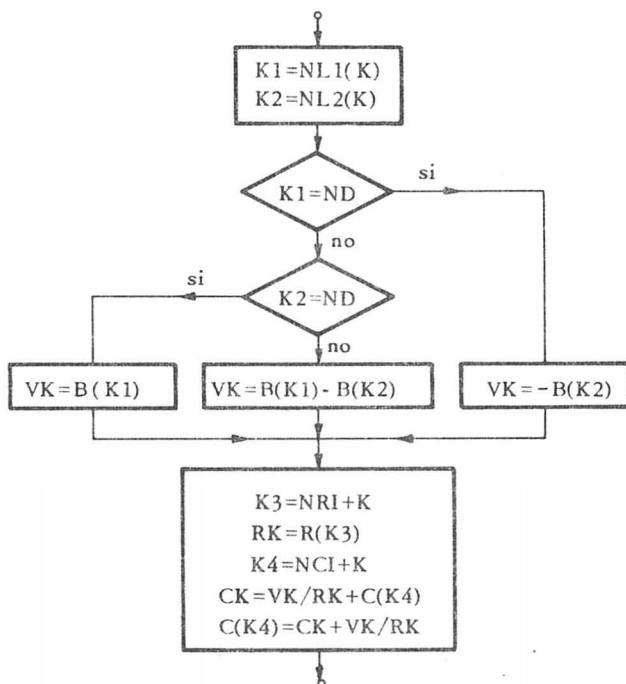


Fig.III.6.9 - Sottoblocco M21.

Sottoblocco M22.

Tale sottoblocco ha il compito di effettuare le modifiche del valore del generatore ausiliario di corrente per il condensatore K-simo. Sulla base del procedimento trapezoidale, il valore i_{k+1} della corrente del generatore ausiliario di corrente presente nel circuito equivalente di tabella III.5.2 è:

$$(III.6.10) \quad i_{k+1} = CK + VK/RK$$

dove VK, CK e RK sono i valori della tensione, della corrente e della

resistenza equivalente del condensatore. Tali quantità possono essere calcolate sulla base dei valori disponibili dal passo precedente.

1) *Calcolo di VK*. Si utilizzano le stesse formule viste nel caso del calcolo di VK per l'induttore con l'unica differenza che:

$$(III.6.11) \quad \begin{aligned} K1 &= NQ1(K) \\ K2 &= NQ2(K) \end{aligned}$$

2) *Identificazione di RK*. Tale valore è stato calcolato nel blocco M1 e posto nel vettore R, cioè:

$$(III.6.12) \quad RK = R(K3)$$

essendo:

$$(III.6.13) \quad K3 = NRI + NL + K$$

3) *Calcolo di CK*. Tale corrente è uguale alla differenza fra la corrente che percorre il resistore RK e la corrente del generatore di corrente del circuito equivalente. Posto quindi:

$$(III.6.14) \quad K4 = NCI + NL + K$$

si ha che:

$$(III.6.15) \quad CK = VK/RK - C(K4)$$

In base alla (III.6.10) ed ai punti 1), 2) e 3) precedenti, si ha lo schema del sottoblocco M22 mostrato in fig.III.6.10.

Sottoblocco M23.

Tale sottoblocco ha lo scopo di modificare i valori delle tensioni e delle correnti dei generatori indipendenti in base all'andamento assegnato in funzione del tempo. Tale sottoblocco deve essere perciò strutturato sulla base del caso particolare trattato. A titolo orientativo accenniamo di seguito a quattro casi possibili:

1) *Caso in cui le grandezze impresse coincidono con impulsi*. In questo caso, dopo aver letto i valori iniziali dei generatori nel blocco I1, il sottoblocco M23 deve prevedere solo l'azzeramento di tutti i generatori presenti;

2) *Caso in cui le grandezze impresse coincidono con funzioni a gradino*. In questo caso occorre conservare i valori letti nel blocco I1 e perciò nel sottoblocco M23 non occorre effettuare alcuna operazione;

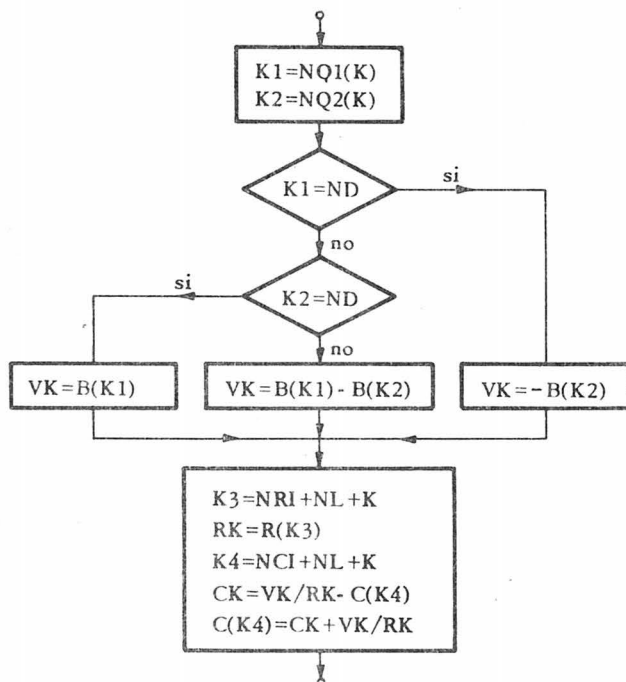


Fig.III.6.10 - Sottoblocco M22.

3) Caso in cui le grandezze impresse hanno un andamento cosinusoidale. L'andamento della grandezza impressa è del tipo:

$$(III.6.16) \quad e(t) = \cos(\omega t + FI)$$

dove $\omega = 2\pi F$, essendo F la frequenza e FI la fase. Quindi si ha:

$$(III.6.17) \quad e(t) = \cos(2\pi F \cdot D \cdot NTEMPO + FI)$$

Tale formula deve essere prevista nel sottoblocco M23, mentre all'istante iniziale occorre leggere il valore iniziale:

$$(III.6.18) \quad e(0) = \cos(FI)$$

4) Caso in cui le grandezze impresse hanno un andamento espresso mediante tabelle. In questo caso nel sottoblocco M23 occorre prevedere la

lettura del valore assegnato per i generatori presenti negli istanti di campionamento $NTEMPO = 1, 2, \dots NTOT$. Il valore iniziale per $NTEMPO = 0$ viene letto insieme ai dati iniziali del circuito nel blocco II.

Osservazione III.6.1.

Il metodo di analisi automatica descritto nel presente paragrafo prevede l'esecuzione di una analisi completa del circuito per ogni istante di campionamento; perciò se il numero totale degli istanti di campionamento è uguale ad $NTOT$, il programma effettuerà $NTOT$ volte l'analisi del circuito, come si vede chiaramente dall'esame dello schema a blocchi di fig.III.6.1.

Tale procedimento può risultare conveniente solo quando il numero $NTOT$ è molto piccolo, mentre per valori elevati di $NTOT$ dà luogo ad un eccessivo dispendio di tempo macchina, che rende il metodo scarsamente utilizzabile nelle applicazioni. Si può notare infatti che le analisi effettuate successivamente nei vari istanti di campionamento si riferiscono sempre al medesimo circuito, nel quale variano di volta in volta solo i valori dei generatori indipendenti (blocco M2 di fig.III.6.1). Tale inconveniente può essere eliminato, osservando che, per la linearità del circuito considerato, la tensione del nodo K -simo, $K = 1, 2, \dots (ND-1)$, rispetto a quello di riferimento ND , può esprimersi come combinazione lineare delle correnti $C(I)$, $I = 1, 2, \dots NC$, impresse dai generatori indipendenti di corrente, delle tensioni $T(I)$, $I = 1, 2, \dots NT$, impresse dai generatori indipendenti di tensione, cioè:

$$(III.6.19) \quad B(K) = \sum_{I=1}^{NC} AC(K, I) C(I) + \sum_{I=1}^{NT} AT(K, I) T(I)$$

$$K = 1, 2, \dots ND-1$$

dove $AC(K, I)$ ed $AT(K, I)$ sono i termini (K, I) di due matrici AC ed AT , che rappresentano il legame fra le grandezze impresse e le tensioni dei nodi.

Un modo molto semplice per determinare le suddette matrici consiste nell'applicare il metodo di sovrapposizione degli effetti, rendendo attivo e di valore unitario un generatore per volta. Ponendo infatti a zero le grandezze impresse di tutti i generatori di tensione e di corrente, eccetto $C(I)$ che si assume di valore unitario, si ottiene dalla (III.6.19):

$$(III.6.20) \quad AC(K, I) = B(K) \quad K = 1, 2, \dots ND-1$$

Analogamente, assumendo diverso da zero solo $T(I)$ fra tutte le grandezze impresse, e ponendolo uguale ad uno, si ottiene:

$$(III.6.21) \quad AT(K, I) = B(K) \quad K = 1, 2, \dots ND-1$$

In conclusione per individuare completamente le due matrici AC ed AT occorre effettuare l'analisi del circuito tante volte quanti sono i generatori indipendenti, cioè $NC + NT$.

Il metodo automatico basato sulla (III.6.19) è quindi conveniente dal punto di vista del consumo del tempo macchina, quando $NTOT$ è maggiore di $NC+NT$. Quanto maggiore è la differenza tra questi due numeri, tanto maggiore è la convenienza di un metodo rispetto all'altro. In fig.III.6.11 è riportato lo schema a blocchi che occorre so-

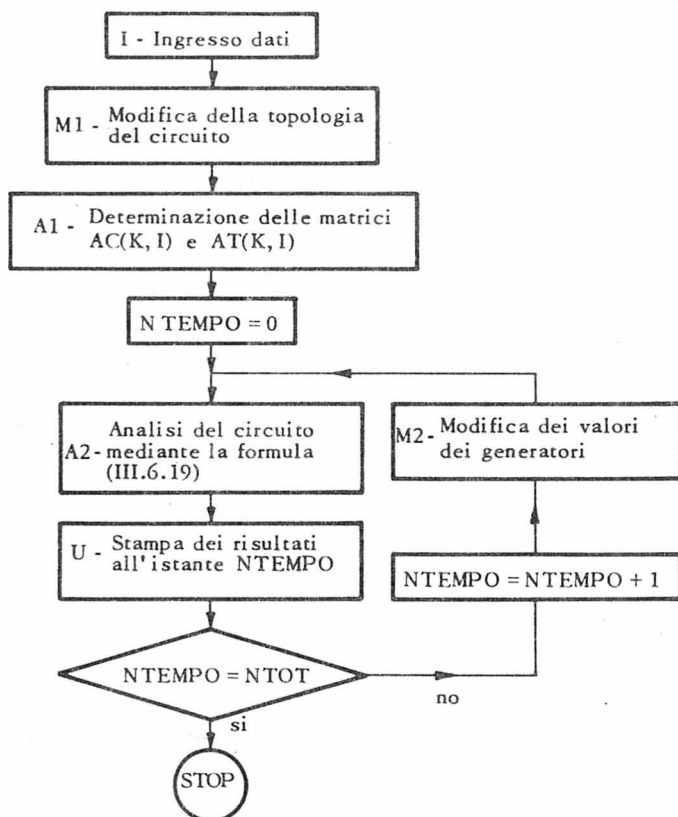


Fig.III.6.11 - Variante del metodo automatico di analisi di un circuito utile nel caso che $NTOT$ sia elevato.

stituire a quello di fig.III.6.1, quando si adotta la formula (III.6.19). Nello schema di figura III.6.11 l'unico blocco che richiede un ulteriore dettaglio è il sottoblocco A1, per il quale perciò si riporta in fig.III.6.12 lo schema completo. È da notare che il sottoblocco SR è identico a quello di ugual nome che compare nello schema di fig.III.6.1⁽¹⁾.

(1) - Per evitare sovrapposizione sui valori dei generatori di corrente e tensione $C(I)$, $T(I)$, è necessario assegnare loro un nome differente nel resto del programma rispetto al blocco A1.

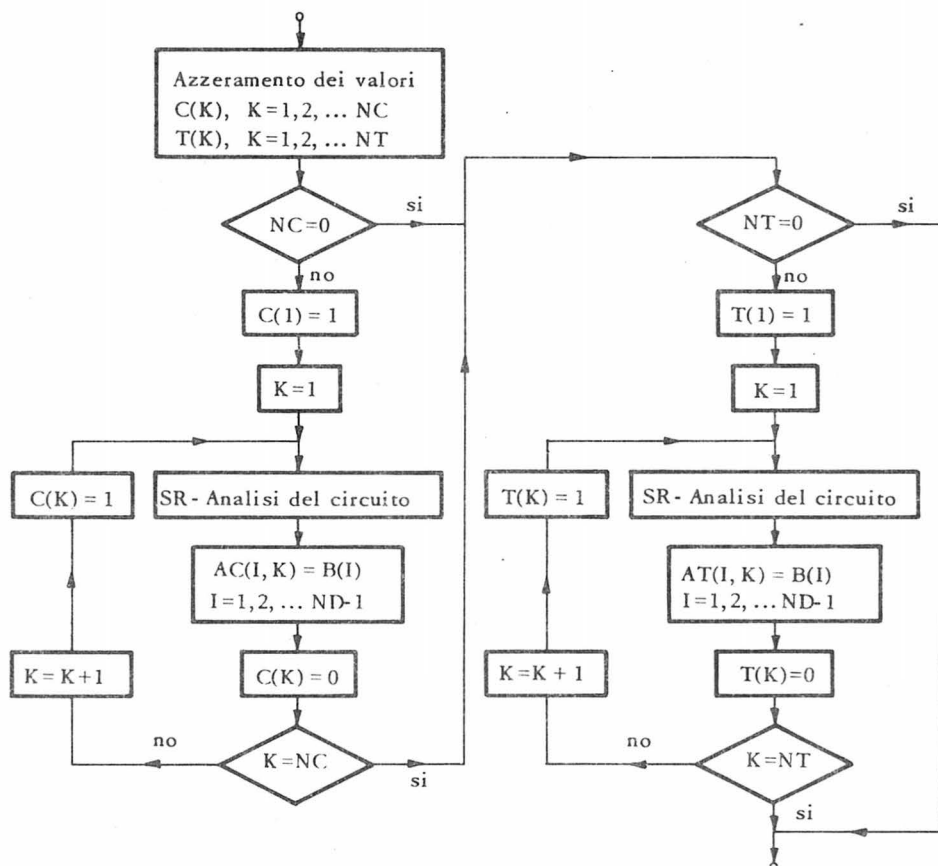


Fig.III.6.12 - Schema del sottoblocco A1.

*

APPENDICI AL CAPITOLO III

APPENDICE III.A - *Cenni alla trasformazione ed antitrasformazione di Laplace*⁽¹⁾.

Nel § III.3 è stata introdotta la trasformazione di Laplace riportando per essa le proprietà essenziali per la sua applicazione all'analisi dei circuiti. Nella presente appendice, dopo aver fornito alcune precisazioni relative alla definizione dell'operazione di trasformazione, verranno riportate ulteriori proprietà di tale trasformazione, assai utili nell'affrontare i vari aspetti del problema dell'analisi. L'applicazione della trasformazione di Laplace richiede essenzialmente l'esecuzione di due passi:

- 1) la determinazione della trasformata di una funzione assegnata nel tempo;
- 2) l'antitrasformazione, cioè il passaggio da una funzione della variabile s alla corrispondente funzione del tempo.

Questi due passi fondamentali sono usualmente effettuati mediante l'aiuto di tabelle di trasformate, del tipo della tab.III.A.1; tabelle più estese possono essere trovate ad esempio in:

- A. Ghizzetti, A. Ossicini, «Trasformata di Laplace e calcolo simbolico», UTET, Torino, 1971.
- G. E. Roberts, H. Kaufman, «Table of Laplace transforms», Saunders Co., Londra, 1966.

Nel caso dei circuiti a costanti concentrate, tuttavia, è usualmente sufficiente conoscere la trasformata di poche funzioni del tempo, che verranno considerate nel § III.A.2. Ciò è conseguenza del fatto che le

(1) - Per le dimostrazioni dei teoremi e delle proprietà enunciate in questo paragrafo si rimanda a A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, op. cit., Cap.4.

eccitazioni che interessano in questo caso sono usualmente di pochi tipi e che l'antitrasformazione viene richiesta solo per funzioni della variabile s appartenenti a pochi tipi, tramite lo sviluppo in frazioni parziali. Quest'ultima operazione verrà trattata in dettaglio per la sua importanza nei § III.A.3, III.A.4 e III.A.5.

III.A.1 - Ulteriori proprietà della trasformazione di Laplace.

Una funzione $f(t)$ si dice $\mathcal{L}$ -trasformabile se esiste almeno un valore s_0 della variabile s tale da far risultare determinato e finito il limite seguente:

$$(III.A.1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-s_0 t} f(t) dt$$

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.A.1 - Se la funzione $f(t)$ è $\mathcal{L}$ -trasformabile, la sua trasformata di Laplace $F(s)$ è definita in tutti i punti del semipiano aperto (figura III.A.1) per cui risulta:

$$(III.A.2) \quad \operatorname{Re}[s] > \beta$$

dove la quantità β prende il nome di ascissa di convergenza.

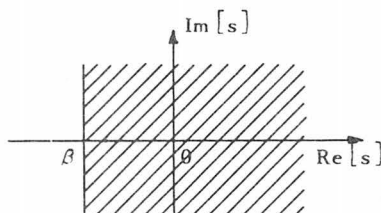


Fig.III.A.1 - Dominio di definizione della trasformata di Laplace (indicato tratteggiato).

Il valore dell'ascissa di convergenza β dipende dalla funzione da trasformare $f(t)$; essa può assumere qualsiasi valore reale e può essere eventualmente uguale a $-\infty$.

Per le proprietà di linearità, di derivazione nel dominio del tempo, di integrazione nel dominio del tempo si rimanda al §III.3.

In questa appendice verranno enunciate altre proprietà che hanno grande importanza nelle applicazioni.

Proprietà IV - Traslazione nel tempo.

Detta $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$ -trasformabile, si consideri la funzione $f(t-a)$, ottenuta traslando l'asse dei tempi della quantità reale non negativa a . Risulta:

$$(III.A.3) \quad \mathcal{L} [f(t-a) u_{-1}(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L} [f(t)]$$

Proprietà V - Cambiamento della scala dei tempi.

Detta $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$ -trasformabile, di trasformata $F(s)$, si consideri la funzione $f(t/a)$, dove a è un fattore di scala arbitrario (numero reale e positivo); si ha:

$$(III.A.4) \quad \mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a F(a \cdot s)$$

Proprietà VI - Teorema del valore iniziale.

Se $F(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, sotto opportune ipotesi, di cui la più importante è l'esistenza del limite per $t \rightarrow 0$ di $f(t)^{(1)}$, si ha:

$$(III.A.5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)]$$

Proprietà VII - Teorema del valore finale.

Se $F(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, sotto opportune ipotesi, di cui la più importante è l'esistenza del limite per $t \rightarrow \infty$ di $f(t)^{(1)}$, si ha:

$$(III.A.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)]$$

Per l'applicazione delle proprietà precedenti si rimanda agli esempi riportati nell'appendice III.C.

(1) - Per un'esposizione completa di tutte le ipotesi sotto le quali valgono le proprietà VI e VII, si veda A. Ghizzetti, «Calcolo simbolico», pag.182-184, Zanichelli, Bologna 1943. È opportuno richiamare l'attenzione sull'importanza dell'ipotesi di esistenza del limite nel tempo per le suddette proprietà. Un esempio tipico in cui tale ipotesi viene a cadere, per il teorema del valore finale, è quello della funzione $f(t) = \sin t$; in tal caso, infatti, pur non esistendo il limite nel tempo, il limite a secondo membro della formula (III.A.6) esiste ed è pari a zero.

III.A.2 - Calcolo delle trasformate di Laplace delle funzioni più comuni nei circuiti a costanti concentrate.

Nel presente paragrafo verrà effettuato il calcolo delle trasformate di Laplace di alcune funzioni tipiche nell'analisi dei circuiti a costanti concentrate.

a) Trasformata della funzione gradino unitario $u_{-1}(t)$.

Si ottiene:

$$(III.A.7) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u_{-1}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^T = \frac{1}{s} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{per } \operatorname{Re}[s] > 0$$

Quindi si ha:

$$(III.A.8) \quad \mathcal{L}[u_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$$

con ascissa di convergenza $\beta = 0$.

b) Trasformata della funzione impulso unitario $u_0(t)$.

Si ottiene in base alla (III.2.15):

$$(III.A.9) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u_0(t) dt = [e^{-st}]_{t=0} = 1$$

Quindi si ha:

$$(III.A.10) \quad \mathcal{L}[u_0(t)] = 1$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\infty$.

c) Trasformata della funzione $e^{-s_0 t}$ con s_0 costante reale o complessa.

Si ottiene:

$$(III.A.11) \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} e^{-s_0 t} u_{-1}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s+s_0)t}}{s+s_0} \right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{s+s_0} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s+s_0)T}}{s+s_0} = \frac{1}{s+s_0} \quad \text{per } \operatorname{Re}[s] > -\operatorname{Re}[s_0]$$

Quindi si ha:

$$(III.A.12) \quad \mathcal{L}[e^{-s_0 t} u_{-1}(t)] = \frac{1}{s+s_0}$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\operatorname{Re}[s_0]$.

d) *Trasformata della funzione $t^n e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$ con n intero positivo o nullo ed s_0 costante reale o complessa.*

Si ottiene:

$$(III.A.13) \quad \mathcal{L}[t^n e^{-s_0 t} u_{-1}(t)] = \frac{n!}{(s+s_0)^{n+1}}$$

con ascissa di convergenza $\beta = -\operatorname{Re}[s_0]$.

Le trasformate precedentemente considerate hanno una grande importanza nelle applicazioni all'analisi dei circuiti a costanti concentrate. Infatti in base ad esse ed alle proprietà della trasformazione di Laplace è possibile ricavare la maggior parte delle trasformate che occorrono nei casi concreti⁽¹⁾. Illustriamo tale affermazione con un esempio.

Esempio III.A.1.

Calcolare la trasformata di Laplace della seguente funzione:

$$(III.A.14) \quad f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) u_{-1}(t)$$

Si ha in base alla definizione nel campo complesso del coseno:

$$(III.A.15) \quad f(t) = A \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} u_{-1}(t) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega t} u_{-1}(t) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} u_{-1}(t)$$

Applicando la proprietà di linearità e la regola di trasformazione della funzione $e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$ (caso c) considerato precedentemente), si ottiene:

(1) - Ulteriori trasformate sono elencate nella tab. III.A.1.

$$\begin{aligned}
 \text{(III.A.16)} \quad F(s) &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{s + j\omega} = \\
 &= \frac{A}{2} \frac{(\cos \varphi + j \sin \varphi)(s + j\omega) + (\cos \varphi - j \sin \varphi)(s - j\omega)}{s^2 + \omega^2} = A \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

con ascissa di convergenza $\beta = 0$.

III.A.3 - Trasformazione inversa di Laplace.

La teoria della antitrasformazione di Laplace si basa sul seguente teorema di unicità:

Teorema III.A.2 - Se due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ hanno la stessa trasformata di Laplace $F(s)$, in un certo semipiano di convergenza $\operatorname{Re}[s] > \beta$, allora le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ possono differire soltanto nei punti di un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue).

L'esecuzione dell'operazione di antitrasformazione⁽¹⁾ può presentare notevoli difficoltà, in quanto:

- 1) la formula integrale che viene usualmente utilizzata è l'integrale principale di Cauchy di una funzione di variabile complessa. Tale integrale va eseguito lungo percorsi opportuni nel piano complesso⁽²⁾;
- 2) il risultato dell'integrale di inversione fornisce l'antitrasformata cercata solo se è noto a priori che la funzione della variabile s considerata è una trasformata di Laplace. Tale condizione è usualmente di difficile accertamento.

Per le ragioni precedenti il ricorso alla formula integrale suddetta è del tutto eccezionale, ciò che ne giustifica l'omissione nel caso presente. Nelle applicazioni all'analisi dei circuiti è sufficiente l'uso delle tabelle, di cui la tab.III.A.1 è un esempio, e la constatazione che le funzioni con cui si ha a che fare sono usualmente razionali reali nella variabile s . Tali funzioni si possono ridurre ad una combinazione lineare di funzioni molto semplici, del tipo di quelle trattate nel §III.A.2, mediante l'operazione di sviluppo in frazioni parziali. Quindi nei casi usuali l'operazione di antitrasformazione consta di due passi:

(1) - L'operazione di antitrasformazione di una funzione $F(s)$ viene indicato brevemente con il simbolo $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

(2) - Si veda ad esempio l'antitrasformazione della funzione $1/\sqrt{s+1}$, riportata a pagina 269 di A.Ghizzetti, L.Marchetti, A.Ossicini, op. cit.

a) suddivisione della funzione $F(s)$ in una combinazione di funzioni elementari mediante l'algoritmo detto dello «sviluppo in frazioni parziali»;

b) antitrasformazione delle singole funzioni elementari componenti, direttamente per ispezione, e determinazione della funzione nel dominio del tempo, utilizzando la proprietà di linearità.

Per l'importanza che assume tale procedimento nei calcoli relativi all'analisi dei circuiti elettrici a costanti concentrate, i due passi suddetti verranno sviluppati in dettaglio nei paragrafi successivi.

III.A.4 - Sviluppo in frazioni parziali.

Sia $F(s)$ una funzione razionale della variabile s :

$$(III.A.17) \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $N(s)$ è il numeratore:

$$(III.A.18) \quad N(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} \dots + a_1 s + a_0$$

e $D(s)$ il denominatore:

$$(III.A.19) \quad D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} \dots + b_1 s + b_0$$

Nel seguito supporremo i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ primi fra loro.

Prende il nome di polo della funzione $F(s)$ un valore della variabile per cui risulti⁽¹⁾:

$$(III.A.20) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} |F(s)| = \infty$$

È facile vedere che sono poli della funzione tutte le radici del polinomio $D(s)$. Nel caso di una radice s_0 di molteplicità r , si dice che s_0 è un polo multiplo di $F(s)$ di molteplicità r . Inoltre la funzione $F(s)$ può tendere all'infinito anche per s che tende all'infinito, se il grado del numeratore m è maggiore del grado del denominatore n ; in tal caso si dice che la funzione $F(s)$ ha un polo all'infinito, la cui molteplicità

(1) - Taluni autori, previa introduzione del punto all'infinito per i valori di F , scrivono la relazione equivalente $\lim_{s \rightarrow s_0} F(s) = \infty$.

r è uguale a $r=m-n$. I valori di s che sono poli di $F(s)$ sono gli unici punti singolari di detta funzione.

Una funzione razionale $F(s)$ può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno di ogni punto s_0 del piano complesso che non sia singolare, cioè:

(III.A.21)

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s-s_0)^i$$

dove i coefficienti c_i sono dati da:

(III.A.22)

$$c_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i F}{ds^i} \right)_{s=s_0}$$

Si consideri ora un punto s_0 del piano complesso s nel quale la funzione $F(s)$ abbia un polo di molteplicità r ; in tale punto s_0 la funzione $F(s)$ non è sviluppabile in serie di Taylor, essendo s_0 singolare. Si consideri la seguente funzione:

(III.A.23)

$$G(s) = (s-s_0)^r F(s)$$

È facile vedere che questa funzione è ancora razionale nella variabile s e non ha più alcun polo nel punto s_0 ; perciò, essendo s_0 un punto non singolare per la funzione $G(s)$, essa può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno di tale punto. Si ottiene:

(III.A.24)

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s-s_0)^i$$

dove i coefficienti c_i devono essere calcolati con le seguenti formule:

(III.A.25)

$$c_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i G}{ds^i} \right)_{s=s_0}$$

Si divida ora membro a membro l'espressione (III.A.24) per $(s-s_0)^r$; si ottiene in tal modo il seguente sviluppo per la funzione $F(s)$:

$$(III.A.26) \quad F(s) = \frac{c_0}{(s-s_0)^r} + \frac{c_1}{(s-s_0)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{r-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{r-1}}{(s-s_0)} + \sum_{i=r}^{\infty} c_i (s-s_0)^{i-r}$$

Lo sviluppo (III.A.26) della funzione $F(s)$ nell'intorno del punto singolare s_0 viene detto *sviluppo in serie di Laurent* della funzione $F(s)$; i coefficienti c_i di tale sviluppo possono essere calcolati per mezzo della (III.A.25).

Come si può vedere dall'espressione (III.A.26) lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione razionale $F(s)$ consta di due parti: la prima è costituita da quei termini che vanno all'infinito per s che tende ad s_0 ; la seconda invece rimane limitata per s che tende ad s_0 . La prima parte viene detta *parte singolare* dello sviluppo in serie di Laurent di $F(s)$ nell'intorno del punto s_0 ; tale parte singolare che verrà indicata con PS_0 è uguale a:

$$(III.A.27) \quad PS_0 = \frac{c_0}{(s-s_0)^r} + \frac{c_1}{(s-s_0)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{r-1}}{s-s_0}$$

La seconda parte dello sviluppo in serie di Laurent viene detta *parte regolare*.

In modo analogo a quanto fatto nel caso del polo al finito s_0 , è possibile definire uno sviluppo in serie di Laurent della funzione $F(s)$ nell'intorno dell'eventuale polo all'infinito di molteplicità r . In tale caso la funzione $G(s)$ a cui occorre fare riferimento è la seguente:

$$(III.A.28) \quad G(s) = \frac{1}{s^r} F(s)$$

Anche per lo sviluppo in serie di Laurent nell'intorno del punto all'infinito è possibile definire una parte singolare ed una parte regolare. La parte singolare PS_∞ risulta essere del seguente tipo:

$$(III.A.29) \quad PS_\infty = c_0 s^r + c_1 s^{r-1} \dots + c_{r-1} s$$

dove r è la molteplicità relativa al polo all'infinito e le costanti c_i possono essere calcolate utilizzando la formula (III.A.25) sulla funzione $G(s)$ espressa dalla (III.A.28).

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema III.A.3 – «La somma delle parti singolari di una funzione razionale $F(s)$ nell'intorno di tutti i suoi poli (distinti), compreso l'eventuale polo all'infinito, è uguale alla funzione stessa $F(s)$, a meno di una costante».

In base a tale teorema si può scrivere:

(III.A.30)

$$F(s) = \sum_i PS_i + PS_\infty + c$$

dove con PS_i è stata indicata la parte singolare relativa allo sviluppo nell'intorno dell' i -esimo polo al finito e la sommatoria è estesa a tutti i poli al finito distinti. La costante c è un numero reale se la funzione è a coefficienti reali.

Lo sviluppo (III.A.30) della funzione razionale $F(s)$ viene chiamato *sviluppo in frazioni parziali*. Tale sviluppo permette di effettuare in modo immediato l'operazione di antitrasformazione di Laplace, essendo coincidente con una combinazione lineare di funzioni antitrasformabili per ispezione visiva come vedremo successivamente.

Si può notare che la parte dello sviluppo in frazioni parziali relativa ai termini $(PS_\infty + c)$ può essere determinata in modo molto semplice effettuando la divisione fra i polinomi $N(s)$ e $D(s)$.

Nel caso particolare, ma molto frequente, in cui la funzione $F(s)$ possiede un polo al finito semplice, il calcolo della parte singolare nell'intorno di tale polo si semplifica notevolmente. In questo caso, infatti, la parte singolare PS_0 diviene:

$$(III.A.31) \quad PS_0 = \frac{c_0}{s - s_0}$$

La costante c_0 prende il nome di *residuo* della funzione $F(s)$ nel polo s_0 . L'espressione (III.A.25) diviene:

$$(III.A.32) \quad c_0 = G(s_0)$$

ovvero, ricordando la (III.A.23):

$$(III.A.33) \quad c_0 = \left[\frac{N(s)}{D_0(s)} \right]_{s=s_0}$$

dove $D_0(s)$ è pari al denominatore $D(s)$ privato del fattore $s - s_0$, relativo al polo considerato, cioè:

$$(III.A.34) \quad D(s) = (s - s_0) D_0(s)$$

Per il calcolo del residuo c_0 è anche possibile utilizzare un'altra espressione al posto della (III.A.33). Infatti derivando la (III.A.34) rispetto ad s , si ha:

$$(III.A.35) \quad D'(s) = D_0(s) + (s - s_0) D'_0(s)$$

Quindi risulta $D'(s) = D_0(s)$ per $s = s_0$. Sostituendo nella formula (III.A.33) tale relazione, si ha:

$$(III.A.36) \quad c_0 = \left(\frac{N(s)}{D'(s)} \right)_{s=s_0}$$

dove $D'(s)$ rappresenta la derivata del polinomio $D(s)$ rispetto alla variabile s .

Il procedimento di sviluppo in frazioni parziali risultante è riassunto in tab.III.A.2.

Tabella III.A.2 - Procedimento di sviluppo in frazioni parziali di una funzione razionale.

Passo	Operazione
1	Individuare i poli al finito della funzione $F(s) = N(s)/D(s)$ con la loro molteplicità
2	Determinare il quoziente $Q(s)$ ed il resto $R(s)$ della divisione tra numeratore e denominatore, cioè: $\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$ Questa operazione è necessaria solo se il grado del numeratore è maggiore od uguale a quello del denominatore.
3	Per ogni radice s_0 di molteplicità r maggiore dell'unità, calcolare la relativa parte singolare PS_0 , con la formula (III.A.27), dove i coefficienti c_i sono dati dalla formula (III.A.25) con $G(s)$ dato dalla formula (III.A.23). I coefficienti c_i sono in generale dei numeri complessi. Nel caso che il polo s_0 sia semplice, calcolare la relativa parte singolare PS_0 con la formula (III.A.31), dove il residuo c_0 (in generale complesso) è dato dalla espressione (III.A.33) ovvero dalla (III.A.36).
4	Lo sviluppo in frazioni parziali della $F(s)$ è uguale a: $F(s) = \sum PS_i + Q(s)$

Osservazione III.A.1.

Notevoli semplificazioni si hanno nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ è a coefficienti reali. In tale caso, essendo il denominatore $D(s)$ un polinomio a coefficienti reali, i poli di $F(s)$ risultano reali ovvero complessi coniugati. È possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.A.4 - «I coefficienti c_i relativi alle parti singolari di una funzione razionale $F(s)$ a coefficienti reali, in corrispondenza a poli complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. In particolare nel caso di poli semplici i residui di una coppia di poli complessi coniugati sono complessi coniugati».

Tale teorema è di grande utilità in quanto permette di effettuare i calcoli indicati al punto 3) del procedimento di sviluppo in frazioni parziali, in corrispondenza ad uno solo dei due poli complessi coniugati, mentre per l'altro polo la parte singolare è immediatamente individuabile.

La presente osservazione ha conseguenze importanti anche per il calcolo della antitrasformata di una funzione razionale a coefficienti reali, come vedremo nell'osservazione III.A.3.

Esempio III.A.2.

Effettuare lo sviluppo in frazioni parziali della seguente funzione razionale:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s+1)^2}$$

Si ha:

$$N(s) = s^2 + 3 ; \quad D(s) = (s+2)(s+1)^2$$

Passo 1. Si hanno i seguenti poli:

$$\begin{array}{ll} s = -2 & \text{molteplicità 1} \\ s = -1 & \text{molteplicità 2} \end{array}$$

Passo 2. Si può omettere questo passo in quanto la funzione in esame è propria.

Passo 3. Calcoliamo la parte singolare PS_{-2} relativa al polo -2. Essendo il polo semplice, si ha:

$$c_0 = \left. \frac{N(s)}{D_0(s)} \right|_{s=-2} = \left. \frac{s^2 + 3}{(s+1)^2} \right|_{s=-2} = 7; \quad PS_{-2} = \frac{7}{s+2}$$

Calcoliamo la parte singolare relativa al polo -1. Essendo il polo doppio si ha:

$$PS_{-1} = \frac{c_0}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1}$$

Dalla formula (III.A.25) si ottiene:

$$c_0 = G(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 4$$

$$c_1 = \frac{dG}{ds} \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2+3}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{2s(s+2) - (s^2+3)}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -6$$

Passo 4. Lo sviluppo in frazioni parziali della funzione assegnata è:

$$F(s) = \frac{s^2+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{7}{s+2} + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1}$$

Esempio III.A.3.

Calcolare lo sviluppo in frazioni parziali della funzione:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

Passo 1. La funzione ha i seguenti poli al finito:

$$\begin{array}{ll} s_1 = -1 + j & \text{molteplicità } r_1 = 1 \\ s_2 = -1 - j & \text{molteplicità } r_2 = 1 \end{array}$$

È opportuno osservare come accanto ad un polo complesso, c'è sempre il complesso coniugato e della stessa molteplicità. Ciò è conseguenza, come è stato detto, della realtà dei coefficienti delle funzioni razionali che si considerano.

Passo 2. La funzione assegnata è impropria, perciò facciamo la divisione tra numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{r|l} s^3 + 2s^2 + 3s + 1 & s^2 + 2s + 2 \\ s^3 + 2s^2 + 2s & s \\ \hline s + 1 & \end{array}$$

Quindi risulta:

$$Q(s) = s \qquad R(s) = s + 1$$

Passo 3. Calcoliamo la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione:

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

nei due poli s_1 ed s_2 . Poiché sono poli semplici basta calcolare il residuo con la formula (III.A.36). A questo scopo determiniamo:

$$\begin{aligned} R(s_1) &= j & R(s_2) &= -j \\ D'(s) &= 2s+2 & D'(s_1) &= 2j & D'(s_2) &= -2j \end{aligned}$$

I residui dei due poli sono quindi uguali ad $1/2$. È opportuno osservare che non è necessario, in generale, effettuare il calcolo del residuo per ambedue i poli di una coppia di poli complessi coniugati. Infatti, sempre per la realtà dei coefficienti delle funzioni razionali che si considerano, i residui di due poli complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati.

Passo 4. Lo sviluppo in frazioni parziali della funzione assegnata è:

$$F(s) = \frac{1/2}{s+1-j} + \frac{1/2}{s+1+j} + s$$

III.A.5 - Antitrasformazione delle funzioni elementari facenti parte dello sviluppo in frazioni parziali.

Come è stato visto in precedenza, mediante lo sviluppo in frazioni parziali è possibile esprimere una funzione razionale come combinazione lineare di alcune funzioni elementari della variabile s , per le quali è possibile effettuare facilmente l'operazione di antitrasformazione. La antitrasformata della funzione razionale di conseguenza risulta uguale alla combinazione lineare delle singole antitrasformate per la proprietà di linearità.

Le antitrasformate che occorrono per tale procedimento sono le seguenti.

a) Antitrasformata della funzione $1/(s+s_0)$ con s_0 costante reale o complessa (eventualmente nulla).

Ricordando la regola di trasformazione riportata nel § III.A.2, si ha dalla (III.A.12):

$$(III.A.37) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+s_0} \right] = e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$$

Nel caso particolare in cui sia $s_0=0$, si ottiene dalla (III.A.37):

$$(III.A.38) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u_{-1}(t)$$

b) Antitrasformata della funzione $1/(s+s_0)^n$ con s_0 costante reale o complessa, eventualmente nulla, ed n intero positivo maggiore od uguale ad uno.

Ricordando la regola di trasformazione (III.A.13) si ottiene:

$$(III.A.39) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+s_0)^n} \right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0 t} u_{-1}(t)$$

Nel caso particolare in cui sia $s_0=0$, si ha dalla (III.A.39):

$$(III.A.40) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u_{-1}(t) = \boxed{u_{-n}(t)}$$

c) Antitrasformata della funzione $F(s)=1$.

In base alla regola di trasformazione (III.A.10) si ottiene:

$$(III.A.41) \quad \mathcal{L}^{-1} [1] = u_0(t)$$

d) Antitrasformata della funzione $F(s)=s^n$ con n intero positivo non nullo.

Le funzioni della variabile s del tipo s^k , $k=1,2,\dots$ costituiscono le trasformate di Laplace delle distribuzioni di Dirac⁽¹⁾. Tali distribuzioni possono essere visualizzate qualitativamente come se fossero coincidenti con un numero di impulsi di ampiezza infinita e larghezza infinitesima, alternativamente positivi e negativi posti nell'origine. In figura III.A.2 si fornisce in forma qualitativa questa idea. Si parla perciò nel caso della distribuzione corrispondente ad s ed indicata con $u_1(t)$ di doppietto unitario, nel caso della distribuzione corrispondente ad s^2 ed indicata con $u_2(t)$ di tripletto unitario, ecc. In conclusione si ha:

(1) - Vedere A.Ghizzetti, L.Marchetti, A.Ossicini, op.cit., § V.4 e V.5.

$$(III.A.42) \quad \mathcal{L}^{-1} [s^n] = u_n(t)$$

Osservazione III.A.2.

È importante osservare che è necessario fare ricorso alle antitrasformate c) (impulso $u_0(t)$) e d) (distribuzioni di Dirac di ordine n), solo nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ è impropria, cioè quando il grado del numeratore è maggiore od uguale a quello del denominatore. È infatti immediato constatare che tali funzioni si ottengono antitrasformando il polinomio $Q(s)$ ottenuto come quoziente della divisione fra il numeratore $N(s)$ ed il denominatore $D(s)$, come risulta dal secondo passo del procedimento di sviluppo in frazioni parziali, riportato in tab.III.A.2.

Osservazione III.A.3.

Nel caso in cui la funzione razionale $F(s)$ da antitrasformare sia a coefficienti reali, come accade nella totalità dei casi considerati nelle applicazioni all'analisi dei circuiti, vi sono importanti conseguenze relativamente alla funzione antitrasformata $f(t)$.

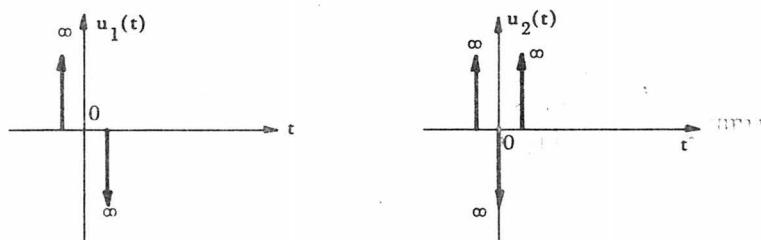


Fig.III.A.2 - Rappresentazione qualitativa delle distribuzioni $u_1(t)$ ed $u_2(t)$.

Come è stato detto nell'osservazione III.A.1, in tale caso i poli di $F(s)$ di tipo complesso danno luogo a termini dello sviluppo in frazioni parziali del tipo seguente:

$$(III.A.43) \quad W(s) = \frac{c}{(s + s_0)^n} + \frac{c^*}{(s + s_0^*)^n}$$

Effettuando l'antitrasformata secondo la formula (III.A.39), si ottiene:

$$(III.A.44) \quad w(t) = \mathcal{L}^{-1} [W(s)] = c \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + s_0)^n} \right] + c^* \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + s_0^*)^n} \right] =$$

$$= \frac{c}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0 t} u_{-1}(t) + \frac{c^*}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-s_0^* t} u_{-1}(t)$$

Poiché le quantità c , c^* , s_0 , s_0^* sono complesse, potrebbe apparire complessa anche l'antitrasformata $w(t)$. Tuttavia si può osservare che $w(t)$ è espressa come la somma di due quantità che risultano complesse coniugate per ogni t ; essa perciò è reale. Infatti si ha dalla (III.A.44):

$$(III.A.45) \quad w(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ c e^{-s_0 t} + c^* e^{-s_0^* t} \right\} u_{-1}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 2 \operatorname{Re} [c e^{-s_0 t}] u_{-1}(t)$$

dove $\operatorname{Re} [\dots]$ indica l'operatore parte reale. Detto quindi:

$$(III.A.46) \quad c = |c| e^{j\varphi}$$

$$(III.A.47) \quad s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$

si ha:

$$(III.A.48) \quad w(t) = \frac{2 t^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{Re} [|c| e^{j\varphi} e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)t}] u_{-1}(t) = \frac{2 |c| t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\sigma_0 t} \operatorname{Re} [e^{-j\omega_0 t + j\varphi}] u_{-1}(t) =$$

$$= 2 |c| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t - \varphi) u_{-1}(t)$$

Da quest'ultima espressione appare esplicitamente il carattere reale della funzione $w(t)$. Quanto detto vale per qualsiasi valore di n ; in particolare per $n=1$. Perciò si può affermare in generale che l'antitrasformata di una funzione razionale a coefficienti reali è una funzione reale del tempo.

Esempio III.A.4.

Effettuare l'antitrasformata della funzione razionale reale:

$$F(s) = \frac{(s^2 + 3)}{(s+2)(s+1)^2}$$

considerata nell'esempio III.A.2.

Nell'esempio III.A.2 è stato ottenuto il seguente sviluppo in frazioni parziali:

$$F(s) = \frac{7}{s+2} + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{6}{s+1}$$

Effettuando l'antitrasformata di questo sviluppo si ottiene:

$$f(t) = \{7 e^{-2t} + 4t e^{-t} - 6 e^{-t}\} u_{-1}(t) \quad .$$

Esempio III.A.5.

Effettuare l'antitrasformata della funzione razionale reale:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

considerata nell'esempio III.A.3.

Nell'esempio III.A.3 è stato ottenuto il seguente sviluppo in frazioni parziali:

$$F(s) = s + \frac{\frac{1}{2}}{s+1-j} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1+j}$$

Effettuando l'antitrasformata di questo sviluppo, si ottiene:

$$f(t) = u_1(t) + \frac{1}{2} \{ e^{(-1+j)t} + e^{(-1-j)t} \} u_{-1}(t)$$

D'altra parte si ha:

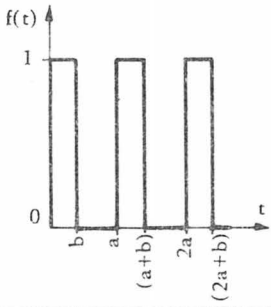
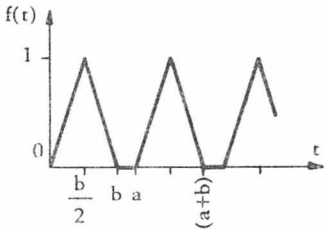
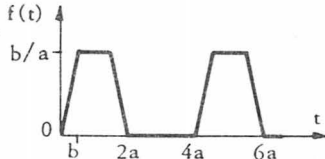
$$e^{(-1+j)t} = e^{-t} (\cos t + j \sin t) ; \quad e^{(-1-j)t} = e^{-t} (\cos t - j \sin t)$$

da cui si ricava:

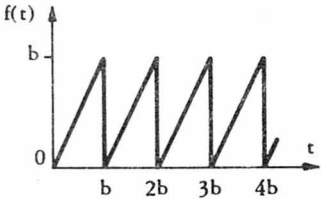
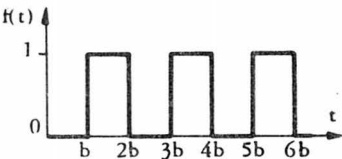
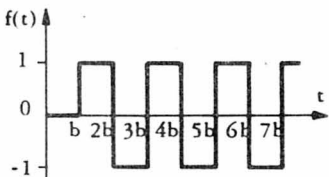
$$f(t) = u_1(t) + e^{-t} \cos t u_{-1}(t)$$

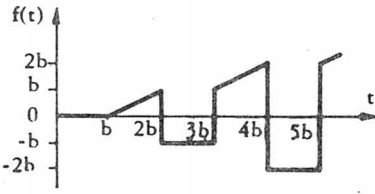
Lo stesso risultato si ottiene usando le (III.A.46) e (III.A.48). Infatti risulta $n=1$, $|c|=1/2$, $\varphi=0$, $\sigma_0=1$, $\omega_0=1$.

Tabella III.A.1 - Trasformate di Laplace (le funzioni del tempo sono definite per $t \geq 0$).

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$1 \quad na < t < na + b$ $0 \quad na + b < t < (n+1)a$ 	$\frac{1 - e^{-bs}}{s(1 - e^{-as})}$	$\frac{n = 0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
$\frac{2(t-na)}{b} \quad na < t < na + \frac{b}{2}$ $\frac{2(b+na-t)}{b} \quad na + \frac{b}{2} < t < na + b$ $0 \quad na + b < t < (n+1)a$ 	$\frac{2(1 - e^{-\frac{bs}{2}})^2}{bs^2(1 - e^{-as})}$	$\frac{n = 0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
$\frac{t-4na}{a} \quad 4na < t < 4na + b$ $\frac{b}{a} \quad 4na + b < t < (4n+2)a - b$ $\frac{(4n+2)a-t}{a} \quad (4n+2)a - b < t < (4n+2)a$ $0 \quad (4n+2)a < t < (4n+4)a$ 	$\frac{(1 - e^{-bs})[1 - e^{-(2\frac{b}{a})as}]}{as^2(1 - e^{-4as})}$	$\frac{n = 0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$t-nb \quad nb < t < (n+1)b$ 	$\frac{1}{s^2} - \frac{b}{2s} \left[\coth \frac{bs}{2} - 1 \right]$ $= \frac{e^{bs} - bs - 1}{s^2(e^{bs} - 1)}$	$\frac{n=0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
$0 \quad 2nb < t < (2n+1)b$ $1 \quad (2n+1)b < t < (2n+2)b$ 	$\frac{1}{s(1+e^{bs})}$	$\frac{n=0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
$0 \quad 0 < t < b$ $1 \quad (2n+1)b < t < (2n+2)b$ $-1 \quad (2n+2)b < t < (2n+3)b$ 	$\frac{1-e^{-bs}}{s(1+e^{bs})}$	$\frac{n=0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
(segue)		

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$\frac{1}{4} [1 - (-1)^n] (2t - b) - \frac{1}{2} bn$ $nb < t < (n+1)b$ 	$\frac{1}{s^2(e^{bs} + 1)}$	$\frac{n = 0, 1, 2, \dots}{\operatorname{Re} s > 0}$
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} a)$
$\frac{a}{a} + \left(1 - \frac{a}{a}\right) e^{-at}$	$\frac{s+a}{s(s+a)}$	$\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} a)$
$\frac{1}{a\beta} + \frac{\beta e^{-at} - a e^{-\beta t}}{a\beta(a-\beta)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+\beta)}$	$\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} \beta)$
$\frac{a}{a\beta} + \frac{a-a}{a(a-\beta)} e^{-at} + \frac{a-\beta}{\beta(a-\beta)} e^{-\beta t}$	$\frac{s+a}{s(s+a)(s+\beta)}$	$\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} \beta)$
$\frac{b}{a\beta} + \frac{a^2 - a\alpha + b}{a(a-\beta)} e^{-at} - \frac{\beta^2 - a\beta + b}{\beta(a-\beta)} e^{-\beta t}$	$\frac{s^2 + as + b}{s(s+a)(s+\beta)}$	$\operatorname{Re} s > \max(0, -\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} \beta)$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$t + \frac{at^2}{2}$	$\frac{s+a}{s^3}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$1 + at + \frac{bt^2}{2}$	$\frac{s^2 + as + b}{s^3}$	$\operatorname{Re} s > 0$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$\frac{1}{a^3} (1 - e^{-at}) - \frac{t}{a^2} + \frac{t^2}{2a}$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\operatorname{Re} s > (\max 0, -\operatorname{Re} a)$
$\frac{a-a}{a^2} t + \frac{a}{2a} t^2 - \frac{a-a}{a^3} (1 - e^{-at})$	$\frac{s+a}{s^3(s+a)}$	$\operatorname{Re} s > (\max 0, -\operatorname{Re} a)$
$\frac{aa-b}{a^2} t + \frac{b}{2a} t^2 + \frac{a^2 - a + b}{a^3} (1 - e^{-at})$	$\frac{s^2 + as + b}{s^3(s+a)}$	$\operatorname{Re} s > (\max 0, -\operatorname{Re} a)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a $
$\cosh(at) + \frac{a}{a} \sinh(at)$	$\frac{s+a}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a $
$\frac{at \cosh(at) - \sinh(at)}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a $
$\frac{(a^2 t - a) \sinh(at) + a at \cosh(at)}{2a^3}$	$\frac{s+a}{(s^2 - a^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a $
$\frac{(a^2 at + a^2 - b) \sinh(at) + (a^2 + b) at \cosh(at)}{2a^3}$	$\frac{s^2 + as + b}{(s^2 - a^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a $
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \beta $
$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta - \operatorname{Re} a$

(segue)

$f(t)$	$F(s)$	Ascissa di convergenza
$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta - \operatorname{Re} a$
$\frac{[(c-a)^2 + \beta^2]^{1/2}}{\beta} e^{-at} \sin(\beta t + \phi), \phi = \tan^{-1} \frac{\beta}{c-a}$	$\frac{s+c}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta - \operatorname{Re} a$
$\frac{1}{\beta^4} (\cos^3 t - 1) + \frac{1}{2\beta^2} t^2$	$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)s^3}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{\beta^4} (\cosh \beta t - 1) - \frac{1}{2\beta^2} t^2$	$\frac{1}{(s^2 - \beta^2)s^3}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \beta $
$\frac{1}{2\beta} t \sin \beta t$	$\frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$	$\frac{\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$t \cos \beta t$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $
$\frac{1}{\beta^4} (1 - \cos \beta t) - \frac{1}{2\beta^3} t \sin \beta t$	$\frac{1}{s(s^2 + \beta^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \beta $

APPENDICE III.B - Programma TEMPO.

Nella presente appendice viene riportata la lista in FORTRAN del programma TEMPO, che permette di analizzare un circuito con memoria costituito da resistori, induttori, condensatori, generatori indipendenti dei due tipi, generatori di corrente controllati in tensione e nullori. Tale programma utilizza il metodo alle differenze finite ed in particolare l'algoritmo trapezoidale descritto nel §III.5; esso rappresenta la traduzione fedele del metodo di analisi automatica il cui schema a blocchi è stato riportato nel §III.6.

Il programma TEMPO utilizza le subroutine NODI1 e GAUSS, per la cui descrizione si rimanda all'appendice II.B del capitolo secondo. Di seguito verrà precisato: 1) il modo in cui debbono essere presentati al calcolatore i dati che descrivono il circuito; 2) le stampe di uscita.

Nell'appendice III.D verranno riportati vari esempi di applicazione del programma TEMPO; in particolare per ogni esempio verranno mostrate le schede di ingresso dei dati e le stampe di uscita.

III.B.1 - Dati di ingresso⁽¹⁾.

Le schede che formano l'ingresso di ogni problema che si vuole risolvere con il programma TEMPO sono nell'ordine:

a) Una scheda dati nella quale vengono assegnate nell'ordine le seguenti quantità, che descrivono il circuito da analizzare:

- il numero dei nodi ND;
- il numero dei resistori NR;
- il numero degli induttori NL;
- il numero dei condensatori NQ;
- il numero dei generatori indipendenti di corrente NC;
- il numero dei generatori indipendenti di tensione NT;
- il numero dei generatori di corrente controllati in tensione NCT;
- il numero dei nullori NN.

Il formato di ingresso è il seguente: 6I3.

(1) - Per maggior chiarezza nella lettura del presente paragrafo si consiglia di esaminare contemporaneamente uno degli esempi riportati nell'appendice III.D.

b) Una scheda dati per ogni resistore, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della resistenza;
- il primo nodo a cui il resistore è connesso;
- il secondo nodo a cui il resistore è connesso.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

c) Una scheda dati per ogni induttore, nella quale viene indicato, nello ordine:

- il valore dell'induttanza;
- il primo nodo a cui l'induttore è connesso;
- il secondo nodo a cui l'induttore è connesso;
- il valore della corrente iniziale nell'induttore.

Il formato d'ingresso è il seguente: D10.3, 2I3, D10.3.

d) Una scheda dati per ogni condensatore, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della capacità;
- il primo nodo a cui è connesso il condensatore;
- il secondo nodo a cui è connesso il condensatore;
- il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore;

Il formato di ingresso è il seguente: D10.3, 2I3, D10.3.

e) Una scheda dati per ogni generatore indipendente di corrente, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della corrente impressa all'istante iniziale;
- il nodo in cui entra la corrente impressa;
- il nodo da cui esce la corrente impressa.

Il formato di ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

f) Una scheda dati per ogni generatore indipendente di tensione, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della tensione impressa all'istante iniziale;
- il nodo corrispondente al morsetto positivo;
- il nodo corrispondente al morsetto negativo;

Il formato di ingresso è il seguente: D10.3, 2I3.

g) Una scheda dati per ogni generatore di corrente controllato in tensione, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il valore della conduttanza di trasferimento;
- il nodo corrispondente al morsetto positivo della tensione di controllo;
- il nodo corrispondente al morsetto negativo della tensione di controllo;
- il nodo da cui esce la corrente del generatore;
- il nodo in cui entra la corrente del generatore.

Il formato di ingresso è il seguente: D10.3, 4I3.

h) una scheda dati per ogni nullore, nella quale viene indicato, nell'ordine:

- il primo nodo a cui è connesso il nullatore;
- il secondo nodo a cui è connesso il nullatore;
- il primo nodo a cui è connesso il noratore;
- il secondo nodo a cui è connesso il noratore.

Il formato di ingresso è il seguente: 4I3.

Una o più regioni relative ai dati di ingresso, indicate nelle sezioni b), c), d), e), f) g), h) possono essere omesse, qualora non sia presente alcun componente del tipo previsto nella relativa sezione.

Oltre alle schede dati descritte in precedenza, occorre fornire al calcolatore altre schede riguardanti quello che interessa ottenere come uscita. Tali schede sono nell'ordine:

i) Una scheda dati nella quale è indicato il numero delle tensioni dei vari nodi, rispetto al nodo di riferimento, delle quali interessa la stampa.

Il formato di ingresso è il seguente: I3.

l) Una scheda dati nella quale sono indicati tutti i nodi dei quali interessa la stampa della tensione.

Il formato di ingresso è il seguente: 10I3.

m) Una scheda dati nella quale è indicato nell'ordine:

- il numero degli istanti di tempo, successivi all'istante iniziale, per i quali interessa conoscere il comportamento del circuito;
- il valore dell'intervallo di campionamento.

Il formato di ingresso è il seguente: I3, D10.3.

Osservazione III.B.1.

Il programma TEMPO prevede l'utilizzazione di un'ulteriore subroutine, chiamata M23. Tale subroutine ha la stessa funzione del blocco M23 dello schema a blocchi discusso nel § III.6; essa va utilizzata allo scopo di assegnare i previsti andamenti nel tempo ai generatori indipendenti presenti nel circuito. A tale proposito si può osservare che in un circuito possiamo avere generatori aventi una grandezza impressa di valore sia costante nel tempo sia variabile.

Nel primo caso il valore costante viene assegnato con le schede di ingresso delle sezioni e) ed f) descritte nel § III.B.1; in questo caso la subroutine M23 non deve intervenire sul valore delle grandezze impresse, confermando così i valori iniziali. Nel secondo caso la subroutine ha lo scopo di generare le previste forme d'onda per tutti gli istanti successivi a quello iniziale, per il quale i valori sono ancora assegnati tramite le schede di ingresso delle sezioni e) ed f).

III.B.2 - Dati di uscita.

Prima di presentare i dati relativi alla soluzione del problema dell'analisi del circuito, vengono stampati, a scopo di controllo, i dati di ingresso relativi al circuito stesso. Le stampe, successive a queste di controllo, riguardano la soluzione e sono rappresentate da tante righe quanti sono gli istanti di campionamento. Ciascuna riga contiene nell'ordine le seguenti quantità:

- un numero d'ordine;
- il valore della variabile tempo;
- i valori delle tensioni richieste dei vari nodi rispetto al nodo di riferimento.

Osservazione III.B.2.

Il programma TEMPO è stato elaborato tenendo conto principalmente delle sue finalità didattiche. Ciò lo rende quindi inadatto ad affrontare l'analisi dei circuiti, che richiedono per la loro soluzione sistemi malcondizionati. In particolare si fa notare la semplicità della subroutine GAUSS usata per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari.

III.B.3 - Lista del programma.

```

1      C      PROGRAMMA TEMPO
2      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
3      DIMENSION A(60,60),B(60)
4      DIMENSION R(100),N1(100),N2(100)
5      DIMENSION C(50),NC1(50),NC2(50)
6      DIMENSION T(10),NT1(10),NT2(10)
7      DIMENSION ZL(20),CL(20),NL1(20),NL2(20)
8      DIMENSION ZQ(20),TQ(20),NQ1(20),NQ2(20)
9      DIMENSION CT(20),NCT1(20),NCT2(20),NCT3(20),NCT4(20)
10     DIMENSION NN1(20),NN2(20),NN3(20),NN4(20)
11     DIMENSION CI(50),TI(50),AC(50,50),AT(50,50),JU(10),BU(10)
12
13     C
14     C
15     C
16     READ(5,1)ND,NR,NL,NQ,NC,NT,NCT,NN
17     1  FORMAT(8I3)
18     WRITE(6,2)ND,NR,NL,NQ,NC,NT,NCT,NN
19     2  FORMAT(1H0,5X,'CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI=',I3/
20     *6X,'NUMERO RESISTORI=',I3/
21     *6X,'NUMERO INDUTTORI =',I3/
22     *6X,'NUMERO CONDENSATORI =',I3/
23     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE=',I3/
24     *6X,'NUMERO GENERATORI DI TENSIONE=',I3/
25     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.=',I3/
26     *6X,'NUMERO NULLORI=',I3//)
27     IF(NR)11,11,12
28     12 READ(5,3)(R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
29     3  FORMAT (D10.3,2I3)
30     WRITE(6,4)(L,R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
31     4  FORMAT(1X,'RES.N.',I3,D12.3,2I4)
32     11 CONTINUE
33     IF(NL)23,23,24
34     24 READ(5,21)(ZL(L),NL1(L),NL2(L),CL(L),L=1,NL)
35     21 FORMAT(D10.3,2I3,D10.3)
36     WRITE(6,22)(L,ZL(L),NL1(L),NL2(L),CL(L),L=1,NL)
37     22 FORMAT(1X,'IND.N.',I3,D12.3,2I4,2X,'CORR.IN.=',D12.3)
38     23 CONTINUE
39     IF(NQ)25,25,26
40     26 READ(5,21)(ZQ(L),NQ1(L),NQ2(L),TQ(L),L=1,NQ)
41     WRITE(6,27)(L,ZQ(L),NQ1(L),NQ2(L),TQ(L),L=1,NQ)
42     27 FORMAT(1X,'COND.N.',I3,D12.3,2I4,2X,'TENS.IN.=',D12.3)
43     25 CONTINUE
44     IF(NC)13,13,14
45     14 READ(5,3)(CI(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
46     WRITE(6,5)(L,CI(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
47     5  FORMAT(1X,'G.CORR.N.',I3,D12.3,2I4)
48     13 CONTINUE
49     IF(NT)15,15,16
50     16 READ(5,3)(TI(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
51     WRITE(6,6)(L,TI(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
52     6  FORMAT(1X,'GEN.TENSIONE: N.',I3,D12.3,2I4)
53     15 CONTINUE
54     IF(NCT)17,17,18
55     18 READ(5,7)(CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
56     7  FORMAT(D10.3,4I3)
57     WRITE(6,8)(L,CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
58     8  FORMAT(1X,'GEN.CONTR.TENS.N.',I3,D12.3,4I3)
59     17 CONTINUE
60     IF(NN)20,20,19
61     19 READ(5,9)(NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
62     9  FORMAT(4I3)
63     WRITE(6,10)(L,NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
64     20 CONTINUE
65     10 FORMAT(1X,'NULLORE N:',I3,2X,4I3)
66     N=ND-1
67     NA=N+NT
68     NB=NA+NN
69
70     C
71     C

```



```

71      C      INGRESSO DATI RELATIVI ALLA RISPOSTA
72      READ(5,301)NU
73      301  FORMAT(10I3)
74      READ(5,301)(JU(L),L=1,NU)
75      READ(5,302)NTOT,D
76      302  FORMAT(I3,D10.3)
77      WRITE(6,305)NTOT,D
78      305  FORMAT(IH0,5X,'SIMULAZIONE, N.ISTANTI =',I4/
79      *6X,'INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO =',D12.3)
80      WRITE(6,307)ND,(JU(L),L=1,NU)
81      307  FORMAT(IH0,5X,'TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO',I4/
82      *6X,5HTEMPO,3X,'NODI : ',10(I2,8X))
83
84      C
85      C
86      C      MODIFICA DELLA TOPOLOGIA DEL CIRCUITO
87      NRI=NR
88      NCI=NC
89      IF(NL)320,320,321
90      321  DO322K=1,NL
91      NR=NR+1
92      R(NR)=2.00*ZL(K)/D
93      N1(NR)=NL1(K)
94      N2(NR)=NL2(K)
95      NC=NC+1
96      CI(NC)=CL(K)
97      NC1(NC)=NL2(K)
98      NC2(NC)=NL1(K)
99      322  CONTINUE
100     320  IF(NQ)324,324,325
101     325  DO326K=1,NQ
102     NR=NR+1
103     R(NR)=D/(2.00*ZQ(K)).
104     N1(NR)=NQ1(K)
105     N2(NR)=NQ2(K)
106     NC=NC+1
107     CI(NC)=TQ(K)/R(NR)
108     NC1(NC)=NQ1(K)
109     NC2(NC)=NQ2(K)
110     326  CONTINUE
111     324  CONTINUE
112
113     C
114     C
115     C      DETERMINAZIONE DELLE MATRICI AC E AT
116     IF(NC)330,330,331
117     331  DO332L=1,NC
118     332  C(L)=0.00
119     330  IF(NT)333,333,334
120     334  DO335L=1,NT
121     335  T(L)=0.00
122     333  CONTINUE
123     IF(NC)340,340,341
124     341  K=1
125     C(K)=1.00
126     344  CONTINUE
127
128     C
129     CALL NODI1(A,B,N,NA,NB,ND,R,N1,N2,NR,CT,NCT1,NCT2,NCT3,
130     *      NCT4,NCT,T,NT1,NT2,NT,C,NC1,NC2,NC,NN1,NN2,
131     *      NN3,NN4,NN)
132
133     C
134     DO347L=1,NB
135     347  AC(L,K)=B(L)
136     C(K)=0.00
137     IF(K=NC)348,340,340
138     348  K=K+1
139     C(K)=1.00
140     GOTO344
141     340  CONTINUE
142     IF(NT)350,350,351
143     351  K=1
144     T(K)=1.00
145     345  CONTINUE

```

```

142 C
143 CALL NODI1(A,B,N,NA,NB,ND,R,N1,N2,NR,CT,NCT1,NCT2,NCT3,
144 * NCT4,NCT,T,NT1,NT2,NT,C,NC1,NC2,NC,NN1,NN2,
145 * NN3,NN4,NN)
146 C
147 D0353L=1,NB
148 353 AT(L,K)=B(L)
149 T(K)=0.00
150 IF(K-NT)354,350,350
151 354 K=K+1
152 T(K)=1.00
153 GOTO345
154 350 CONTINUE
155 C
156 C
157 C SIMULAZIONE
158 NTEMPO=0
159 360 CONTINUE
160 TEMPO=DFLOAT(NTEMPO)*D
161 C
162 C ANALISI MEDIANTE L'ESPRESSIONE ESPLICITA
163 D0370K=1,NB
164 B(K)=0.00
165 IF(NC)372,372,373
166 373 D0374L=1,NC
167 374 B(K)=B(K)+AC(K,L)*CI(L)
168 372 IF(NT)375,375,376
169 376 D0377L=1,NT
170 377 B(K)=B(K)+AT(K,L)*TI(L)
171 375 CONTINUE
172 370 CONTINUE
173 C
174 C
175 C STAMPA DEI RISULTATI ALL'ISTANTE NTEMPO
176 D0380L=1,NU
177 J=JU(L)
178 380 BU(L)=B(J)
179 WRITE(6,381)NTEMPO,TEMPO,(BU(L),L=1,NU)
180 381 FORMAT(1X,I3,D10.3,1X,10D10.3)
181 C
182 C
183 C VERIFICA FINE CICLO
184 IF(NTEMPO-NTOT)362,362,364
185 364 STOP
186 362 NTEMPO=NTEMPO+1
187 C
188 C
189 C MODIFICA DEI VALORI DEI GENERATORI
190 IF(NL)385,385,386
191 386 D0387K=1,NL
192 K1=NL1(K)
193 K2=NL2(K)
194 IF(K1-ND)388,389,388
195 389 VK=-B(K2)
196 GOTO392
197 388 IF(K2-ND)390,391,390
198 391 VK=B(K1)
199 GOTO392
200 390 VK=B(K1)-B(K2)
201 392 CONTINUE
202 K3=NR1+K
203 RK=R(K3)
204 K4=NCI+K
205 CK=VK/RK+CI(K4)
206 CI(K4)=CK+VK/RK
207 387 CONTINUE
208 385 CONTINUE
209 IF(NQ)393,393,394
210 394 D0400K=1,NQ
211 K1=NQ1(K)
212 K2=NQ2(K)

```

```

213      IF (K1-ND) 395, 396, 395
214      396 VK=-B(K2)
215      GOTO 399
216      395 IF (K2-ND) 397, 398, 397
217      398 VK=B(K1)
218      GOTO 399
219      397 VK=B(K1)-B(K2)
220      399 CONTINUE
221      K3=NRI+NL+K
222      RK=R(K3)
223      K4=NCI+NL+K
224      CK=VK/RK-CI(K4)
225      CI(K4)=CK+VK/RK
226      400 CONTINUE
227      393 CONTINUE
228      C
229      C
230      C VALORI MODIFICATI DEI GENERATORI INDIPENDENTI
231      CALL M23(INC,CI,NT,TI,NTEMPO,D)
232      C
233      C
234      GOTO 360
235      C
236      C
237      END

```

III.C - Esempi di applicazione del metodo della trasformata di Laplace.

Esempio III.C.1.

Dato il circuito di fig.III.C.1 determinare la tensione $v_2(t)$

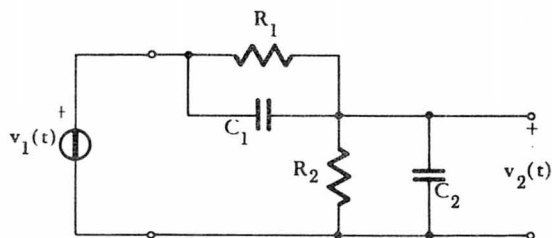
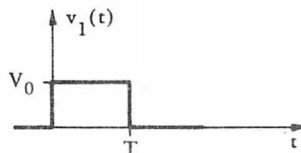


Fig.III.C.1 - Circuito considerato nell'esempio III.C.1.

supponendo che la tensione $v_1(t)$ abbia l'andamento indicato in fig.III.C.2. Si considerino nulle le condizioni iniziali all'istante $t=0$.

Seguendo il procedimento simbolico di analisi nel dominio di Laplace indicato in tabella III.4.1, trasformiamo il circuito di fig.III.C.1 nel dominio di s .

Fig.III.C.2 - Andamento della tensione del generatore $v_1(t)$.



La funzione di eccitazione $v_1(t)$ può essere espressa come segue:

$$v_1(t) = V_0 [u_{-1}(t) - u_{-1}(t - T)]$$

Perciò la trasformata $V_1(s)$, applicando la proprietà I (linearità) e la proprietà IV (traslazione nel tempo), risulta pari a:

$$V_1(s) = V_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts})$$

Il circuito trasformato nel dominio di Laplace è quindi quello indicato in figura III.C.3, tenendo conto del fatto che le condizioni iniziali sono nulle.

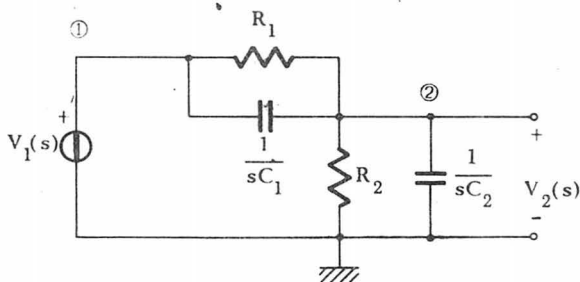


Fig.III.C.3 - Circuito trasformato nel dominio di Laplace.

Risolviamo il circuito mediante il metodo dei nodi, al fine di determinare la tensione incognita $V_2(s)$. Risulta sufficiente scrivere la seguente equazione di equilibrio al nodo 2:

$$V_2(s) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 + sC_2 \right) - \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) V_1(s) = 0$$

da cui si ottiene, tenendo conto del valore di $V_1(s)$:

$$V_2(s) = \frac{R_2 (s C_1 R_1 + 1)}{(R_1 + R_2) \left[(C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} s + 1 \right]} \cdot (1 - e^{-Ts}) V_0 =$$

$$= F(s) \cdot (1 - e^{-Ts}) V_0$$

Effettuando lo sviluppo in frazioni parziali di $F(s)$, si ottiene:

$$F(s) = \frac{R_2 (s C_1 R_1 + 1)}{(R_1 + R_2) \left[(C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} s + 1 \right]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha}$$

con:

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{R_1 R_2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\alpha} [F(s) \cdot (s + \alpha)] = \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

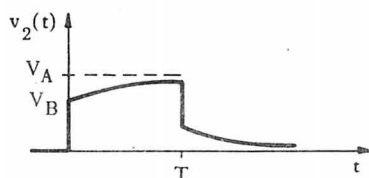
Perciò la tensione $V_2(s)$ si può esprimere nel modo seguente:

$$V_2(s) = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha} \right) (1 - e^{-Ts}) V_0$$

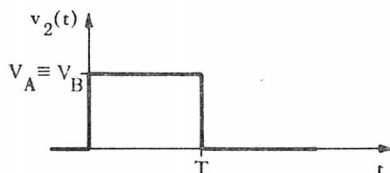
Antitrasformando quest'ultima espressione si ottiene:

$$v_2(t) = V_0 (A + B e^{-\alpha t}) u_{-1}(t) - V_0 [A + B e^{-\alpha(t-T)}] u_{-1}(t - T)$$

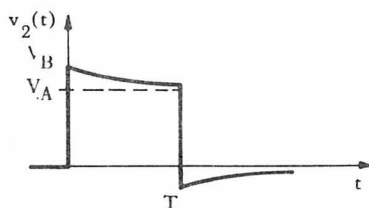
I possibili andamenti della tensione $v_2(t)$ sono riportati nelle figg. III.C.4 a, b, e c, nei tre casi $B < 0$, $B = 0$, $B > 0$.



a)



b)



c)

Fig.III.C.4 - Possibili andamenti della tensione $v_2(t)$:caso a) in cui $B < 0$;caso b) in cui $B = 0$ (partitore RC compensato);caso c) in cui $B > 0$.

In tutti e tre i casi si ha:

$$V_A = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad V_B = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Esempio III.C.2.

Dato il circuito di fig.III.C.5, determinare la tensione $v_2(t)$, supponendo che la tensione $v_1(t)$ abbia l'andamento indicato in fig.III.C.6 e che la tensione iniziale del condensatore sia V_0 .

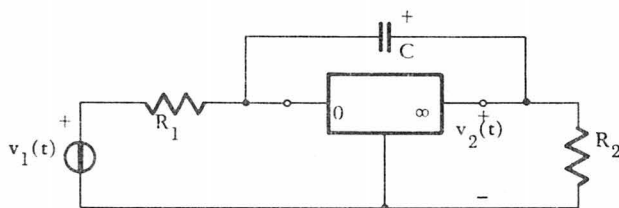
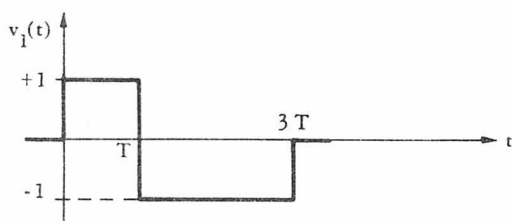


Fig.III.C.5 - Circuito considerato nell'esempio III.C.2.

Fig.III.C.6 - Andamento della tensione $v_1(t)$.

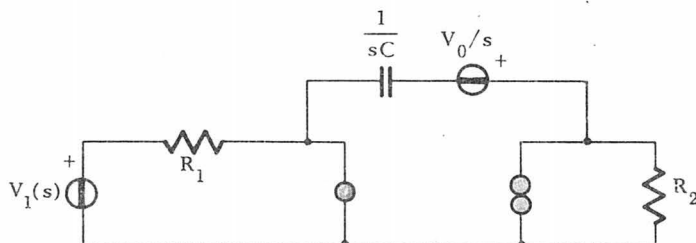
La funzione di eccitazione può essere espressa come segue:

$$v_1(t) = [u_{-1}(t) - 2 u_{-1}(t-T) + u_{-1}(t-3T)]$$

Trasformando la tensione $v_1(t)$ si ha:

$$V_1(s) = \frac{1}{s} [1 - 2 e^{-Ts} + e^{-3Ts}]$$

Il circuito trasformato nel dominio di Laplace è riportato in fig.III.C.7; utilizzando per il condensatore lo schema indicato in tabella III.3.2.

Fig.III.C.7 - Circuito trasformato nel dominio di s , ottenuto da quello di fig.III.C.5.

Scriviamo per il circuito di fig.III.C.7 il sistema risolvete su base maglie, scegliendo le tre maglie indicate in fig.III.C.8 e sostituendo al nullatore un corto-circuito ed al noratore un generatore di tensione.

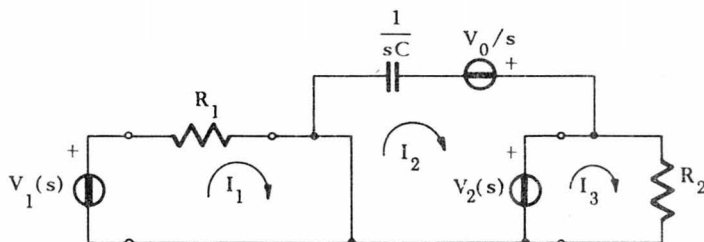


Fig.III.C.8 - Scelta delle maglie per l'analisi del circuito di fig.III.C.7.

Si ottiene il seguente sistema di equazioni su base maglie:

$$\begin{cases} I_1(s) \cdot R_1 = V_1(s) \\ I_2(s) \cdot \frac{1}{sC} = \frac{V_0}{s} - V_2(s) \\ I_3(s) \cdot R_2 = V_2(s) \end{cases}$$

A queste equazioni va aggiunta quella del vincolo imposto dal nullatore presente, cioè:

$$I_1(s) - I_2(s) = 0$$

Eliminando dalle equazioni precedenti $I_1(s)$ ed $I_2(s)$, si ha:

$$V_1(s) \cdot \frac{1}{s R_1 C} = \frac{V_0}{s} - V_2(s)$$

e quindi, tenendo conto dell'espressione ricavata per $V_1(s)$:

$$V_2(s) = -\frac{1}{s^2 R_1 C} [1 - 2e^{-Ts} + e^{-3Ts}] + \frac{V_0}{s}$$

L'antitrasformata di $V_2(s)$ è la seguente in base alla (III.A.40):

$$v_2(t) = -\frac{1}{R_1 C} [u_{-2}(t) - 2u_{-2}(t-T) + u_{-2}(t-3T)] + V_0 u_{-1}(t)$$

il cui andamento è riportato in fig.III.C.9 per i valori:

$$R_1 = 1 \Omega, \quad C = 1 F, \quad V_0 = 1 V \quad e \quad T = 1 \text{ sec}.$$

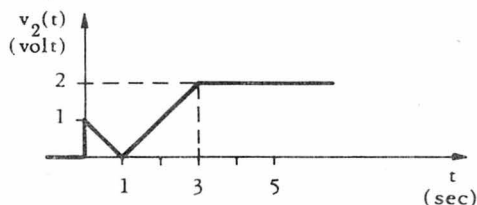


Fig.III.C.9 - Andamento della tensione $v_2(t)$ ottenuta nell'esempio III.C.2.

Esempio III.C.3.

Dato il circuito di fig.III.C.10, nel quale si considerino nulle le condizioni iniziali e costante ed uguale a 2 volt la tensione di eccitazione, si determinino gli andamenti nel tempo delle correnti nei due induttori e l'energia dissipata nel resistore nello intervallo di tempo $0 \div 1 \text{ sec}$.

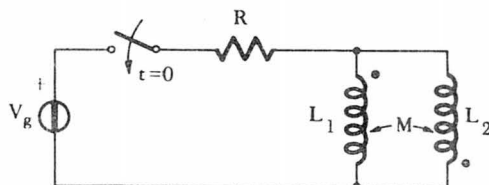


Fig.III.C.10 - Circuito considerato nell'esempio III.C.3. I valori dei componenti sono: $V_g = 2$, $L_1 = 2$, $L_2 = 1$, $M = 1$, $R = 2$ (V, H, Ω).

Effettuando la trasformazione del circuito assegnato, si ottiene il circuito fittizio nel dominio di s , riportato in fig.III.C.11.

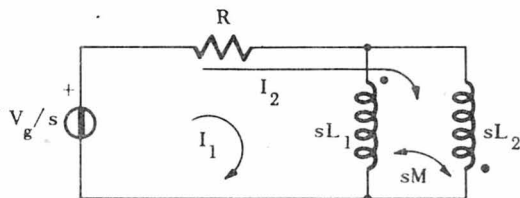


Fig.III.C.11 - Circuito trasformato nel dominio di s ottenuto da quello di figura III.C.10.

Per l'analisi del circuito di fig.III.C.11, applichiamo il metodo delle maglie, modificato opportunamente per la presenza della mutua induzione corrispondente al termine sM . Scegliamo come variabili ausiliarie le correnti di maglia $I_1(s)$ e $I_2(s)$, indicate in fig.III.C.11. Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\text{Maglia 1} \quad (R + sL_1) I_1 + (R - sM) I_2 = V_g / s$$

$$\text{Maglia 2} \quad (R - sM) I_1 + (R + sL_2) I_2 = V_g / s$$

Si può notare che la presenza del termine sM dà luogo ad un'ulteriore interazione tra le correnti di maglia. Infatti nell'equazione relativa alla maglia 1 è presente il termine $-sMI_2$, coincidente con la tensione provocata in tale maglia dalla corrente I_2 , che circola nell'altra maglia, attraverso la mutua induzione (il segno negativo è dovuto al fatto che i versi convenzionali delle due correnti di maglia sono disposti in modo opposto rispetto ai segni di riferimento degli induttori). Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\begin{cases} (2 + 2s) I_1 + (2 - s) I_2 = \frac{2}{s} \\ (2 - s) I_1 + (2 + s) I_2 = \frac{2}{s} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema si ottiene:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{s} & 2-s \\ \frac{2}{s} & 2+s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2s & 2-s \\ 2-s & 2+s \end{vmatrix}} = \frac{4}{s^2 + 10s}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2+2s & \frac{2}{s} \\ 2-s & \frac{2}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2s & 2-s \\ 2-s & 2+s \end{vmatrix}} = \frac{6}{s^2 + 10s}$$

Sviluppando in frazioni parziali, si ottiene:

$$I_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} ; \quad A = \left. \frac{4}{s+10} \right|_{s=-10} = -\frac{4}{10} ; \quad B = \left. \frac{4}{s} \right|_{s=0} = \frac{4}{10}$$

Antitrasformando $I_1(s)$, si ha:

$$i_1(t) = \frac{4}{10} (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

Analogamente, si ottiene:

$$i_2(t) = \frac{6}{10} (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

Gli andamenti delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono mostrati nella fig.III.C.12.

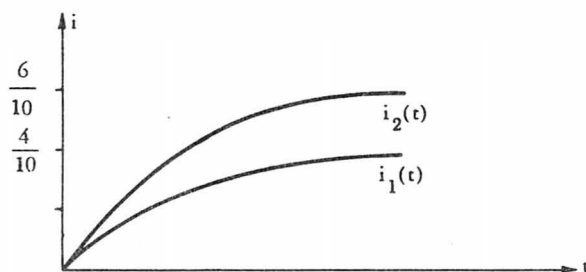


Fig.III.C.12 - Andamenti delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nell'esempio III.C.3.

Per calcolare l'energia dissipata nel resistore, occorre determinare la corrente che lo percorre. Dalla fig.III.C.11 e dalle espressioni di $i_1(t)$ ed $i_2(t)$ ricavate in precedenza, si ha:

$$i_R(t) = i_1(t) + i_2(t) = (1 - e^{-10t}) u_{-1}(t)$$

L'energia dissipata nell'intervallo $0 \div 1$ sec vale:

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= \int_0^1 R i_R^2(t) dt = \int_0^1 2 \cdot (1 - e^{-10t})^2 dt = \\ &= \int_0^1 (2 - 4e^{-10t} + 2e^{-20t}) dt = \left[2t + \frac{4}{10} e^{-10t} - \frac{2}{20} e^{-20t} \right]_0^1 \approx 1,7 \text{ joule} \end{aligned}$$

Esempio III.C.4.

Determinare l'andamento della corrente i che percorre uno dei condensatori del circuito di fig.III.C.13, nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle e che la tensione impressa dal generatore abbia l'andamento riportato nella parte b) della stessa figura.

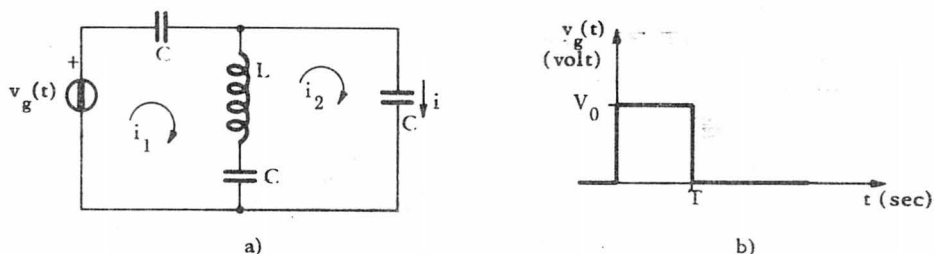


Fig.III.C.13 - Circuito considerato nell'esempio III.C.4. In b) è riportato l'andamento della tensione impressa.

Applicando il metodo di analisi su base maglie al circuito fittizio che si ottiene trasformando quello di fig.III.C.13a nel dominio di Laplace, con variabili ausiliarie coincidenti con le trasformate delle due correnti di maglia i_1 ed i_2 , si ha:

$$\begin{aligned} I_1 \left(\frac{2}{sC} + sL \right) - I_2 \left(\frac{1}{sC} + sL \right) &= V_g(s) \\ -I_1 \left(\frac{1}{sC} + sL \right) + I_2 \left(\frac{2}{sC} + sL \right) &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene la trasformata della corrente incognita i , coincidente con $I_2(s)$, cioè:

$$I_2(s) = \frac{sC(s^2LC + 1)}{2LCs^2 + 3} V_g(s)$$

Per determinare l'andamento nel tempo richiesto, occorre preliminarmente individuare la trasformata $V_g(s)$ della tensione impressa. Scrivendo in forma opportuna tale tensione, si ha:

$$v_g(t) = V_0 u_{-1}(t) - V_0 u_{-1}(t - T)$$

a cui corrisponde:

$$V_g(s) = \frac{V_0}{s} (1 - e^{-sT})$$

Tenendo conto di questa espressione e sviluppando in frazioni parziali la parte razionale della $I_2(s)$, si ottiene:

$$I_2(s) = \frac{V_0 C}{2} \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} (1 - e^{-sT}) = \frac{V_0 C}{2} \left(1 - \frac{\frac{0,5}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) (1 - e^{-sT})$$

Per antitrasformare, osserviamo che dalla tab.III.A.1 si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right] = \sqrt{\frac{LC}{1,5}} \sin \sqrt{\frac{1,5}{LC}} t \cdot u_{-1}(t)$$

e quindi risulta:

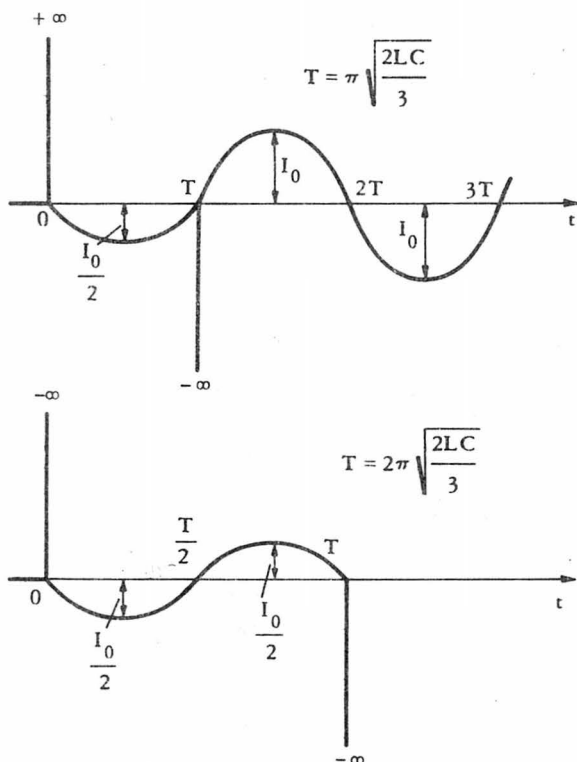


Fig.III.C.14 - Andamento della corrente $i(t)$ del circuito di fig.III.C.13 per i valori indicati di T . In ambedue i casi il valore di I_0 è:

$$V_0 \sqrt{\frac{C}{6L}}$$

$$i(t) = \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) - u_0(t-T)] + \\ + \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \left[\sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-T) u_{-1}(t-T) - \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t \cdot u_{-1}(t) \right]$$

In fig.III.C.14 a è riportato l'andamento di $i(t)$ nel caso che $T = \pi \sqrt{2LC/3}$. Si vede che sono presenti due impulsi di Dirac in corrispondenza a $t=0$ ed a $t=T$, diretti in senso contrario. Inoltre la corrente ha un andamento sinusoidale indefinito. È interessante mettere in evidenza il fatto che per valori particolari di T , la corrente $i(t)$ ha una durata limitata. Questo accade per $T = 2\pi \sqrt{2LC/3}$. Infatti, in questo caso si ha:

$$i(t) = \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) - u_0(t-T)] - \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t \cdot [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-T)]$$

L'andamento risultante per la corrente è riportato in fig.III.C.14 b.

Esempio III.C.5

Svolgere l'esempio III.C.4 nell'ipotesi che la tensione impressa abbia l'andamento di fig.III.C.15.

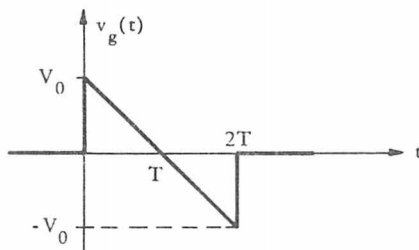


Fig.III.C.15 - Andamento della tensione impressa dal generatore del circuito di figura III.C.13 nell'es. III.C.5.

Avendo già determinata l'espressione della trasformata della corrente incognita in funzione della trasformata della tensione impressa nello svolgimento dell'esempio III.C.4, occorre individuare nel caso presente la trasformata dell'eccitazione. A questo scopo osserviamo che l'espressione analitica della $v_g(t)$ è:

$$v_g(t) = \left(V_0 - \frac{V_0 t}{T} \right) u_{-1}(t) + \left(V_0 + V_0 \frac{t-2T}{T} \right) u_{-1}(t-2T)$$

a cui corrisponde la seguente trasformata:

$$V_g(s) = \frac{V_0}{T} \left(\frac{Ts-1}{s^2} + \frac{Ts+1}{s^2} e^{-2sT} \right)$$

Utilizzando le formule ottenute nell'esempio III.C.4, si ha:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{V_0 C}{2} \left(1 - \frac{\frac{0,5}{LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) \left(\frac{s - 1/T}{s} + \frac{s + 1/T}{s} e^{-2sT} \right) = \\ &= \frac{V_0}{T} C \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{3s} - \frac{\frac{s}{6} + \frac{T}{4LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) + \frac{V_0 C}{T} \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{3s} + \frac{\frac{s}{6} - \frac{T}{4LC}}{s^2 + \frac{1,5}{LC}} \right) e^{-2sT} \end{aligned}$$

Antitrasformando l'espressione precedente, si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_0 C}{2} [u_0(t) + u_0(t-2T)] - \frac{CV_0}{3T} [u_{-1}(t) - u_{-1}(t-2T)] + \\ &- \frac{CV_0}{6T} \left[u_{-1}(t) \cos \sqrt{\frac{3}{2LC}} t - u_{-1}(t-2T) \cos \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-2T) \right] + \\ &- \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C}{6L}} \left[u_{-1}(t) \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} t + u_{-1}(t-2T) \sin \sqrt{\frac{3}{2LC}} (t-2T) \right] \end{aligned}$$

L'andamento di $i(t)$ nel caso particolare di

$$T = \pi \sqrt{\frac{2LC}{3}}$$

è riportato in fig.III.C.16, dove si è posto:

$$I_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{6L}}$$

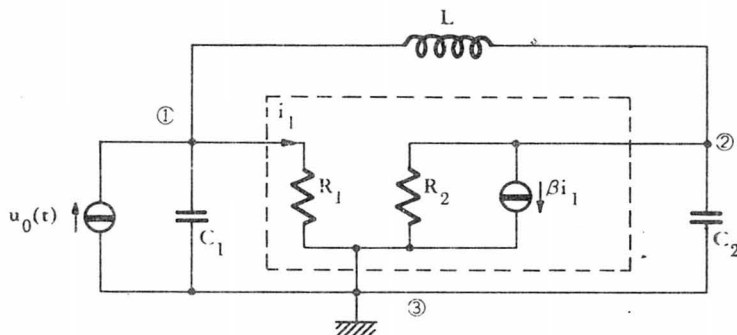


Fig.III.C.18 - Schema dell'oscillatore di Colpitts usato per l'analisi dell'innesco delle oscillazioni.

Dopo aver trasformato nel dominio di Laplace il circuito di fig.III.C.18, analizziamo con il metodo dei nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 3. Si ottiene:

$$\begin{aligned} V_1(s) \left[sC_1 + G_1 + \frac{1}{sL} \right] - V_2(s) \frac{1}{sL} &= 1 \\ -V_1(s) \left[\frac{1}{sL} - \beta G_1 \right] + V_2(s) \left[G_2 + sC_2 + \frac{1}{sL} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Determiniamo $V_2(s)$, che coincide con la trasformata della tensione incognita $v_u(t)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{-\beta G_1 + \frac{1}{sL}}{\left(sC_1 + G_1 + \frac{1}{sL} \right) \left(sC_2 + G_2 + \frac{1}{sL} \right) - \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{sL} - \beta G_1 \right)} = \\ &= \frac{1 - \beta G_1 L s}{s^3 C_1 C_2 L + s^2 L (C_1 G_2 + G_1 C_2) + s (C_1 + C_2 + G_1 G_2 L) + G_1 + G_2 - \beta G_1} \end{aligned}$$

Affinché si inneschi l'oscillazione sinusoidale occorre che il denominatore abbia una coppia di radici $\pm j\omega_0$, essendo ω_0 la pulsazione desiderata. Di conseguenza, il denominatore della $V_2(s)$ deve essere del tipo:

$$D(s) = (s^2 + \omega_0^2)(s + a) = s^3 + a s^2 + \omega_0^2 s + a \omega_0^2$$

con $a \geq 0$.

Uguagliando termine a termine i coefficienti del denominatore di $V_2(s)$ con quelli voluti, si ha:

$$\frac{C_1 G_2 + G_1 C_2}{C_1 C_2} = a$$

$$\frac{C_1 + C_2 + G_1 G_2 L}{C_1 C_2 L} = \omega_0^2$$

$$\frac{G_1 + G_2 + \beta G_1}{C_1 C_2 L} = a \omega_0^2$$

È evidente che le relazioni precedenti sono soddisfatte e quindi si ha l'innescio dell'oscillazione sinusoidale se il prodotto della prima relazione per la seconda uguaglia la terza, cioè se:

$$\left(\frac{G_2}{C_2} + \frac{G_1}{C_1} \right) \frac{C_1 + C_2 + G_1 G_2 L}{C_1 C_2 L} = \frac{G_1 + G_2 + \beta G_1}{C_1 C_2 L}$$

Tale condizione equivale a richiedere che il guadagno del transistor sia:

$$\beta = \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} + \frac{L}{R_2} \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} \right) + \frac{C_2}{C_1}$$

III.D - Esempi di applicazione del metodo alle differenze finite.

Nel presente paragrafo riportiamo alcuni esempi di applicazione del metodo alle differenze finite, descritto nel § III.6. Il programma in FORTRAN di tale metodo è descritto nell'appendice III.B, a cui si rimanda per chiarimenti riguardanti i formati in cui debbono essere presentati i dati di ingresso, che descrivono il circuito, ed i dati di uscita.

III.D.1 - Esempi riguardanti un filtro.

Il primo gruppo di esempi che si considera riguarda il comportamento del filtro passabasso⁽¹⁾ di fig.III.D.1 sotto l'azione di varie eccitazioni. In ognuno degli esempi, si riporta il tipo di eccitazione, la descrizione qualitativa del comportamento del filtro, la forma delle schede di ingresso e l'uscita del calcolatore.

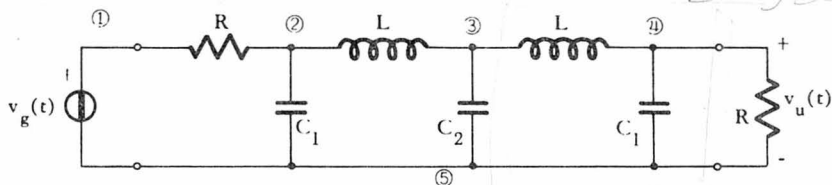


Fig.III.D.1 - Schema del filtro passabasso normalizzato considerato nel primo gruppo di esempi. I valori dei componenti sono: $R=1$, $C_1=0,1878$, $C_2=0,3070$, $L=0,1942$ (Ω , F, H).

Lo schema di fig.III.D.1 è stato normalizzato in frequenza rispetto a 10kHz ed in livello rispetto a 600Ω , con la tecnica descritta successivamente nel § V.8. I valori originari dei componenti erano $R=600\Omega$, $C_1=31,30\text{ nF}$, $C_2=51,17\text{ nF}$, $L=11,65\text{ mH}$, corrispondenti ad una frequenza di taglio 11,034 kHz ed a un'ondulazione in banda del 2%.

Le schede d'ingresso riguardanti la descrizione del circuito sono:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	5		2			2				3		0		1		0		0							
1	*	0	0	0	D	0	0			1		2													
1	*	0	0	0	D	0	0			4		5													
1	*	9	4	2	D	-	1			2		3													
1	*	9	4	2	D	-	1			3		4													
1	*	8	7	8	D	-	1			2		5													
1	*	8	7	8	D	-	1			4		5													
3	*	0	7	0	D	-	1			3		5													

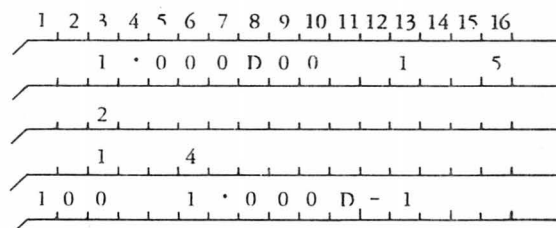
(1) - Il filtro considerato è un filtro tipo Cebicef tratto dal testo R.Saal, «Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe», Ed. Telefunken.

Per quanto riguarda l'eccitazione, le relative schede di ingresso verranno riportate nell'ambito di ciascun esempio, in quanto si tratta di casi diversi l'uno dall'altro. L'andamento dell'eccitazione coincide in ogni caso con la tensione del nodo 1 rispetto al nodo 5.

Esempio III.D.1.

Determinare l'andamento della tensione di uscita $v_u(t)$ nel caso che l'eccitazione $v_g(t)$ di fig.III.D.1 coincida con un gradino di tensione di ampiezza uguale ad 1 volt.

Scegliamo un intervallo di campionamento normalizzato uguale a 0,1 e facciamo stampare per 100 istanti successivi le tensioni dei nodi 1 e 4 rispetto al nodo 5. Le schede di ingresso riguardano la tensione di eccitazione all'istante iniziale, le tensioni che si desidera stampare, il numero di istanti considerato ed il passo di campionamento. La subroutine M23 in questo caso non interviene, in quanto il valore dell'eccitazione negli istanti successivi a quello iniziale si mantiene costante. Le schede in questione sono:



Da un punto di vista qualitativo è facile rendersi conto che al crescere del tempo i condensatori tendono a comportarsi come circuiti aperti e gli induttori come cortocircuiti. Quindi la tensione $v_u(t)$ tende a divenire la metà della $v_g(t)$, cioè 0,5 volt. L'esame qualitativo precedente è confermato dall'andamento fornito dal calcolatore e riportato di seguito. Precisamente, il valore 0,5 viene raggiunto in corrispondenza all'istante 4,3. Per questa ragione, la stampa viene limitata ai primi 70 passi dei 100 preventivati.

– Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 2
NUMERO INDUTTORI = 2
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0
```

(segue)

```

RES.N. 1 .100+001 1 2
RES.N. 2 .100+001 4 5
IND.N. 1 .194+000 2 3 CORR.IN.= .000
IND.N. 2 .194+000 3 4 CORR.IN.= .000
COND.N. 1 .188+000 2 5 TENS.IN.= .000
COND.N. 2 .307+000 3 5 TENS.IN.= .000
COND.N. 3 .188+000 4 5 TENS.IN.= .000
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 5

```

```

SIMULAZIONE: N. Istanti = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .100+000

```

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

```

TEMPO  NODI : 1 4
0 .000 .100+001 .398-003
1 .100+000 .100+001 .378-002
2 .200+000 .100+001 .175-001
3 .300+000 .100+001 .532-001
4 .400+000 .100+001 .121+000
5 .500+000 .100+001 .220+000
6 .600+000 .100+001 .338+000
7 .700+000 .100+001 .451+000
8 .800+000 .100+001 .536+000
9 .900+000 .100+001 .577+000
10 .100+001 .100+001 .575+000
11 .110+001 .100+001 .541+000
12 .120+001 .100+001 .498+000
13 .130+001 .100+001 .464+000
14 .140+001 .100+001 .452+000
15 .150+001 .100+001 .462+000
16 .160+001 .100+001 .484+000
17 .170+001 .100+001 .506+000
18 .180+001 .100+001 .520+000
19 .190+001 .100+001 .520+000
20 .200+001 .100+001 .510+000
21 .210+001 .100+001 .496+000
22 .220+001 .100+001 .486+000
23 .230+001 .100+001 .483+000
24 .240+001 .100+001 .499+000
25 .250+001 .100+001 .498+000
26 .260+001 .100+001 .507+000
27 .270+001 .100+001 .512+000
28 .280+001 .100+001 .510+000
29 .290+001 .100+001 .505+000
30 .300+001 .100+001 .498+000
31 .310+001 .100+001 .493+000
32 .320+001 .100+001 .492+000
33 .330+001 .100+001 .495+000
34 .340+001 .100+001 .499+000
35 .350+001 .100+001 .503+000
36 .360+001 .100+001 .505+000
37 .370+001 .100+001 .505+000
38 .380+001 .100+001 .502+000
39 .390+001 .100+001 .499+000
40 .400+001 .100+001 .497+000
41 .410+001 .100+001 .497+000
42 .420+001 .100+001 .498+000
43 .430+001 .100+001 .500+000
44 .440+001 .100+001 .502+000
45 .450+001 .100+001 .502+000
46 .460+001 .100+001 .502+000
47 .470+001 .100+001 .501+000
48 .480+001 .100+001 .500+000
49 .490+001 .100+001 .499+000
50 .500+001 .100+001 .498+000
51 .510+001 .100+001 .499+000
52 .520+001 .100+001 .500+000
53 .530+001 .100+001 .501+000
54 .540+001 .100+001 .501+000
55 .550+001 .100+001 .501+000

```

(segue)

56	.560+001	.100+001	.500+000
57	.570+001	.100+001	.500+000
58	.580+001	.100+001	.499+000
59	.590+001	.100+001	.499+000
60	.600+001	.100+001	.500+000
61	.610+001	.100+001	.500+000
62	.620+001	.100+001	.500+000
63	.630+001	.100+001	.500+000
64	.640+001	.100+001	.500+000
65	.650+001	.100+001	.500+000
66	.660+001	.100+001	.500+000
67	.670+001	.100+001	.500+000
68	.680+001	.100+001	.500+000
69	.690+001	.100+001	.500+000
70	.700+001	.100+001	.500+000

Esempio III.D.2.

Determinare l'andamento della tensione di uscita $v_u(t)$ nel caso che l'eccitazione $v_g(t)$ di fig.III.D.1 coincida con un impulso di tensione rettangolare di larghezza normalizzata 0,1 ed ampiezza 1 volt.

Scegliamo l'intervallo di campionamento, il numero di istanti da considerare e le tensioni da stampare come nell'esempio III.D.1. Le schede di ingresso coincidono perciò con quelle riportate in tale esempio. La subroutine M23 in questo caso provvede ad azzerare la tensione di eccitazione negli istanti successivi a quello iniziale.

Da un punto di vista qualitativo è facile rendersi conto che la tensione $v_u(t)$ deve tendere a zero al crescere del tempo, in quanto l'eccitazione coincide con un impulso concentrato all'istante iniziale. Ciò è confermato dall'andamento fornito dal calcolatore. In particolare, anche in questo caso tronciamo la stampa in corrispondenza al passo 70, in corrispondenza al quale la tensione $v_u(t)$ è ridotta a qualche decimo di millivolt.

– Uscita del programma.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 2
NUMERO INDUTTORI = 2
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0

RES.N. 1 .100+001 1 2
RES.N. 2 .100+001 4 5
IND.N. 1 .194+000 2 3 CORR.IN.= .000
IND.N. 2 .194+000 3 4 CORR.IN.= .000
COND.N. 1 .188+000 2 5 TENS.IN.= .000
COND.N. 2 .307+000 3 5 TENS.IN.= .000
COND.N. 3 .188+000 4 5 TENS.IN.= .000
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+001 1 5

SIMULAZIONE, N. ISTANTI = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .100+000

```

(segue)

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

TEMPO	NODI : 1	4
0	.000	.100+001 .398-003
1	.100+000	-.589-018 .339-002
2	.200+000	-.129-018 .137-001
3	.300+000	.125-018 .356-001
4	.400+000	.186-018 .674-001
5	.500+000	.119-018 .993-001
6	.600+000	.100-019 .118+000
7	.700+000	-.736-019 .113+000
8	.800+000	-.983-019 .849-001
9	.900+000	-.686-019 .413-001
10	.100+001	-.141-019 -.280-002
11	.110+001	.309-019 -.335-001
12	.120+001	.446-019 -.433-001
13	.130+001	.249-019 -.334-001
14	.140+001	-.128-019 -.122-001
15	.150+001	-.470-019 .931-002
16	.160+001	-.603-019 .222-001
17	.170+001	-.480-019 .228-001
18	.180+001	-.177-019 .135-001
19	.190+001	.156-019 .296-003
20	.200+001	.374-019 -.102-001
21	.210+001	.402-019 -.138-001
22	.220+001	.257-019 -.103-001
23	.230+001	.278-020 -.246-002
24	.240+001	-.174-019 .536-002
25	.250+001	-.266-019 .960-002
26	.260+001	-.229-019 .892-002
27	.270+001	-.997-020 .437-002
28	.280+001	.496-020 -.142-002
29	.290+001	.151-019 -.570-002
30	.300+001	.168-019 -.682-002
31	.310+001	.108-019 -.478-002
32	.320+001	.104-020 -.983-003
33	.330+001	-.754-020 .263-002
34	.340+001	-.114-019 .452-002
35	.350+001	-.956-020 .412-002
36	.360+001	-.382-020 .200-002
37	.370+001	.267-020 -.642-003
38	.380+001	.693-020 -.256-002
39	.390+001	.745-020 -.305-002
40	.400+001	.461-020 -.211-002
41	.410+001	.213-021 -.409-003
42	.420+001	-.356-020 .119-002
43	.430+001	-.516-020 .200-002
44	.440+001	-.423-020 .180-002
45	.450+001	-.161-020 .843-003
46	.460+001	.130-020 -.329-003
47	.470+001	.315-020 -.116-002
48	.480+001	.332-020 -.135-002
49	.490+001	.201-020 -.914-003
50	.500+001	.298-022 -.148-003
51	.510+001	-.164-020 .557-003
52	.520+001	-.231-020 .903-003
53	.530+001	-.186-020 .795-003
54	.540+001	-.669-021 .356-003
55	.550+001	.620-021 -.166-003
56	.560+001	.143-020 -.531-003
57	.570+001	.147-020 -.602-003
58	.580+001	.866-021 -.398-003
59	.590+001	-.206-022 -.527-004
60	.600+001	-.753-021 .259-003
61	.610+001	-.103-020 .406-003
62	.620+001	-.816-021 .350-003
63	.630+001	-.275-021 .151-003
64	.640+001	.297-021 -.825-004
65	.650+001	.645-021 -.241-003
66	.660+001	.653-021 -.268-003
67	.670+001	.373-021 -.173-003
68	.680+001	-.242-022 -.175-004
69	.690+001	-.346-021 .120-003
70	.700+001	-.463-021 .182-003

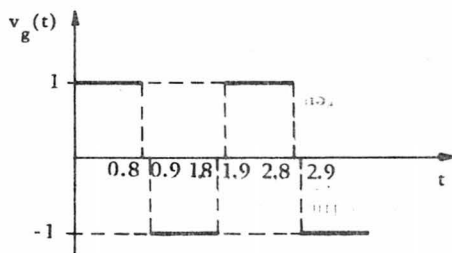
(segue)

Esempio III.D.3.

Determinare l'andamento della tensione di uscita $v_u(t)$ nel caso che l'eccitazione $v_g(t)$ di fig.III.D.1 coincida con un'onda quadra di ampiezza 1 volt e di frequenza normalizzata 0.5.

Scegliamo l'intervallo di campionamento, il numero di istanti di campionamento e le tensioni da stampare come nell'esempio III.D.1. Le schede di ingresso coincidono perciò con quelle riportate in tale esempio. La subroutine M23 in questo caso deve fornire l'andamento previsto per l'eccitazione. Per effetto dell'intervallo di campionamento scelto tale andamento è quello mostrato in fig.III.D.2.

Fig.III.D.2 - Andamento dell'eccitazione fornito dalla subroutine M23 nel caso dell'es.III.D.3.



Da un punto di vista qualitativo si nota che l'eccitazione applicata, al crescere del tempo, tende a coincidere con la somma di varie funzioni sinusoidali di frequenza multipla dispari di 0,5. In particolare quella di frequenza più bassa, cioè 0,5, ha una ampiezza di $4/\pi$. Poiché il filtro passa-basso di fig.III.D.1 ha una frequenza di taglio normalizzata di 1.1, esso ha un effetto tagliante su tutte le componenti dell'eccitazione, esclusa quella di frequenza 0.5. Per questa ragione al crescere del tempo la tensione $v_g(t)$ tende ad avere un andamento sinusoidale di frequenza 0,5 e di ampiezza uguale a circa metà di quella della suddetta componente, cioè $2/\pi$. Se si esamina l'uscita del programma si vede che tale andamento è già presente dopo i primi 40 passi. Per questa ragione viene troncata la stampa anche in questo caso dopo i primi 70 passi.

– Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 2
NUMERO INDUTTORI = 2
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0
```

(segue)


```

RES.N.  1  .100+001  1  2
RES.N.  2  .100+001  4  5
IND.N.  1  .194+000  2  3  CORR.IN.= .000
IND.N.  2  .194+000  3  4  CORR.IN.= .000
COND.N.  1  .188+000  2  5  TENS.IN.= .000
COND.N.  2  .307+000  3  5  TENS.IN.= .000
COND.N.  3  .188+000  4  5  TENS.IN.= .000
GEN.TENSIONE: N.  1  .100+001  1  5

```

```

SIMULAZIONE: N. Istanti = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .100+000

```

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

TEMPO	NODI : 1	4
0	.000	.100+001 .398-003
1	.100+000	.100+001 .378-002
2	.200+000	.100+001 .175-001
3	.300+000	.100+001 .532-001
4	.400+000	.100+001 .121+000
5	.500+000	.100+001 .220+000
6	.600+000	.100+001 .338+000
7	.700+000	.100+001 .451+000
8	.800+000	.100+001 .536+000
9	.900+000	-.100+001 .577+000
10	.100+001	-.100+001 .567+000
11	.110+001	-.100+001 .506+000
12	.120+001	-.100+001 .392+000
13	.130+001	-.100+001 .223+000
14	.140+001	-.100+001 .124-001
15	.150+001	-.100+001 -.214+000
16	.160+001	-.100+001 -.419+000
17	.170+001	-.100+001 -.566+000
18	.180+001	-.100+001 -.635+000
19	.190+001	.100+001 -.628+000
20	.200+001	.100+001 -.565+000
21	.210+001	.100+001 -.464+000
22	.220+001	.100+001 -.337+000
23	.230+001	.100+001 -.180+000
24	.240+001	.100+001 .559-002
25	.250+001	.100+001 .207+000
26	.260+001	.100+001 .397+000
27	.270+001	.100+001 .544+000
28	.280+001	.100+001 .625+000
29	.290+001	-.100+001 .633+000
30	.300+001	-.100+001 .580+000
31	.310+001	-.100+001 .482+000
32	.320+001	-.100+001 .348+000
33	.330+001	-.100+001 .180+000
34	.340+001	-.100+001 -.145-001
35	.350+001	-.100+001 -.220+000
36	.360+001	-.100+001 -.408+000
37	.370+001	-.100+001 -.548+000
38	.380+001	-.100+001 -.622+000
39	.390+001	.100+001 -.625+000
40	.400+001	.100+001 -.571+000
41	.410+001	.100+001 -.476+000
42	.420+001	.100+001 -.347+000
43	.430+001	.100+001 -.184+000
44	.440+001	.100+001 .857-002
45	.450+001	.100+001 .215+000
46	.460+001	.100+001 .406+000
47	.470+001	.100+001 .550+000
48	.480+001	.100+001 .625+000
49	.490+001	-.100+001 .629+000
50	.500+001	-.100+001 .574+000
51	.510+001	-.100+001 .476+000
52	.520+001	-.100+001 .345+000
53	.530+001	-.100+001 .182+000
54	.540+001	-.100+001 -.107-001
55	.550+001	-.100+001 -.216+000

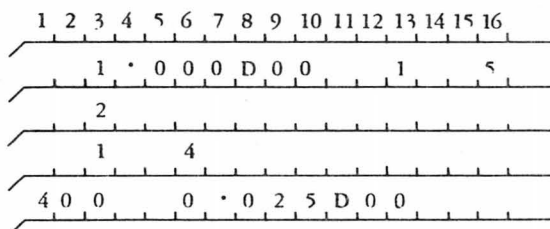
(segue)

56	.560+001	-.100+001	-.405+000
57	.570+001	-.100+001	-.548+000
58	.580+001	-.100+001	-.623+000
59	.590+001	.100+001	-.628+000
60	.600+001	.100+001	-.574+000
61	.610+001	.100+001	-.477+000
62	.620+001	.100+001	-.347+000
63	.630+001	.100+001	-.183+000
64	.640+001	.100+001	.104+001
65	.650+001	.100+001	.216+000
66	.660+001	.100+001	.406+000
67	.670+001	.100+001	.549+000
68	.680+001	.100+001	.624+000
69	.690+001	-.100+001	.628+000
70	.700+001	-.100+001	.573+000

Esempio III.D.4.

Determinare l'andamento della tensione di uscita $v_u(t)$ nel caso che l'eccitazione $v_g(t)$ di fig.III.D.1 coincida con un'onda quadra di ampiezza 1 volt e di frequenza normalizzata 2.

In questo caso occorre scegliere l'intervallo di campionamento più piccolo, rispetto a quello usato negli altri esempi, per evitare gli errori connessi con il metodo alle differenze finite⁽¹⁾. Per questa ragione scegliamo tale intervallo(normalizzato) uguale a 0,025 ed il numero degli istanti da considerare uguale a 400. Lasciando inalterata la tensione di eccitazione all'istante iniziale e le tensioni desiderate, le schede di ingresso divengono:



La subroutine M23 in questo caso deve fornire l'andamento previsto per l'eccitazione. Per effetto della scelta dell'intervallo di campionamento tale andamento è quello mostrato in fig.III.D.3.

(1) - La valutazione di questo errore è molto semplice se si tiene conto che il programma basato sulle differenze finite lavora come un vero e proprio filtro digitale. Per dettagli su questo punto si rimanda all'appendice C, riportata in fondo al libro.

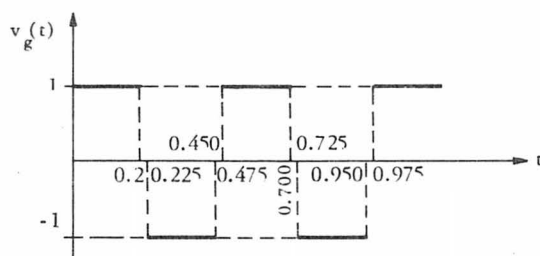


Fig.III.D.3 - Andamento dell'eccitazione fornito dalla subroutine M23 nel caso dell'esempio III.D.4.

Da un punto di vista qualitativo si nota, come nel caso dell'esempio III.D.3, che le componenti sinusoidali, alla cui somma tende l'eccitazione al crescere del tempo, hanno tutte frequenze superiori a quella di taglio. Perciò in uscita la tensione è essenzialmente dovuta a quella di frequenza più bassa con un'ampiezza uguale a $4/\pi$ moltiplicata per l'attenuazione del filtro in corrispondenza alla frequenza di tale componente. L'attenuazione in questione vale

$$2 \left[1 + 0.2 T_5 \left(\frac{2}{1,1} \right) \right] = 82,6$$

essendo T_5 il polinomio di Cebicef di ordine 5.

Quindi la tensione di uscita tende, al crescere del tempo, ad un andamento sinusoidale di frequenza 2 e di ampiezza

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{82,6} = 1,54 \cdot 10^{-2}.$$

Se si esamina l'uscita del programma, tale andamento è presente dopo 300 passi. Per ragioni di spazio si riportano di seguito le stampe di uscita relative ad un intervallo iniziale, ad uno centrale e ad uno terminale di quello complessivamente previsto.

– Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 2
NUMERO INDUTTORI = 2
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0
```

(segue)

```

RES.N.  1  .100+001  1  2
RES.N.  2  .100+001  4  5
IND.N.  1  .194+000  2  3  CORR.IN.= .000
IND.N.  2  .194+000  3  4  CORR.IN.= .000
COND.N.  1  .188+000  2  5  TENS.IN.= .000
COND.N.  2  .307+000  3  5  TENS.IN.= .000
COND.N.  3  .188+000  4  5  TENS.IN.= .000
GEN.TENSIONE: N.  1  .100+001  1  5

```

```

SIMULAZIONE: N. Istanti = 400
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .250-001

```

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

```

TEMPO  NODI : 1      4
0 .000 .100+001 .648-006
1 .250-001 .100+001 .694-005
2 .500-001 .100+001 .372-004
3 .750-001 .100+001 .136-003
4 .100+000 .100+001 .383-003
5 .125+000 .100+001 .903-003
6 .150+000 .100+001 .186-002
7 .175+000 .100+001 .347-002
8 .200+000 .100+001 .596-002
9 .225+000 -.100+001 .959-002
10 .250+000 -.100+001 .146-001
11 .275+000 -.100+001 .213-001
12 .300+000 -.100+001 .298-001
13 .325+000 -.100+001 .401-001
14 .350+000 -.100+001 .522-001
15 .375+000 -.100+001 .659-001
16 .400+000 -.100+001 .808-001
17 .425+000 -.100+001 .963-001
18 .450+000 -.100+001 .112+000
19 .475+000 .100+001 .127+000
20 .500+000 .100+001 .141+000
21 .525+000 .100+001 .152+000
22 .550+000 .100+001 .161+000
23 .575+000 .100+001 .167+000
24 .600+000 .100+001 .168+000
25 .625+000 .100+001 .166+000
26 .650+000 .100+001 .159+000
27 .675+000 .100+001 .148+000
28 .700+000 .100+001 .134+000
29 .725+000 -.100+001 .117+000
30 .750+000 -.100+001 .976-001
.. . . . .
88 .220+001 .100+001 .128-001
89 .222+001 -.100+001 .119-001
90 .225+001 -.100+001 .101-001
91 .227+001 -.100+001 .767-002
92 .230+001 -.100+001 .509-002
93 .232+001 -.100+001 .271-002
94 .235+001 -.100+001 .880-003
95 .237+001 -.100+001 -.166-003
96 .240+001 -.100+001 -.295-003
97 .242+001 -.100+001 .549-003
98 .245+001 -.100+001 .224-002
99 .247+001 .100+001 .457-002
100 .250+001 .100+001 .725-002
101 .252+001 .100+001 .989-002
102 .255+001 .100+001 .121-001
103 .257+001 .100+001 .136-001
104 .260+001 .100+001 .141-001
105 .262+001 .100+001 .133-001
106 .265+001 .100+001 .113-001
107 .267+001 .100+001 .801-002
108 .270+001 .100+001 .373-002

```

(segue)

109	.272+001	-.100+001	-.127-002
110	.275+001	-.100+001	-.659-002
111	.277+001	-.100+001	-.118-001
112	.280+001	-.100+001	-.164-001
113	.282+001	-.100+001	-.200-001
114	.285+001	-.100+001	-.223-001
115	.287+001	-.100+001	-.230-001
116	.290+001	-.100+001	-.220-001
117	.292+001	-.100+001	-.194-001
118	.295+001	-.100+001	-.155-001
119	.297+001	.100+001	-.103-001
120	.300+001	.100+001	-.453-002
121	.302+001	.100+001	.149-002
122	.305+001	.100+001	.721-002
123	.307+001	.100+001	.122-001
124	.310+001	.100+001	.160-001
125	.312+001	.100+001	.184-001
126	.315+001	.100+001	.192-001
127	.317+001	.100+001	.183-001
128	.320+001	.100+001	.160-001
129	.322+001	-.100+001	.125-001
130	.325+001	-.100+001	.817-002
131	.327+001	-.100+001	.342-002
132	.330+001	-.100+001	-.127-002
133	.332+001	-.100+001	-.544-002
134	.335+001	-.100+001	-.872-002
135	.337+001	-.100+001	-.108-001
136	.340+001	-.100+001	-.116-001
137	.342+001	-.100+001	-.110-001
138	.345+001	-.100+001	-.918-002
139	.347+001	.100+001	-.632-002
140	.350+001	.100+001	-.290-002
141	.352+001	.100+001	.996-003
142	.355+001	.100+001	.462-002
143	.357+001	.100+001	.768-002
144	.360+001	.100+001	.982-002
..			
316	.790+001	-.100+001	-.145-001
317	.792+001	-.100+001	-.130-001
318	.795+001	-.100+001	-.102-001
319	.797+001	.100+001	-.647-002
320	.800+001	.100+001	-.207-002
321	.802+001	.100+001	.252-002
322	.805+001	.100+001	.686-002
323	.807+001	.100+001	.105-001
324	.810+001	.100+001	.131-001
325	.812+001	.100+001	.145-001
326	.815+001	.100+001	.144-001
327	.817+001	.100+001	.129-001
328	.820+001	.100+001	.102-001
329	.822+001	-.100+001	.642-002
330	.825+001	-.100+001	.203-002
331	.827+001	-.100+001	-.256-002
332	.830+001	-.100+001	-.688-002
333	.832+001	-.100+001	-.105-001
334	.835+001	-.100+001	-.131-001
335	.837+001	-.100+001	-.145-001
336	.840+001	-.100+001	-.144-001
337	.842+001	-.100+001	-.129-001
338	.845+001	-.100+001	-.101-001
339	.847+001	.100+001	-.639-002
340	.850+001	.100+001	-.109-002
341	.852+001	.100+001	.259-002
342	.855+001	.100+001	.692-002
343	.857+001	.100+001	.106-001
344	.860+001	.100+001	.132-001
345	.862+001	.100+001	.145-001
346	.865+001	.100+001	.144-001

(segue)

347	.867+001	.100+001	.129-001
348	.870+001	.100+001	.102-001
349	.872+001	-.100+001	.640-002
350	.875+001	-.100+001	.201-002
351	.877+001	-.100+001	-.259-002
352	.880+001	-.100+001	-.692-002
353	.882+001	-.100+001	-.106-001
354	.885+001	-.100+001	-.132-001
355	.887+001	-.100+001	-.145-001
356	.890+001	-.100+001	-.144-001
357	.892+001	-.100+001	-.130-001
358	.895+001	-.100+001	-.102-001
359	.897+001	.100+001	-.643-002
360	.900+001	.100+001	-.203-002
361	.902+001	.100+001	.256-002
362	.905+001	.100+001	.690-002
363	.907+001	.100+001	.106-001
364	.910+001	.100+001	.132-001
365	.912+001	.100+001	.145-001
366	.915+001	.100+001	.144-001
367	.917+001	.100+001	.129-001
368	.920+001	.100+001	.102-001
369	.922+001	-.100+001	.643-002
370	.925+001	-.100+001	.203-002
371	.927+001	-.100+001	-.256-002
372	.930+001	-.100+001	-.689-002

III.D.2 - Esempi riguardanti un amplificatore video.

Il secondo gruppo di esempi che si considera riguarda il comportamento di uno stadio amplificatore video. In particolare si vuole mettere in evidenza l'effetto della compensazione effettuata tramite un induttore. Lo stadio considerato, mostrato in fig.III.D.4, completo dello schema equivalente del transistor, è tratto da J. Millman, H. Taub, «Circuiti ad impulsi e digitali», Ed. Bizzarri, 1967, pag.70. I nodi C_1 ed E_1 d'ingresso rappresentano l'uscita dello stadio precedente; in particolare C_1 ed E_1 coincidono con il collettore e l'emettitore del transistor dello stadio precedente. I nodi B_2 , B'_2 , C_2 , E_2 corrispondono rispettivamente alla base, al nodo interno, al collettore ed all'emettitore del transistor dello stadio in esame. I componenti L ed R_c , inseriti tra B_2 ed il nodo di riferimento costituiscono il circuito di compensazione. Il generatore di corrente controllato in tensione è parte integrante del circuito equivalente del transistor, insieme alle resistenze $r_{bb'}$, $r_{b'e}$ ed al condensatore C . Utilizzando il circuito equivalente del transistor, considerato nel testo citato, nelle condizioni previste di polarizzazione, risulta:

$$g_m = 5 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} ; \quad r_{bb'} = 100 \Omega ; \quad r_{b'e} = 1000 \Omega$$

$$C = 128 \text{ pF}$$

$S \cdot 10^{-2} A$
Y

In assenza del circuito di compensazione lo stadio amplificatore è incapace di seguire i fronti di salita dell'eccitazione. L'effetto della compensazione è quello di rimuovere tale inconveniente, nel senso che ad un gradino di corrente in ingresso deve corrispondere in uscita una forma d'onda che sia la più vicina al gradino stesso, a parte un ritardo.

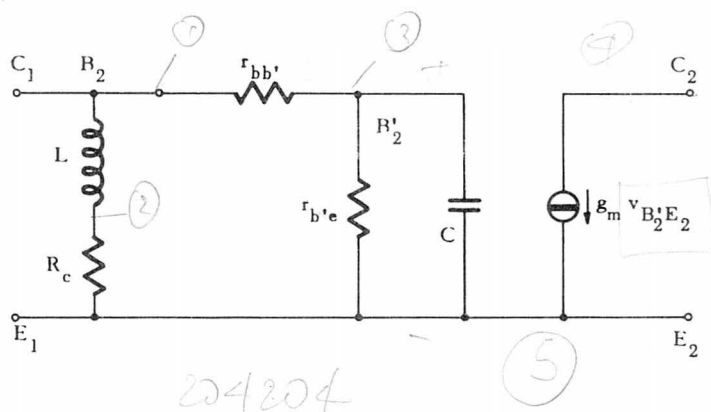


Fig.III.D.4 - Schema equivalente dello stadio amplificatore video.

La compensazione si realizza solo quando il valore di L ed R_c sono opportuni. Nel seguito faremo vedere, avendo fissato $R_c = 195\Omega$, le tre situazioni tipiche corrispondenti a:

- 1) *sottocompensazione* (valori di L inferiori al valore ottimale). In questo caso il fronte di salita è poco ripido e la grandezza di uscita raggiunge il valore di regime in un tempo notevole;
- 2) *compensazione* (valore di L ottimale). Il fronte di salita è ripido e la grandezza di uscita raggiunge il valore di regime senza oltrepassarlo;
- 3) *sovracompensazione* (valori di L superiori al valore ottimale). Il fronte di salita è ripido; la grandezza di uscita oltrepassa il valore di regime.

Completiamo il circuito di fig.III.D.4, con un generatore di corrente a gradino in ingresso ed un resistore in uscita per visualizzare la corrente erogata dal generatore controllato. Inoltre, normalizziamo con il metodo descritto nel §V.8 i componenti in livello rispetto a 1000Ω ed in pulsazione rispetto a 10^7 rad/sec. Il circuito normalizzato completo è quello di fig.III.D.5, in cui L assume i valori normalizzati $5 \cdot 10^{-3}$, $25 \cdot 10^{-3}$, 0.1 , che corrispondono alle tre situazioni di sottocompensazione, compensazione e sovracompensazione (v. J. Millman, H. Taub, op.cit.).

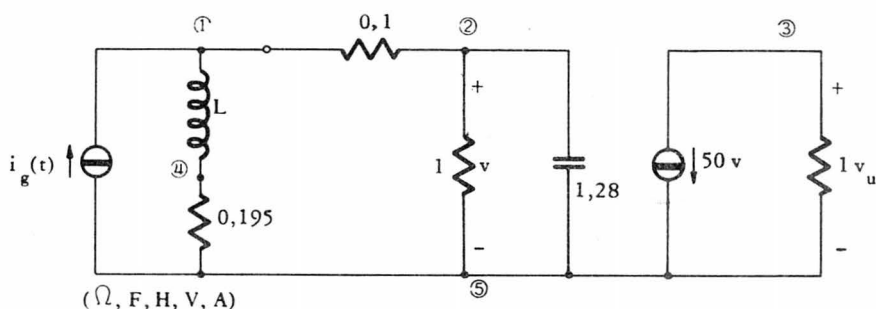


Fig.III.D.5 - Schema normalizzato del circuito considerato negli esempi III.D.5, III.D.6, III.D.7.

Le schede di ingresso al calcolatore sono le stesse nei tre esempi che verranno considerati, salvo che cambia il valore di L . Precisamente si ha, scegliendo come intervallo di campionamento normalizzato 0,04, un numero di istanti da considerare uguale a 100 e come tensioni da stampare quelle dei nodi 1 e 3 rispetto al 5:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	5			4				1			1			1		0			1			0	
	0	•	1	9	5	D	0	0			4			5									
	0	•	1	0	0	D	0	0			1			2									
	1	•	0	0	0	D	0	0			2			5									
	1	•	0	0	0	D	0	0			3			5									
	scheda riguardante l'induttanza, diversa nei tre esempi																						
	1	•	2	8	0	D	0	0			2			5									
	1	•	0	0	0	D	0	0			1			5									
	5	•	0	0	0	D	0	1			2			5			3				5		
	2																						
	1			3																			
	1	0	0		0	•	4	0	0	D	-	1											

Per quanto riguarda l'eccitazione, si considera in tutti e tre i casi una funzione a gradino unitario, per cui la subroutine M23 non deve intervenire a modificare il valore iniziale unitario della corrente.

Esempio III.D.5.

Determinare l'andamento della tensione v_u nel circuito di fig.III.D.5, nel caso che L assuma il valore normalizzato $5 \cdot 10^{-3}$.

La scheda di ingresso relativa all'induttore in questo caso vale:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
			0	.	5	0	0	D	-	2			1		4

L'esempio presente corrisponde alla situazione di sottocompensazione dello stadio amplificatore. Come si vede chiaramente dalla stampadi uscita del calcolatore, la tensione di uscita raggiunge il valore di regime lentamente senza superarlo entro i primi 43 passi. Per questo la stampa stessa viene troncata al 48- simo passo.

- Uscita del programma.

```
CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 4
NUMERO INDUTTORI = 1
NUMERO CONDENSATORI = 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 1
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 0
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 1
NUMERO NULLORI= 0
```

```
RES.N. 1 .195+000 4 5
RES.N. 2 .100+000 1 2
RES.N. 3 .100+001 2 5
RES.N. 4 .100+001 3 5
IND.N. 1 .500-002 1 4 CORR.IN.= .000
COND.N. 1 .128+001 2 5 TENS.IN.= .000
G.CORR.N. 1 .100+001 1 5
GEN.CONTR.TENS.N: 1 .500+002 2 5 3 5
```

```
SIMULAZIONE: N.ISTANTI = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .400-001
```

(segue)

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

TEMPO	NODI : 1	3
0	.000	.916-001 -.611+000
1	.400-001	.895-001 -.164+001
2	.800-001	.100+000 -.243+001
3	.120+000	.109+000 -.311+001
4	.160+000	.117+000 -.371+001
5	.200+000	.123+000 -.422+001
6	.240+000	.129+000 -.466+001
7	.280+000	.134+000 -.505+001
8	.320+000	.138+000 -.538+001
9	.360+000	.142+000 -.567+001
10	.400+000	.145+000 -.592+001
11	.440+000	.148+000 -.614+001
12	.480+000	.150+000 -.632+001
13	.520+000	.152+000 -.649+001
14	.560+000	.154+000 -.663+001
15	.600+000	.156+000 -.675+001
16	.640+000	.157+000 -.685+001
17	.680+000	.158+000 -.694+001
18	.720+000	.159+000 -.702+001
19	.760+000	.160+000 -.709+001
20	.800+000	.161+000 -.715+001
21	.840+000	.161+000 -.720+001
22	.880+000	.162+000 -.724+001
23	.920+000	.162+000 -.728+001
24	.960+000	.163+000 -.732+001
25	.100+001	.163+000 -.734+001
26	.104+001	.164+000 -.737+001
27	.108+001	.164+000 -.739+001
28	.112+001	.164+000 -.741+001
29	.116+001	.164+000 -.743+001
30	.120+001	.164+000 -.744+001
31	.124+001	.165+000 -.745+001
32	.128+001	.165+000 -.746+001
33	.132+001	.165+000 -.747+001
34	.136+001	.165+000 -.748+001
35	.140+001	.165+000 -.749+001
36	.144+001	.165+000 -.749+001
37	.148+001	.165+000 -.750+001
38	.152+001	.165+000 -.750+001
39	.156+001	.165+000 -.750+001
40	.160+001	.165+000 -.751+001
41	.164+001	.165+000 -.751+001
42	.168+001	.165+000 -.751+001
43	.172+001	.165+000 -.752+001
44	.176+001	.165+000 -.752+001
45	.180+001	.166+000 -.752+001
46	.184+001	.166+000 -.752+001
47	.188+001	.166+000 -.752+001
48	.192+001	.166+000 -.752+001

Esempio III.D.6.

Determinare l'andamento della tensione v_u nel circuito di fig.III.D.5, nel caso che L assuma il valore normalizzato $2,5 \cdot 10^{-2}$.

La scheda di ingresso relativa all'induttore vale in questo caso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
				2	.	5	0	0	D	-	2			1		4

L'esempio presente corrisponde alla situazione di compensazione dello stadio amplificatore. Come si vede chiaramente dalla stampa di uscita del calcolatore, la tensione di uscita raggiunge il valore di regime rapidamente senza oltrepassarlo in corrispondenza al passo 27-simo.

Per questa ragione tronciamo la stampa stessa in corrispondenza al passo 40-simo.

– Uscita del programma.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 4
NUMERO INDUTTORI = 1
NUMERO CONDENSATORI = 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 1
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 0
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 1
NUMERO NULLORI= 0

RES.N. 1 .195+000 4 5
RES.N. 2 .100+000 1 2
RES.N. 3 .100+001 2 5
RES.N. 4 .100+001 3 5
IND.N. 1 .250-001 1 4 CORR.IN.= .000
COND.N. 1 .128+001 2 5 TENS.IN.= .000
G.CORR.N. 1 .100+001 1 5
GEN.CONTR.TENS.N: 1 .500+002 2 5 3 5

SIMULAZIONE, N.ISTANTI = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .400-001

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

TEMPO NODI : 1 3
0 .000 .107+000 -.712+000
1 .400-001 .119+000 -.201+001
2 .800-001 .129+000 -.307+001

```

(segue)

3	.120+000	.137+000	-.394+001
4	.160+000	.143+000	-.465+001
5	.200+000	.148+000	-.523+001
6	.240+000	.152+000	-.569+001
7	.280+000	.155+000	-.606+001
8	.320+000	.157+000	-.636+001
9	.360+000	.159+000	-.660+001
10	.400+000	.160+000	-.680+001
11	.440+000	.162+000	-.695+001
12	.480+000	.162+000	-.707+001
13	.520+000	.163+000	-.717+001
14	.560+000	.164+000	-.725+001
15	.600+000	.164+000	-.731+001
16	.640+000	.165+000	-.735+001
17	.680+000	.165+000	-.739+001
18	.720+000	.165+000	-.742+001
19	.760+000	.165+000	-.745+001
20	.800+000	.165+000	-.746+001
21	.840+000	.165+000	-.748+001
22	.880+000	.165+000	-.749+001
23	.920+000	.165+000	-.750+001
24	.960+000	.166+000	-.751+001
25	.100+001	.166+000	-.751+001
26	.104+001	.166+000	-.751+001
27	.108+001	.166+000	-.752+001
28	.112+001	.166+000	-.752+001
29	.116+001	.166+000	-.752+001
30	.120+001	.166+000	-.752+001
31	.124+001	.166+000	-.753+001
32	.128+001	.166+000	-.753+001
33	.132+001	.166+000	-.753+001
34	.136+001	.166+000	-.753+001
35	.140+001	.166+000	-.753+001
36	.144+001	.166+000	-.753+001
37	.148+001	.166+000	-.753+001
38	.152+001	.166+000	-.753+001
39	.156+001	.166+000	-.753+001
40	.160+001	.166+000	-.753+001

Esempio III.D.7.

Determinare l'andamento della tensione v_u nel circuito di fig.III.D.5, nel caso che L assuma il valore normalizzato 0,1.

La scheda di ingresso relativa all'induttore vale in questo caso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

L'esempio presente corrisponde alla situazione di sovracompensazione dello stadio amplificatore. Come si vede chiaramente dalla stampa di uscita del calcolatore, la tensione di uscita tende al valore di regime con oscillazioni che superano il valore

di regime. Si riporta anche in questo caso solo una porzione dell'intero intervallo considerato, sufficiente a rilevare quanto detto.

- Uscita del programma.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 4
NUMERO INDUTTORI = 1
NUMERO CONDENSATORI = 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 1
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 0
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 1
NUMERO NULLORI= 0

RES.N. 1 .195+000 4 5
RES.N. 2 .100+000 1 2
RES.N. 3 .100+001 2 5
RES.N. 4 .100+001 3 5
IND.N. 1 .100+000 1 4 CORR.IN.= .000
COND.N. 1 .128+001 2 5 TENS.IN.= .000
G.CORR.N. 1 .100+001 1 5
GEN.CCNR.TENS.N: 1 .500+002 2 5 3 5

SIMULAZIONE: N.ISTANTI = 100
INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO = .400-001

TENSIONI DEI NODI RISP. AL NODO 5

TEMPO NODI : 1 3
0 .000 .113+000 -.753+000
1 .400-001 .137+000 -.220+001
2 .800-001 .158+000 -.352+001
3 .120+000 .177+000 -.473+001
4 .160+000 .193+000 -.581+001
5 .200+000 .206+000 -.676+001
6 .240+000 .217+000 -.759+001
7 .280+000 .225+000 -.831+001
8 .320+000 .232+000 -.892+001
9 .360+000 .236+000 -.942+001
10 .400+000 .239+000 -.983+001
11 .440+000 .240+000 -.101+002
12 .480+000 .240+000 -.104+002
13 .520+000 .239+000 -.105+002
14 .560+000 .237+000 -.106+002
15 .600+000 .234+000 -.106+002
16 .640+000 .231+000 -.106+002
17 .680+000 .227+000 -.106+002
18 .720+000 .223+000 -.105+002
19 .760+000 .218+000 -.103+002
20 .800+000 .213+000 -.102+002
21 .840+000 .209+000 -.100+002
22 .880+000 .204+000 -.982+001
23 .920+000 .199+000 -.962+001
24 .960+000 .195+000 -.943+001
25 .100+001 .190+000 -.923+001
26 .104+001 .186+000 -.903+001
27 .108+001 .182+000 -.883+001
28 .112+001 .179+000 -.865+001
29 .116+001 .175+000 -.847+001
30 .120+001 .172+000 -.830+001
31 .124+001 .170+000 -.815+001
32 .128+001 .167+000 -.801+001
33 .132+001 .165+000 -.788+001

```

(segue)

34	.136+001	.164+000	-.776+001
35	.140+001	.162+000	-.765+001
36	.144+001	.161+000	-.756+001
37	.148+001	.160+000	-.748+001
38	.152+001	.159+000	-.741+001
39	.156+001	.159+000	-.736+001
40	.160+001	.158+000	-.731+001
41	.164+001	.158+000	-.727+001
42	.168+001	.158+000	-.725+001
43	.172+001	.158+000	-.723+001
44	.176+001	.158+000	-.721+001
45	.180+001	.158+000	-.721+001
46	.184+001	.159+000	-.721+001
47	.188+001	.159+000	-.721+001
48	.192+001	.160+000	-.722+001

III.E - Riferimenti bibliografici.

È importante notare che nel presente capitolo sono stati considerati i circuiti a costanti concentrate lineari e permanenti. Quando le ipotesi precedenti non sono più verificate è necessario utilizzare tecniche di analisi di tipo diverso da quelle descritte. Si veda ad esempio: G.C. Temes, S.K. Mitra, «Modern filter theory and design» J.Wiley, 1973, capitolo 10, per quanto riguarda il caso in cui cada l'ipotesi di permanenza ed L.O. Chua, «Introduction to non linear network theory», Mc Graw-Hill, 1969, per quanto riguarda il caso in cui cada l'ipotesi di linearità.

Le grandezze elettriche sono state costantemente supposte determinate, cioè si è escluso dalla trattazione il caso in cui una grandezza elettrica sia nota solo attraverso le sue proprietà statistiche (grandezze aleatorie). Si veda ad esempio, per un'introduzione a questo argomento, il § II.6 di G. Biorci, «Fondamenti di elettrotecnica», op. cit. e per maggiori dettagli: P. Mandarini: «Teoria dei segnali», Ed. Goliardica, Roma, 1976, Cap. III.

Le tecniche di analisi svolte nel capitolo richiedono essenzialmente la conoscenza della trasformazione di Laplace e dei metodi alle differenze finite. In ambedue i casi è stato introdotto il minimo di supporto analitico necessario, rimandando in nota alla letteratura tecnica. A completamento di ciò, è opportuno mettere in evidenza come sia stato necessario utilizzare nozioni riguardanti la teoria delle distribuzioni, nel caso dell'introduzione dell'impulso di Dirac. La definizione di tale impulso presenta infatti difficoltà insormontabili nell'ambito della teoria usuale delle funzioni, come si evince chiaramente da A. Ghizzetti: «Calcolo simbolico», Ed. Zanichelli, 1943, pag. 58 ÷ 62.

Il metodo alle differenze finite impiegato è stato quello trapezoidale e si è rinviata alla letteratura tecnica la descrizione degli altri algoritmi possibili. Tuttavia è da ricordare l'importanza basilare che riveste la scelta dell'intervallo di campionamento. Tale intervallo in particolare può essere anche variabile ed in ogni caso va controllato, ad esempio con la tecnica esposta nei §12.7 e 12.8 di L.Chua, Pen-Min-Lin, op.cit.

Per quanto riguarda il programma di calcolo descritto nel capitolo, è stato messo in evidenza che esso ha finalità essenzialmente didattiche. A livello professionale sono disponibili numerosi programmi di complessa architettura. Si veda ad esempio per informazioni generali R. W. Jensen, L.P. Mc Namee, «Handbook of circuit analysis languages and techniques», Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

*

CAPITOLO IV

FUNZIONI DI RETE

~~IV.1~~ - Eccitazione e risposta di un circuito.

Un circuito elettrico diviene sede di fenomeni elettrici sotto la azione di eccitazioni di origine sia esterna che interna al circuito stesso. Le eccitazioni di origine esterna sono «rappresentate» dai generatori indipendenti, le cui grandezze imprese sono imposte dall'esterno; le eccitazioni di origine interna sono quelle dovute ai generatori indipendenti presenti nei circuiti equivalenti secondo Laplace dei componenti reattivi, che tengono conto delle condizioni iniziali di questi, tramite le loro grandezze imprese. Dal punto di vista dell'analisi di un circuito, i due tipi di generatori sono perfettamente equivalenti ed indistinguibili. Le loro grandezze imprese sono le «cause» dei fenomeni elettrici che si svolgono nel circuito e le grandezze elettriche conseguenti sono i relativi «effetti» o «risposte» del circuito.

Il legame tra effetto e causa nei circuiti che consideriamo è facilmente caratterizzabile per la linearità degli stessi, in conseguenza della quale l'effetto di ciascuna causa risulta indipendente dalla presenza delle altre e dipendente in modo semplice dalla causa stessa. La caratterizzazione quantitativa di tale legame è l'oggetto del presente capitolo.

~~IV.1.1~~ - Caso di una sola eccitazione.

Il legame tra una qualsiasi eccitazione $e(t)$ (grandezza impressa di un generatore di tensione o corrente) ed una qualsiasi risposta $u(t)$ (tensione o corrente che si stabilisce nel circuito) è in generale di tipo integro-differenziale, come visto nel cap. III. Solo nel caso particolare

dei circuiti senza memoria, tale legame si riduce ad una proporzionalità diretta, cioè:

$$(IV.1.1) \quad u(t) = a e(t)$$

in cui a dipende dalla struttura del circuito.

Il legame di semplice proporzionalità vale per una classe di circuiti molto più ampia, se si utilizza il metodo della trasformata di Laplace. Infatti nel cap. III è stato fatto vedere che qualsiasi circuito lineare e permanente con memoria può essere analizzato in modo del tutto simile ad un circuito senza memoria, se in luogo di considerare il circuito assegnato nel dominio del tempo, se ne considera un altro equivalente nel dominio della variabile s . In tale nuovo circuito si hanno, al posto delle grandezze $e(t)$ e $u(t)$, le corrispondenti trasformate, cioè $E(s)$ trasformata della eccitazione ed $U(s)$ trasformata della risposta. Tra $U(s)$ ed $E(s)$ esiste di conseguenza un legame di semplice proporzionalità. Occorre però notare che la costante di proporzionalità, pur non dipendendo da $E(s)$ per la linearità del circuito, dipende dalla variabile s , cioè:

$$(IV.1.2) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

L'espressione (IV.1.2) ha validità molto più ampia della (IV.1.1), in quanto si riferisce a qualsiasi circuito per il quale si può applicare il metodo della trasformata di Laplace⁽¹⁾.

La funzione $F(s)$, che permette di ottenere nel dominio di s la risposta a partire dall'eccitazione, prende il nome di «funzione di rete». Vale quindi la seguente definizione:

Definizione IV.1.1 - «Si definisce come funzione di rete il rapporto fra la $\mathcal{L}$ -trasformata dell'effetto (risposta), dovuto ad una determinata causa (eccitazione) e la $\mathcal{L}$ -trasformata della causa stessa».

È evidente che la funzione di rete dipende: 1) dalla struttura del circuito; 2) dal tipo e posizione del generatore di eccitazione; 3) dal tipo e posizione della grandezza elettrica considerata come risposta. Vedremo l'influenza di questi fattori nel § IV.2 e nell'appendice IV.A.

(1) - È opportuno notare il fatto che la (IV.1.1) è un caso particolare della (IV.1.2). Infatti nel caso in cui $F(s)$ non dipende da s , come ad esempio per i circuiti senza memoria, si ottiene:

$$U(s) = F E(s)$$

che equivale alla (IV.1.1) nel dominio del tempo, essendo F una costante.

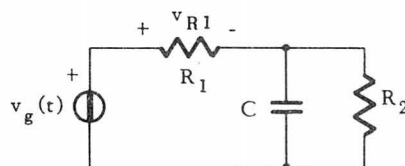
Esempio IV.1.1

Nel circuito di fig. IV.1.1 determinare la funzione di rete, relativa alla tensione ai capi del resistore R_1 (risposta) ed alla tensione del generatore⁽¹⁾.

La determinazione della funzione di rete richiede di considerare una sola causa; supponiamo perciò scarico il condensatore all'istante iniziale. Di conseguenza il circuito nel dominio di s che corrisponde a quello d'interesse è come indicato in figura IV.1.2.

Fig. IV.1.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.1.1. I valori dei componenti sono:

$$R_1 = 3, R_2 = 1, C = 2 \text{ } (\Omega, F)$$



Prendendo il nodo 1 come riferimento e scrivendo l'equazione al nodo 3 delle correnti uscenti, si ottiene:

$$E_3 \left(sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + V_g(s) \cdot \left(sC + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

Da cui, essendo $V_{R1}(s) = -E_3$, si ha:

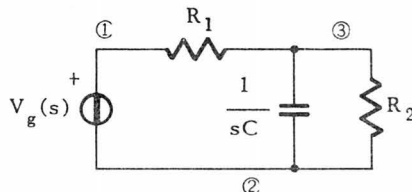
$$V_{R1}(s) = \frac{sC + \frac{1}{R_2}}{sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} V_g(s)$$

Quindi risulta:

$$V_{R1}(s) = \frac{sCR_1R_2 + R_1}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2} V_g(s)$$

Tenendo conto che nel caso presente $V_g(s) = E(s)$, $U(s) = V_{R1}(s)$, si ha, in base alla (IV.1.2).

Fig. IV.1.2 - Circuito che corrisponde nel dominio di s a quello di fig. IV.1.1.



(1) - Nell'esempio l'andamento della tensione $v_g(t)$ non è stato indicato, poichè la funzione di rete dipende solo dal tipo e dalla posizione del generatore di eccitazione.

$$F(s) = \frac{s C R_1 R_2 + R_1}{s C R_1 R_2 + R_1 + R_2}$$

$$s + \frac{R_1}{C R_1 R_2} = \frac{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$F(s) = \frac{6s + 3}{6s + 4}$$

$$\frac{s}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}} + \frac{\frac{R_1}{C R_1 R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}} =$$

che è la funzione di rete richiesta.

Osservazione IV.1.1

$$= 1 - \frac{\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}} + \frac{\frac{R_1}{C R_1 R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}} = 1 - \frac{\frac{R_2}{C R_1 R_2}}{s + \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}} \neq 1$$

Dalla definizione di funzione di rete si può dedurre che essa, pur essendo una funzione di s , non è una trasformata di Laplace, ma semplicemente un rapporto di trasformate di Laplace⁽¹⁾. L'utilità della nozione di funzione di rete deriva dal fatto che essa è un operatore molto semplice che permette di ottenere la risposta a partire dalla eccitazione, qualunque essa sia.

Osservazione IV.1.2

L'espressione (IV.1.2) definisce la funzione di rete $F(s)$ come rapporto fra effetto e causa nel dominio di s . Si sarebbe potuto con pari validità definire una funzione $G(s)$ come rapporto nel dominio di s fra la causa e l'effetto, in base alla seguente relazione:

(IV.1.3)

$$E(s) = G(s) U(s)$$

In alcuni casi viene effettivamente utilizzata l'espressione (IV.1.3); tuttavia occorre osservare che in generale la $G(s)$ non è una funzione di rete, ma l'inverso di una tale funzione, risultando $G(s) = 1/F(s)$. Tale distinzione è necessaria, poichè le funzioni di rete e le loro inverse non godono delle stesse proprietà. Un esempio molto semplice in tal senso è il seguente. Si consideri il circuito «partitore resistivo» di figura IV.1.3. In questo caso la causa è la tensione V_g , mentre l'effetto è la tensione V_u ; la funzione di rete risulta:

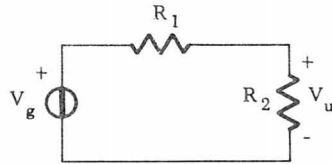
$$(IV.1.4) \quad F(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

mentre il suo inverso:

$$(IV.1.5) \quad G(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

(1) - È opportuno mettere in evidenza che un rapporto di trasformate *non* è mai legato in modo semplice al rapporto delle rispettive grandezze nel dominio del tempo.

Fig.IV.1.3 - Partitore resistivo.



Entrambe le funzioni non dipendono da s , poichè il circuito è senza memoria. Tuttavia mentre $F(s)$ è sempre minore di uno (e tale proprietà è caratteristica del partitore), $G(s)$ è sempre maggiore di uno. La differenza di proprietà delle funzioni di rete e delle relative inverse verrà discussa in maggiore dettaglio successivamente.

IV.1.2 - Caso di più eccitazioni.

Nel caso che siano presenti nel circuito più eccitazioni, la risposta si ottiene come somma delle risposte dovute alle singole eccitazioni, ciascuna agente da sola. Tenendo conto che le eccitazioni sono dovute o a cause esterne o a cause interne (generatori presenti nei circuiti equivalenti dei componenti reattivi), si ottiene per la risposta la seguente espressione:

$$(IV.1.6) \quad U(s) = \sum_{i=1}^{N_g} F_i(s) E_i(s) + \sum_{i=1}^{N_c} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

dove:

$U(s)$ è la generica risposta nel circuito in esame;

$E_i(s)$ è la trasformata di Laplace della i -esima eccitazione di tipo esterno (relativa ad un generatore di tensione o di corrente);

N_g è il numero delle eccitazioni di tipo esterno;

$F_i(s)$ è la funzione di rete relativa all'eccitazione $E_i(s)$;

$v_i(0^-)$ è la tensione ai capi dell' i -esimo condensatore all'istante $t=0^-$;

N_c è il numero dei condensatori presenti;

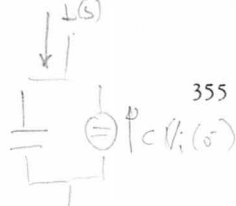
$i_i(0^-)$ è la corrente relativa all' i -esimo induttore all'istante $t=0^-$;

N_L è il numero degli induttori presenti.

Le funzioni $H_i(s)$ e $K_i(s)$ differiscono da una funzione di rete per un fattore che dipende dal particolare generatore usato per le condizioni iniziali. Precisamente, si ha la seguente situazione:

1) nel caso che si consideri per il condensatore un generatore di tensione, la cui grandezza impressa è $v_i(0^-)/s$, la funzione di rete relativa è:

$$s H_i(s)$$



2) nel caso che si consideri per il condensatore un generatore di corrente, la cui grandezza impressa è $C_i v_i(0^-)$, la funzione di rete relativa è:

$$\boxed{\frac{1}{C_i} H_i(s)} ;$$

3) nel caso che si consideri per l'induttore un generatore di tensione, la cui grandezza impressa è $L_i i_i(0^-)$, la funzione di rete relativa è:

$$\boxed{\frac{1}{L_i} K_i(s)} ;$$

4) nel caso che si consideri per l'induttore un generatore di corrente, la cui grandezza impressa è $i_i(0^-)/s$, la funzione di rete relativa è:

$$\boxed{s K_i(s)}$$

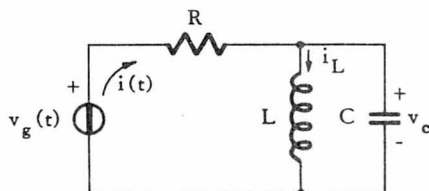
Esempio IV.1.2

Determinare le funzioni di rete relative alle singole eccitazioni per il circuito di fig.IV.1.4, essendo la risposta d'interesse la corrente $i(t)$ che percorre il generatore di tensione.

Fig.IV.1.4 - Circuito considerato nell'esempio IV.1.2. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, L = 2, C = 1, v_g(t) = u_{-1}(t)$$

$$v_c(0^-) = 2, i_L(0^-) = 1 \text{ (}\Omega, \text{H, F, V, A)} \quad \text{}$$



Il circuito equivalente nel dominio di s , ottenuto utilizzando per i componenti reattivi gli schemi di tipo serie, è mostrato in fig.IV.1.5. Applicando il metodo di analisi su base maglie, si ottiene:

$$\begin{cases} (R + sL)I_1 + sL I_2 = V_g(s) + L i_L(0^-) \\ sL I_1 + \left(sL + \frac{1}{sC} \right) I_2 = \frac{v_c(0^-)}{s} + L i_L(0^-) \end{cases}$$

Ricavando la corrente I_2 dalla seconda equazione si ha:

$$I_2 = \frac{sC}{s^2LC + 1} \left[\frac{v_c(0^-)}{s} + L i_L(0^-) - sL I_1 \right]$$

Sostituendo nella prima equazione tale espressione, si ottiene:

$$\left(R + \frac{sL}{s^2LC + 1}\right) I_1 = V_g(s) - \frac{sLC}{s^2LC + 1} v_c(0^-) + \frac{L}{s^2LC + 1} i_L(0^-)$$

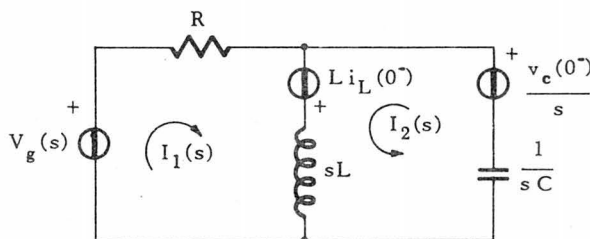


Fig.IV.1.5 - Circuito di fig.IV.1.4 trasformato nel dominio di s .

L'espressione della $I_1(s)$ è quindi:

$$I_1(s) = \frac{s^2LC + 1}{s^2RLC + sL + R} V_g(s) - \frac{sLC}{s^2RLC + sL + R} v_c(0^-) + \frac{L}{s^2RLC + sL + R} i_L(0^-)$$

Confrontando tale espressione con la (IV.1.6) si ha:

$$U(s) = I_1(s)$$

$$N_g = 1 \quad ; \quad E_1(s) = V_g(s)$$

$$F_1(s) = \frac{s^2LC + 1}{s^2RLC + sL + R}$$

$$N_c = 1 \quad ; \quad v_1(0^-) = v_c(0^-)$$

$$H_1(s) = \frac{-sLC}{s^2RLC + sL + R}$$

$$N_L = 1 \quad ; \quad i_1(0^-) = i_L(0^-)$$

$$K_1(s) = \frac{L}{s^2RLC + sL + R}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$F_1(s) = \frac{2s^2 + 1}{2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad H_1(s) = -\frac{2s}{2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad K_1(s) = \frac{2}{2s^2 + 2s + 1}$$

Quindi le funzioni di rete richieste sono:

$$F_1(s) \quad ; \quad - \frac{2s^2}{2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

IV.2 - Classificazione delle funzioni di rete.

Abbiamo osservato, in relazione alla definizione di funzione di rete, che essa dipende da tre fattori: struttura del circuito, posizione e tipo della causa e dell'effetto. Nel presente paragrafo esaminiamo l'influenza degli ultimi due fattori, rimandando per il primo all'appendice IV. A. L'influenza di questi fattori è notevole e conviene che sia messa in evidenza già a livello di definizione. Precisamente dal punto di vista della posizione della causa e dell'effetto le funzioni di rete si distinguono in funzioni di trasferimento e funzioni di immettenza di ingresso (o semplicemente di immettenza). Nel primo caso la causa e l'effetto si riferiscono a coppie di morsetti differenti nel circuito e possono essere a seconda dei casi o tensioni o correnti; nel secondo caso invece la causa e l'effetto si riferiscono alla stessa coppia di morsetti e perciò una deve essere una tensione e l'altra una corrente o viceversa. Ad esempio nel caso considerato nell'esempio IV.1.1 la funzione di rete richiesta è una funzione di trasferimento (l'eccitazione è infatti una tensione, mentre la risposta è la tensione ai capi di un altro bipolo); nel caso dell'esempio IV.1.2, invece, la funzione di rete $F_1(s)$ è una funzione di immettenza di ingresso, poichè l'eccitazione è la tensione ai capi di un bipolo e la risposta è la corrente che lo attraversa.

Dal punto di vista del tipo della causa e dell'effetto, le funzioni di rete si distinguono in quattro tipi, a seconda che l'eccitazione e la risposta siano tensioni o correnti. La nomenclatura utilizzata nei quattro casi è riportata in tab.IV.2.1. Si può notare da questa tabella che quando l'eccitazione e la risposta sono entrambe tensioni (o entrambe correnti) si ha senz'altro il caso di una funzione di trasferimento. Nel caso invece di impedenza o ammettenza, esse possono essere sia funzioni di trasferimento sia funzioni d'immettenza d'ingresso.

Infine è opportuno mettere in evidenza che le funzioni di rete non hanno dimensioni fisiche nel caso che l'eccitazione e la risposta siano dello stesso tipo. Nei rimanenti due casi, esse hanno le dimensioni di ohm quando si tratta di un'impedenza e di mho quando si tratta di un'ammettenza.

Tabella IV.2.1 - I vari tipi di funzioni di rete che si ottengono tenendo conto della natura dell'eccitazione e della risposta.

Eccitazione Risposta	Tensione	Corrente
	Tensione	Corrente
Tensione	Funzione di trasferimento in tensione	Impedenza
Corrente	Ammettenza	Funzione di trasferimento in corrente

Osservazione IV.2.1

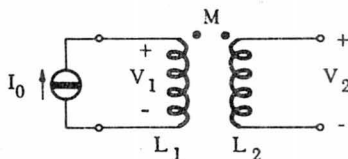
Le definizioni di impedenza ed ammettenza introdotte in tab.IV.2.1 sono congruenti con le definizioni di tali grandezze date nel cap.III e ne rappresentano la naturale estensione. Ciò può essere visto chiaramente nel seguente caso particolare. Consideriamo due induttori accoppiati mutuamente ed esaminiamo dapprima il caso in cui sia presente una sola eccitazione applicata ad uno di essi (generatore di corrente) e si prenda come risposta la tensione ai suoi capi (fig.IV.2.1). Supponendo che gli induttori siano a riposo all'istante $t = 0^-$ ed usando la trasformata di Laplace, si ha che:

$$(IV.2.1) \quad V_1(s) = s L_1 I_0(s)$$

In questa situazione, $s L_1$ è l'impedenza del primo induttore, già introdotta nel cap.III, e che in base alla tab.IV.2.1 rappresenta un'immettenza d'ingresso del tipo impedenza, in quanto la causa è la corrente del generatore e l'effetto è la tensione ai suoi capi. Consideriamo ora come effetto la tensione V_2 ; dalle relazioni costitutive degli induttori accoppiati mutuamente si ha che:

$$(IV.2.2) \quad V_2 = s M I_0$$

Fig.IV.2.1 - Induttori accoppiati mutuamente.



Dalla tab.IV.2.1, vediamo che $s M$ è una funzione di trasferimento del tipo impedenza.

In conclusione, dall'esame delle relazioni costitutive degli induttori accoppiati mutuamente, cioè:

(IV.2.3)

$$V_1 = sL_1 I_1 + sM I_2$$

$$V_2 = sM I_1 + sL_2 I_2$$

si vede chiaramente la congruenza delle definizioni di tab.IV.2.1 con quelle del cap.III, in quanto tutte le funzioni sL_1 , sL_2 , sM sono funzioni di rete del tipo impedenza, le prime due funzioni d'ingresso, l'ultima di trasferimento.

Osservazione IV.2.2

Nell'osservazione IV.1.2 è stato fatto notare che in generale non sono delle funzioni di rete quelle funzioni ottenute considerando nel dominio di s il rapporto fra eccitazione e risposta (e non come dalla definizione il rapporto fra risposta ed eccitazione); tali funzioni sono infatti inverse di funzioni di rete e corrispondono al fatto fisico di uno scambio fra causa ed effetto. Tale distinzione rimane essenziale per le funzioni di trasferimento, mentre risulta superflua nel caso delle funzioni di immittenza di ingresso; infatti in quest'ultimo caso si può considerare come eccitazione la tensione, ottenendo come risposta la corrente, ovvero come eccitazione la corrente ottenendo come effetto la tensione. Il fenomeno elettrico è nei due casi il medesimo; ciò implica che per ogni bipolo l'impedenza d'ingresso è sempre l'inversa dell'ammittenza d'ingresso. Ambedue queste grandezze appartengono alla classe delle immittenze e perciò si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà IV.2.1 - «L'immittenza d'ingresso e la sua inversa sono entrambe funzioni di rete».

Tale proprietà verrà utilizzata nel § IV.4.

IV.3 - La risposta impulsiva.

Nell'osservazione IV.1.1 è stato messo in evidenza che una funzione di rete $F(s)$ non è la trasformata di Laplace di una grandezza elettrica presente nel circuito, ma bensì un rapporto di trasformate. È tuttavia possibile individuare una situazione nella quale una funzione di rete assume tale significato, facendo riferimento alla relazione che la definisce, cioè alla:

(IV.3.1)

$$U(s) = F(s) E(s)$$

Funz. di Rete

Ponendo infatti nella (IV.3.1):

$$(IV.3.2) \quad E(s) = 1$$

si ha che la risposta corrispondente è proprio uguale alla funzione di rete, cioè vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.3.1 - «Nel dominio di s , la risposta di un circuito coincide con la corrispondente funzione di rete, quando la funzione di eccitazione è uguale ad uno».

La proprietà IV.3.1 può essere posta in una forma più significativa, effettuando l'antitrasformata della (IV.3.2) e della risposta, cioè:

$$(IV.3.3) \quad \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \mathcal{L}^{-1}[1] = u_0(t)$$

$$(IV.3.4) \quad \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t)$$

La risposta $h(t)$ ha un significato fisico preciso: essa rappresenta l'andamento nel tempo dell'effetto quando la causa ha un andamento nel tempo coincidente con un impulso unitario. Tale risposta prende il nome di *risposta impulsiva*.

Dall'espressione (IV.3.4) si vede che la risposta impulsiva è analiticamente espressa dall'antitrasformata della funzione di rete. Vale perciò la seguente proprietà, che rappresenta la traduzione nel dominio del tempo della proprietà IV.3.1.

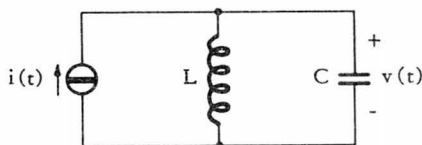
Proprietà IV.3.2 - «La risposta impulsiva è uguale all'antitrasformata della corrispondente funzione di rete».

La risposta impulsiva, come la funzione di rete, dipende dalle posizioni dell'impulso di eccitazione e della risposta. Di conseguenza in un circuito si possono definire più risposte impulsive, ciascuna delle quali corrisponde ad una particolare funzione di rete.

Esempio IV.3.1

Nel circuito di fig.IV.3.1 determinare la risposta impulsiva, relativa alla corrente $i(t)$ (eccitazione) e alla tensione $v(t)$ (risposta).

Fig.IV.3.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.3.1. I valori dei componenti sono: $L = 1$, $C = 1$ (H, F).



Ricaviamo la funzione di rete relativa alla risposta impulsiva richiesta. A questo scopo trasformiamo il circuito assegnato come mostrato in fig. IV.3.2. Si ottiene:

$$I(s) = V(s) \left(sC + \frac{1}{sL} \right) \quad \text{Base Nodi}$$

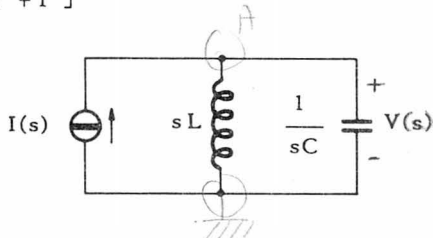
e quindi:

$$F(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{sL}{s^2LC + 1} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Indicando con $h(t)$ la risposta impulsiva, si ha in base alla proprietà IV.3.2:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] = \cos t \cdot u_{-1}(t)$$

Fig. IV.3.2 - Circuito di figura IV.3.1 trasformato nel dominio di s .



L'importanza della nozione di risposta impulsiva risiede nella seguente proprietà:

Proprietà IV.3.3 - «In un circuito lineare e permanente, se è nota la risposta impulsiva $h(t)$, è univocamente determinata la risposta ad una generica eccitazione $e(t)$ ⁽¹⁾».

Infatti, per la proprietà IV.3.2, si può ottenere la funzione di rete corrispondente:

$$F(s) = \mathcal{L} [h(t)]$$

Perciò, dopo aver calcolato la trasformata dell'eccitazione, cioè:

$$E(s) = \mathcal{L} [e(t)]$$

si ha per la trasformata della risposta:

$$U(s) = F(s) E(s)$$

e quindi:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} [U(s)]$$

(1) - Supponiamo che sia $h(t)$ sia $e(t)$ siano $\mathcal{L}$ -trasformabili.

In conclusione in un circuito lineare e permanente la risposta impulsiva è sufficiente per caratterizzare il comportamento del circuito in presenza di eccitazioni di qualsiasi tipo.

Esempio IV.3.2

Sapendo che un circuito lineare e permanente ha una risposta impulsiva:

$$h(t) = 3 e^{-2t} u_{-1}(t)$$

determinare la risposta $u(t)$ che corrisponde ad un'eccitazione a gradino $e(t) = u_{-1}(t)$.

Trasformando $h(t)$ si ottiene:

$$H(s) = \frac{3}{s+2}$$

D'altra parte si ha:

$$E(s) = \frac{1}{s}$$

Perciò la trasformata della risposta vale:

$$U(s) = \frac{3}{s(s+2)}$$

Sviluppando la $U(s)$ in frazioni parziali, si ha:

$$U(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

dove:

$$A = \left. \frac{3}{s+2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2} \quad ; \quad B = \left. \frac{3}{s} \right|_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

Quindi si ha, antitrasformando:

$$u(t) = 1,5 (1 - e^{-2t}) u_{-1}(t)$$

che rappresenta la risposta all'eccitazione a gradino.

Osservazione IV.3.1

È stato visto che i circuiti lineari e permanenti sono caratterizzati dalla seguente relazione tra risposta ed eccitazione:

$$(IV.3.5) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

Ci si può porre la domanda se sia possibile ottenere una relazione esplicita nel dominio del tempo tra la risposta $u(t)$ e l'eccitazione $e(t)$; tale relazione dovrà essere ovviamente di tipo integro-differenziale.

Per rispondere a tale domanda è necessario fare uso della nozione di risposta impulsiva e di una operazione integrale detta «prodotto integrale» o «prodotto di convoluzione»⁽¹⁾. Tale operazione è definita nel seguente modo:

Definizione IV.3.1 - «Assegnate due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$, si definisce prodotto integrale di tali funzioni la seguente espressione:

$$(IV.3.6) \quad f_3(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

L'utilità dell'operazione di prodotto integrale è dovuta al seguente teorema, che viene dimostrato nell'ambito della teoria della trasformazione di Laplace:

Teorema IV.3.1 - «La trasformata di Laplace del prodotto integrale di due funzioni è uguale al prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni stesse»⁽²⁾.

In base al teorema del prodotto integrale si ottiene, antitrasformando la (IV.3.5) e ricordando l'espressione (IV.3.4):

$$(IV.3.7) \quad u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s) E(s)] = \int_0^t h(\tau) e(t - \tau) d\tau$$

La (IV.3.7) rappresenta il legame diretto, nel dominio del tempo, fra l'eccitazione $e(t)$ e la risposta $u(t)$; in tale espressione la risposta impulsiva $h(t)$ tiene conto dell'azione del circuito. Quanto detto si può riassumere nella seguente proprietà:

Proprietà IV.3.4 - «La risposta $u(t)$ di un circuito lineare e permanente è uguale al prodotto integrale (prodotto di convoluzione) fra la risposta impulsiva $h(t)$ e la funzione di eccitazione $e(t)$ ».

(1) - Il prodotto integrale viene indicato spesso con la notazione abbreviata:

$$f_3(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

(2) - Tale teorema vale sotto opportune ipotesi restrittive per le quali si rimanda ai testi riguardanti le trasformate di Laplace. Si veda ad esempio: A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, op. cit., § IV.6.

L'espressione (IV.3.7) rappresenta la generalizzazione dell'espress. (IV.1.1) valida per i circuiti senza memoria. Infatti, per tali circuiti, la risposta impulsiva è un impulso di ampiezza a , cioè:

$$(IV.3.8) \quad h(t) = a u_0(t)$$

e perciò si ottiene dalla (IV.3.7):

$$(IV.3.9) \quad u(t) = \int_0^t a u_0(\tau) e(t-\tau) d\tau = a e(t-\tau) \Big|_{\tau=0} = a e(t)$$

Osservazione IV.3.2

La nozione di risposta impulsiva è molto più generale della nozione di funzione di rete; Quest'ultima, che vale nel dominio di s , può essere utilizzata solo per i circuiti lineari e permanenti; mentre la prima, che si riferisce a condizioni operative di funzionamento e non a proprietà matematiche, può essere considerata per qualunque circuito.

Per ottenere operativamente la risposta impulsiva di un circuito è necessario utilizzare una forma d'onda di eccitazione che approssimi in modo adeguato l'impulso unitario. Si può facilmente mostrare che ciò non è difficile da ottenersi nel caso dei circuiti lineari. Infatti l'impulso unitario può essere approssimato in questo caso in modo adeguato da una qualunque forma d'onda $e(t)$, che goda delle seguenti proprietà:

- 1) la funzione $e(t)$ è diversa da zero solo nell'intervallo $(0, \theta)$;
- 2) la risposta impulsiva $h(t)$ deve potersi considerare costante in detto intervallo, cioè $h(t-\theta) \approx h(t)$.

Per dimostrare la sufficienza delle suddette condizioni consideriamo il prodotto integrale fra $h(t)$ ed $e(t)$. Si ottiene⁽¹⁾:

$$(IV.3.10) \quad h_1(t) = \int_0^t e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Per la prima ipotesi, poichè $e(\tau)$ è nulla all'infuori dell'intervallo $(0, \theta)$, si può sostituire l'integrale (IV.3.10) con il seguente:

$$(IV.3.11) \quad h_1(t) = \int_0^\theta e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

(1) - Il prodotto integrale (IV.3.10) è stato espresso in forma diversa da quella considerata nella (IV.3.7), scambiando fra loro $e(t)$ ed $h(t)$. È facile dimostrare che le due forme sono equivalenti.

Per la seconda ipotesi risulta $h(t-\tau) \approx h(t)$, quando $0 < \tau < \theta$. Perciò si ha:

$$(IV.3.12) \quad h_1(t) = \int_0^\theta e(\tau) h(t) d\tau = h(t) \int_0^\theta e(\tau) d\tau$$

In conclusione la risposta $h_1(t)$ differisce dalla vera risposta impulsiva $h(t)$ per la quantità:

$$(IV.3.13) \quad a = \int_0^\theta e(\tau) d\tau$$

La risposta del circuito $h_1(t)$ ha quindi lo stesso andamento della risposta impulsiva ed inoltre la forma d'onda di eccitazione si comporta come se fosse impulsiva. Tuttavia essa non è un impulso unitario; la sua ampiezza infatti è pari alla quantità a (che si misura in volt sec).

D'altra parte in molte applicazioni non è possibile e spesso nemmeno conveniente approssimare l'impulso unitario meglio di quanto richiesto nell'ambito delle due ipotesi precedenti. Premesso che una forma d'onda esattamente impulsiva è fisicamente irrealizzabile, l'avvicinarsi troppo a tale forma d'onda potrebbe significare l'utilizzazione di variazioni tanto rapide nel tempo da rendere non più valide le ipotesi fatte sui modelli circuitali adottati; in particolare potrebbe non essere più valida l'ipotesi di costanti concentrate.

IV.4 - Proprietà delle funzioni di rete.

Come è stato detto precedentemente, una funzione di rete costituisce un operatore per passare, nel dominio di s , dalla funzione di eccitazione alla risposta del circuito. Una funzione di rete dipende, oltre che dalla posizione e dal tipo della eccitazione e della risposta, anche dalla struttura del circuito a cui si riferisce. È chiaro quindi che non si possono specificare le proprietà delle funzioni di rete se non viene precisata la classe di circuiti a cui si fa riferimento.

Nel presente paragrafo l'attenzione verrà limitata alle proprietà più generali delle funzioni di rete, rimandando per quelle più particolari all'appendice IV.A.

IV.4.1 - Proprietà derivanti dal carattere «costanti concentrate».

Per tutti i circuiti lineari e permanenti a costanti concentrate, le funzioni di rete, di qualsiasi tipo, godono delle seguenti proprietà.

Proprietà IV.4.1 - «Ogni funzione di rete di un circuito lineare, permanente, a costanti concentrate è una funzione razionale a coefficienti reali della variabile s ».

La proprietà IV.4.1 si dimostra in modo molto semplice. Consideriamo allo scopo, senza perdita di generalità, come funzione di eccitazione la grandezza impressa da un generatore di tensione ed analizziamo il circuito utilizzando il metodo delle maglie, dopo averlo trasformato nel dominio di s , ciò che si può fare in quanto è lineare e permanente per ipotesi. Detto allora $[I_m]$ il vettore delle trasformate di Laplace delle correnti di maglia, $[Z_m]$ la matrice delle impedenze di maglia e $[V_g]$ il vettore dei termini noti, si ottiene il seguente sistema di equazioni risolventi:

$$(IV.4.1) \quad [Z_m][I_m] = [V_g]$$

Si può osservare che ciascun elemento della matrice $[Z_m]$ è di tipo razionale a coefficienti reali nella variabile s , rappresentando la somma delle impedenze di ciascuna maglia, ovvero la somma delle impedenze in comune fra maglie diverse, in quanto il circuito è a costanti concentrate. Risolvendo il sistema si ha:

$$(IV.4.2) \quad [I_m] = [Z_m]^{-1} [V_g]$$

Ciascun elemento della matrice $[Z_m]^{-1}$ si ottiene effettuando il rapporto fra due opportuni determinanti della matrice $[Z_m]$. Perciò la matrice $[Z_m]^{-1}$ è formata da elementi coincidenti con funzioni razionali reali in s . Ricordando che si è supposta presente una sola eccitazione $V(s)$ si otterrà allora dalla (IV.4.2) la seguente espressione per la generica corrente di maglia:

$$(IV.4.3) \quad I_{mi} = F_i V(s)$$

dove F_i è un opportuno elemento della matrice $[Z_m]^{-1}$.

Di conseguenza ogni corrente del circuito risulta del tipo (IV.4.3), in quanto è una combinazione lineare con coefficienti $\pm 1,0$ delle correnti di maglia. Analogamente ogni tensione del circuito è del tipo (IV.4.3), in quanto si ottiene moltiplicando un'impedenza (funzione razionale reale in s nel caso presente) per una corrente.

È evidente che un risultato simile si sarebbe ottenuto se la funzione di eccitazione fosse stata la grandezza impressa di un generatore di corrente e si fosse applicato il metodo dei nodi o dei tagli per l'analisi del circuito.

In conclusione, ogni risposta di un circuito lineare, permanente a costanti concentrate è proporzionale all'eccitazione nel dominio di s tramite una funzione razionale reale della variabile s .

Osservazione IV.4.1

La proprietà IV.4.1 è stata implicitamente utilizzata in precedenza quando si è detto che nelle applicazioni usuali le funzioni di s delle quali è necessario effet-

tuare l'antitrasformazione sono funzioni razionali a coefficienti reali. Risulta infatti verificato tale fatto per tutte le risposte corrispondenti ad eccitazioni, la cui trasformata $E(s)$ sia a sua volta razionale a coefficienti reali, come avviene nella maggior parte dei casi d'interesse.

La proprietà di essere a coefficienti reali è essenziale, poichè garantisce il carattere reale dell'antitrasformata e quindi il carattere reale della risposta nel dominio del tempo (come è fisicamente necessario). Il carattere di essere a coefficienti reali per la $F(s)$ viene spesso espresso in un'altra forma equivalente, che si basa sulla seguente definizione:

Definizione IV.4.1 - «Una funzione di variabile complessa $F(s)$ è detta reale, se $F(s)$ è reale per s reale, cioè, se calcolando la funzione $F(s)$ sull'asse reale della variabile si ottiene una parte immaginaria uguale a zero».

È immediato verificare che una funzione razionale $F(s)$ risulta reale se e solo se risulta a coefficienti reali. Di conseguenza è del tutto equivalente dire funzione razionale reale ovvero funzione razionale a coefficienti reali. Quindi la proprietà IV.5.1 si può esprimere anche nel seguente modo:

Proprietà IV.5.2 - «Ogni funzione di rete di un circuito lineare, permanente, a costanti concentrate è una funzione razionale reale della variabile s ».

IV.4.2 - Proprietà derivanti dalla stabilità.

Un comportamento molto importante dei circuiti, che occorre conoscere a priori nelle applicazioni, è quello connesso con la stabilità. Un circuito è stabile se, sottoposto a sollecitazioni esterne di durata limitata, è capace di ritornare alla situazione di riposo dopo che le sollecitazioni esterne hanno finito di agire. Nel caso dei circuiti lineari e permanenti tale comportamento stabile può essere precisato facilmente in termini di risposta impulsiva. Infatti le eccitazioni di breve durata possono scegliersi, senza perdita di generalità, coincidenti con funzioni impulsive sia nel caso di generatori di tensione sia in quello di generatori di corrente. Tenendo conto che tali generatori possono essere situati dovunque nel circuito e che come risposta si può considerare qualsiasi grandezza elettrica presente nel circuito, ne deriva che affinché il circuito sia stabile è necessario che ogni possibile risposta impulsiva tenda a zero al crescere del tempo. Si può perciò adottare la seguente definizione di circuito stabile:

Definizione IV.4.2 - «Un circuito si dice stabile quando tutte le sue possibili risposte impulsive tendono a zero al crescere del tempo⁽¹⁾».

(1) - La stabilità definita in questo modo è spesso denominata «stabilità asintotica».

Ad ogni risposta impulsiva corrisponde una funzione di rete, come è stato fatto notare nel §IV.3. Nasce quindi il problema di determinare quali proprietà debba avere una funzione di rete $F(s)$, affinché la risposta impulsiva corrispondente $h(t)$ tenda a zero al crescere di t . Per la proprietà IV.3.2, si ha:

$$(IV.4.4) \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Poichè la funzione $F(s)$ è razionale e reale, la sua antitrasformata si ottiene considerandone lo sviluppo in frazioni parziali, descritto nell'appendice III. A. I termini che si ottengono con tale sviluppo sono dei seguenti tipi:

1) termini corrispondenti a poli reali:

$$(IV.4.5) \quad \frac{a_i}{(s - \alpha_i)^n} \quad a_i, \alpha_i \text{ reali} \\ n = 1, 2, \dots \quad = \frac{a_i}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha_i t} u_{-1}(t)$$

2) termini corrispondenti a coppie di poli complessi coniugati:

$$(IV.4.6) \quad \frac{A_i}{(s - s_0)^n} + \frac{A_i^*}{(s - s_0^*)^n} \quad A_i, s_0 \text{ complessi} \\ n = 1, 2, \dots$$

3) termini del tipo:

$$(IV.4.7) \quad a_i s^n$$

Questi termini sono presenti quando la funzione $F(s)$ è razionale impropria.

Calcoliamo il contributo di questi termini alla risposta impulsiva $h(t)$, effettuandone l'antitrasformata come indicato nell'appendice III. A. 5, e verificandone il comportamento al crescere di t .

1) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.5) hanno la seguente espressione:

$$(IV.4.8) \quad f_1(t) = \frac{a_i}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha_i t} u_{-1}(t)$$

Gli andamenti di tali funzioni $f_1(t)$ sono mostrati nella fig. IV.4.1, nei tre casi $\alpha_i < 0$, $\alpha_i = 0$, $\alpha_i > 0$.

Si vede chiaramente da questa figura che le funzioni $f_1(t)$ tendono a zero nel caso in cui risulti:

$$(IV.4.9) \quad \alpha_i < 0$$

Non tendono a zero, ma rimangono limitate al crescere di t , nel caso in cui risulti:

$$(IV.4.10) \quad \alpha_i = 0 \quad \text{e} \quad n = 1$$

Tendono all'infinito negli altri casi, cioè quando risulti:

$$(IV.4.11) \quad \boxed{\alpha_i > 0} \quad \text{oppure} \quad \alpha_i = 0, \quad n > 1$$

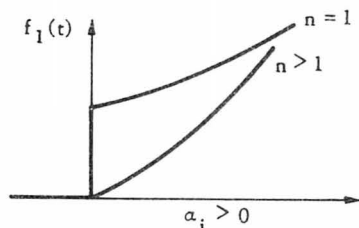
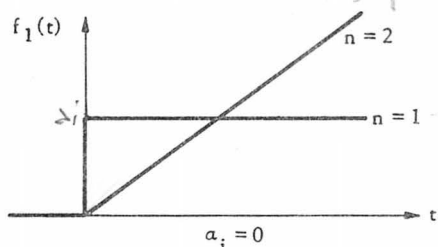
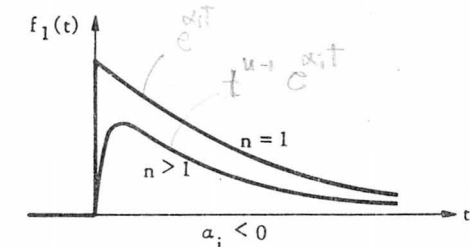


Fig. IV.4.1 - Andamento nel tempo delle funzioni che corrispondono ai termini del tipo (IV.4.5).

2) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.6) hanno la seguente espressione, come messo in evidenza in appendice III. A:

$$(IV.4.12) \quad f_2(t) = 2|A_i| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) u_{-1}(t)$$

dove $|A_i|$ è il modulo del numero A_i , φ_i è l'argomento del numero A_i , σ_0 è la parte reale del polo s_0 ed ω_0 ne è la parte immaginaria.

Gli andamenti delle funzioni $f_2(t)$ sono mostrati nella figura IV.4.2 nei vari casi possibili. Si vede chiaramente da questa figura che le funzioni $f_2(t)$ tendono a zero quando risulti:

$$(IV.4.13) \quad \sigma_0 = \text{Re}[s_0] < 0$$

Non tendono a zero, ma rimangono di valore limitato al crescere di t , nel caso in cui risulti:

$$(IV.4.14) \quad \sigma_0 = \text{Re}[s_0] = 0 \quad \text{ed} \quad n = 1$$

Tendono all'infinito negli altri casi, cioè quando si abbia:

$$(IV.4.15) \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} [s_0] > 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} [s_0] = 0 \quad \text{ed} \quad n > 1$$

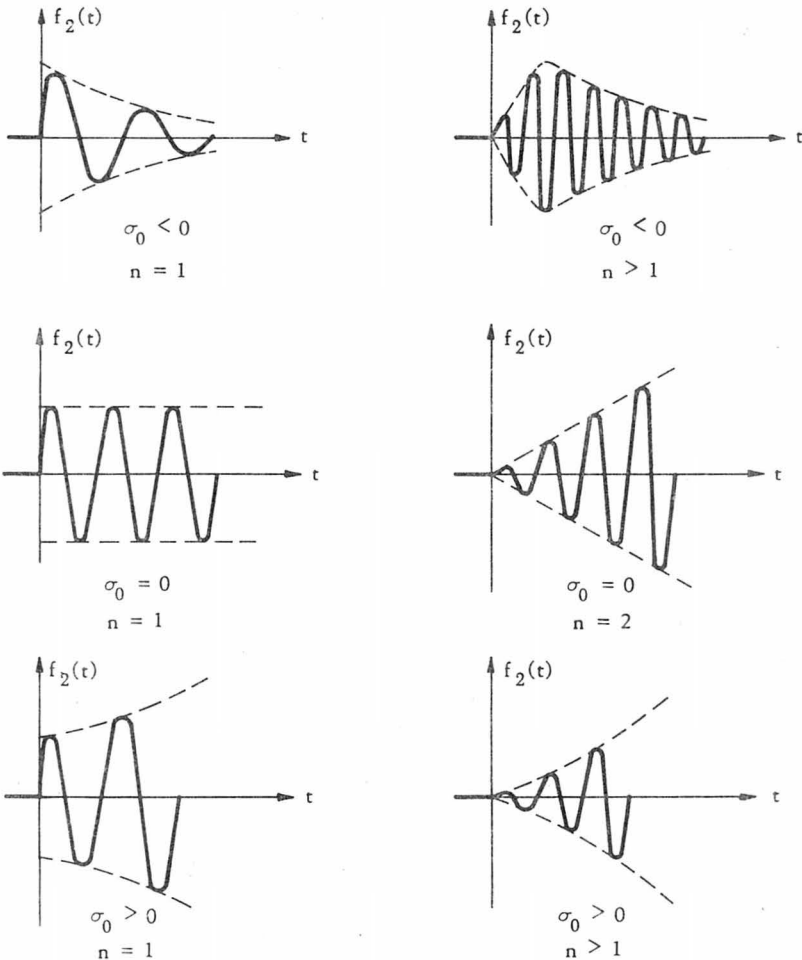


Fig.IV.4.2 - Andamento nel tempo delle funzioni che corrispondono ai termini del tipo (IV.4.6).

3) Le antitrasformate dei termini del tipo (IV.4.7) hanno la seguente espressione:

$$(IV.4.16)$$

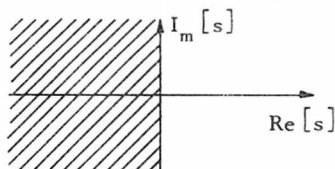
$$f_3(t) = a_i u_n(t)$$

Le funzioni $f_3(t)$ sono sempre nulle per t maggiore di zero.

Possiamo riassumere la precedente discussione nelle seguenti proprietà:

Proprietà IV.4.3 - « Condizione necessaria e sufficiente affinché una risposta impulsiva tenda a zero al crescere di t è che la corrispondente funzione di rete abbia tutti i poli con parte reale negativa. Tali poli debbono essere quindi contenuti tutti nel semipiano sinistro aperto della variabile s , indicato tratteggiato in fig.IV.4.3 e detto semipiano di stabilità. ».

Fig.IV.4.3 - Semipiano di stabilità (tratteggiato).



Proprietà IV.4.4 - « Condizione necessaria e sufficiente affinché una risposta impulsiva rimanga limitata al crescere di t è che la corrispondente funzione di rete abbia tutti i poli con parte reale minore od uguale a zero e che i poli con parte reale uguale a zero siano semplici. ».

Prendiamo ora in esame i possibili comportamenti di un circuito nei riguardi della stabilità, considerando separatamente le due grandi categorie dei circuiti passivi ed attivi. Tali comportamenti possono essere discussi in maniera intuitiva, valutando il bilancio energetico del circuito stesso. Tenendo presente che l'accertamento della stabilità avviene solo dopo che sono cessate le sollecitazioni esterne, la valutazione in questione riguarda i seguenti tipi di componenti:

- 1) componenti con memoria: tali componenti immagazzinano energia;
- 2) componenti dissipatori di energia: essi sottraggono energia al circuito. Se la loro azione prevale, si ha lo smorzamento di tutti i fenomeni elettrici e quindi un comportamento stabile;
- 3) componenti attivi: tali componenti forniscono energia al circuito. Se la loro azione prevale si ha un comportamento instabile.

Circuiti passivi.

I circuiti passivi sono quelli costituiti dai componenti immagazzinatori di energia e dissipatori. In assenza di eccitazioni esterne, tali circuiti non possono incrementare la propria energia e perciò l'andamen-

to nel tempo delle grandezze elettriche deve rimanere limitato al crescere di t . Di conseguenza vale per essi la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.5 - « Ogni risposta impulsiva di un circuito passivo rimane limitata al crescere del tempo ».

Per quanto riguarda la posizione dei poli delle funzioni di rete, si può allora applicare la proprietà IV.4.4, deducendo che tali poli si debbono trovare nel semipiano sinistro, compreso l'asse immaginario della variabile s e che questi ultimi devono essere semplici.

In particolare deve essere semplice l'eventuale polo all'infinito, ciò che si può dedurre nel seguente modo. Si supponga per assurdo che esista un circuito passivo avente una funzione di rete $F(s)$ con un polo multiplo all'infinito. Indichiamo con A tale circuito. Si consideri quindi un circuito B , ottenuto da quello A sostituendo: 1) ad ogni condensatore di capacità C un induttore di induttanza $1/C$; 2) ad ogni induttore di induttanza L un condensatore di capacità $1/L$.

È evidente che ogni funzione di rete del circuito B si ottiene sostituendo $1/s$ al posto della variabile s nella corrispondente funzione di rete del circuito A . In particolare il circuito B ha una funzione di rete pari a:

$$(IV.4.17) \quad G(s) = F\left(\frac{1}{s}\right)$$

Poichè abbiamo supposto che la funzione $F(s)$ abbia un polo multiplo per s che tende all'infinito, la funzione $G(s)$ in base alla relazione (IV.4.17) possiederà un polo multiplo per s che tende a zero. D'altra parte il circuito B è anch'esso passivo e quindi non può avere poli multipli sull'asse immaginario ed in particolare per $s = 0$. Si può quindi concludere che non esiste un circuito A passivo avente una funzione di rete con polo multiplo all'infinito.

Riassumendo quanto è stato detto sulle funzioni di rete di un circuito passivo, si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.6 - « I poli delle funzioni di rete di un circuito passivo possono essere dei seguenti tipi:

- 1) poli disposti nel semipiano sinistro della variabile s ;
- 2) poli semplici disposti sull'asse immaginario;
- 3) un polo semplice all'infinito⁽¹⁾.

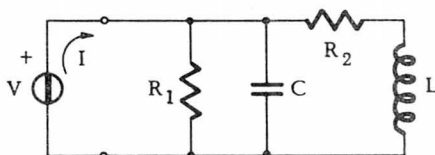
(1) - Il caso 3) può essere omissso, quando si segua la convenzione di considerare il punto $s = \infty$ come se fosse un punto dell'asse immaginario di s . Ciò può essere accettato proprio in base all'analogia di comportamento.

Rimane da discutere se il comportamento di un circuito passivo sia o meno stabile. Per quanto è stato detto precedentemente i poli del tipo 2) danno luogo ad un andamento che non tende a zero, nel dominio del tempo, per t che tende all'infinito; la presenza di tali poli indicherebbe quindi un comportamento non asintoticamente stabile. Tuttavia è necessario notare che ciò è dovuto ad un processo di idealizzazione dei componenti con memoria, in base al quale è stata ammessa come possibile l'evoluzione del fenomeno elettrico all'interno del circuito senza alcuna dissipazione di energia. Tale ipotesi, introdotta per comodità di calcolo, non risulta mai verificata in realtà, poichè ad ogni componente con memoria è sempre associato un elemento parassita che tiene conto delle inevitabili perdite. Per questa ragione è conveniente classificare un circuito passivo come circuito stabile, ricordando che i suoi eventuali poli sull'asse immaginario provengono da un processo di idealizzazione e corrispondono sempre nella realtà a poli disposti nel semipiano di stabilità. Tale corrispondenza può essere messa in una forma esatta, come vedremo successivamente nell'osservazione IV.4.2.

Esempio IV.4.1

Determinare i poli della funzione ammettenza d'ingresso del circuito di figura IV.4.4.

Fig.IV.4.4 - Circuito considerato nell'esempio IV.4.1.



La funzione ammettenza d'ingresso è pari al rapporto fra la corrente $I(s)$ e la tensione $V(s)$. Tale funzione può essere facilmente determinata risolvendo il circuito di fig.IV.4.4 mediante operazioni di serie e di parallelo. Si ottiene:

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R_2 + sL} = \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R_2 + sL}$$

Eseguendo i calcoli si ha:

$$Y(s) = \frac{I}{V} = \frac{s^2 L C R_1 + s(L + C R_1 R_2) + R_1 + R_2}{R_1 (sL + R_2)}$$

La funzione $Y(s)$ ha i seguenti poli:

$$s = -\frac{R_2}{L} \quad ; \quad s = \infty$$

Si vede che il polo al finito è reale e negativo e si trova perciò nel semipiano di stabilità. Il polo all'infinito è semplice, poichè il grado del numeratore supera di una sola unità quello del denominatore. Ciò è in accordo con la proprietà IV.4.6.

Circuiti attivi.

I circuiti attivi sono quelli che contengono i componenti capaci di fornire energia quali ad esempio il nullore, i generatori controllati, ecc. In tali circuiti, anche in assenza di eccitazioni esterne, si può avere qualsiasi tipo di comportamento in quanto sono presenti componenti sia capaci di fornire che di assorbire energia. Si possono perciò avere circuiti attivi stabili ed instabili. Nei circuiti attivi quindi la stabilità non costituisce una proprietà intrinseca, ma piuttosto un requisito che viene richiesto nelle applicazioni.

Per verificare se un circuito attivo è stabile occorre applicare la definizione IV.4.2, controllando in base alla proprietà IV.4.3 che i poli di tutte le sue funzioni di rete si trovino nel semipiano sinistro aperto. Occorre notare che in questo caso i poli sull'asse immaginario corrispondono ad un comportamento instabile, in quanto non provengono più da un processo di idealizzazione come nel caso dei circuiti passivi, ma corrispondono a precise modalità di funzionamento del circuito.

Osservazione IV.4.2

È stato precedentemente affermato che per un circuito passivo i poli sull'asse immaginario sono dovuti alla presenza nel circuito di componenti con memoria ideali, completamente privi di perdite. Verrà ora mostrato come introducendo tali perdite si provoca uno spostamento di tutti i poli del circuito verso il semipiano sinistro, in modo che vengono eliminati tutti i poli sull'asse immaginario. A tale scopo utilizziamo per gli elementi con memoria gli schemi già introdotti nel § I.6; precisamente ad ogni induttore associamo un resistore in serie e ad ogni condensatore un resistore in parallelo. Ad ogni induttore con perdite del tipo mostrato in fig. IV.4.5 a) corrisponde un'impedenza pari a:

$$(IV.4.18) \quad Z_L(s) = sL + R_s = L \left(s + \frac{R_s}{L} \right) \quad \text{Impedenza}$$

Ad ogni condensatore con perdite del tipo mostrato in fig. IV.4.5 b) corrisponde un'ammettenza pari a:

$$(IV.4.19) \quad Y_c(s) = Cs + \frac{1}{R_p} = C \left(s + \frac{1}{CR_p} \right) \quad \text{Ammettenza}$$

Supponiamo ora per semplicità di trattazione che per tutti gli induttori e per tutti i condensatori del circuito si abbia:

$$(IV.4.20) \quad d = \left(\frac{R_s}{L} \right)_i = \left(\frac{1}{CR_p} \right)_k \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N_L \\ k = 1, 2, \dots, N_C \end{array}$$

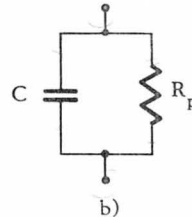
dove d è una quantità costante. Tale ipotesi corrisponde ad ammettere uniformi le perdite dei componenti reattivi.

In base alla (IV.4.20) ed alle (IV.4.18) e (IV.4.19) si ha:

$$(IV.4.21) \quad Z_L(s) = L(s + d)$$

$$(IV.4.22) \quad Y_c(s) = C(s + d)$$

Fig.IV.4.5 - Schemi equivalenti con perdite dell'induttore e del condensatore.



Introduciamo ora una nuova variabile p definita nel modo seguente:

$$(IV.4.23) \quad p = s + d$$

In funzione di questa variabile, le impedenze Z_L ed Y_c divengono:

$$(IV.4.24) \quad Z_L(p) = Lp \quad Z_L = Lp$$

$$(IV.4.25) \quad Y_c(p) = Cp \quad Y_c = \frac{1}{Cp}$$

Dalle espressioni precedenti si deduce che gli elementi con memoria si comportano come se fossero senza perdite nella variabile p . Consideriamo ora una funzione di rete generica $F(p)$; tale funzione riferendosi ad un circuito passivo con componenti senza perdite ha i poli disposti anche sull'asse immaginario (in base alla proprietà IV.4.6). Consideriamo un polo generico $p = p_0$. Passando alla variabile s si ha:

$$(IV.4.26) \quad s + d = p_0$$

e perciò:

$$(IV.4.27) \quad s = p_0 - d$$

Essendo d positivo, si ottiene che tutti i poli nella variabile s possono essere calcolati a partire da quelli nella variabile p , spostandoli verso sinistra della quantità d . In particolare per un polo sull'asse immaginario $p = j\omega_0$ si ha un polo pari a:

(IV.4.28)

$$s = j\omega_0 - d$$

In conclusione vediamo che la funzione di rete $F(s)$ non può avere poli a destra di una retta parallela all'asse immaginario e distante da quest'ultimo della quantità d (fig.IV.4.6).

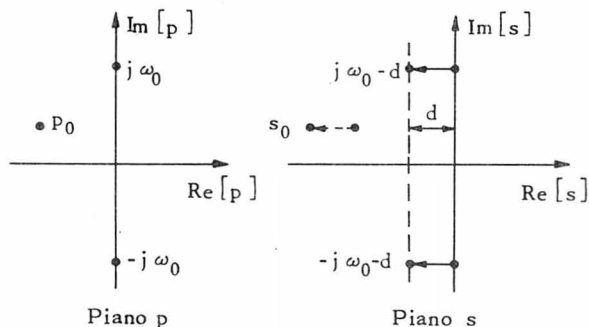


Fig.IV.4.6 - Legame tra la posizione dei poli di una funzione di rete di un circuito passivo nel piano p e nel piano s .

La limitazione sulla posizione dei poli, dovuta alle perdite dei componenti reattivi, è molto importante nelle applicazioni, in quanto tali poli hanno una grande influenza sul comportamento del circuito stesso. Per questa ragione è opportuno, sia definire dei fattori di merito per la valutazione delle perdite dei suddetti componenti (come fatto nel § I.6), sia introdurre una misura della vicinanza all'asse immaginario di un polo disposto nel piano complesso. Tali fattori di merito sono i seguenti:

(IV.4.29)

per un polo $\sigma_0 + j\omega_0$

$$Q_p = \frac{\omega_0}{\sigma_0}$$

(IV.4.30)

per un induttore
(alla pulsazione ω_0)

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_s}$$

(IV.4.31)

per un condensatore
(alla pulsazione ω_0)

$$Q_c = \omega_0 C R_p$$

In base alle considerazioni precedenti si deduce che: sotto l'ipotesi di uniformità della distribuzione delle perdite, il fattore di merito dei poli non può superare il fattore di merito dei componenti con memoria.

La trattazione qui fatta costituisce solo un cenno alla teoria delle perdite associate ai componenti reattivi di un circuito passivo. Tale teoria è particolarmente utile in fase di progetto dei circuiti e da essa trae origine un metodo detto della «predistorsione», per il quale si rimanda ai testi di sintesi dei circuiti elettrici, come ad esempio E.A. Guillemin, «Synthesis of passive networks», Wiley, 1957, pag. 537.

Esempio IV.4.2

Assegnata la funzione di rete:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_0^2}$$

nell'ipotesi che i poli sull'asse immaginario abbiano un fattore di merito Q_p pari a 100, determinare il numero di oscillazioni della risposta impulsiva corrispondente, affinché la sua ampiezza si riduca di $1/e$ del valore iniziale.

La parte reale del polo da considerare è in base alla (IV.4.29) uguale a $\omega_0/100$, perciò nella variabile s la funzione che corrisponde alla $F(p)$ assegnata è:

$$F(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{\omega_0}{100}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Sviluppando in frazioni parziali tale funzione, si ha:

$$F(s) = \frac{A}{s + \frac{\omega_0}{100} + j\omega_0} + \frac{A^*}{s + \frac{\omega_0}{100} - j\omega_0}$$

dove:

$$A = \frac{1}{s + \frac{\omega_0}{100} - j\omega_0} \bigg|_{s = -\frac{\omega_0}{100} - j\omega_0} = \frac{1}{-2j\omega_0}$$

Antitrasformando, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[A e^{-\frac{\omega_0}{100}t} e^{-j\omega_0 t} + A^* e^{-\frac{\omega_0}{100}t} e^{j\omega_0 t} \right] u_{-1}(t) = \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega_0}{100}t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t u_{-1}(t) \end{aligned}$$

La funzione $f(t)$ ha l'andamento di una sinusoide leggermente smorzata. La ampiezza per $t=0$ è pari ad $1/\omega_0$. L'ampiezza si riduce di $1/e$ quando risulta:

$$\frac{\omega_0 \tau_x}{100} = 1$$

Quindi, ricordando che il periodo T della sinusoide è:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

si ottiene:

$$\tau_x = \frac{100}{\omega_0} = \frac{100}{2\pi} T \approx 15,9 T$$

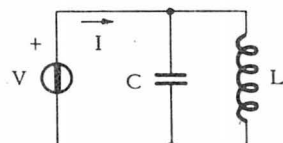
Quindi l'ampiezza si riduce ad $1/e$ del valore iniziale all'incirca dopo 16 periodi di oscillazione.

Esempio IV.4.3

Calcolare i poli dell'impedenza d'ingresso del circuito di fig.IV.4.7, nell'ipotesi che i componenti con memoria abbiano perdite uniformemente distribuite con $d = 0,1 \text{ sec}^{-1}$.

Fig.IV.4.7 - Circuito considerato nell'esempio IV.4.3. I valori dei componenti sono:

$$C = 1 \quad L = 1 \text{ (F, H)}$$



Supponendo il circuito di fig.IV.4.7 senza perdite, si ottiene:

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{pC + \frac{1}{pL}} = \frac{pL}{p^2LC + 1} = \frac{p}{p^2 + 1} = F(p)$$

Essendo $d = 0,1$ si ottiene:

$$p = s + 0,1$$

e quindi:

$$F(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 1}$$

che è la funzione impedenza d'ingresso cercata.

Essa ha i seguenti poli:

$$s_1 = -0,1 + j$$

$$s_2 = -0,1 - j$$

Osservazione IV.4.3

Nell'osservazione IV.2.2 è stato fatto notare che quando si considera la funzione di rete $F(s)$ di tipo impedenza o ammettenza d'ingresso, anche la funzione $1/F(s)$ è una funzione di rete dello stesso tipo. Tale considerazione comporta ulteriori proprietà derivanti dalla stabilità di un circuito per le funzioni di rete tipo immettenza. Infatti gli zeri di una funzione $F(s)$, cioè quei valori di s per cui la funzione risulta uguale a zero, sono coincidenti con i poli della funzione $1/F(s)$. Di conseguenza vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.4.7 - «Per le funzioni immettenza d'ingresso di qualsiasi circuito, gli zeri soddisfano le stesse proprietà dei poli».

IV.5 - Suddivisione della risposta di un circuito in parti significative.

La risposta di un circuito $U(s)$, nel caso più generale e nel dominio di s , è data dall'espressione (IV.1.6), dove la funzione $U(s)$ è espressa in funzione delle eccitazioni e delle condizioni iniziali. L'andamento nel tempo $u(t)$ si ottiene antitrasformando la $U(s)$. Per ricordare che sono stati tenuti in conto tutti i possibili contributi, la $U(s)$ viene indicata come «risposta completa» del circuito.

È usuale suddividere la risposta completa in parti con lo scopo di evidenziare in essa degli aspetti ritenuti particolarmente importanti. Le suddivisioni più usate sono le seguenti:

- 1) suddivisione in risposta libera e risposta forzata;
- 2) suddivisione in risposta permanente e risposta transitoria.

Nel presente paragrafo ci occuperemo solo della prima, in quanto la seconda verrà trattata diffusamente nel cap. V.

Per risposta libera di un circuito si intende la risposta quando non è presente alcun generatore esterno, ma solo le condizioni iniziali. Nel dominio di s , tale risposta $U_L(s)$ si può esprimere nel modo seguente (a partire dalla (IV.1.6))⁽¹⁾:

(1) - I simboli utilizzati nelle espressioni (IV.5.1) e (IV.5.3) hanno gli stessi significati indicati nella formula (IV.1.6).

$$u(s) = \sum_{i=1}^{N_C} F_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} H_i(s) i_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_F} K_i(s) i_i(0^-)$$

$$(IV.5.1) \quad U_L(s) = \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

Risposta
Libera nel dominio
di s

La corrispondente espressione nel tempo si ottiene antitrasfor-
mando la (IV.5.1):

$$(IV.5.2) \quad u_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_L(s)]$$

Per risposta forzata di un circuito s'intende la risposta quando sono presenti i generatori esterni con condizioni iniziali nulle. Nel dominio di s, tale risposta $U_F(s)$ si può esprimere nel modo seguente⁽¹⁾:

$$(IV.5.3) \quad U_F(s) = \sum_{i=1}^{N_F} F_i(s) E_i(s)$$

Risposta
Forzata nel dominio
di s

La corrispondente espressione nel tempo si ottiene antitrasfor-
mando la (IV.5.3):

$$(IV.5.4) \quad u_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_F(s)]$$

È evidente che risulta:

$$(IV.5.5) \quad U(s) = U_L(s) + U_F(s)$$

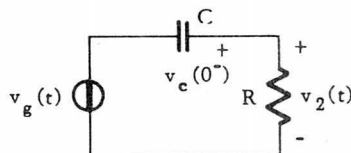
Libero + Forzato.

Esempio IV.5.1

Dato il circuito di fig. IV.5.1, determinare la risposta libera e la risposta forzata, considerando come grandezza d'interesse la tensione $v_2(t)$.

Fig. IV.5.1 - Circuito considerato nell'esempio IV.5.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 2, \quad C = 1, \quad v_c(0^-) = 2, \quad v_g(t) = \sin 2t \cdot u_{-1}(t) \quad (\Omega, F, V).$$

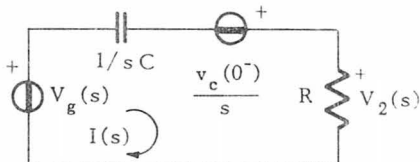


Con riferimento a fig. IV.5.2, dove è riportato lo schema trasformato nel dominio di s del circuito d'interesse, in cui:

$$V_g(s) = \mathcal{L}[\sin 2t \cdot u_{-1}(t)] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

(1) - v. nota di pagina precedente.

Fig.IV.5.2 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig.IV.5.1.



si ottiene la seguente equazione di equilibrio:

$$I(s) \cdot \left(\frac{1}{sC} + R \right) = V_g(s) + \frac{v_c(0^-)}{s}$$

Quindi si ha:

$$V_2(s) = \frac{sRC}{1+sRC} V_g(s) + \frac{RC}{1+sRC} v_c(0^-)$$

In base alla definizione data in precedenza risulta:

$$V_{2L}(s) = \frac{2}{1+2s} \quad ; \quad V_{2F}(s) = \frac{2s}{1+2s} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

Antitrasformando V_{2L} si ottiene la risposta libera nel dominio del tempo, cioè:

$$v_{2L}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+0,5} \right] = 2 e^{-0,5t} u_{-1}(t)$$

Per ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, occorre sviluppare preliminarmente V_{2F} in frazioni parziali:

$$V_{2F}(s) = \frac{2s}{1+2s} \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{2s}{(s+0,5)(s^2+4)} = \frac{A}{s+0,5} + \frac{B}{s-j2} + \frac{B^*}{s+j2}$$

dove:

$$A = \frac{2s}{s^2+4} \Big|_{s=-0,5} = -\frac{4}{17} \quad ; \quad B = \frac{2s}{(s+0,5)(s+j2)} \Big|_{s=j2} = \frac{2}{17} (1-4j) = \frac{2}{\sqrt{17}} e^{-j \arctan 4} = \frac{2}{\sqrt{17}} e^{-j 1,33}$$

Antitrasformando i singoli termini dello sviluppo si ottiene l'espressione voluta:

$$\begin{aligned} v_{2F}(t) &= (A e^{-0,5t} + B e^{j2t} + B^* e^{-j2t}) u_{-1}(t) = \\ &= \left[-\frac{4}{17} e^{-0,5t} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos(2t - 1,33) \right] u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Osservazione IV.5.1

Le risposte libera e forzata hanno proprietà caratteristiche nel caso della classe molto importante dei circuiti stabili. In base alla definizione data nel § IV.4.2, un circuito stabile è caratterizzato dal ritornare nelle condizioni di riposo dopo che è stato sottoposto all'azione di eccitazioni di breve durata. Poiché con tali eccitazioni è possibile ottenere nel circuito una qualsiasi configurazione di grandezze elettriche in corrispondenza all'istante in cui esse cessano di agire, possiamo affermare che:

Proprietà IV.5.1 - «L'andamento nel tempo della risposta libera di un circuito stabile tende a zero al crescere del tempo, per un qualunque insieme di condizioni iniziali».

Tale proprietà equivale nel dominio di s alla seguente altra:

Proprietà IV.5.2 - «I poli della risposta libera di un circuito stabile si trovano nel semipiano sinistro aperto della variabile s , per un qualunque insieme di condizioni iniziali».

Per quanto riguarda la risposta forzata nel dominio di s , è facile constatare che i suoi poli appartengono o alle funzioni di rete oppure alle eccitazioni (nell'ipotesi che queste siano coincidenti con funzioni razionali reali della variabile s). Di conseguenza è possibile trarre qualche conclusione generale nel caso dei circuiti stabili solo se si considerano eccitazioni di tipo particolare. Un caso che ha importanza pratica è quello delle eccitazioni che hanno un andamento limitato nel tempo. Per tali eccitazioni sappiamo che le relative trasformate di Laplace hanno poli o nel semipiano sinistro aperto o semplici sull'asse immaginario. Poiché le funzioni di rete di un circuito stabile hanno poli solo nel semipiano sinistro aperto, ne deriva che la risposta forzata nel caso presente abbia poli o nel semipiano sinistro aperto oppure semplici sull'asse immaginario. Di conseguenza vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.5.3 - «L'andamento nel tempo della risposta forzata di un circuito stabile si mantiene limitato quando tutte le funzioni di eccitazione sono a loro volta limitate».



APPENDICE AL CAPITOLO IV

NO

APPENDICE IV.A - *Proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla struttura del circuito.*

L'effetto della struttura del circuito sulle proprietà delle funzioni di rete è notevole sia per quanto riguarda la natura dei componenti presenti sia per quanto riguarda la sua topologia. Nella presente appendice vogliamo dare un'idea di questo argomento, rimandando per l'approfondimento ai testi di sintesi delle reti elettriche, dove l'argomento stesso assume un'importanza predominante, in quanto solo attraverso la conoscenza dettagliata delle proprietà delle funzioni di rete si può risalire al circuito che soddisfa le specifiche di progetto. Si veda ad esempio G. Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche», Vol. I e II, Ed. Siderea 1971.



IV.A.1. - *Proprietà derivanti dalla natura dei componenti.*

La presenza o meno dei vari tipi di componenti ha un'influenza notevole sulle funzioni di rete. L'analisi di tale influenza è importante ai fini della caratterizzazione di ciascuna funzione di rete, in modo che si possa sapere a priori se una funzione è realizzabile o meno come funzione di rete di un certo tipo di circuito. Ha anche una notevole influenza sulle funzioni di rete l'eventuale numero di componenti di uno stesso tipo presenti nel circuito; accenneremo a ciò per quanto riguarda i transistori schematizzati tramite il loro elemento ideale (nullore sbilanciato). Le proprietà delle funzioni di rete che scaturiscono dalla presenza di interi circuiti equivalenti sono usualmente poco note e sono state individuate solo per classi limitate di circuiti, come ad esempio quelli che contengono diodi tunnel. Si rimanda per notizie su questo argomento agli articoli:

- I. W. Sandberg, « The realizability of multiport structures obtained by embedding a tunnel-diode in a lossless reciprocal network », BSTJ, Vol. 41, n. 3, 1962, pagg. 857-876;
- I. W. Sandberg, « The tunnel diode as a linear network element », BSTJ, Vol. 41, n. 5, 1962, pagg. 1537-1556;
- G. Martinelli, « Sulla teoria e sintesi delle reti lineari attive », N.R.N., Vol. 15, 1966, pagg. 5-48, 143-211, 290-385.

Nel presente paragrafo accenniamo brevemente alle proprietà di alcune funzioni di rete di circuiti tipici. Le proprietà sono riassunte nella tab. IV. A. 1 e si riferiscono all'ammettenza d'ingresso ed alla funzione di trasferimento in tensione, come precisato nella tabella stessa. I circuiti considerati sono: 1) quelli passivi tradizionali, costituiti da resistori, condensatori, induttori e trasformatori; 2) alcune categorie più particolari di circuiti passivi, cioè i circuiti RC (costituiti solo da resistori e condensatori) ed i circuiti reattivi (caratterizzati dall'assenza dei resistori); 3) i circuiti attivi corrispondenti ai microcircuiti lineari, cioè costituiti da resistori, condensatori e transistori.

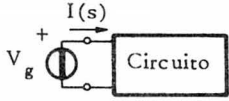
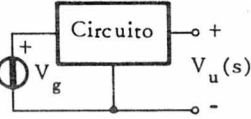
Il transistor viene schematizzato nel suo funzionamento lineare con un nullore sbilanciato. È evidente che una schematizzazione migliore richiederebbe l'uso di un circuito equivalente del transistor comprendente, oltre al nullore, anche dei resistori e dei condensatori. Tuttavia le proprietà delle funzioni di rete che si hanno in questo caso sono poco note e molto complicate a dedursi. Per questa ragione nella tabella IV. A. 1 ci limitiamo a distinguere soltanto i due casi di presenza di uno o più transistori, allo scopo di far vedere come questa semplice differenza già comporti notevoli conseguenze a livello di proprietà delle funzioni di rete.

Nella tab. IV. A. 1 le proprietà delle funzioni di rete considerate sono espresse in termini di posizione di zeri e poli della funzione razionale reale corrispondente, di residui nei poli, di parte reale della funzione per $s = j\omega$, di costante moltiplicativa.

IV.A.2 - Proprietà derivanti dalla topologia del circuito.

La configurazione topologica del circuito ha una notevole influenza sulle funzioni di rete. Allo scopo di dare un'idea di tale influenza, consideriamo un caso tipico: quello del circuito a scala. Per tale circuito, rappresentato in fig. IV. A. 1, esaminiamo l'influenza della configurazione topologica su una qualsiasi funzione di trasferimento ingres-

Tabella IV.A.1 - Esempi di proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla natura dei componenti.

Tipo di circuito Funzione di rete	Circuito RC	Circuito reattivo	Circuito passivo	Circuito RC attivo contenente un solo transistor ideale	Circuito RC attivo contenente un numero qualsiasi di transistor ideali
Ammettenza d'ingresso: $Y(s) = \frac{I(s)}{V_g(s)}$ 	- Poli e zeri semplici sull'asse reale negativo, alternati tra loro; - Costante moltiplicativa positiva; - Primo punto critico (polo o zero) vicino all'origine coincidente con uno zero.	- Poli semplici sull'asse immaginario con residui reali positivi; - Parte reale per $s=j\omega$ identicamente nulla	- Poli nel semipiano sinistro aperto oppure sull'asse immaginario, nel qual caso sono semplici con residui reali positivi; - Parte reale sull'asse immaginario non-negativa.	- Zeri ovunque con l'esclusione dell'asse reale positivo; - Costante moltiplicativa positiva; - per $s=0$ non c'è polo, lo zero è possibile ma deve essere semplice; - per $s=\infty$ non c'è zero; l'eventuale polo deve essere semplice.	Non ci sono limitazioni.
Funzione di trasferimento in tensione: $T(s) = \frac{N}{D} = \frac{V_u(s)}{V_g(s)}$ 	- Poli reali negativi semplici non nulli; - Zeri ovunque eccetto che sull'asse reale positivo; - Grado del denominatore maggiore od uguale a quello del numeratore; - Costante moltiplicativa H tale che:	- Funzione razionale pari; - Poli semplici sullo asse immaginario con l'esclusione dell'origine e dell'infinito.	- Poli nel semipiano sinistro aperto oppure semplici sull'asse immaginario, con l'esclusione di $s=0$, $s=\infty$; - residui dei poli sull'asse immaginario puramente immaginari.	L'unica condizione è che gli zeri non devono stare sull'asse reale positivo.	Non ci sono limitazioni.

$0 < H \leq H_0$ in cui H_0 è la minore delle tre seguenti quantità
 $\frac{1}{T(\infty)}, \frac{1}{T(0)}, H_d$

con il segno di uguale nella precedente disuguaglianza solo se H_0 è diverso da H_d . La quantità H_d è definita come il minimo valore del parametro K (se esiste) per cui il polinomio:

$$D(s) - K N(s)$$

ha uno zero reale positivo di molteplicità pari.

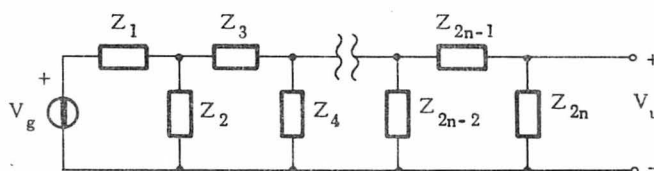


Fig. IV.A.1 - Circuito a scala. I bipoli Z_{2K+1} , $K=1, 2, \dots, n-1$, sono i rami longitudinali; i bipoli Z_{2K} , $K=1, 2, \dots, n$, sono i rami trasversali.

so-uscita. È intuitivo che la grandezza elettrica in uscita è nulla, se la trasmissione ingresso-uscita è interrotta, ciò che può accadere o perché un bipolo longitudinale ha un'impedenza infinita o perché un bipolo trasversale ha un'impedenza nulla. Tuttavia, un esame più accurato della trasmissione fa vedere che tale interruzione non sempre avviene nelle due situazioni dette, per cui vale la seguente proprietà:

Proprietà IV.A.1 - «Gli zeri di una funzione di trasferimento ingresso-uscita di un circuito a scala possono essere solo o poli dell'impedenza dei rami longitudinali o zeri dell'impedenza dei rami trasversali».

Tenendo conto di questa proprietà e di tab. IV.A.1 vediamo che gli zeri delle funzioni di trasferimento di un circuito RC a scala possono essere situati solo sull'asse reale negativo. Analogamente, nel caso di un circuito a scala passivo tali zeri possono essere situati solo nel semipiano sinistro chiuso della variabile s .

*

- 1) Condizioni iniziali nulle
- 2) Eccitazioni sinusoidali del tipo $e(t) = A \cos(\omega t + \varphi) u_{-1}(t)$
- 3) Il circuito sia stabile.

CAPITOLO V

ANALISI IN REGIME PERMANENTE

Gli andamenti nel tempo più comuni nelle applicazioni per le grandezze elettriche sono quelli sinusoidali sia nel caso dei circuiti di potenza sia nel caso dei circuiti per la manipolazione dei segnali. Inoltre il comportamento di un circuito sotto l'azione di eccitazioni di tipo sinusoidale riveste una grande importanza teorica per la possibilità di risalire da questo comportamento a quello dovuto ad eccitazioni di tipo più generale. La risposta del circuito che interessa in tutti questi casi è quella che predomina al passare del tempo. Tale risposta prende il nome di «permanente» e l'analisi che si effettua in queste condizioni è quella in «regime permanente sinusoidale». Tale analisi è l'argomento del presente capitolo, in cui viene introdotto un metodo estremamente efficiente per svolgerla «il metodo dei fasori», derivato da quello della trasformata di Laplace, già descritto nel cap. III.

V.1 - Suddivisione della risposta di un circuito nella parte transitoria e nella parte permanente.

V.1.1 - Definizione di risposta transitoria e permanente.

Si consideri un circuito lineare e permanente che sia sede di un fenomeno elettrico sotto le seguenti ipotesi:

- a) il fenomeno elettrico abbia inizio all'istante $t=0$, in presenza di condizioni iniziali nulle;
- b) sia presente un'eccitazione esterna di tipo sinusoidale, avente il seguente andamento⁽¹⁾ ed inizio all'istante $t=0$:

(1) - Per il nome ed il significato dei simboli che si usano nel caso di un'eccitazione sinusoidale, si veda il § III.2.3 del cap. III.

$$(V.1.1) \quad e(t) = A \cos(\omega t + \varphi) u_{-1}(t)$$

c) il circuito sia stabile⁽¹⁾.

In tali condizioni analizziamo l'andamento nel tempo di una qualunque risposta $u(t)$ del circuito, utilizzando il metodo della trasformata di Laplace. Detta con $E(s)$ la trasformata di Laplace dell'eccitazione $e(t)$ e con $F(s)$ la funzione di rete d'interesse, si ha:

$$(V.1.2) \quad U(s) = F(s) E(s)$$

L'andamento della funzione $u(t)$ si ottiene effettuando lo sviluppo in frazioni parziali della $U(s)$ ed antitrasformando i singoli termini. A questo scopo occorre esaminare dove sono i poli della $U(s)$. Si vede facilmente che essi sono di due tipi: *Sotto l'ipotesi c*

a) poli coincidenti con quelli della funzione di rete $F(s)$; tali poli si trovano nel semipiano sinistro aperto della variabile s , essendo per ipotesi il circuito di tipo stabile, cioè risulta:

$$(V.1.3) \quad s_i = \sigma_i + j \omega_i \quad ; \quad \sigma_i < 0$$

b) poli coincidenti con i poli della funzione di eccitazione $E(s)$; tali poli si trovano sull'asse immaginario, cioè sono del tipo seguente:

$$(V.1.4) \quad s_i = \pm j \omega$$

essendo ω la pulsazione della funzione $e(t)$ riportata nella (V.1.1).

Distinguendo i poli nelle due categorie precedenti, lo sviluppo in frazioni parziali risulta suddivisibile nel modo seguente:

$$(V.1.5) \quad U(s) = U_t(s) + \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega}$$

dove la funzione $U_t(s)$ corrisponde alla parte dello sviluppo relativo ai poli del tipo a), mentre gli altri due addendi corrispondono ai poli del tipo b).

È facile verificare le seguenti proprietà:

1) l'antitrasformata $u_t(t)$ della funzione $U_t(s)$ tende a zero al crescere del tempo, in base alla (V.1.3);

2) l'antitrasformata della funzione:

(1) - Si tengano presenti le considerazioni fatte nel § IV.4.2 relativamente alla stabilità.

$$(V.1.6) \quad U_p(s) = \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega}$$

non tende a zero al crescere di t , ma il suo andamento appartiene alla stessa classe di funzioni a cui appartiene l'eccitazione $e(t)$ e cioè del tipo:

$$(V.1.7) \quad u_p(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) u_{-1}(t)$$

È opportuno notare che tale funzione ha la stessa pulsazione ω della funzione $e(t)$, ma ha ampiezza A_1 e fase iniziale φ_1 differenti in generale dalle corrispondenti ampiezza e fase iniziale di $e(t)$.

Le considerazioni precedenti conducono ad una suddivisione della risposta, valida nel dominio di s e nel dominio di t , del tipo seguente:

$$(V.1.8) \quad U(s) = U_t(s) + U_p(s)$$

$$(V.1.9) \quad u(t) = u_t(t) + u_p(t)$$

La parte $u_t(t)$ viene detta risposta transitoria del circuito (poichè tale risposta si esaurisce al crescere del tempo), mentre la parte $u_p(t)$ viene detta risposta permanente del circuito (poichè tale risposta è quella che predomina al crescere del tempo). A volte la risposta $u_p(t)$ viene anche detta risposta a regime del circuito (poichè essa coincide con la risposta totale $u(t)$ quando i fenomeni transitori si sono esauriti).

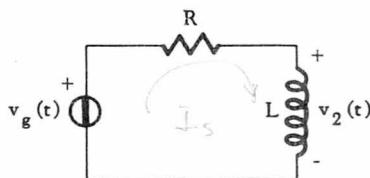
Esempio V.1.1

Determinare la risposta transitoria e la risposta permanente del circuito di figura V.1.1, considerando come grandezza d'interesse la tensione $v_2(t)$.

Fig.V.1.1 - Circuito considerato nell'esempio V.1.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, L = 2, v_g(t) = 2 \cos 2t \cdot u_{-1}(t),$$

$$i_L(0^-) = 0, \quad (\Omega, H, V).$$



Risolviendo il circuito nel dominio della trasformata di Laplace (fig.V.1.2), si ottiene la seguente espressione per la tensione $V_2(s)$:

$$V_2(s) = \frac{sL}{R + sL} V_g(s)$$

$$(R + sL)I(s) = V_g(s)$$

$$sL I(s) = V_2(s) = V_g(s) \cdot \frac{sL}{R + sL}$$

dove:

$$V_g(s) = \mathcal{L} [2 \cos 2t \, u_{-1}(t)] = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

I poli della funzione $V_2(s)$ sono i seguenti:

a) poli della funzione di rete. Vi è un solo polo reale e negativo:

$$s = -\frac{R}{L} = -0,5$$

b) poli della funzione di eccitazione. Vi sono due poli con parte reale nulla pari a:

$$s = \pm j2$$

Effettuando lo sviluppo in frazioni parziali della $V_2(s)$, si ottiene:

$$V_2(s) = \frac{A}{s+0,5} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

dove:

$$A = V_2(s) \cdot (s+0,5) \Big|_{s=-0,5} = s \frac{2s}{s^2+4} \Big|_{s=-0,5} = \frac{2}{17}$$

$$B = V_2(s) (s+j2) \Big|_{s=-j2} = \frac{s}{s+0,5} \frac{2s}{s-j2} \Big|_{s=-j2} = \frac{16-j4}{17}$$

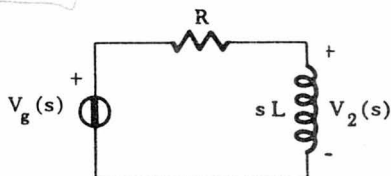
La parte transitoria (nel dominio di s) risulta:

$$V_{2t}(s) = \frac{A}{s+0,5} = \frac{2/17}{s+0,5}$$

Antitrasformando si ha:

$$v_{2t}(t) = \frac{2}{17} e^{-0,5t} u_{-1}(t)$$

Fig.V.1.2 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig.V.1.1.



La parte permanente (nel dominio di s) risulta:

$$V_{2p}(s) = \frac{4}{17} \left(\frac{4-j}{s+j2} + \frac{4+j}{s-j2} \right)$$

Antitrasformando si ha:

$$v_{2p}(t) = \frac{4}{17} \{ (4-j) e^{-j2t} + (4+j) e^{j2t} \} u_{-1}(t)$$

Essendo:

$$4-j = \sqrt{17} e^{-j \arctan \frac{1}{4}} \simeq \sqrt{17} e^{-j0,25}$$

si ha:

$$v_{2p}(t) = \frac{4}{\sqrt{17}} \{ e^{-j(2t+0,25)} + e^{j(2t+0,25)} \} u_{-1}(t) = \boxed{\frac{8}{\sqrt{17}} \cos(2t+0,25) u_{-1}(t)}$$

Si vede che l'andamento nel tempo della tensione transitoria $v_{2t}(t)$ tende a zero al crescere di t , mentre la tensione permanente $v_{2p}(t)$ ha un andamento cosinusoidale, avente la stessa pulsazione della eccitazione $v_g(t)$.

V.1.2 - Limiti di validità della suddivisione della risposta di un circuito nelle parti transitoria e permanente.

La suddivisione della risposta di un circuito in permanente e transitoria è stata effettuata sotto le ipotesi a), b) e c) riportate all'inizio del § V.1.1. Queste ipotesi tuttavia sono state scelte più restrittive del necessario per semplicità di trattazione e per introdurre la nozione di risposta permanente. Non sussistendo più le ragioni precedenti, conviene riprendere tali ipotesi, estendendole a situazioni più generali, quali sono richieste nelle applicazioni, sempre tenendo presente che i circuiti che stiamo considerando sono quelli lineari e permanenti.

a) Si può ammettere la presenza anche di condizioni iniziali non nulle. Infatti in tale caso, in luogo dell'equazione (V.1.2) per la $U(s)$, si può utilizzare l'espressione seguente (derivata dalla (IV.1.6) del cap.IV, a cui si rimanda per i simboli)

$$(V.1.10) \quad U(s) = F(s)E(s) + \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

Si riconosce facilmente che i contributi alla risposta $u(t)$ dei fattori:

$$(V.1.11) \quad \sum_{i=1}^{N_C} H_i(s) v_i(0^-) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i(s) i_i(0^-)$$

tendono a zero al crescere del tempo per i circuiti stabili. Quindi si può affermare che la risposta del circuito può ancora essere suddivisa in transitoria e permanente e che quest'ultima ha un andamento del tutto identico a quello che si ha nel caso in cui si abbiano condizioni iniziali nulle.

b) Si può ammettere la presenza di più eccitazioni esterne del tipo seguente:

$$(V.1.12) \quad e_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i) u_{-1}(t)$$

purché aventi tutte la medesima pulsazione ω . Infatti in tal caso, in luogo della (V.1.2), si può utilizzare la seguente espressione:

$$(V.1.13) \quad U(s) = \sum_{i=1}^{N_g} F_i(s) E_i(s)$$

Si riconosce facilmente che la (V.1.13) può essere suddivisa nella parte transitoria e nella parte permanente. Quest'ultima è uguale alla somma delle parti permanenti che si ottengono considerando una eccitazione per volta.

c) Si può accettare la presenza di poli sull'asse immaginario per la funzione di rete $F(s)$, sotto le seguenti condizioni:

- 1) il circuito considerato è passivo;
- 2) non si ha coincidenza di detti poli con i poli derivanti dall'eccitazione.

Infatti, nel caso dei circuiti passivi, i poli sull'asse immaginario delle funzioni di rete corrispondono ad aver trascurato (per comodità di calcolo) tutte le perdite associate ai componenti con memoria (si veda il § IV.4.2 e l'osservazione IV.4.2 del cap. IV); da un punto di vista fisico tali poli si trovano sempre disposti nel semipiano sinistro (anche se molto vicini all'asse immaginario, nel caso di elevato fattore di merito). Perciò, nel dominio del tempo, in corrispondenza a tali poli si ottiene un andamento che non tende a zero, come limite di un andamento leggermente smorzato. Si può quindi fisicamente giustificare la separabilità della risposta transitoria (il cui andamento è leggermente smorzato) dalla risposta permanente (il cui andamento nel tempo mantiene una ampiezza rigorosamente costante); quest'ultima infatti prevale, anche se a lungo termine.

La suddivisione in transitorio e permanente non è invece più accettabile quando un eventuale polo sull'asse immaginario della funzione di rete $F(s)$ coincide con il polo dell'eccitazione. In tal caso infatti

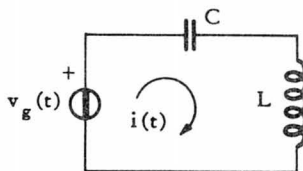
ti, per la presenza di un polo multiplo, lo sviluppo in frazioni parziali assume una forma del tutto particolare, nella quale non è distinguibile il contributo del circuito da quello dell'eccitazione.

Esempio V.1.2

Determinare la parte transitoria e la parte permanente della corrente $i(t)$ che percorre il circuito di fig.V.1.3.

Fig.V.1.3 - Circuito considerato nell'esempio V.1.2. I valori dei componenti sono:

$$C=1, \quad L=1, \quad v_g(t) = \cos 2t u_{-1}(t) \quad (F, H, V).$$



$$V(s) = \left(\frac{1}{sC} + sL \right) I(s)$$

$$V(s) = \frac{1 + s^2 LC}{sC} I(s)$$

Si ottiene nel dominio di s :

$$I(s) = \frac{sC}{s^2 LC + 1} V_g(s)$$

in cui:

$$V_g(s) = \mathcal{L} [\cos 2t u_{-1}(t)] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Quindi si ha:

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

Sviluppando la $I(s)$ in frazioni parziali si ottiene:

$$I(s) = -\frac{1/3}{s^2 + 1} + \frac{4/3}{s^2 + 4}$$

Nel dominio del tempo, antitrasformando la $I(s)$ si ottiene:

$$i(t) = \left[-\frac{1}{3} \sin t + \frac{2}{3} \sin 2t \right] u_{-1}(t)$$

Si constata che la corrente $i(t)$ è la somma di due sinusoidi, la prima corrispondente ai poli della funzione di rete e la seconda corrispondente ai poli dell'eccitazione. Per quanto detto, però, il primo termine è presente solo perché abbiamo trascurato le perdite degli elementi reattivi. Se tenessimo conto di tali perdite, il termine suddetto sarebbe moltiplicato per un'esponenziale decrescente. Per questa ragione esso può essere considerato come risposta transitoria del circuito. Il secondo termine invece non tende a zero in alcun caso, perciò la quantità:

$$i_p(t) = \frac{2}{3} \sin 2t u_{-1}(t)$$

è la risposta permanente del circuito.

Osservazione V.1.1

In alcuni casi particolari, ma notevoli dal punto di vista delle applicazioni, può accadere che nella suddivisione (V.1.5) della risposta $U(s)$ in parte permanente e in parte transitoria, quest'ultima risulti identicamente nulla. In questi casi la (V.1.5) diviene:

$$(V.1.14) \quad U(s) = \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega}$$

essendo $U_t(s) \equiv 0$.

Vediamo sotto quali condizioni si verifica questa situazione, escludendo il caso banale del circuito senza memoria, per il quale la parte transitoria è sempre assente. Considerando perciò un circuito con memoria, sia s_0 il generico polo della funzione di rete $F(s)$ ⁽¹⁾.

Il corrispondente residuo a_0 vale:

$$(V.1.15) \quad a_0 = \lim_{s \rightarrow s_0} [(s - s_0) F(s) E(s)]$$

Affinchè si abbia $U_t(s) \equiv 0$, si deve avere per ogni polo s_0 :

$$(V.1.16) \quad a_0 = 0$$

Tale condizione (V.1.16) è compatibile con la (V.1.15) solo nel caso in cui sia:

$$(V.1.17) \quad E(s_0) = 0$$

ciò che si verifica quando s_0 è uno zero della funzione di eccitazione. Nel caso qui considerato di eccitazioni del tipo (V.1.1) la funzione $E(s)$ ha la forma:

$$(V.1.18) \quad E(s) = \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Dal confronto della (V.1.17) con la (V.1.18) si deduce che deve essere:

$$(V.1.19) \quad s_0 = \omega \tan \varphi$$

In conclusione la parte transitoria della risposta del circuito è identicamente nulla sotto le due seguenti condizioni:

(1) - Non verrà considerato, per semplicità, il caso di funzioni $F(s)$ aventi poli multipli.

a) la funzione di rete $F(s)$ ha un unico polo, disposto sull'asse reale (eventualmente nullo o infinito);

b) fra il polo di $F(s)$, la pulsazione ω e la fase iniziale φ della funzione di eccitazione sussiste la relazione (V.1.19).

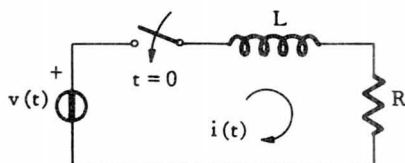
Le considerazioni qui svolte hanno importanza in molti casi di interesse tecnico; precisamente in tutti quei casi in cui si desidera che il regime permanente abbia inizio all'atto della inserzione dell'eccitazione, evitando la presenza di fenomeni transitori il cui effetto può essere dannoso.

Esempio V.1.3

Dato il circuito di fig. V.1.4, a riposo all'istante iniziale, determinare la fase iniziale φ della funzione di eccitazione in modo che nella corrente $i(t)$ non sia presente il termine transitorio.

Fig. V.1.4 - Circuito considerato nell'esempio V.1.3. Il valore di $v(t)$ è:

$$v(t) = V \cos(\omega t + \varphi).$$



Nel dominio di s si ottiene il seguente legame fra $V(s)$ ed $I(s)$

$$I(s) = \frac{1}{sL + R} V(s)$$

La funzione di trasferimento $F(s)$ è uguale a:

$$F(s) = \frac{1}{sL + R}$$

Tale funzione possiede un polo reale e negativo avente il seguente valore:

$$\sigma_0 = -\frac{R}{L}$$

Applicando la relazione (V.1.19) si ottiene:

$$\sigma_0 = -\frac{R}{L} = \omega \tan \varphi$$

da cui:

$$\varphi = -\arctan \frac{R}{\omega L} + k\pi$$

con $k=0$ oppure $k=1$.

Handwritten notes and diagrams:

- $I_m(s)$ written above a vertical axis.
- A partial pole-zero plot showing a pole at σ_0 on the negative real axis and a zero at $-\frac{R}{L}$ on the negative real axis.
- Other handwritten notes include R/L and $k=0, k=1$.

Nel caso in cui $R=0$, il fenomeno transitorio è assente quando la fase iniziale φ è uguale a zero ovvero a π ; ciò corrisponde ai casi in cui la forma d'onda di tensione assume il valore assoluto massimo per $t=0$.

L'esempio qui svolto ha importanza quando interessi alimentare con una tensione sinusoidale un utilizzatore il cui circuito equivalente sia approssimabile con un circuito di tipo RL; tale situazione è molto comune, come ad esempio nel caso della alimentazione di un trasformatore ovvero di una macchina elettrica. In tali casi come è stato qui mostrato ha importanza la fase con la quale viene inserita la tensione di alimentazione. Se la fase φ ha uno dei valori ricavati in precedenza, non si ha alcun fenomeno transitorio, per cui la corrente assorbita ha subito l'andamento di tipo permanente. Nei rimanenti casi, si ha un fenomeno transitorio, a causa del quale la corrente assume valori massimi che possono essere molto maggiori (fino a due volte) rispetto a quelli che si hanno in regime permanente.

V.2 - Derivazione del metodo dei fasori da quello della trasformata di Laplace.

Quando un circuito si trova in regime permanente tutte le grandezze elettriche (tensioni e correnti) sono di tipo sinusoidale e riconducibili all'espressione (V.1.1) nella quale risultano variabili da grandezza a grandezza i valori di A (ampiezza) e φ (fase iniziale), mentre il valore di ω (pulsazione) risulta uguale per tutte le grandezze del circuito. A seguito di tale circostanza, prima di sviluppare i metodi di analisi in regime permanente è necessario introdurre la nozione di *fasore*, mediante la quale tutte le operazioni che si possono effettuare sulle funzioni sinusoidali isofrequenziali risultano grandemente semplificate.

V.2.1 - Fasori associati alle funzioni sinusoidali.

Si consideri una classe di funzioni sinusoidali del tipo seguente:

(V.2.1)

$$e(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

nella quale le grandezze A (ampiezza) e φ (fase iniziale) sono i parametri da cui dipende ciascuna funzione appartenente alla classe, mentre ω_0 (pulsazione) è da considerarsi come una quantità costante. Le funzioni del tipo (V.2.1) vengono dette *funzioni sinusoidali isofrequenziali*. Ogni funzione appartenente alla classe è completamente individuata quando si fissi il valore di A e di φ . Considerando A e φ come le coordinate polari di un punto di un piano, è evidente che esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni della suddetta classe ed i suoi

punti. A tale piano si dà il nome di «piano dei fasori» definendo come fasore ⁽¹⁾ associato alla funzione (V.2.1) la quantità complessa:

(V.2.2)

$$\mathbf{E} = A e^{j\varphi} = A \cos \varphi + j A \sin \varphi$$

rappresentante un punto del piano in coordinate polari.

Il passaggio dalla generica funzione $e(t)$ al corrispondente fasore $\mathbf{E}$, e viceversa, è immediato, come risulta dall'esame delle (V.2.1) e (V.2.2) e dagli esempi seguenti.

Esempio V.2.1

Data la seguente funzione sinusoidale:

$$e(t) = 5 \sin t$$

determinare il fasore corrispondente.

Occorre dapprima esprimere la $e(t)$ nella forma (V.2.1); si ha:

$$e(t) = 5 \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{E} = 5 e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j 5$$

Esempio V.2.2

Dato il seguente fasore:

$$\mathbf{E} = 3 + j 2$$

ottenere la corrispondente funzione sinusoidale.

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Mettiamo dapprima $\mathbf{E}$ sotto forma polare, cioè:

$$\mathbf{E} = \sqrt{13} e^{j \arctan \frac{2}{3}}$$

da cui si ricava:

$$e(t) = \sqrt{13} \cos \left(\omega_0 t + \arctan \frac{2}{3} \right)$$

Il valore di ω_0 deve essere assegnato separatamente, in quanto non è deducibile dal fasore.

(1) - Per indicare il fasore a volte sono usati altri nomi, come «*vettore simbolico*» e «*sinore*».

È possibile determinare un legame diretto fra la funzione $e(t)$ ed il corrispondente fasore $\mathbf{E}$, esprimendo la prima nel campo complesso. Precisamente si ha:

$$(V.2.3) \quad e(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}}{2}$$

Confrontando la (V.2.3) con la (V.2.2) si ottiene:

$$(V.2.4) \quad e(t) = \frac{\mathbf{E} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \mathbf{E} + \mathbf{E}^* = \text{Re}[\mathbf{E}] \cdot 2$$

dove $\mathbf{E}^*$ rappresenta il complesso coniugato del fasore $\mathbf{E}$. Osservando inoltre che la (V.2.4) esprime la funzione $e(t)$ come semisomma di due numeri complessi coniugati, si ottiene:

$$(V.2.5) \quad e(t) = \text{Re}[\mathbf{E} e^{j\omega_0 t}]$$

Le espressioni (V.2.4) e (V.2.5) sono i legami cercati fra il fasore $\mathbf{E}$ e la grandezza $e(t)$. Tali legami hanno importanza fondamentale e verranno largamente utilizzati nel seguito insieme ad altre proprietà e nozioni, che verranno introdotte successivamente⁽¹⁾.

V.2.2 - Legame fra il fasore dell'eccitazione ed il fasore della risposta in regime permanente.

L'introduzione della nozione di fasore associato ad una grandezza sinusoidale è particolarmente utile nella determinazione della risposta di un circuito in regime permanente. Si consideri, infatti, un circuito al quale sia applicata un'eccitazione sinusoidale di pulsazione ω_0 del tipo (V.2.1), il cui fasore è dato, per quanto detto, dalla quantità (V.2.2). Supponendo di applicare tale eccitazione all'istante $t = 0$ e tenendo conto dell'espressione (V.2.4), si ha nel dominio di Laplace:

$$(V.2.6) \quad \mathbf{E}(s) = \mathcal{L}[e(t) u_{-1}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{\mathbf{E} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega_0 t}}{2} u_{-1}(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}^*}{s + j\omega_0}$$

(1) - La relazione (V.2.5) permette anche di stabilire le dimensioni fisiche che si possono associare al fasore di una grandezza sinusoidale. In particolare si deduce che ogni fasore possiede le dimensioni fisiche della grandezza corrispondente nel dominio del tempo.

Si noti che $E/2$ è il residuo della funzione $E(s)$ nel polo $j\omega_0$.
 La risposta del circuito nella variabile s è di conseguenza:

$$(V.2.7) \quad U(s) = F(s) \left[\frac{1}{2} \frac{E}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{E^*}{s + j\omega_0} \right]$$

Limitando l'attenzione alla parte permanente di $U(s)$, indicata con $U_p(s)$, è sufficiente considerare la parte dello sviluppo in frazioni parziali riguardante i poli $\pm j\omega_0$, cioè:

$$(V.2.8) \quad U_p(s) = \frac{1}{2} \frac{U}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{U^*}{s + j\omega_0}$$

avendo indicato con U il doppio del residuo di $U(s)$ nel polo $s = j\omega_0$.
 La quantità U vale, tenendo conto della (V.2.7)

$$(V.2.9) \quad U = 2U(s)(s - j\omega_0) \Big|_{s=j\omega_0} = 2F(s) \frac{1}{2} E \Big|_{s=j\omega_0} = F(j\omega_0) E$$

D'altra parte, antitrasformando l'espressione (V.2.8) si ottiene:

$$(V.2.10) \quad u_p(t) = \frac{U e^{j\omega_0 t} + U^* e^{-j\omega_0 t}}{2} u_{-1}(t)$$

da cui, confrontando con la (V.2.4), si riconosce che la quantità complessa U è pari al fasore associato alla grandezza sinusoidale $u_p(t)$; quest'ultima inoltre risulta isofrequenziale con l'eccitazione $e(t)$. Da quanto detto consegue la proprietà:

Proprietà V.2.1 - «Per un circuito lineare e permanente, limitatamente ai casi nei quali è possibile suddividere la risposta nella parte transitoria e nella parte permanente, la risposta a regime risulta isofrequenziale con la funzione di eccitazione. Inoltre il fasore U relativo alla risposta è legato al fasore E dell'eccitazione tramite la relazione seguente:

$$(V.2.11) \quad U = F(j\omega_0) E$$

dove $F(j\omega_0)$ è il valore assunto dalla funzione di rete $F(s)$ per $s = j\omega_0$.

La proprietà V.2.1 riveste importanza fondamentale nell'analisi dei circuiti in regime permanente. Da essa si può trarre un metodo di analisi estremamente efficiente per calcolare direttamente la risposta a

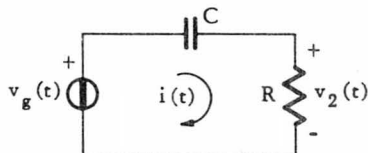
regime di un circuito, detto *metodo dei fasori*, che verrà sviluppato nel paragrafo seguente.

Esempio V.2.3

Determinare la risposta in regime permanente del circuito di fig.V.2.1.

Fig.V.2.1 - Circuito considerato nell'esempio V.2.3. I valori dei componenti sono:

$R = 1$, $C = 1$, $v_g(t) = 2 \sin 2t$
 $u_{-1}(t)$, (Ω , F, V).



Risolvendo il circuito nel dominio di Laplace, si ottiene:

$$V_2(s) = R \frac{V_g(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{sRC + 1} V_g(s)$$

La funzione di rete $F(s)$ d'interesse risulta quindi:

$$F(s) = \frac{sRC}{sRC + 1} = \frac{s}{s + 1}$$

Calcoliamo ora il fasore della funzione di eccitazione; si ha:

$$v_g(t) = 2 \sin 2t = 2 \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

da cui si ricava il fasore:

$$V_g = 2 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j2$$

Applichiamo la proprietà V.2.1; ponendo nella (V.2.11) $s = j\omega_0 = j2$, si ottiene il fasore della risposta permanente:

$$V_2 = F(j\omega_0) V_g = \left(\frac{s}{s+1}\right)_{s=j2} V_g = \frac{j2}{j2+1} (-j2) = \frac{4}{5} (1-j2)$$

Per determinare l'andamento nel tempo della risposta in regime permanente $v_2(t)$, poniamo il fasore V_2 in forma polare, cioè:

$$V_2 = \frac{4}{\sqrt{5}} e^{-j\arctan 2}$$

Quindi si ottiene:

$$v_2(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} \cos(2t - \arctan 2)$$

V.3 - Descrizione del metodo dei fasori.

Il metodo per calcolare la risposta in regime permanente, descritto nel paragrafo precedente, basato sulla proprietà V.2.1, può essere riassunto nel seguente procedimento:

Primo procedimento di analisi in regime permanente.

1) Sostituire al circuito assegnato nel dominio del tempo il circuito nel dominio di s , supponendo nulle le condizioni iniziali. Ciò si ottiene effettuando le seguenti sostituzioni:

- a) ad ogni resistore R un bipolo di impedenza R ;
- b) ad ogni induttore L un bipolo di impedenza sL ;
- c) ad ogni condensatore C un bipolo di impedenza $1/sC$.

Non occorre effettuare esplicitamente la trasformata $E(s)$ della funzione di eccitazione;

2) Analizzare il circuito al fine di ottenere la trasformata $U(s)$ della risposta;

3) Determinare la funzione di rete $F(s)$ nel modo seguente:

$$(V.3.1) \quad F(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

4) Verificare la validità del calcolo della risposta permanente. Tale verifica consiste dei seguenti passi:

- a) la funzione $F(s)$ non deve avere poli nel semipiano destro o multipli sull'asse immaginario;
- b) la funzione $F(s)$ può avere poli semplici sull'asse immaginario solo se il circuito non contiene elementi attivi;
- c) un eventuale polo di $F(s)$ sull'asse immaginario, nel caso permesso, non deve coincidere con la quantità $j\omega_0$ corrispondente al polo della funzione di eccitazione;

5) Calcolare la quantità:

$$(V.3.2) \quad F = F(j\omega_0)$$

Tale calcolo è sempre possibile poiché, in base alla condizione 4) c la funzione $F(s)$ non è singolare nel punto $s = j\omega_0$;

6) Determinare il fasore $\mathbf{E}$ dell'eccitazione;

7) Determinare il fasore $\mathbf{U}$ della risposta con la seguente espressione:

(V.3.3)

$$\mathbf{U} = \mathbf{F} \mathbf{E}$$

8) Determinare, a partire dal fasore $\mathbf{U}$, l'andamento nel tempo della risposta permanente con la (V.2.5).

Il procedimento qui descritto, che risulta derivato dal metodo di analisi di Laplace e dalla proprietà V.2.1, permette non solo di determinare la risposta in regime permanente, ma anche di verificare se tale risposta esiste effettivamente. Ovviamente se è già nota a priori la validità per il circuito in esame della risposta permanente, il passo 4) precedente può essere omissso.

È importante osservare che la quantità $\mathbf{F} = F(j\omega_0)$ è stata ottenuta effettuando l'analisi nel dominio di s e ponendo successivamente $s = j\omega_0$. Si può però procedere in senso inverso e cioè porre subito $s = j\omega_0$ e successivamente analizzare il circuito. I risultati del calcolo sono chiaramente identici nei due casi, ma nel secondo caso si è ottenuta una notevole semplificazione dei calcoli. In particolare, quando si analizza il circuito con il primo procedimento, è necessario in generale effettuare l'inversione di una matrice i cui elementi sono funzioni razionali di s , mentre con il secondo procedimento basta invertire una matrice i cui elementi sono numeri complessi.

Il procedimento che si ottiene è il seguente:

Secondo procedimento di analisi in regime permanente (metodo dei fasori).

1) Detta ω_0 la pulsazione del generatore, sostituire al circuito assegnato nel dominio del tempo un circuito fittizio ottenuto nel modo seguente:

- sostituire ad ogni resistore R un bipolo di impedenza R ;
- sostituire ad ogni induttore L un bipolo di impedenza $j\omega_0 L$;
- sostituire ad ogni condensatore C un bipolo di impedenza $1/j\omega_0 C$;
- sostituire al generatore $e(t)$ un generatore la cui grandezza impressa sia uguale al fasore $\mathbf{E}$ della funzione $e(t)$;

2) Analizzare il circuito risultante con i metodi usuali, tenendo conto che le grandezze elettriche sono rappresentate dai rispettivi fasori. Determinare il fasore $\mathbf{U}$ della risposta;

3) Passare nel dominio del tempo, determinando la funzione $u(t)$ corrispondente al fasore $\mathbf{U}$ con la (V.2.5).

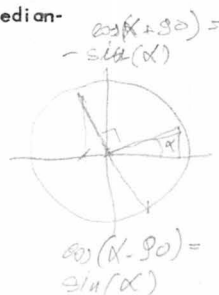
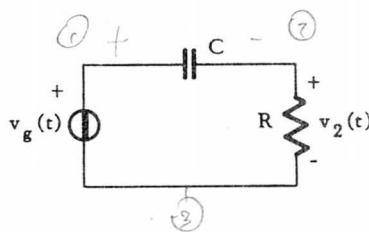
Il procedimento qui descritto è completamente differente dal metodo di analisi secondo Laplace. La differenza principale consiste nel fatto che il circuito fittizio ottenuto al punto 1) contiene dei bipoli la cui impedenza non è una funzione di s , ma è un numero complesso il cui valore dipende dalla pulsazione ω_0 del generatore. In secondo luogo le tensioni e le correnti associate al circuito fittizio rappresentano, in base alla proprietà V.2.1, i fasori delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo e non più le loro trasformate di Laplace.

Esempio V.3.1

Determinare la risposta in regime permanente del circuito di fig.V.3.1 mediante il metodo dei fasori.

Fig.V.3.1 - Circuito considerato nell'esempio V.3.1. I valori dei componenti sono:

$$R = 1, \quad C = 1, \quad v_g(t) = 2 \sin 2t \quad (\Omega, F, V).$$



Sostituiamo al circuito di fig.V.3.1 il circuito fittizio di fig.V.3.2, il quale contiene i seguenti componenti:

- 1) un generatore di tensione, la cui tensione impressa V_g è uguale al fasore corrispondente alla funzione di eccitazione; si ottiene:

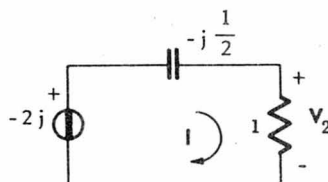
$$V_g = -2j$$

- 2) un bipolo la cui impedenza vale $1/j\omega_0 C$ al posto del condensatore; si ottiene:

$$\frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j2} = -j\frac{1}{2}$$

- 3) un bipolo la cui impedenza vale $R=1$ al posto del resistore.

Fig.V.3.2 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.1.



Nel circuito di fig.V.3.2 tutte le grandezze elettriche rappresentano i fasori delle corrispondenti grandezze relative al circuito reale nel dominio del tempo. Si può

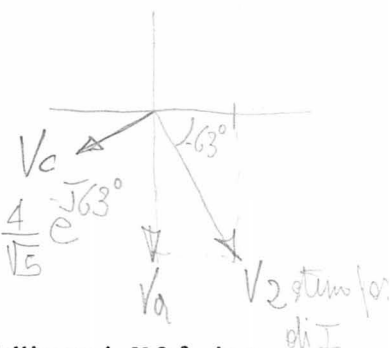
quindi risolvere il circuito con i metodi usuali. Il fasore I della corrente vale:

$$V_c = Z_c I = \frac{1}{2} I = \frac{2}{1-j\frac{1}{2}} I = \frac{4}{1+j\frac{1}{2}} I = \frac{4}{1+\frac{1}{4}} I = \frac{4}{5} (1+j\frac{1}{2}) I$$

$$I = \frac{-2j}{1-j\frac{1}{2}}$$

Il fasore della tensione di uscita è:

$$V_2 = R I = \frac{-2j}{1-j\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} (1-j2)$$



Il risultato ottenuto è ovviamente identico a quello dell'esempio V.2.3, dove l'analisi è stata effettuata con un altro procedimento.

Osservazione V.3.1

Il procedimento di analisi basato sul metodo dei fasori risulta in generale più semplice rispetto al primo procedimento descritto nel presente paragrafo. Ciò è dovuto al fatto che viene evitato il calcolo dell'espressione della funzione di rete nella variabile s , determinando direttamente il valore che tale funzione assume in corrispondenza alla pulsazione del generatore.

È tuttavia necessario mettere in evidenza il fatto che, accanto a tale vantaggio, il metodo dei fasori presenta lo svantaggio di non permettere di verificare la validità del regime permanente del circuito. Infatti, non essendo nota l'espressione analitica della funzione di rete $F(s)$, non risulta possibile effettuare la verifica indicata al punto 4) del primo procedimento di analisi in regime permanente. Si può andare incontro di conseguenza ai seguenti inconvenienti:

1) Caso dei circuiti contenenti elementi attivi. Tali circuiti possono o meno essere stabili a seconda della loro costituzione. Il calcolo effettuato mediante il metodo dei fasori perde di validità nel caso di circuiti non stabili. Purtroppo nel corso dello svolgimento dei calcoli non è presente alcun passaggio che permetta di accertare tale eventualità.

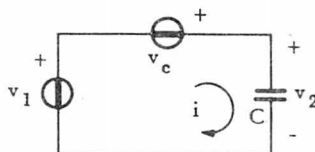
2) Caso dei circuiti passivi. Tali circuiti sono sempre stabili, anche in presenza di poli sull'asse immaginario. Il calcolo effettuato mediante il metodo dei fasori perde di validità solo se un polo della funzione di rete coincide con il polo della funzione di eccitazione. Nel corso dello svolgimento dei calcoli, tale eventualità viene evidenziata dalla presenza di una operazione di divisione con divisore nullo. In conclusione si può affermare che il metodo dei fasori può essere applicato solo quando è nota a priori la validità dell'analisi in regime permanente per il circuito in esame.

Esempio V.3.2

Determinare con il metodo dei fasori la risposta permanente del circuito di figura V.3.3 (il generatore v_c è controllato dalla corrente i).

Fig.V.3.3 - Circuito considerato nell'esempio V.3.2. I valori dei componenti sono:

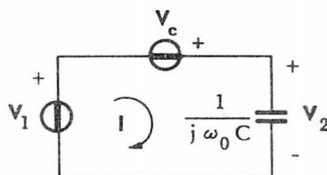
$$C = 1, \quad v_1(t) = 2 \cos t, \\ v_c = 3i \quad (F, V, A).$$



Applichiamo il metodo dei fasori. Il circuito fittizio associato a quello di figura V.3.3 è quello di fig.V.3.4, in cui V_1 è il fasore della tensione impressa dal generatore indipendente e vale:

$$V_1 = 2$$

Fig.V.3.4 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.3.



Inoltre si ha:

$$\frac{1}{j\omega_0 C} = -j \quad ; \quad V_c = 3I$$

Dalla fig.V.3.4 si ottiene:

$$I = \frac{V_1 + V_c}{-j} = j(2 + V_c) = j(2 + 3I)$$

Perciò risulta:

$$I(1 - j3) = j2 \quad ; \quad I = \frac{j2}{1 - j3}$$

Si ha quindi:

$$V_2 = -jI = \frac{2}{1 - j3} = \frac{2}{10} (1 + j3)$$

da cui si può ricavare facilmente l'andamento nel tempo della tensione di uscita.

Si può notare che il circuito assegnato contiene un elemento di tipo attivo (il generatore controllato) e quindi potrebbe essere instabile. Per verificare ciò, calcoliamo nel dominio di Laplace l'espressione della funzione di trasferimento fra la tensione di ingresso e l'uscita considerata. Il circuito nel dominio di Laplace è quello mostrato in fig.V.3.5. Per tale circuito si ha:

$$I(s) = [V_1(s) + V_c(s)] s C$$

Essendo:

$$V_c(s) = 3 I(s)$$

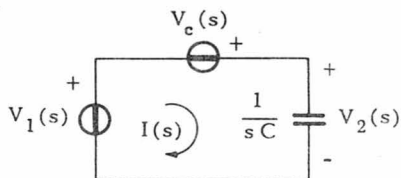
e sostituendo il valore della capacità, si ottiene:

$$I(s) = [V_1(s) + 3 I(s)] s$$

Da cui risulta:

$$V_2(s) = \frac{1}{s} I(s) = \frac{1}{1-3s} V_1(s)$$

Fig.V.3.5 - Circuito trasformato nel dominio di s di quello di fig.V.3.3.



Quindi la funzione di rete cercata è:

$$F(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1-3s}$$

Poichè la funzione $F(s)$ possiede un polo nel semipiano destro di s , il circuito è di tipo instabile. Di conseguenza la risposta di tale circuito risulta crescente nel tempo e quindi non è fisicamente valida la suddivisione di tale risposta nelle parti transitoria e permanente.

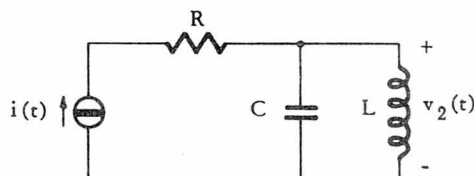
L'applicazione del metodo dei fasori, nel presente esempio, ha quindi condotto ad un risultato non corretto, poichè l'andamento della risposta, determinato con tale metodo, non ha alcun riferimento con il fenomeno fisico che si svolge nel circuito in esame. È bene notare che, dal punto di vista formale, i calcoli effettuati durante lo svolgimento del procedimento di analisi con il metodo dei fasori sono del tutto corretti. Ciò mette in evidenza il fatto che tale metodo deve essere adoperato con cautela nel caso dei circuiti contenenti elementi attivi.

Esempio V.3.3

Determinare con il metodo dei fasori la risposta permanente del circuito di figura V.3.6.

Fig.V.3.6 - Circuito considerato nell'esempio V.3.3. I valori dei componenti sono:

$$R = 2, \quad L = 1, \quad C = 0,25, \\ i(t) = \sin 2t \quad (\Omega, H, F, A, V).$$



Utilizzando il metodo dei fasori, essendo:

$$\omega_0 = 2$$

$$I = -j$$

si ottiene il circuito fittizio di fig.V.3.7. Applicando il metodo dei nodi si ha la seguente equazione:

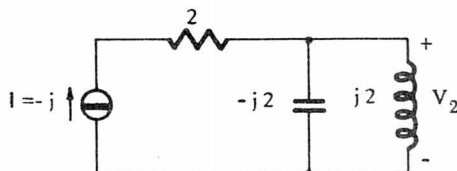
$$V_2 \left(\frac{1}{j2} - \frac{1}{j2} \right) = -j$$

Da tale equazione non è possibile determinare il valore del fasore incognito V_2 , in quanto il coefficiente moltiplicativo di V_2 è nullo.

Per trovare la causa di tale risultato è necessario considerare il circuito assegnato in maggiore dettaglio. Si può senz'altro dire che tale circuito è stabile in quanto non contiene elementi attivi. Tuttavia la funzione di rete potrebbe avere dei poli sull'asse immaginario della variabile s , avendo supposto per semplicità i componenti reattivi privi del tutto di perdite. Per verificare ciò consideriamo il circuito fittizio nel dominio di Laplace mostrato in fig.V.3.8. Per tale circuito si ottiene:

$$V_2(s) \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{s} \right) = I(s) \quad \frac{s^2 + 4}{4s}$$

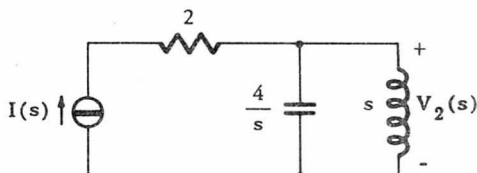
Fig.V.3.7 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori di quello di fig.V.3.6.



La funzione di rete corrispondente risulta uguale a:

$$F(s) = \frac{V_2(s)}{I(s)} = \frac{4s}{s^2 + 4}$$

Fig.V.3.8 - Circuito trasformato nel dominio di Laplace di quello di fig.V.3.6.



ed ha i poli sull'asse immaginario per:

$$s_0 = \pm j2$$

Tali poli coincidono con i poli della funzione di eccitazione e quindi non risulta possibile la suddivisione della risposta nelle parti transitoria e permanente, come detto in precedenza.

V.4 - Metodo grafico dei fasori.

Quando si considera il regime permanente sinusoidale, tutte le grandezze elettriche presenti in un circuito hanno un andamento nel tempo di tipo sinusoidale e sono isofrequenziali. Il comportamento del circuito può essere descritto utilizzando i fasori associati a tali grandezze. Poichè d'altra parte ogni fasore, essendo una quantità complessa, può essere rappresentato come un vettore nel piano dei fasori, l'analisi dei circuiti in regime permanente viene spesso effettuata considerando la disposizione di tali vettori nel piano complesso.

Il presente paragrafo è dedicato ai metodi che si basano su queste considerazioni e che verranno indicati con il nome di *metodi grafici*. Occorre fare attenzione che tutto quanto sarà detto, è valido nell'ipotesi che nel circuito in esame sia effettivamente presente un regime di tipo permanente. Tale ipotesi sarà considerata sempre verificata, salvo esplicito avviso contrario.

V.4.1 - Interpretazione grafica del legame fra le grandezze nel tempo ed i fasori.

Si considerino le relazioni (V.2.4) e (V.2.5), che rappresentano il legame fra un fasore $\mathbf{E}$ e la corrispondente grandezza nel tempo $e(t)$. Tali relazioni possono essere facilmente interpretate per via grafica.

Consideriamo dapprima la relazione (V.2.5) che riportiamo di seguito per comodità:

(V.4.1)

$$e(t) = \operatorname{Re} [E e^{j\omega_0 t}]$$

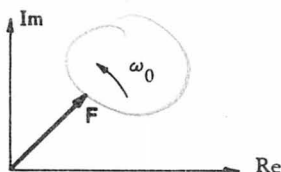
L'espressione (V.4.1) implica due passi: il primo consiste nella moltiplicazione del fasore E per la quantità $e^{j\omega_0 t}$; il secondo nell'operatore «parte reale». Effettuando il primo passo si ottiene un nuovo vettore F , definito come segue:

(V.4.2)

$$F = E e^{j\omega_0 t}$$

Il vettore F prende il nome di vettore rotante associato alla grandezza $e(t)$. Graficamente tale vettore si può rappresentare nel modo indicato nella fig. V.4.1 nel piano dei fasori.

Fig.V.4.1 - Rappresentazione grafica del vettore $F = E e^{j\omega_0 t}$.



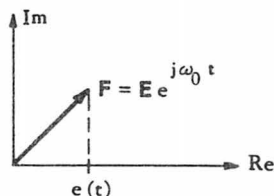
Infatti F , che risulta dipendente dal tempo, è un vettore che ruota in senso antiorario al crescere del tempo t con velocità angolare ω_0 . Esso mantiene il modulo costante e coincide con il fasore E all'istante $t = 0$.

Effettuando successivamente l'operazione «parte reale» sul vettore rotante F , si ottiene, in base alla (V.4.1), la grandezza sinusoidale. Vale perciò la seguente interpretazione grafica di detta relazione.

Proprietà V.4.1 - «La grandezza sinusoidale $e(t)$ è uguale alla proiezione sull'asse reale del vettore rotante associato al fasore della grandezza stessa».

La proprietà V.4.1 è illustrata nella fig. V.4.2.

Fig.V.4.2 - Rappresentazione grafica della proprietà V.4.1.



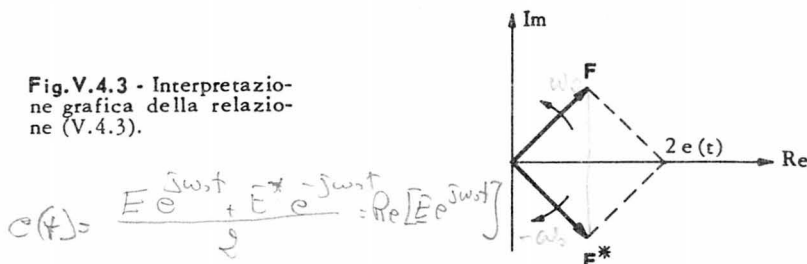
In alcuni casi è utile interpretare graficamente anche l'espressione (V.2.4), che riportiamo per comodità:

(V.4.3)

$$e(t) = \frac{1}{2} [E e^{j\omega_0 t} + E^* e^{-j\omega_0 t}]$$

In base alla relazione (V.4.3), la tensione $e(t)$ è uguale alla semisomma di due vettori coniugati. Il primo è il vettore rotante F ; il secondo è il vettore coniugato F^* . Quest'ultimo vettore può essere interpretato come un vettore che ruota in senso orario (opposto a quello di F) al crescere del tempo.

Queste considerazioni sono interpretate graficamente nella figura V.4.3.



V.4.2 - Interpretazione grafica dei legami fra i fasori delle grandezze elettriche relative ai singoli componenti elementari.

Si consideri una grandezza sinusoidale $e(t)$, il cui fasore sia E . Se si effettua la derivata rispetto al tempo di $e(t)$, cioè de/dt , tale nuova grandezza è ancora sinusoidale isofrequenziale con la $e(t)$ e quindi caratterizzata da un fasore, che possiamo ottenere derivando rispetto al tempo ambo i membri della (V.4.1). Si ottiene:

$$(V.4.4) \quad \frac{de}{dt} = \text{Re} [j\omega_0 E e^{j\omega_0 t}]$$

Quindi il fasore cercato è $j\omega_0 E$.

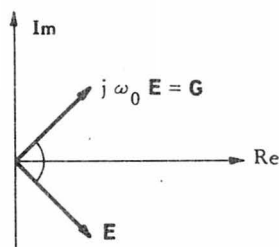
Ricordando che $j = e^{j\pi/2}$, si può enunciare la seguente proprietà:

Proprietà V.4.2 - Data una grandezza sinusoidale $e(t)$, il cui fasore è E , il fasore relativo alla derivata de/dt , ha un modulo pari ad $\omega_0 |E|$ ed è ruotato rispetto ad E di 90° in senso antiorario, come illustrato in figura V.4.4*.

Utilizzando la proprietà V.4.2 si ottengono facilmente le relazioni fra i fasori della tensione e della corrente, relativi al resistore, all'induttore ed al condensatore riportati in tabella V.4.1.

(1) - La proprietà V.4.2 si enuncia spesso dicendo che il vettore $j\omega_0 E$ è in anticipo di fase di 90° rispetto ad E . Tale enunciato è conseguenza del fatto che il vettore rotante associato alla derivata precede di 90° il vettore rotante associato ad E .

Fig.V.4.4 - Legame tra il fasore $\underline{E}$ di una grandezza sinusoidale ed il fasore $\underline{G}$ della sua derivata rispetto al tempo.



$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\underline{V} = j\omega_0 L \underline{I}$$

$$\underline{V} = j\omega_0 L \underline{I}$$

Tabella V.4.1 - Relazione tra i fasori della tensione e della corrente per gli elementi ideali resistore, induttore e condensatore.

Elemento ideale	Relazione costitutiva nel dominio dei fasori	Interpretazione grafica della relazione costitutiva
Resistore (resistenza R)	$\underline{V} = R \underline{I}$	
Induttore (induttanza L)	$\underline{V} = j\omega_0 L \underline{I}$	
Condensatore (capacità C)	$\underline{I} = j\omega_0 C \underline{V}$	

V.4.3 - Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff nel piano dei fasori.

L'operazione di passaggio dal fasore alla relativa funzione del tempo è lineare, in quanto basata sull'operatore «parte reale», come risulta dalla (V.4.1). Ciò implica la seguente proprietà:

Proprietà V.4.3 - «Una combinazione lineare di funzioni sinusoidali isofrequenziali è una funzione sinusoidale di frequenza uguale a quella delle funzioni componenti. Il fasore di tale funzione si ottiene sostituendo nella combinazione lineare alle funzioni componenti i relativi fasori».

Una situazione particolare si verifica quando la combinazione lineare che si sta considerando è identicamente nulla, come accade ad esempio quando si applicano le leggi di Kirchhoff. In conseguenza della proprietà V.4.3, i fasori relativi alle tensioni di una maglia o alle correnti di un taglio di un circuito hanno somma algebrica uguale a zero. Di conseguenza tali fasori possono essere rappresentati nel piano complesso per mezzo di una linea poligonale chiusa come mostrato in fig. V.4.5.

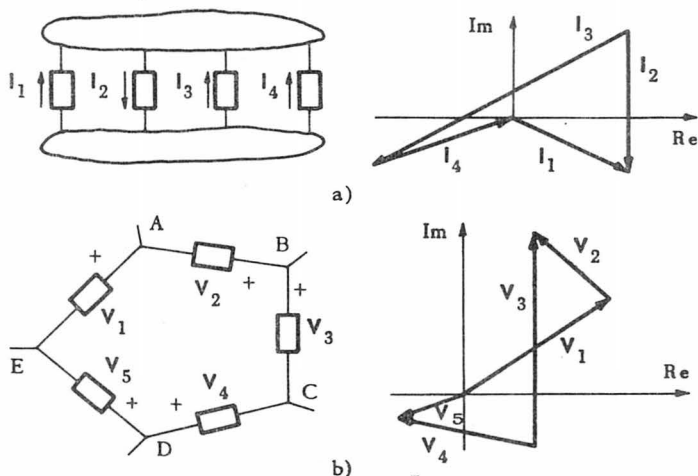


Fig. V.4.5 - Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff: a) caso della prima legge; b) caso della seconda legge.

Esempio V.4.1

Determinare con il metodo grafico l'ampiezza e la fase della seguente funzione sinusoidale:

$$f(t) = \cos 2t + 3 \sin 2t$$

Nel piano dei fasori si possono individuare facilmente i fasori relativi ai due addendi della funzione $f(t)$. Il fasore F della funzione $f(t)$ è quindi pari alla somma dei due fasori (fig. V.4.6).

Risulta:

$$F = 1 - 3j$$

e quindi:

$$f(t) = \sqrt{10} \cos(2t - \arctan 3)$$

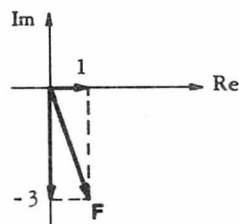


Fig. V.4.6 - Esempio V.4.1.

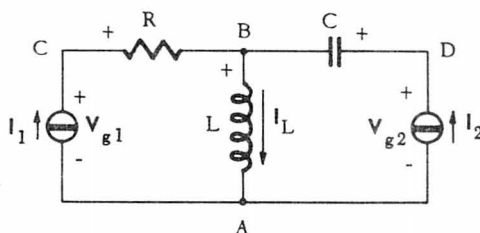
Esempio V.4.2

Dato il circuito di fig.V.4.7 determinare con il metodo grafico le tensioni e le correnti in tutti i suoi rami.

Fig.V.4.7 - Circuito considerato nell'esempio V.4.2. I valori dei componenti sono:

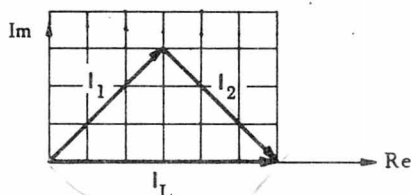
$$I_1 = 1 + j; \quad I_2 = 1 - j; \quad R = 1;$$

$$\omega_0 L = 1; \quad \omega_0 C = 2 \quad (\text{A}, \Omega).$$



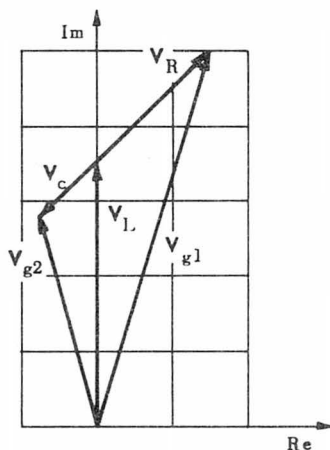
Riportiamo nel piano dei fasori il diagramma delle correnti nei vari rami del circuito; tale diagramma si ottiene immediatamente applicando la prima legge di Kirchhoff al nodo B (fig.V.4.8).

Fig.V.4.8 - Legame tra i fasori delle correnti che entrano nel nodo B del circuito di figura V.4.7. Le correnti sono espresse in ampere.



Il diagramma delle tensioni nel piano dei fasori si può ottenere dalle correnti già determinate e dalle definizioni dei componenti, come mostrato in fig.V.4.9, dove con V_L , V_C , V_R sono state indicate le tensioni ai capi rispettivamente dell'induttore, del condensatore e del resistore, con V_{g1} e V_{g2} le tensioni ai capi dei generatori di corrente. Si noti che il nodo A è stato preso come riferimento e quindi il fasore della relativa tensione è l'origine del piano dei fasori. Si può anche notare che il diagramma di fig.V.4.9 è equivalente al grafo del circuito considerato.

Fig.V.4.9 - Legame tra i fasori delle tensioni del circuito di figura V.4.7.



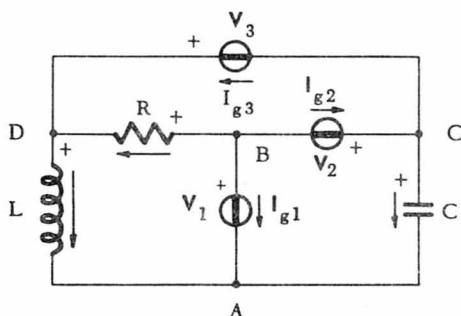
Esempio V.4.3

Dato il circuito di fig.V.4.10 determinare con il metodo grafico le tensioni e le correnti di tutti i suoi rami.

Fig.V.4.10 - Circuito considerato nell'esempio V.4.3. I valori dei componenti sono:

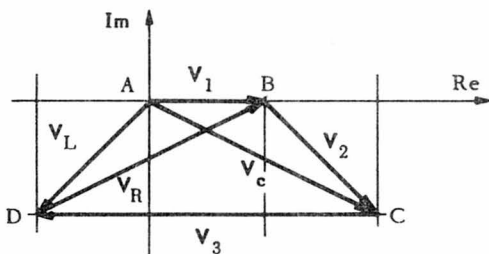
$$V_1 = 1, V_2 = 1 - j, V_3 = -3, R = 1$$

$$\omega L = 1, \omega C = 1, (V, \Omega, H, F)$$



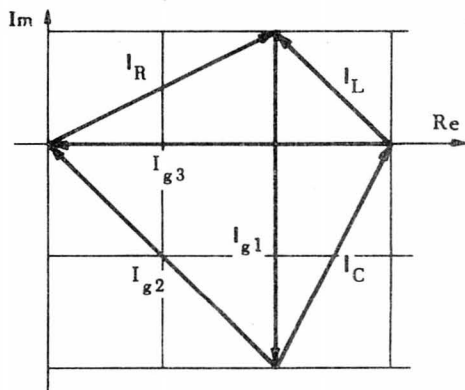
Riportiamo nel piano dei fasori (fig.V.4.11) il diagramma delle tensioni; tale diagramma si ottiene immediatamente, osservando che i generatori di tensione sono posti su un albero del circuito.

Fig.V.4.11 - Diagramma dei fasori delle tensioni del circuito di fig.V.4.10 (V).



Dal diagramma di fig.V.4.11, in base alle definizioni dei componenti ed alle leggi di Kirchhoff relative ai nodi D, C e B si possono ottenere le correnti nei rami del circuito (fig.V.4.12).

Fig.V.4.12 - Diagramma dei fasori delle correnti del circuito di fig.V.4.10 (A).



Osservazione V.4.1

Gli esempi V.4.2 e V.4.3 mostrano che in alcuni casi un circuito in regime permanente sinusoidale può essere risolto utilizzando il metodo grafico. Ciò non vale in generale, in quanto per l'analisi di un circuito è usualmente richiesta l'utilizzazione di uno dei metodi visti precedentemente (metodo delle maglie, dei nodi o dei tagli) e quindi la soluzione di un sistema di equazioni lineari a coefficienti complessi. In questi casi il diagramma delle tensioni e delle correnti del circuito nel piano dei fasori può essere ottenuto solo dopo aver analizzato nel modo detto il circuito; tali diagrammi sono ancora utili per mettere in evidenza le relazioni di ampiezza e di fase fra le varie grandezze elettriche.

Osservazione V.4.2

In alcuni casi, nelle applicazioni, si fa uso di rappresentazioni grafiche su un piano complesso diverso da quello dei fasori. Tale piano è il piano delle impedenze, ovvero il piano delle ammettenze. Ciò è possibile in quanto, in regime permanente, l'impedenza o l'ammettenza di un bipolo è identificabile con un numero complesso. Nel caso del piano delle impedenze, l'asse reale prende il nome di asse delle resistenze, mentre l'asse immaginario prende il nome di asse delle reattanze. Nel caso del piano delle ammettenze, tali assi vengono detti rispettivamente, asse delle conduttanze ed asse delle suscettanze.

V.4.4 - Primo esempio tipico di applicazione dei metodi grafici; i sistemi trifase.

Si consideri il circuito di fig. V.4.13 composto da tre generatori di tensione E_a , E_b , E_c e tre impedenze di carico Z_a , Z_b , Z_c . Tale circuito prende il nome di sistema trifase; in particolare i nodi a, b, c prendono il nome di fasi e le tre tensioni E_a , E_b , E_c prendono il nome di tensioni stellate. Il primo problema che riguarda un sistema trifase è quello di determinare le tensioni tra le due fasi, dette tensioni concatenate. Tale problema si risolve individuando il diagramma delle tensioni nel piano dei fasori (fig. V.4.14).

Le tensioni concatenate sono rappresentate in modulo e fase dai vettori corrispondenti ai lati del triangolo (a, b, c). Si noti che il riferimento è stato preso coincidente con il nodo I, detto centro-stella relativo ai generatori.

Un secondo problema riguarda il carico, rappresentato in figura V.4.13 dalle tre impedenze Z_a , Z_b e Z_c disposte a stella. Si tratta di determinare la tensione del nodo 2, centro-stella del carico, riferita al

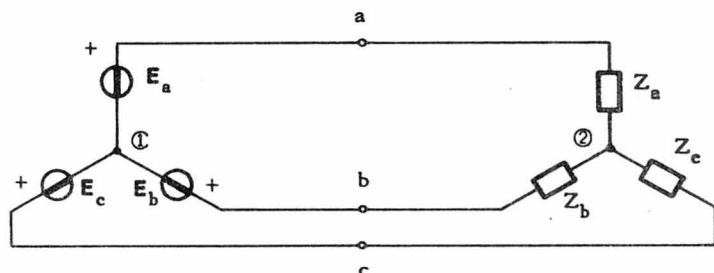
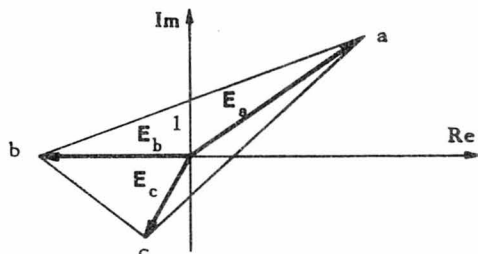


Fig.V.4.13 - Sistema trifase con generatori a stella.

Fig.V.4.14 - Determinazione delle tensioni concatenate da quelle stellate (V).



nodo di riferimento 1. Tale problema si risolve facilmente utilizzando il metodo dei nodi e precisamente esprimendo l'equazione di equilibrio delle correnti uscenti dal nodo 2. Detta E_x la tensione incognita di questo nodo, rispetto al nodo 1, si ha:

$$(V.4.5) \quad E_x (Y_a + Y_b + Y_c) - Y_a E_a - Y_b E_b - Y_c E_c = 0$$

dove Y_a, Y_b, Y_c sono le ammettenze pari all'inverso delle impedenze Z_a, Z_b, Z_c . Dall'equazione (V.4.5) si ottiene:

$$(V.4.6) \quad E_x = \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

Riportando E_x nel piano dei fasori, si ottiene il diagramma completo delle tensioni del circuito trifase (fig. V.4.15). In particolare da tale diagramma si possono determinare le tensioni E'_a, E'_b, E'_c , relative ai tre bipoli che rappresentano il carico.

Il diagramma delle correnti deriva immediatamente da quello delle tensioni, essendo note le impedenze di carico.

Il sistema trifase viene a volte assegnato in forma differente da quella qui descritta. Si consideri il circuito di fig. V.4.16, in cui il siste-

ma trifase dei generatori costituisce un triangolo invece di una stella come in fig.V.4.13. Per la legge di Kirchhoff applicata alla maglia dei generatori, deve essere⁽¹⁾:

$$(V.4.7) \quad \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca} = 0$$

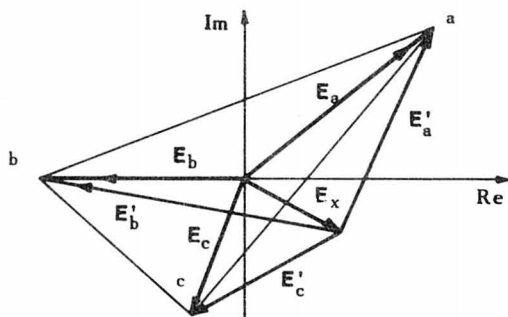


Fig.V.4.15 - Derivazione delle tensioni di carico.

Il diagramma delle tensioni può essere anche in questo caso determinato facilmente, come mostrato in fig.V.4.17, in cui il nodo c viene preso come nodo di riferimento.

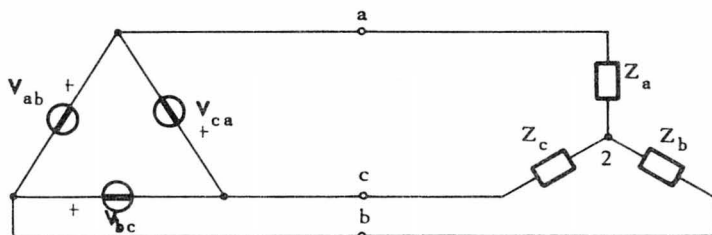


Fig.V.4.16 - Sistema trifase con generatori collegati a triangolo.

In questo caso la tensione $\mathbf{E}_x$ del nodo 2 (centro-stella del carico) si può determinare con la seguente equazione di equilibrio:

(1) - In molti casi invece di assegnare le tensioni concatenate in modo completo, viene dato soltanto il loro modulo. In tal caso il sistema trifase si può determinare per mezzo del triangolo delle tensioni concatenate, sotto la condizione di esistenza di tale triangolo (ciascuna tensione deve essere in modulo maggiore della differenza e minore della somma dei moduli delle altre due).

$$(V.4.8) \quad \mathbf{E}_x (Y_a + Y_b + Y_c) + Y_a \mathbf{V}_{ca} - Y_b \mathbf{V}_{bc} = 0$$

da cui:

$$(V.4.9) \quad \mathbf{E}_x = \frac{Y_b \mathbf{V}_{bc} - Y_a \mathbf{V}_{ca}}{Y_c + Y_b + Y_a}$$

Il diagramma delle correnti risulta indeterminato, in quanto la corrente che scorre nella maglia formata dai generatori è arbitraria. Fissata tale corrente il diagramma si ottiene facilmente.

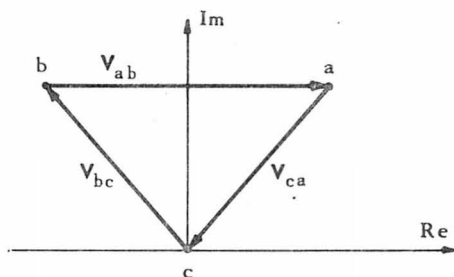


Fig.V.4.17 - Diagramma delle tensioni dei generatori del sistema trifase di fig.V.4.16.

In altri casi anche il carico è assegnato con disposizione a triangolo (anziché a stella come in fig.V.4.16). Si può dimostrare in generale che le disposizioni a stella o a triangolo di un carico trifase sono equivalenti, essendo riconducibili le une alle altre mediante opportune trasformazioni circuitali, come vedremo nel § VII.3.

Particolarmente importanti, nelle applicazioni, sono quei sistemi trifase in cui il triangolo delle tensioni ed il triangolo delle correnti presentano particolari proprietà di simmetria. Alcuni di questi casi saranno trattati successivamente nell'appendice V.A.

V.4.5 - Secondo esempio tipico di applicazione del metodo grafico: il circuito a scala.

Il circuito a scala, rappresentato in fig.V.4.18, è particolarmente indicato per l'applicazione del metodo grafico di analisi, quando interessa il legame tensione di uscita-tensione d'ingresso. In questo caso infatti è sufficiente supporre nota la tensione di uscita e risalire per via grafica alla tensione d'ingresso. A questo scopo, posto $\mathbf{V}_u = 1$, si calcolano per via grafica i seguenti fasori (fig.V.4.19).

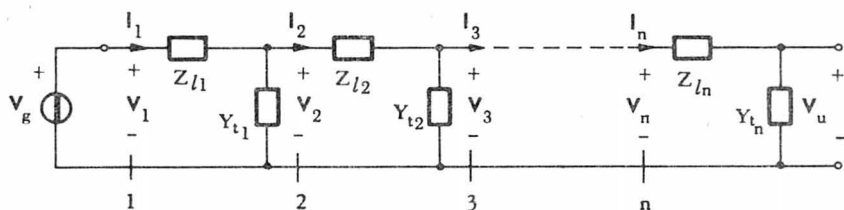


Fig.V.4.18 - Circuito a scala.

(V.4.10)

$$\begin{cases} I_n = Y_{tn} \cdot V_u \\ V_n = V_u + Z_{ln} \cdot I_n \end{cases}$$

Tali fasori corrispondono alla tensione e alla corrente relative alla sezione n-esima del circuito a scala (fig.V.4.18). Si può ora procedere al calcolo della tensione e della corrente nella k-esima sezione a partire da $k=n-1$ fino a $k=1$, procedendo dal fondo del circuito verso la sezione iniziale. Il passo generico di tale procedimento, illustrato in fig.V.4.20, consiste nelle seguenti operazioni:

(V.4.11)

$$\begin{cases} I_k = I_{k+1} + Y_{tk} V_{k+1} \\ V_k = V_{k+1} + Z_{lk} I_k \end{cases}$$

con $k = n-1, n-2, \dots, 2, 1$

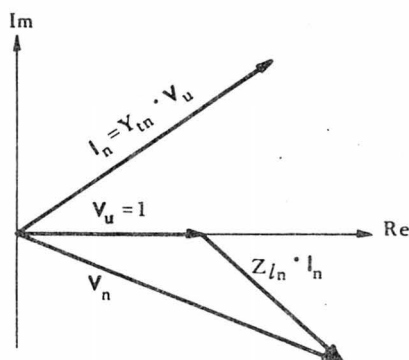


Fig.V.4.19 - Interpretazione grafica delle (V.4.10).

Tale procedimento permette di determinare tutte le tensioni e le correnti del circuito, compresa la tensione del generatore che risulta pari alla tensione V_1 di fig.V.4.18; cioè si ha:

$$(V.4.12) \quad V_g = V_1$$

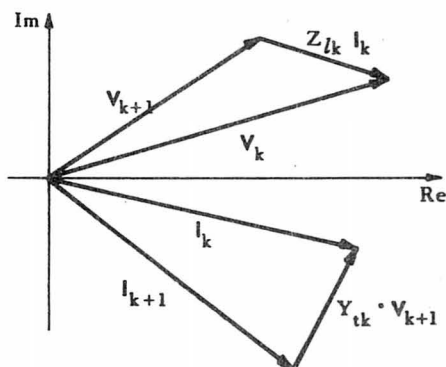


Fig.V.4.20 - Interpretazione grafica delle (V.4.11).

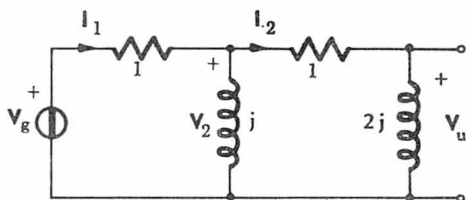


Fig.V.4.21 - Esempio di applicazione del metodo grafico per l'analisi di circuiti a scala. I valori sono in V, Ω .

Poiché il calcolo grafico è stato fatto ponendo arbitrariamente $V_u = 1$, il valore di V_g ottenuto tramite la (V.4.12) rappresenta in effetti il rapporto V_g/V_u . Pertanto il valore effettivo di V_u si ottiene dividendo per questa quantità, determinata per via grafica, il fasore assegnato della tensione di ingresso⁽¹⁾.

Nelle figure V.4.22 viene risolto mediante il metodo grafico il circuito a scala indicato in fig.V.4.21.

(1) - Il metodo qui descritto ed in particolare le formule ricorrenti (V.4.11) costituiscono un procedimento molto efficiente per l'analisi automatica di circuiti a scala.

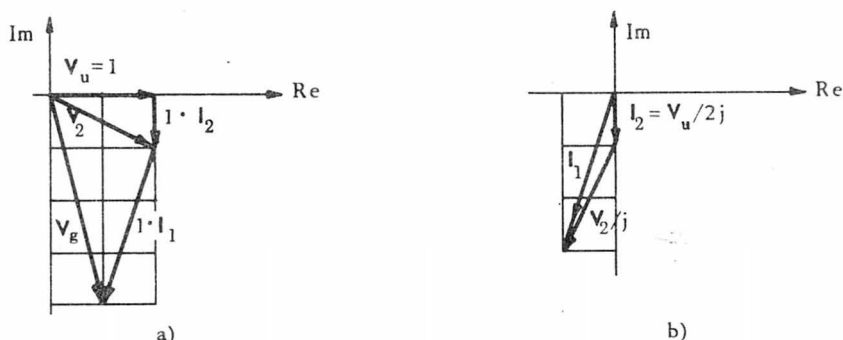


Fig.V.4.22 - Risoluzione grafica del circuito di fig.V.4.21;
a) diagramma delle tensioni;
b) diagramma delle correnti.

V.5 - Potenza ed energia in regime permanente sinusoidale.

L'analisi degli scambi di energia tra i componenti in regime permanente sinusoidale richiede l'introduzione di grandezze opportune, in quanto sia la potenza sia l'energia variano nel tempo, essendo le grandezze elettriche presenti variabili sinusoidalmente nel tempo. Per le varie applicazioni dei circuiti occorre avere a disposizione i mezzi per misurare gli aspetti che più interessano, quali il valore medio dell'energia fornita od assorbita, il valore medio dell'energia scambiata con gli elementi accumulatori di energia. Nel presente paragrafo definiremo le grandezze più usate per raggiungere questi scopi, fornendo contemporaneamente le formule che le collegano ai fasori delle grandezze elettriche presenti nel circuito.

V.5.1 - Espressione della potenza istantanea in regime permanente.

Si consideri un bipolo alimentato da un generatore (fig.V.5.1). Supponiamo, senza perdita di generalità, che il generatore sia di tensione e che l'impedenza del bipolo sia Z . Nel dominio del tempo, dette $v(t)$ ed $i(t)$ la tensione e la corrente ai capi del bipolo (con i versi scelti come in fig.V.5.1) è noto che la potenza $p(t)$ ceduta in ogni istante t dal generatore al bipolo è:

$$(V.5.1) \quad p(t) = v(t) i(t)$$

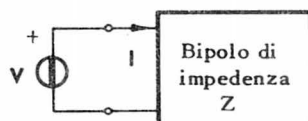
Tale quantità, che si misura in watt, viene detta potenza istantanea assorbita dal bipolo.

In regime permanente sinusoidale, le grandezze $v(t)$ e $i(t)$ hanno entrambe andamento sinusoidale isofrequenziale. Detta ω_0 la pulsazione e:

$$(V.5.2) \quad \mathbf{V} = V e^{j\varphi_v}$$

$$(V.5.3) \quad \mathbf{I} = I e^{j\varphi_i}$$

Fig.V.5.1 - Situazione considerata per la definizione della potenza istantanea.



i fasori rispettivamente della tensione e della corrente, ricaviamo un'espressione della potenza istantanea nella quale compaiono in modo esplicito i suddetti fasori. A tale scopo utilizziamo i legami del tipo della (V.2.4), che sono riportati qui di seguito per comodità:

$$(V.5.4) \quad v(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{V} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{V}^* e^{-j\omega_0 t}]$$

$$(V.5.5) \quad i(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{I} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{I}^* e^{-j\omega_0 t}]$$

Sostituendo le espressioni (V.5.4) e (V.5.5) nella (V.5.1) si ottiene:

$$(V.5.6) \quad \begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{4} [\mathbf{V} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{V}^* e^{-j\omega_0 t}] [\mathbf{I} e^{j\omega_0 t} + \mathbf{I}^* e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{4} [\mathbf{V} \mathbf{I}^* + \mathbf{V}^* \mathbf{I}] + \frac{1}{4} [\mathbf{V} \mathbf{I} e^{j2\omega_0 t} + \mathbf{V}^* \mathbf{I}^* e^{-j2\omega_0 t}] \end{aligned}$$

Osservando che i termini ottenuti sono a due a due complessi coniugati, si ha:

$$(V.5.7) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I} e^{j2\omega_0 t}]$$

potenza istantanea

$$(a+ib)(c+id) = ac + id + ic + bd = ac + id + ic + bd = ac + bd + i(c+d) = 2 \operatorname{Re} [ac + bd] + i(c+d)$$

La (V.5.7) è l'espressione cercata: essa consiste della somma di due termini, di cui il primo non dipende dal tempo, ed il secondo è di tipo sinusoidale con pulsazione uguale a $2\omega_0$. La (V.5.7) costituisce il punto di partenza di tutte le considerazioni successive. Analizziamo in dettaglio i due termini che la compongono.

V.5.2 - Potenza attiva.

Il significato del termine costante della potenza istantanea $p(t)$, si può ottenere facilmente esplicitando l'espressione (V.5.7) nel modo seguente:

$$(V.5.8) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [VI^*] + \frac{1}{2} VI \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i)$$

Riportando in funzione del tempo l'andamento di $p(t)$ si ottiene un diagramma del tipo indicato in fig.V.5.2. Tale andamento mostra che la potenza $p(t)$ varia sinusoidalmente con pulsazione $2\omega_0$ ed ha un valore medio uguale al termine costante della (V.5.7), cioè:

$$(V.5.9) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [VI^*]$$

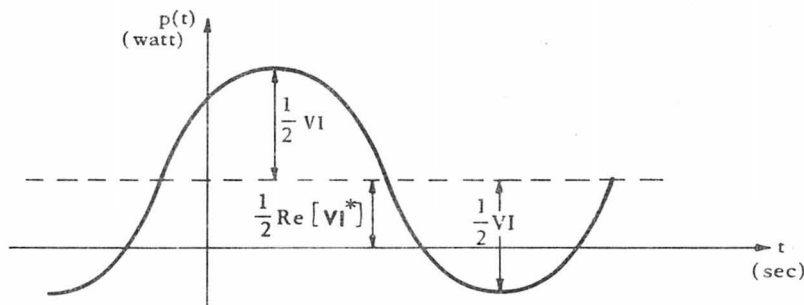


Fig.V.5.2 - Andamento nel tempo della potenza istantanea.

La grandezza P_a , che rappresenta la potenza ceduta in media al bipolo di carico dal generatore, viene detta potenza attiva e viene misurata in watt (multipli: kilowatt; sottomultipli: milliwatt, microwatt).

La potenza attiva implica quindi una media della potenza istantanea da effettuarsi su un opportuno intervallo di tempo. A questo riguardo occorre osservare che se

l'intervallo di tempo in questione non è scelto bene, il valore medio risultante è diverso dalla potenza attiva. Due scelte tipiche che forniscono i risultati voluti sono:

1) intervallo di tempo uguale ad un multiplo intero N di semiperiodi delle grandezze elettriche. Il valore medio della potenza istantanea è:

$$\begin{aligned} \overline{p(t)} &= \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} p(t) dt = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] + \frac{1}{2} V I \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i) \right\} dt = \\ (V.5.10) \quad &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] + \frac{1}{2} \frac{V I}{T_m 2\omega_0} [\sin(2\omega_0 T_m + \varphi_v + \varphi_i) - \sin(\varphi_v + \varphi_i)] \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi T_m è uguale a $N\pi/\omega_0$, $N=1, 2, 3, \dots$ il contributo del termine variabile della potenza istantanea è nullo. Quindi il valore medio è in questo caso proprio la potenza attiva;

2) intervallo di tempo infinitamente grande. Il contributo del termine variabile della potenza istantanea vale:

$$(V.5.11) \quad \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{V I}{2\omega_0 T_m} [\sin(2\omega_0 T_m + \varphi_v + \varphi_i) - \sin(\varphi_v + \varphi_i)] = 0$$

Perciò anche in questo caso il valore medio della potenza istantanea coincide con la potenza attiva.

È evidente che se si effettua la media della potenza $p(t)$ su intervalli di tempo che non rientrano nei due casi precedenti, si ottiene un valore medio differente da P_a , poiché in tale caso il termine variabile dà un contributo diverso da zero.

L'espressione (V.5.9) della potenza attiva P_a può essere esplicitata in base alle espressioni (V.5.2) e (V.5.3) in modo che compaiano i valori dei moduli e delle fasi di $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{I}$. Si ottiene:

$$(V.5.12) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V e^{j\varphi_v} I e^{-j\varphi_i}] = \frac{1}{2} V I \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

Detto Φ l'angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente:

$$(V.5.13)$$

$$\Phi = \varphi_v - \varphi_i$$

si ha:

$$(V.5.14)$$

$$P_a = \frac{1}{2} V I \cos \Phi$$

La quantità $\cos \Phi$ prende il nome di «*fattore di potenza*». Si vede chiaramente da questa espressione che la potenza attiva dipende in modo notevole dallo sfasamento tra corrente e tensione. In particolare può accadere che anche con valori grandi della tensione e della corrente si abbiano valori piccoli di potenza attiva a causa di uno sfasamento tra le due grandezze elettriche vicino a 90° . Tale constatazione è di fondamentale importanza nella trasmissione dell'energia elettrica e rende chiara la necessità dell'azione di «*rifasamento*» che si opera in tali casi (cfr. esempio V.5.3).

La presenza del coefficiente 2 nella (V.5.14) viene usualmente resa superflua mediante l'utilizzazione dei «*valori efficaci*» delle grandezze sinusoidali. Si definiscono come valori efficaci della tensione e della corrente le seguenti quantità:

$$(V.5.15) \quad V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I$$

In termini efficaci la potenza attiva assume la forma:

$$(V.5.16) \quad P_a = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Phi$$

Altre espressioni equivalenti della potenza attiva si ottengono, tenendo conto del legame tra tensione e corrente imposto dal carico. Precisamente si ha:

$$(V.5.17) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z I I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Z] I^2 = \operatorname{Re} [Z] I_{\text{eff}}^2$$

$$(V.5.18) \quad P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Y V V^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [Y] V^2 = \operatorname{Re} [Y] V_{\text{eff}}^2$$

Da queste espressioni si deduce che la potenza attiva dipende solo dalle parti reali dell'impedenza e dell'ammettenza.

V.5.3 - Potenza complessa e potenza reattiva.

La potenza attiva definita in precedenza non fornisce alcun elemento di valutazione del termine variabile nel tempo che appare nell'espressione (V.5.7) della potenza istantanea. Occorre perciò introdurre ulteriori grandezze. Per raggiungere questo scopo è opportuno trasformare preventivamente il termine suddetto, in modo che in esso compaia esplicitamente la potenza attiva, cioè:

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= I e^{j\varphi_i} \\
 p_v(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{V} I e^{j2\omega_0 t}] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{V} I e^{-j2\varphi_i} e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}] = \\
 (V.5.19) \quad &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{V} I^* e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}] = \frac{1}{2} V I \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i)
 \end{aligned}$$

avendo indicato con φ_i l'argomento del fasore della corrente. La quantità $p_v(t)$ è di tipo sinusoidale con pulsazione $2\omega_0$; ad essa può essere associato il fasore:

$$(V.5.20) \quad \underline{P}_c = \frac{1}{2} \underline{V} I^*$$

Il fasore $\underline{P}_c$ prende il nome di «potenza complessa» e svolge un ruolo importante nella caratterizzazione dei circuiti in regime permanente sinusoidale, come vedremo successivamente. Il modulo di $\underline{P}_c$, che coincide con l'ampiezza della quantità $p_v(t)$, prende il nome di «potenza apparente» e vale:

$$(V.5.21) \quad P_{ap} = \frac{1}{2} V I = V_{eff} I_{eff}$$

La potenza apparente, che si misura in voltampere, ha interesse in quei casi in cui occorre conoscere contemporaneamente l'ampiezza della tensione e della corrente per valutare globalmente l'impegno che ne deriva per l'apparecchiatura che si sta considerando. Infatti in una macchina elettrica la complessità dell'isolamento e dei circuiti magnetici è proporzionale all'ampiezza della tensione e la complessità degli avvolgimenti è proporzionale all'ampiezza della corrente. Perciò in questo caso la potenza apparente fornisce una misura della complessità della macchina stessa. È interessante osservare che la potenza apparente non è mai inferiore alla potenza attiva, cioè:

$$(V.5.22) \quad P_{ap} \geq P_a$$

Sviluppando il termine (V.5.19) si ottiene:

$$(V.5.23) \quad p_v(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{V} I^*] \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i)$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\underline{V} I^*] \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{V} I^*] + \frac{\operatorname{Re} [\underline{V} I^*]}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i)$$

I due termini in cui risulta suddivisa la parte variabile della potenza istantanea hanno un significato fisico preciso, anche se sono stati ottenuti soltanto per via analitica. Essi corrispondono infatti all'effetto di due cause distinte, che provocano la variabilità della potenza istantanea: l'andamento sinusoidale delle grandezze elettriche e la presenza degli elementi immagazzinatori di energia. Per separare i due effetti è sufficiente osservare che in assenza di elementi reattivi i due fasori V ed I sarebbero in fase e quindi sarebbe presente solo il primo termine della (V.5.23). Perciò è del tutto naturale identificare tale primo termine con l'effetto della prima causa ed il secondo con l'effetto della seconda causa. Osserviamo che quest'ultimo termine ha un'ampiezza pari a:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [VI^*]$$

che coincide con l'ampiezza della parte immaginaria della potenza complessa, definita nella (V.5.20). Tale parte immaginaria, quindi, costituisce una misura dello scambio energetico con gli elementi immagazzinatori di energia e prende il nome di «potenza reattiva», cioè:

$$(V.5.24) \quad P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [VI^*] = \frac{1}{2} VI \sin(\varphi_v - \varphi_i) = \frac{1}{2} VI \sin \Phi = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \Phi$$

Esplicitando la (V.5.24) in funzione dell'impedenza o dell'ammettenza del bipolo si ha un'ulteriore conferma del legame della potenza reattiva con gli elementi reattivi; infatti si ha:

$$(V.5.25) \quad \begin{aligned} P_R &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [Z] \cdot I^2 = \operatorname{Im} [Z] \cdot I_{\text{eff}}^2 \\ P_R &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} [Y] \cdot V^2 = -\operatorname{Im} [Y] \cdot V_{\text{eff}}^2 \end{aligned}$$

L'unità di misura usata per la potenza reattiva è il var (volt ampere reattivi; multiplo: kilovar). Non si usa quindi il watt, in quanto si tratta di una potenza soltanto scambiata e non utilizzata.

È importante notare che tra le varie grandezze introdotte esiste un legame molto semplice, come si deduce dalle (V.5.20), (V.5.14) e (V.5.24), cioè:

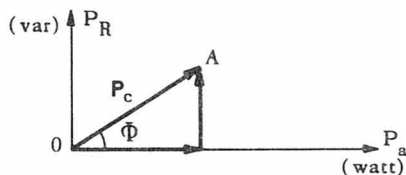
$$(V.5.26)$$

$$P_c = P_a + j P_R$$

il potere ho potenza complessa

Inoltre la potenza apparente è semplicemente il modulo del fasore P_c . Queste relazioni sono ricavabili in modo immediato nel piano delle potenze complesse, come si deduce dalla fig.V.5.3.

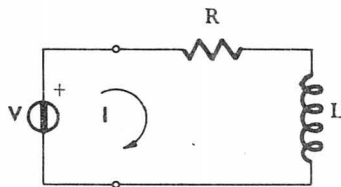
Fig.V.5.3 - Legame tra potenza complessa, potenza attiva e potenza reattiva. La potenza apparente coincide con la lunghezza del segmento OA.



Esempio V.5.1.

Dato il circuito di fig.V.5.4, determinare le potenze attiva, reattiva, complessa, apparente entranti nel bipolo.

Fig.V.5.4 - Circuito considerato nell'esempio V.5.1. I valori dei componenti sono: $V=100$, $R=3$, $L=2$, $\omega_0=2$ (V, Ω , H, rad/sec).



Dall'equazione di equilibrio dell'unica maglia presente, si ha:

$$I = \frac{V}{R + j\omega_0 L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100}{25} (3 - j4) = 12 - j16 = 20 e^{-j \arctan 4/3} = 20 e^{-j0,93}$$

In base alle definizioni precedenti si ha:

$$P_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V I^*] = 600 \text{ watt}$$

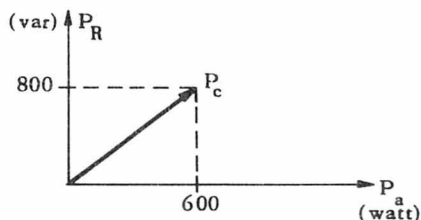
$$P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [V I^*] = 800 \text{ VAR}$$

$$P_c = P_a + j P_R = 600 + j 800$$

$$P_{ap} = \frac{1}{2} V I = 1000 \text{ voltampere}$$

Tra le quantità precedenti esiste il legame mostrato in fig.V.5.5.

Fig.V.5.5 - Rappresentazione delle potenze attiva, reattiva e complessa per il circuito dell'esempio V.5.1.



Applicando la formula (V.5.8) si ottiene l'espressione della potenza istantanea $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] + \frac{1}{2} V I \cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [100(12 + j16)] + \frac{1}{2} 100 \cdot 20 \cos(4t - 0,93) = 600 + 1000 \cos(4t - 0,93) \text{ watt} \end{aligned}$$

L'andamento nel tempo di tale potenza istantanea $p(t)$ è riportato nella fig. V.5.6. Dall'esame di questa figura si vede chiaramente che:

$$P_a = 600 \text{ watt}$$

Il termine variabile della potenza istantanea può essere ulteriormente suddiviso come indicato nella (V.5.23), cioè:

$$\begin{aligned} p_v(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] \cos(4t - 1,86) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\mathbf{V} \mathbf{I}^*] \sin(4t - 1,86) = \\ &= 600 \cos(4t - 1,86) - 800 \sin(4t - 1,86) \end{aligned}$$

La $p_v(t)$ è perciò uguale alla somma di due sinusoidi, la prima di ampiezza pari a 600, la seconda di ampiezza pari a 800. Tenendo conto del termine costante, si ottiene la seguente espressione della potenza istantanea:

$$p(t) = 600 [1 + \cos(4t - 1,86)] - 800 \sin(4t - 1,86)$$

Il primo termine rappresenta la potenza dissipata sulla parte reale dell'impedenza (cioè la resistenza R). Il secondo termine, la cui ampiezza è 800, rappresenta la potenza scambiata tra il generatore e la parte immaginaria dell'impedenza (cioè la reattanza $\omega_0 L$). L'andamento di tali termini è riportato in fig.V.5.7.

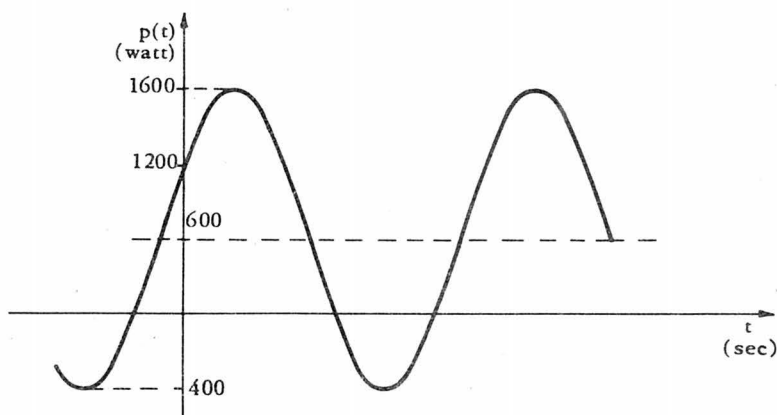


Fig.V.5.6 - Andamento della potenza istantanea: $p(t) = 600 + 1000 \cos(4t - 0,93)$.

V.5.4 - Conservazione della potenza complessa.

È stato messo in evidenza nel § I.10.3 che i circuiti a costanti concentrate soddisfano al principio fondamentale di conservazione della energia, come conseguenza delle leggi di Kirchhoff. Di conseguenza anche in regime permanente sinusoidale vale la seguente proprietà:

Proprietà V.5.1 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze istantanee $p_i(t)$ assorbite da tutti i bipoli⁽¹⁾ presenti è uguale a zero, cioè:

(V.5.27)

$$\sum_{i=1}^N p_i(t) = 0$$

dove N è il numero dei bipoli che compongono il circuito, inclusi i generatori indipendenti».

Nel caso del regime permanente abbiamo visto che è opportuno utilizzare al posto della potenza istantanea, altre grandezze quali la potenza complessa, la potenza attiva, la potenza reattiva e la potenza apparente. È quindi naturale domandarci se sia possibile o meno estendere la proprietà V.5.1 a queste grandezze. La risposta a tale domanda è data dalla seguente proprietà:

(1) - L'ipotesi che siano presenti nel circuito solo bipoli non è restrittivo, in quanto come vedremo nel § VI.10.2, ogni componente a due porte è sostituibile con un circuito equivalente costituito da bipoli.

Proprietà V.5.2 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze complesse P_{ci} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.28) \quad \sum_{i=1}^N P_{ci} = 0$$

dove N è il numero dei bipoli costituenti il circuito».

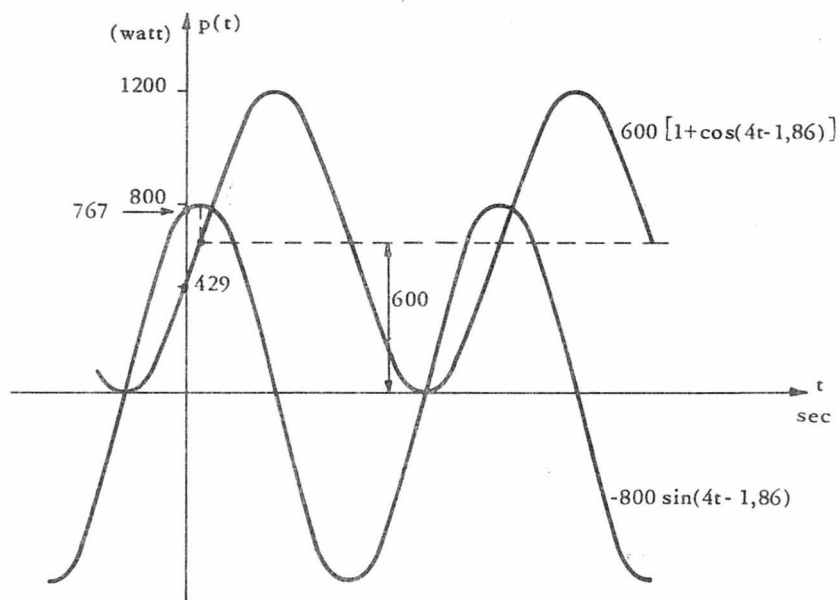


Fig.V.5.7 - Andamento delle potenze istantanee applicate al resistore ed all'induttore del circuito di fig.V.5.4.

La dimostrazione di questa proprietà è una conseguenza immediata delle proprietà topologiche del circuito, utilizzate nella dimostrazione del teorema di Tellegen nel § I.10. Infatti, siano I_a , I_c , V_a , V_c rispettivamente i vettori dei fasori delle correnti dei rami dell'albero e del co-albero. In base alle (I.10.5), (I.10.6) e (I.10.7) risulta:

$$(V.5.29) \quad \begin{aligned} [I_a] &= -[A] [I_c] \\ [V_c] &= [A]^t [V_a] \end{aligned}$$

Perciò la somma delle potenze complesse assorbite dai rami del circuito può esprimersi come segue, a meno di un fattore moltiplicativo $1/2$:

$$\sum_{i=1}^N P_{ci} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{i}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_c \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a^* \\ \mathbf{i}_c^* \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_a]^t [\mathbf{i}_a]^* + [\mathbf{v}_c]^t [\mathbf{i}_c]^* =$$

(V.5.30)

$$= - [\mathbf{v}_a]^t [\mathbf{A}] [\mathbf{i}_c]^* + [\mathbf{v}_a]^t [\mathbf{A}] [\mathbf{i}_c]^* = 0$$

ciò che dimostra la proprietà.

È opportuno osservare che nel piano dei fasori delle potenze complesse, la relazione (V.5.28) impone ai fasori delle potenze complesse assorbite dai bipoli costituenti il circuito, di formare una poligonale chiusa.

Dalla proprietà V.5.2 si deduce che anche le potenze attiva e reattiva soddisfano al principio di conservazione. Per vedere ciò è sufficiente ricordare la (V.5.26), in base alla quale si derivano le seguenti proprietà:

Proprietà V.5.3 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze attive P_{ai} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.31) \quad \sum_{i=1}^N P_{ai} = 0$$

Proprietà V.5.4 - «In ogni circuito, in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze reattive P_{Ri} assorbite da tutti i bipoli presenti è uguale a zero, cioè:

$$(V.5.32) \quad \sum_{i=1}^N P_{Ri} = 0$$

Le proprietà dimostrate nel presente paragrafo mettono in evidenza che è possibile trattare le potenze complessa, attiva e reattiva come fossero potenze istantanee ed effettuare per ciascuna di esse i bilanci energetici nel circuito considerato. Occorre notare che una proprietà analoga non vale per la potenza apparente, in quanto nella sua definizione interviene l'operazione di modulo, che non è lineare.

Esempio V.5.2.

Verificare la conservazione delle potenze attive e reattive per il circuito di figura V.5.8.

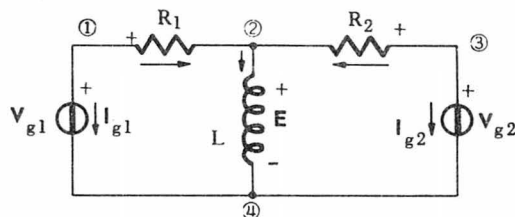


Fig. V.5.8 - Circuito considerato nell'esempio V.5.2. I valori dei componenti sono: $V_{g1} = 5 + j$, $V_{g2} = -1 - 2j$, $R_1 = R_2 = R = 1$, $L = 1$, $\omega_0 = 2$, (V , Ω , H , rad/sec).

Risolvendo il circuito con il metodo dei nodi, si ottiene:

$$\begin{aligned} V_{g1} \frac{1}{R} - E \frac{1}{R} &= -I_{g1} \\ -V_{g1} \frac{1}{R} + E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega_0 L} \right) - V_{g2} \frac{1}{R} &= 0 \\ -E \frac{1}{R} + V_{g2} \frac{1}{R} &= -I_{g2} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{aligned} 5 + j - E &= -I_{g1} \\ -(5 + j) + E \left(2 + \frac{1}{2j} \right) + 1 + 2j &= 0 \\ -E - 1 - 2j &= -I_{g2} \end{aligned}$$

La soluzione è:

$$E = 2, \quad I_{g1} = -3 - j, \quad I_{g2} = 3 + 2j \quad (V, A)$$

Si ottengono quindi i seguenti valori per le tensioni e le correnti applicate a ciascun componente:

$$\begin{array}{ll}
 V_{g1} = 5 + j ; & I_{g1} = -3 - j \\
 V_{R1} = 3 + j ; & I_{R1} = 3 + j \\
 V_L = 2 ; & I_L = -j \\
 V_{R2} = -3 - 2j ; & I_{R2} = -3 - 2j \\
 V_{g2} = -1 - 2j ; & I_{g2} = 3 + 2j
 \end{array} \quad (V, A)$$

In fig.V.5.9 sono riportati i diagrammi vettoriali dei fasori relativi alle tensioni ed alle correnti del circuito. Le potenze attive e reattive assorbite da ciascun componente sono le seguenti:

Generatore V_{g1} :	$P_{a1} = -8$;	$P_{R1} = 1$
Resistore R_1 :	$P_{a2} = 5$;	$P_{R2} = 0$
Induttore :	$P_{a3} = 0$;	$P_{R3} = 1$ (watt, var)
Resistore R_2 :	$P_{a4} = 6,5$;	$P_{R4} = 0$
Generatore V_{g2} :	$P_{a5} = -3,5$;	$P_{R5} = -2$

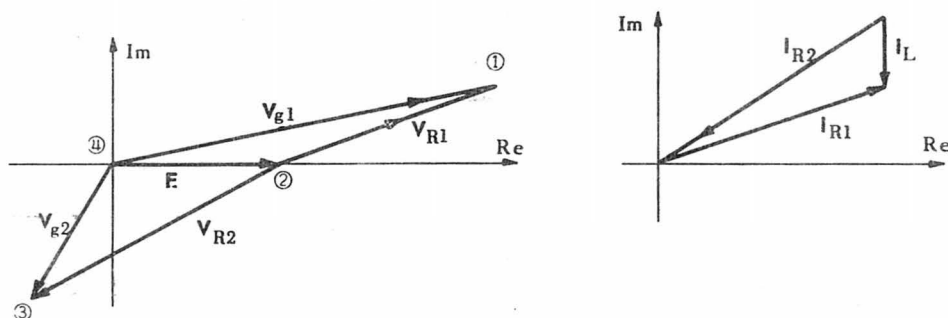


Fig.V.5.9 - Fasori delle tensioni e delle correnti del circuito di fig.V.5.8(V, A).

Si verifica immediatamente che la somma delle potenze attive e reattive è uguale a zero. In fig.V.5.10 è riportato infine il diagramma delle potenze complesse per il circuito in esame (accanto ad ogni vettore è indicato il componente che assorbe la potenza corrispondente). Si vede chiaramente che i fasori di tali potenze costituiscono i lati di una poligonale chiusa.

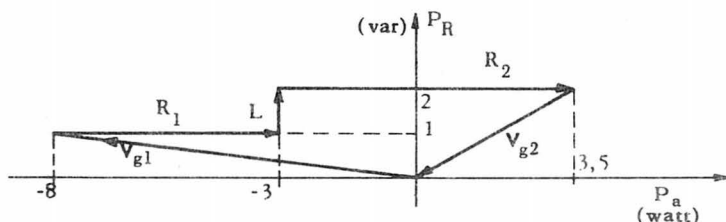


Fig.V.5.10 - Diagramma delle potenze complesse assorbite dai bipoli costituenti il circuito di fig.V.5.8.

V.5.5 - Espressione esplicita della potenza attiva e reattiva assorbita dai componenti di un circuito.

Le grandezze introdotte in precedenza per caratterizzare la potenza in regime permanente sinusoidale assumono una forma caratteristica nel caso dei componenti tipici del circuito, quali il resistore, il condensatore, l'induttore, il trasformatore ideale ed il giratore ideale. Esaminiamo in dettaglio tali componenti nel presente paragrafo. Per quanto riguarda gli altri componenti, è immediato rendersi conto che sia la potenza complessa, sia la potenza attiva, sia la potenza reattiva possono assumere qualsiasi valore per i componenti del tipo generatori indipendenti, generatori controllati, nullori. Tali componenti verranno perciò nel seguito indicati come «componenti energeticamente indefiniti».

a) Resistore.

Si consideri un resistore di resistenza R in regime permanente sinusoidale. Detti V ed I i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente espressione, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.33) \quad p(t) = \frac{1}{2} R I^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_v)]$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig.V.5.11.

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.34) \quad P_c = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} G V^2 \quad \frac{1}{2} \frac{V \cdot V^*}{R}$$

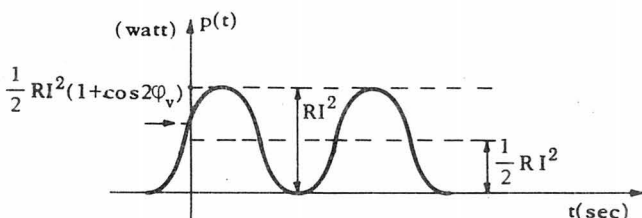


Fig.V.5.11 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un resistore di resistenza R .

Essendo la potenza complessa puramente reale, si deduce che la potenza attiva P_a vale:

$$(V.5.35) \quad P_a = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} G V^2 = R I_{\text{eff}}^2 = G V_{\text{eff}}^2$$

e che la potenza reattiva P_R è nulla cioè:

$$(V.5.36) \quad P_R = 0$$

A volte si indica con il simbolo F_{mi} il valore della potenza media dissipata nel resistore di resistenza R_i , facente parte di un circuito. Dalla (V.5.35) si ottiene:

$$(V.5.37) \quad F_{mi} = \frac{1}{2} R_i I^2$$

b) Induttore.

Si consideri un induttore di induttanza L in regime permanente sinusoidale. Detti V ed I i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente forma, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.38) \quad \begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [j \omega_0 L I \cdot I^*] + \frac{1}{2} \omega_0 L I^2 \cos \left(2 \omega_0 t + 2 \varphi_i + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0 L I^2 \cos \left(2 \omega_0 t + 2 \varphi_i + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig.V.5.12.

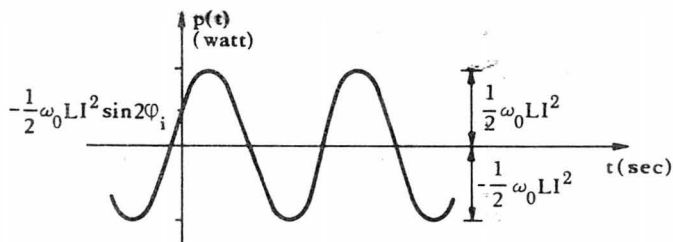


Fig.V.5.12 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un induttore di induttanza L .

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.39) \quad P_c = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^* = \mathbf{J} \frac{1}{2} \omega_0 L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*}{-j\omega_0 L} = +j \frac{1}{2} \frac{V^2}{\omega_0 L}$$

Essendo la potenza complessa immaginaria pura, si ottiene il risultato che la potenza attiva P_a è uguale a zero:

$$(V.5.40) \quad P_a = 0$$

e che la potenza reattiva P_R è uguale a:

$$(V.5.41) \quad P_R = \frac{1}{2} \omega_0 L I^2$$

La potenza reattiva è una misura degli scambi di energia con i componenti reattivi. Nell'ambito dell'induttore è intuitivo che la potenza reattiva sia legata in qualche modo con l'energia immagazzinata in esso. cioè a:

$$(V.5.42) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Per individuare questo legame calcoliamo il valore medio di questa energia istantanea, usando come intervallo di tempo su cui effettuare la media lo stesso visto nel caso della potenza attiva. Si ha:

$$(V.5.43) \quad \bar{\mathcal{E}}_L = \bar{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \frac{1}{2} L i^2(t) dt = \frac{L I^2}{2 T_m} \int_0^{T_m} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i) dt = \\ = 1/4 L I^2$$

Confrontando la (V.5.41) con la (V.5.43) si ottiene la seguente proprietà:

Proprietà V.5.5 - «La potenza reattiva assorbita da un induttore di induttanza L è uguale a:

$$(V.5.44) \quad P_R = 2 \omega_0 \bar{E}_L$$

avendo indicato con $\bar{E}_L$ l'energia media immagazzinata nell'induttore».

a) Condensatore.

Si consideri un condensatore di capacità C in regime permanente sinusoidale. Detti V ed I i fasori della tensione e della corrente, la potenza istantanea $p(t)$ assume la seguente forma, in base alla (V.5.8):

$$(V.5.45) \quad p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [-j \omega_0 C V^2] + \frac{1}{2} \omega_0 C V^2 \cos \left(2 \omega_0 t + 2 \varphi_v + \frac{\pi}{2} \right) = \\ = \frac{1}{2} \omega_0 C V^2 \cos \left(2 \omega_0 t + 2 \varphi_v + \frac{\pi}{2} \right)$$

ed ha quindi l'andamento riportato in fig. V.5.13.

La potenza complessa P_c assume la seguente forma:

$$(V.5.46) \quad P_c = \frac{1}{2} V I^* = -j \frac{1}{2} \omega_0 C V^2 =$$

Essendo la potenza complessa immaginaria pura, si ottiene il risultato che la potenza attiva P_a è uguale a zero:

$$(V.5.47) \quad P_a = 0$$

e che la potenza reattiva P_R è uguale a:

$$(V.5.48) \quad P_R = - \frac{1}{2} \omega_0 C V^2$$

Si noti che nel condensatore la potenza reattiva assume in ogni caso un valore negativo, a differenza dell'induttore, dove la potenza reattiva è sempre positiva.

La potenza reattiva nel condensatore è legata all'energia media immagazzinata in esso, analogamente a quello che accade per l'induttore. Calcoliamo l'energia media in questione; si ha, utilizzando un intervallo di tempo su cui effettuare la media, scelto come nel caso della potenza attiva:

$$(V.5.49) \quad \bar{\mathcal{E}}_C = \bar{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{C V^2}{2 T_m} \int_0^{T_m} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_v) dt = \\ = \frac{1}{4} C V^2$$

Confrontando la (V.5.49) con la (V.5.48), si ottiene la seguente proprietà:

Proprietà V.5.6 - «La potenza reattiva assorbita da un condensatore di capacità C è uguale a:

$$(V.5.50) \quad P_R = -2 \omega_0 \bar{\mathcal{E}}_C$$

avendo indicato con $\bar{\mathcal{E}}_C$ l'energia media immagazzinata nel condensatore.

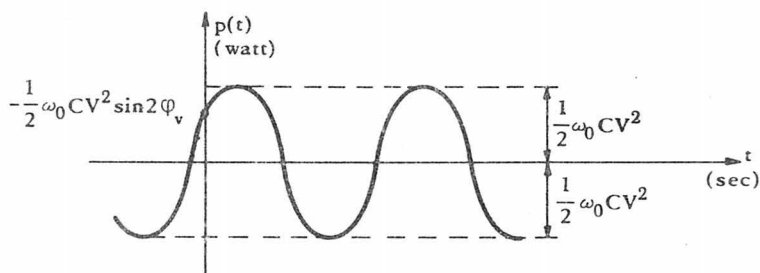


Fig.V.5.13 - Andamento della potenza istantanea assorbita da un condensatore di capacità C .

d) *trasformatore ideale*.

In base alle relazioni costitutive:

$$(V.5.51) \quad \begin{aligned} v_1 &= n v_2 \\ i_1 &= -i_2/n \end{aligned}$$

il trasformatore ideale non assorbe potenza istantanea, come già messo

in evidenza nella (I.8.8). Analogamente, utilizzando le (V.5.51) scritte nel dominio dei fasori, si ha:

$$(V.5.52) \quad P_c = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* + \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* + \frac{1}{2} n \mathbf{V}_1 \left(-\frac{1}{n} \mathbf{I}_1^* \right) = 0$$

Vale quindi la seguente proprietà:

Proprietà V.5.7 - «Un trasformatore ideale non assorbe sia la potenza istantanea sia la potenza complessa sia la potenza attiva sia la potenza reattiva».

e) giratore ideale.

In base alle relazioni costitutive:

$$(V.5.53) \quad v_1 = -R_0 i_2 \quad ; \quad v_2 = R_0 i_1$$

il giratore ideale non assorbe potenza istantanea, come già messo in evidenza nella (I.8.10). Per quanto riguarda la potenza complessa si ha, utilizzando le (V.5.53) nel dominio dei fasori:

$$(V.5.54) \quad P_c = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* + \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^* = -\frac{1}{2} R_0 \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_1^* + \frac{1}{2} R_0 \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2^* = j \operatorname{Im} [R_0 \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2^*]$$

Quindi vale la seguente proprietà:

Proprietà V.5.8 - «Un giratore ideale non assorbe né potenza istantanea né potenza attiva. La potenza reattiva è data da:

$$(V.5.55) \quad P_R = \operatorname{Im} [R_0 \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2^*]$$

in cui R_0 è la resistenza di girazione ed $\mathbf{I}_1$ ed $\mathbf{I}_2$ sono i fasori delle correnti entranti».

V.5.6 - Bilancio energetico di un circuito.

Si consideri un circuito costituito da componenti energeticamente indefiniti (generatori indipendenti, generatori controllati, nullori), resistori, condensatori, induttori, trasformatori e giratori ideali. In base alla proprietà V.5.2 (conservazione della potenza complessa) si può scrivere:

$$(V.5.56) \quad \sum_{i=1}^{N_G} P_c^{(G_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} P_c^{(R_i)} + \sum_{i=1}^{N_L} P_c^{(L_i)} + \sum_{i=1}^{N_C} P_c^{(C_i)} + \sum_{i=1}^{N_G} P_c^{(G_i)}$$

dove:

N_G è il numero dei componenti energeticamente indefiniti;

$P_c^{(G_i)}$ è la potenza complessa erogata dall' i -esimo componente energeticamente indefinito;

N_R è il numero dei resistori;

$P_c^{(R_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall' i -esimo resistore;

N_L è il numero degli induttori;

$P_c^{(L_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall' i -esimo induttore;

N_C è il numero dei condensatori;

$P_c^{(C_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall' i -esimo condensatore;

N_G è il numero dei giratori ideali;

$P_c^{(G_i)}$ è la potenza complessa assorbita dall' i -esimo giratore.

Ricordando l'espressione (V.5.37), si ha:

$$(V.5.57) \quad \sum_{i=1}^{N_R} P_c^{(R_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} \frac{1}{2} R_i I_i^2 = \sum_{i=1}^{N_R} F_{mi}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti i resistori del circuito, è una quantità reale.

Ricordando l'espressione (V.5.44), si ha:

$$(V.5.58) \quad \sum_{i=1}^{N_L} P_c^{(L_i)} = j 2 \omega_0 \sum_{i=1}^{N_L} \bar{C}_{L_i}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti gli induttori del circuito, è una quantità immaginaria pura.

Ricordando l'espressione (V.5.50) si ha:

$$(V.5.59) \quad \sum_{i=1}^{N_C} P_c^{(C_i)} = -j 2 \omega_0 \sum_{i=1}^{N_C} \bar{C}_{C_i}$$

Tale potenza complessa, assorbita da tutti i condensatori del circuito, è una quantità immaginaria pura.

Scindendo il bilancio della potenza complessa (V.5.56) nella parte reale ed immaginaria, si ottiene, tenendo conto delle (V.5.57), (V.5.58), (V.5.59) e (V.5.55):

$$(V.5.60) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} = \sum_{i=1}^{N_R} F_{mi}$$

$$(V.5.61) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_R^{(g_i)} - \sum_{i=1}^{N_G} P_R^{(G_i)} = 2\omega_0 \left[\sum_{i=1}^{N_L} \bar{E}_{L_i} - \sum_{i=1}^{N_C} \bar{E}_{C_i} \right]$$

dove $P_a^{(g_i)}$ è la potenza attiva erogata dall' i -esimo componente energeticamente indefinito; $P_R^{(g_i)}$ è la potenza reattiva erogata dallo stesso componente; $P_R^{(G_i)}$ è la potenza reattiva assorbita dall' i -esimo giratore.

Le due espressioni (V.5.60) e (V.5.61) rappresentano i bilanci energetici che si possono effettuare in un circuito in regime permanente sinusoidale. Esse equivalgono alle seguenti proprietà:

Proprietà V.5.9 - «In ogni circuito in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze attive erogate da tutti i componenti energeticamente indefiniti è uguale alla somma delle potenze medie assorbite da tutti i resistori presenti».

Corollari della proprietà V.5.9 sono le seguenti formule:

$$(V.5.62) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} > 0 \quad \text{per i circuiti con perdite}$$

$$(V.5.63) \quad \sum_{i=1}^{N_g} P_a^{(g_i)} = 0 \quad \text{per i circuiti senza perdite}$$

Proprietà V.5.10 - «In ogni circuito in regime permanente sinusoidale, la somma delle potenze reattive erogate da tutti i componenti energeticamente indefiniti e dai giratori è legata, tramite l'espressione (V.5.61), alla somma delle energie medie immagazzinate negli induttori ed alla somma delle energie medie immagazzinate nei condensatori».

Si noti che il segno della potenza reattiva globalmente erogata dai componenti energeticamente indefiniti e dai giratori dipende dalla prevalenza o meno dell'energia totale media di tipo magnetico rispetto a

quella totale media di tipo elettrico. Si può avere un valore nullo per la potenza reattiva totale quando non sono presenti componenti reattivi, ovvero quando i due tipi di energia totale media si bilanciano esattamente.

Esempio V.5.3.

Assegnato il circuito di fig.V.5.14, determinare il valore della capacità C , in modo che risulti nulla (se possibile) la potenza reattiva erogata dal generatore. Effettuare inoltre il bilancio energetico del circuito.

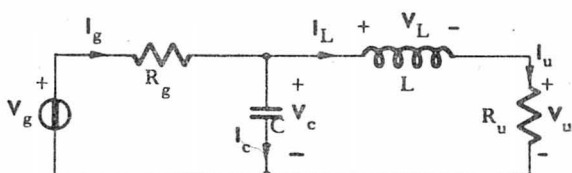


Fig.V.5.14 - Circuito considerato nell'esempio V.5.3. I valori dei componenti sono: $R_u = 100$, $R_g = 10$, $\omega_0 L = 10$, $\omega_0 = 314$ (rad/sec).

Risolviamo il problema con il metodo grafico, utilizzando il procedimento descritto nel § V.4.5. Poniamo a questo scopo $I_u = 1$ A e riportiamo tale valore sul diagramma delle correnti (fig.V.5.15). Sul diagramma delle tensioni (fig.V.5.16) deriviamo la posizione dei vettori V_u , V_L e V_c . Si può quindi ottenere, sul diagramma delle correnti, la direzione che dovrà avere la corrente I_c che percorre il condensatore. Tale direzione deve essere tale da formare un angolo di 90° in anticipo rispetto alla direzione di V_c .

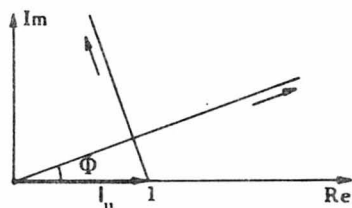


Fig.V.5.15 - Diagramma delle correnti del circuito di fig.V.5.14. Le correnti sono in ampere.

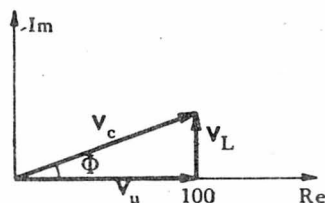
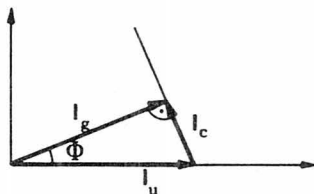


Fig.V.5.16 - Diagramma delle tensioni del circuito di fig.V.5.14. Le tensioni sono in volt.

La corrente I_c , sommata alla corrente I_u , fornisce la corrente erogata dal generatore I_g . Non è nota a priori, tuttavia, l'ampiezza della corrente I_c , poiché è incognita la capacità C . Tale incognita viene determinata imponendo che il generatore di tensione non eroghi potenza reattiva. A questo scopo occorre che I_c sia tale che la corrente I_g formi un angolo nullo con la direzione della tensione V_c . Tale scelta è indicata in fig.V.5.17, dove è mostrato il diagramma completo delle correnti.

Fig.V.5.17 - Determinazione della corrente I_c .



In fig.V.5.18 è riportato il diagramma completo delle tensioni. Si noti che a parità di I_u la scelta effettuata per la corrente del condensatore I_c è tale da rendere minimo il valore del modulo della corrente I_g che scorre nel generatore e nella resistenza R_g .

Il valore della capacità C può essere determinato sia per via analitica sia per via grafica. Usando il metodo grafico si ha da fig.V.5.17:

$$I_c = I_u \sin \Phi = \sin \Phi$$

D'altra parte dalla fig.V.5.16 si ottiene:

$$V_L = V_c \sin \Phi ; \quad \tan \Phi = \frac{V_L}{V_u} = \frac{10}{100} = 0,1 ; \quad \Phi = 0,099$$

che equivale a:

$$10 = \sin \Phi \cdot \frac{I_c}{\omega_0 C} = \frac{\sin^2 \Phi}{\omega_0 C}$$

Il valore della capacità è dunque:

$$C = \frac{\sin^2 \Phi}{10 \omega_0} = 3,153 \mu F$$

Procedendo per via analitica, tenendo conto che il generatore non deve erogare potenza reattiva, si deve avere per la proprietà V.5.10:

$$\bar{E}_C = \bar{E}_L$$

dove:

$$\bar{E}_L = \frac{1}{4} L I_L^2$$

è l'energia media immagazzinata sotto forma magnetica nell'induttore e:

$$\bar{E}_C = \frac{1}{4} C V_c^2$$

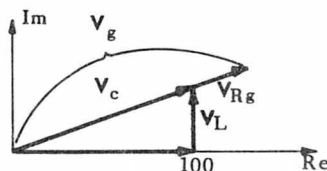
è l'energia media immagazzinata sotto forma elettrica nel condensatore. Si ha quindi:

$$C = L \frac{I_L^2}{V_c^2}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene il valore precedente, cioè:

$$C = \frac{10}{314} \frac{1}{(100^2 + 10^2)} = 3,153 \mu F$$

Fig.V.5.18 - Determinazione della tensione V_g .



Per completare il bilancio energetico occorre verificare l'uguaglianza tra la potenza attiva erogata dal generatore e la somma delle potenze medie dissipate nei resistori. Si ottiene:

$$I_g = I_u \cos \Phi = 0,995 \text{ A}$$

Inoltre da fig.V.5.18, si ha:

$$V_g = V_c + I_g R_g = \sqrt{100^2 + 10^2} + 10 \cdot 0,995 = 110,45 \text{ V}$$

Quindi si ottiene per la potenza attiva erogata dal generatore:

$$P_a^{(g)} = \frac{1}{2} V_g I_g = 54,95 \text{ watt}$$

Per le potenze dissipate dai resistori si ha:

$$\frac{1}{2} R_u I_u^2 + \frac{1}{2} R_g I_g^2 = 50 + 4,95 = 54,95 \text{ watt}$$

Risulta quindi verificato il bilancio delle potenze attive.

Il problema trattato nel presente esempio prende il nome di *problema del rifasamento di un carico reattivo*. Tale problema si incontra molto spesso nelle applicazioni tecniche. In tal caso i bipoli R_u ed L rappresentano il carico dove, accanto ad un elemento resistivo, c'è anche un elemento induttivo, per cui alla potenza attiva è sempre associata anche una potenza reattiva. Se non fosse presente il condensatore C , tale potenza reattiva dovrebbe essere fornita dal generatore. Ciò darebbe luogo ad un aumento delle perdite sulla resistenza R_g , che rappresenta la resistenza interna del generatore stesso e le perdite della linea che serve a trasportare l'energia dal generatore al carico. La presenza del condensatore C evita l'erogazione di potenza reattiva da parte del generatore, minimizzando in questo modo, a parità di potenza attiva fornita al carico, il modulo della corrente I_g che scorre lungo la linea e quindi diminuendo le perdite lungo la linea stessa.

V.6 - Regime permanente in presenza di grandezze elettriche di tipo non sinusoidale.

Quanto detto nei paragrafi precedenti si riferisce al caso in cui le grandezze elettriche impresse varino sinusoidalmente nel tempo e siano isofrequenziali. Nei limiti di validità del metodo dei fasori, l'analisi viene effettuata considerando al posto di tutte le grandezze elettriche i relativi fasori e quindi procedendo con tecniche del tutto simili a quelle usate nel caso del cap. II per i circuiti resistivi. Tale semplificazione nella trattazione dell'analisi in regime permanente è tuttavia limitata solo al caso visto. Quando sono presenti eccitazioni sinusoidali non isofrequenziali oppure eccitazioni periodiche qualsiasi oppure, ancora più in generale, eccitazioni di tipo aperiodico, occorre procedere in modo diverso per ricavare la risposta permanente. Le osservazioni fondamentali su cui è basato il procedimento di analisi in questo caso sono tre:

1) un'eccitazione periodica non sinusoidale è sviluppabile in una serie di funzioni sinusoidali di frequenza multipla della propria frequenza (sviluppo in serie di Fourier);

2) un'eccitazione non periodica è sviluppabile in una serie infinita di funzioni sinusoidali di ogni frequenza possibile (sviluppo nell'integrale di Fourier);

3) in un circuito lineare l'effetto di più eccitazioni coincide con la somma degli effetti delle singole eccitazioni, considerate come se agissero da sole (principio di sovrapposizione degli effetti).

La conseguenza immediata della prima e della seconda osservazione è che possiamo limitare la nostra attenzione solo al caso in cui le eccitazioni presenti siano di tipo sinusoidale. La terza osservazione, invece, suggerisce di procedere a passi successivi, suddividendo preliminarmente le eccitazioni presenti in gruppi isofrequenziali, quindi determinando con il metodo dei fasori l'effetto di ciascuno di essi ed infine sommando questi effetti per ottenere il risultato voluto. Il metodo risultante può essere schematizzato operativamente come segue:

24/2/84 *nel tempo*
Metodo di analisi in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa.

1) Raggruppare le eccitazioni di uguale frequenza. I gruppi siano in totale N , caratterizzati dalle frequenze $f_1, f_2, \dots, f_N$;

2) Disattivare tutti i gruppi di eccitazioni con l'esclusione del primo; ciò implica il corto-circuito per i generatori indipendenti di tensione ed il circuito aperto per quelli di corrente di frequenza diversa da f_1 ;

3) Applicare al circuito così ottenuto il metodo dei fasori, tenendo presente che la pulsazione è $\omega_1 = 2\pi f_1$. Determinare la grandezza elettrica incognita e quindi calcolare la sua espressione in funzione del tempo, cioè:

(V.6.1)

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$u_k \rightarrow u_k(t)$$

4) Ripetere i passi 2) e 3) per il k -simo gruppo, $k=2, 3, \dots, N$, disattivando tutti gli altri gruppi. Si ottiene per la grandezza d'interesse l'espressione:

(V.6.2)

$$u_k(t) = U_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \operatorname{Re}[U_k e^{j\omega_k t}]$$

5) La soluzione del problema d'analisi è:

(V.6.3)

$$u(t) = \sum_{k=1}^N U_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[U_k e^{j\omega_k t}]$$

Il metodo precedente è applicabile sia nel caso che le varie eccitazioni siano già assegnate in forma sinusoidale sia nel caso che occorra preventivamente svilupparle in componenti di questo tipo, come nel caso di funzioni periodiche (§ V.6.2) ed aperiodiche (§ V.6.3).

non si possono sommare fasori di pulsazioni diverse.

Esempio V.6.1.

Determinare l'espressione della tensione $v_c(t)$ in regime permanente nel circuito di fig.V.6.1.

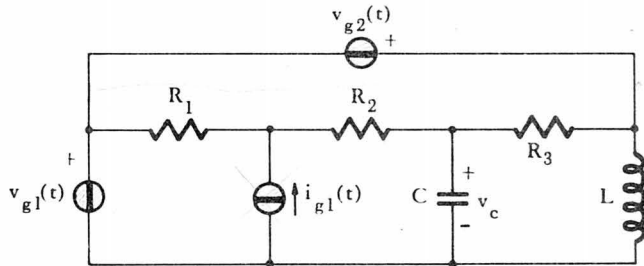


Fig.V.6.1 - Circuito considerato nell'esempio V.6.1. I valori dei componenti sono: $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $C=1$, $L=1$, $v_{g1} = 2 \cos(2t)$, $v_{g2} = \cos(1,5t + \pi/3)$, $i_{g1} = 1,5 \cos(0,5t + 4/3\pi)$, (Ω , F, H, V, A).

Applichiamo i passi del procedimento precedente:

Passo 1. I gruppi di eccitazioni presenti sono tre, ciascuno contenente un solo generatore. Le pulsazioni implicate sono:

$$\omega_1 = 2,$$

$$\omega_2 = 1,5,$$

$$\omega_3 = 0,5$$

Passo 2. Disattivando tutti i generatori, esclusi quelli del primo gruppo, si ha il circuito di fig.V.6.2a. Nel dominio dei fasori tale circuito diviene quello di fig.V.6.2b. Il valore della tensione incognita è:

$$v_c^{(1)} = \frac{1/2j}{1/2j + 2/3} 2 = \frac{6}{3 + 4j} = \frac{6}{5} e^{-j0,9273}$$

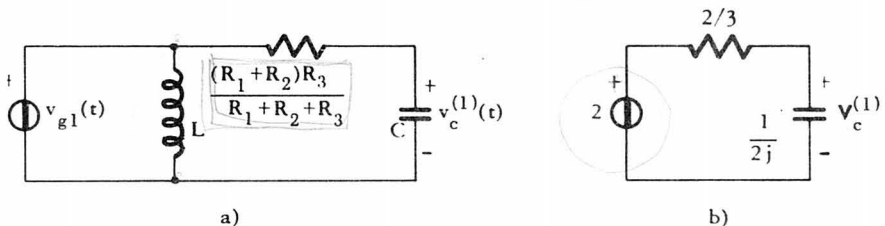


Fig.V.6.2 - Circuito che si ottiene nel passo 2 da quello di fig.V.6.1.

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(1)}(t) = 1,2 \cos(2t - 0,9273)$$

Passo 3. Facciamo agire i generatori del secondo gruppo. Si ha il circuito di fig.V.6.3a, che nel dominio dei fasori assume la forma di fig.V.6.3b. Il valore della tensione incognita è:

$$V_c^{(2)} = \frac{\frac{1}{j1,5 + 0,5}}{\frac{1}{j1,5 + 0,5} + 1} e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{j\pi/12}$$

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(2)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{12}\right)$$

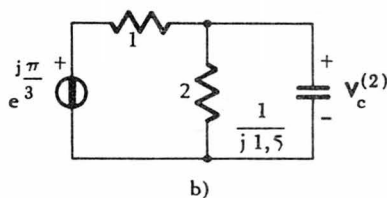
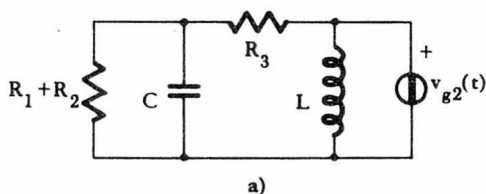


Fig.V.6.3 - Circuito che si ottiene nel passo 3 da quello di fig.V.6.1.

Passo 4. Facciamo agire i generatori del terzo gruppo. Si ha il circuito di fig.V.6.4a, che nel dominio dei fasori assume la forma di fig.V.6.4b. Il valore della tensione incognita è:

$$V_c^{(3)} = \frac{\frac{1}{0,5j + 1}}{\frac{1}{0,5j + 1} + 2} 1,5 e^{j\frac{4\pi}{3}} = 0,4743 e^{j3,867}$$

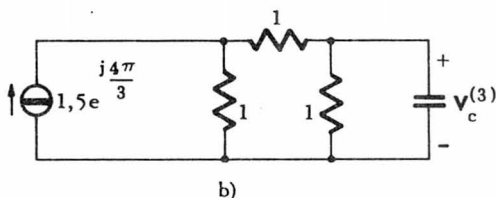
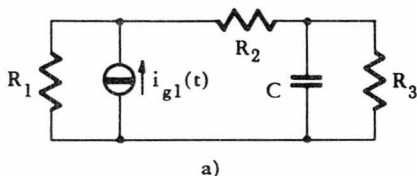


Fig.V.6.4 - Circuito che si ottiene nel passo 4 da quello di fig.V.6.1

Perciò l'espressione nel tempo è:

$$v_c^{(3)}(t) = 0,4743 \cdot \cos(0,5t + 3,8670)$$

Passo 5. La soluzione cercata è:

$$v_c(t) = 1,2 \cos(2t - 0,9273) + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{12}\right) + 0,4743 \cos(0,5t + 3,867)$$

La presenza di eccitazioni non sinusoidali in regime permanente, oltre alla necessità di avere a disposizione un metodo di analisi, richiede la caratterizzazione dei fenomeni di scambio energetico mediante grandezze globali appropriate, analogamente a quanto fatto nel caso sinusoidale. È opportuno precisare che nel caso presente, l'unica grandezza correntemente usata è la potenza attiva, definita come media di quella istantanea. L'intervallo di tempo su cui effettuare la media va scelto in modo compatibile con quanto fatto nel § V.5.2 nel caso sinusoidale. Dall'esame dell'influenza dell'intervallo in questione si vede chiaramente che l'unica possibilità valida in generale è quella di una lunghezza molto grande, al limite infinita, per tale intervallo. Infatti solo tale scelta è compatibile con grandezze sinusoidali aventi periodi non commensurabili tra di loro. Nel caso particolare che le grandezze sinusoidali abbiano periodi commensurabili, allora evidentemente è possibile scegliere l'intervallo coincidente con il minimo comune multiplo di tali periodi od un multiplo intero di tale quantità. Valgono perciò le seguenti definizioni della potenza attiva.

Definizione V.6.1 – «Si definisce come potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali, aventi periodi commensurabili tra loro, il valore medio della potenza istantanea calcolato su un intervallo di tempo coincidente o con il minimo comune multiplo dei periodi di tutte le eccitazioni sinusoidali presenti o con un multiplo intero di tale quantità».

Definizione V.6.2 – «Si definisce come potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali qualsiasi, il valore medio della potenza istantanea calcolato su un intervallo di tempo infinitamente lungo».

La potenza attiva, così definita, gode di proprietà assai utili nelle applicazioni, che considereremo in dettaglio di seguito.

V.6.1 - Proprietà della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale.

Nel caso del regime permanente in cui siano presenti eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa, tutte le grandezze elettriche sono

esprimibili mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali di frequenza uguale a quelle delle suddette eccitazioni, cioè del tipo (V.6.3). Ciò implica che la potenza istantanea, essendo il prodotto di una tensione per una corrente, è del tipo:

$$(V.6.4) \quad \left(\sum_{k=1}^N V_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right) \left(\sum_{k=1}^N I_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \right) = P(t)$$

Nella determinazione della potenza attiva dalla potenza istantanea tramite operazioni di media, i termini che derivano dallo sviluppo della (V.6.4) subiscono un trattamento assai diverso, a seconda che siano o meno il prodotto di due funzioni sinusoidali di uguale pulsazione. Nel primo caso si ha:

$$(V.6.5) \quad \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} V_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \cdot I_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \cdot dt =$$

$$= \frac{V_k I_k}{2} \left\{ \cos(\varphi_k - \theta_k) + \frac{1}{2 T_m \omega_k} [\sin(2 \omega_k T_m + \varphi_k + \theta_k) - \sin(\varphi_k + \theta_k)] \right\}$$

che è uguale a:

$$\frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_k - \theta_k)$$

sia nel caso che T_m sia il minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni sinusoidali presenti (nel caso che esista) sia nel caso che sia infinitamente grande.

Quando il termine dello sviluppo (V.6.4) è invece il prodotto di due funzioni sinusoidali di pulsazione diversa, allora si ha:

$$(V.6.7) \quad \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} V_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \cdot I_h \cos(\omega_h t + \theta_h) dt =$$

$$= \frac{V_k I_h}{2} \left\{ \frac{1}{T_m (\omega_k - \omega_h)} (\sin[(\omega_k - \omega_h) T_m + \varphi_k - \theta_h] - \sin(\varphi_k - \theta_h)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T_m (\omega_k + \omega_h)} (\sin[(\omega_k + \omega_h) T_m + \varphi_k + \theta_h] - \sin(\varphi_k + \theta_h)) \right\}$$

che è uguale a zero sia nel caso che T_m sia il minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni sinusoidali presenti (nel caso che esista) sia nel caso che sia infinitamente grande.

In conclusione l'espressione della potenza attiva è

$$(V.6.8) \quad P_a = \sum_{k=1}^N \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_k - \theta_k)$$

L'esame della (V.6.8) mette in evidenza la seguente proprietà fondamentale della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale.

Proprietà V.6.1 - «La potenza attiva in regime permanente in presenza di eccitazioni sinusoidali di pulsazione diversa è uguale alla somma delle potenze attive che si hanno considerando separatamente gli effetti dei gruppi di eccitazioni di uguale pulsazione».

La proprietà precedente fornisce un modo abbreviato ed operativo per calcolare in regime permanente non sinusoidale la potenza attiva.

Esempio V.6.2

Nel circuito di fig.V.6.1 calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore R_3 , verificando la proprietà V.6.1.

Applicando il metodo di analisi in regime permanente non sinusoidale, si ottiene per la tensione applicata al resistore R_3 :

$$v_{R3} = v_{R3}^{(1)} + v_{R3}^{(2)} + v_{R3}^{(3)}$$

$$v_{R3}^{(1)} = v_{g1} - v_c^{(1)} = \frac{8}{5} \cos(2t + 0,6435)$$

$$v_{R3}^{(2)} = v_{g2} - v_c^{(2)} = \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(1,5t + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cos(1,5t + 1,511)$$

$$v_{R3}^{(3)} = v_c^{(3)} = 0,4743 \cos(0,5t + 3,867)$$

I periodi delle eccitazioni presenti sono:

$$\pi, \frac{4}{3}\pi, 4\pi$$

ed hanno il minimo comune multiplo 4π . Utilizzando perciò la definizione V.6.1, la potenza attiva vale:

$$P_a = \frac{1}{4\pi R_3} \int_0^{4\pi} \left[\frac{8}{5} \cos(2t + 0,6435) + \frac{\sqrt{5}}{3} \cos(1,5t + 1,511) + 0,4743 \cos(0,5t + 3,867) \right]^2 dt = 1,670 \text{ watt}$$

Calcoliamo ora le potenze attive dissipate sul resistore R_3 quando agiscono separatamente i tre generatori. Si ha:

$$V_{R_3}^{(1)} = \frac{8}{5} e^{j0,6435} ; \quad P_a^{(1)} = 1,280$$

$$V_{R_3}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{3} e^{j1,511} ; \quad P_a^{(2)} = 0,2778$$

$$V_{R_3}^{(3)} = 0,4743 e^{j3,867} ; \quad P_a^{(3)} = 0,1125$$

$$P_a = P_a^{(1)} + P_a^{(2)} + P_a^{(3)} = 1,670 \text{ watt}$$

Osservazione V.6.1.

La proprietà V.6.1 fornisce un modo molto semplice di procedere nel calcolo della potenza attiva quando sono presenti più eccitazioni sinusoidali. È importante però notare che tale proprietà è valida solo se le pulsazioni delle eccitazioni sono diverse. Si commetterebbe un errore se si sommassero le potenze attive relative ad eccitazioni sinusoidali di uguale pulsazione. Mettiamo in evidenza questa osservazione con un esempio.

Esempio V.6.3.

Nel circuito di fig. V.6.5 calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore.

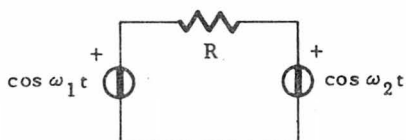


Fig. V.6.5 - Circuito considerato nell'esempio V.6.3.

Utilizzando la proprietà V.6.1, determiniamo la potenza attiva assorbita dal resistore quando agiscono singolarmente i due generatori. Si ha:

$$P_1 = \frac{1}{2R} ; \quad P_2 = \frac{1}{2R}$$

La potenza attiva assorbita vale perciò:

$$P = \frac{1}{R}$$

Se i generatori sinusoidali avessero una stessa pulsazione, cioè:

$$\omega_1 = \omega_2$$

allora, come si vede direttamente dalla figura, il resistore non sarebbe percorso da corrente e la potenza attiva da esso assorbita sarebbe zero. Chiaramente, non vale in quest'ultimo caso la proprietà V.6.1.

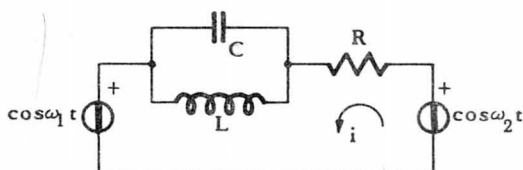
Osservazione V.6.2.

Nel calcolo della potenza attiva assorbita o erogata da un bipolo in regime permanente non sinusoidale occorre considerare, in base alla proprietà V.6.1, le potenze attive corrispondenti alle singole pulsazioni. Ciò implica che un generatore sinusoidale presente nel circuito eroga od assorbe energia solo per effetto della componente di uguale pulsazione che risulta ad esso applicata. In particolare può accadere che la potenza attiva erogata od assorbita dal generatore in questione sia nulla, malgrado che le grandezze elettriche ad esso applicate siano di notevole ampiezza.

Esempio V.6.4.

Far vedere nel circuito di fig.V.6.6 che la potenza attiva erogata dal generatore di tensione di pulsazione ω_1 è nulla, anche se la corrente che lo attraversa è di ampiezza notevole.

Fig.V.6.6 - Circuito considerato nell'esempio V.6.4. I valori di L e C sono tali che $LC\omega_1^2 = 1$.



Consideriamo presente il generatore di pulsazione ω_1 . Poiché il bipolo costituito dal parallelo di L e C ha impedenza infinita in corrispondenza alla pulsazione ω_1 , non circola corrente nel circuito e perciò il generatore in questione non eroga potenza attiva. Calcoliamo quindi l'effetto dell'altro generatore. La corrente i vale in questo caso, usando i fasori:

$$i^{(2)} = \frac{1}{R + \frac{j\omega_2/C}{1/LC - \omega_2^2}} = \frac{1}{R + \frac{j\omega_2/C}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}$$

Il valore del modulo di $I^{(2)}$ può essere anche notevole nel caso di valori particolari dei componenti e delle pulsazioni, ciò che dimostra quanto asserito.

V.6.2 - Sviluppo in componenti sinusoidali di un'eccitazione periodica.

Le eccitazioni dei circuiti che possono interessare le applicazioni sono molteplici, anche nel caso che interessi il solo regime permanente. Nel presente paragrafo consideriamo il caso in cui le funzioni che rappresentano le eccitazioni siano *periodiche nel tempo*, nel senso che il loro andamento si ripete ad intervalli regolari di uguale larghezza. In modo esatto, si può dire che una funzione periodica $f(t)$ è caratterizzata dalla condizione:

$$(V.6.9) \quad f(t) = f(t+T) \quad -\infty \leq t \leq +\infty$$

ed a T si dà il nome di «periodo». Esempi tipici di funzioni periodiche d'interesse (oltre alla funzione sinusoidale) sono «l'onda quadra», «l'onda triangolare» riportate in fig. V.6.7.

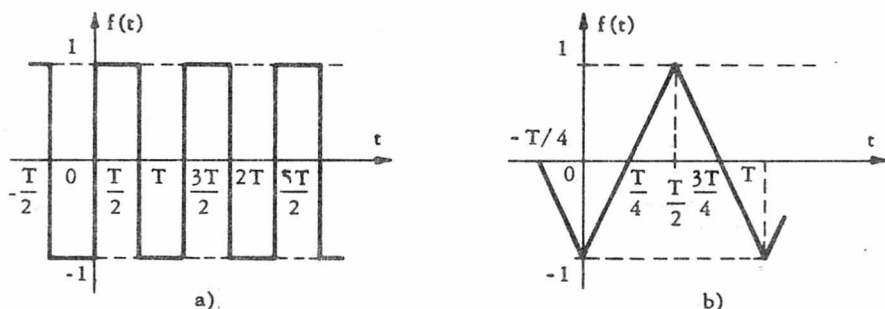


Fig. V.6.7 - Forme tipiche di eccitazioni periodiche: a) onda quadra; b) onda triangolare.

La combinazione di funzioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportune permette di ottenere forme d'onda periodiche. Un esempio semplice in tal senso è quello mostrato in fig. V.6.8 dove sono rappresentate le seguenti funzioni periodiche:

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin \pi t$$

$$(V.6.10) \quad f_2(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3 \pi t \right)$$

$$f_3(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3 \pi t + \frac{1}{5} \sin 5 \pi t \right)$$

$$f_4(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3 \pi t + \frac{1}{5} \sin 5 \pi t + \frac{1}{7} \sin 7 \pi t \right)$$

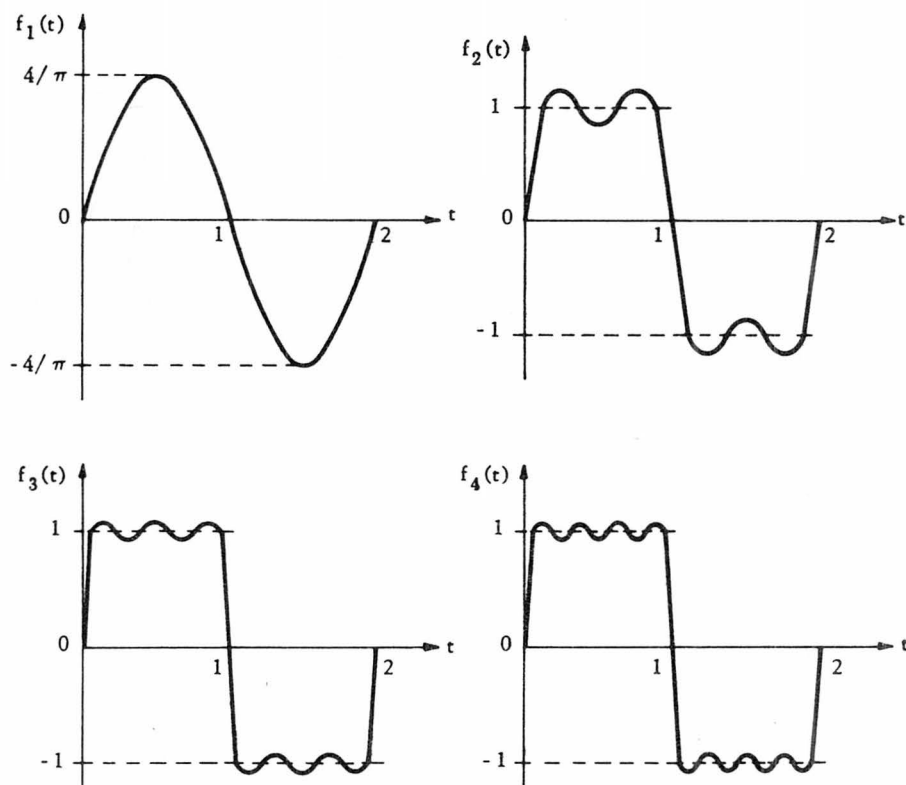


Fig.V.6.8 - Funzioni periodiche risultanti dalla combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Si vede chiaramente che, all'aumentare delle funzioni sinusoidali componenti, la forma d'onda risultante tende ad avvicinarsi a quella quadra di fig. V.6.7. Ciò permette di intuire la possibilità di sviluppare in tutti i casi d'interesse una qualsiasi eccitazione periodica in una somma di funzioni sinusoidali. In termini analitici esatti, ciò viene fatto con lo sviluppo in serie di Fourier, in base al quale una funzione periodica è sviluppabile nella serie di funzioni sinusoidali del tipo:

$$(V.6.11) \quad f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + \\ + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots =$$

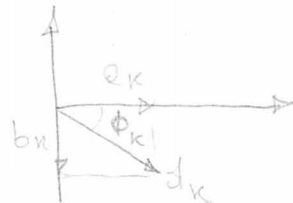
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(k\omega_0 t + \Phi_k)$$

in cui:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt ; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt ;$$

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} ; \quad \Phi_k = -\arctan(b_k/a_k) ; \quad k=1, 2, \dots \infty$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (V.6.12)$$

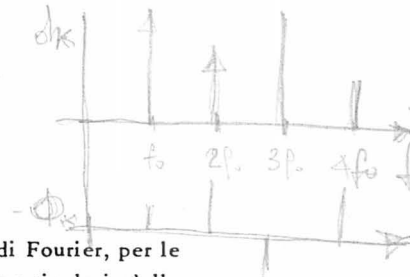


La componente di pulsazione ω_0 prende il nome di «componente fondamentale» e quella di pulsazione $k\omega_0$ di «armonica di ordine k ».

È importante tenere presente che lo sviluppo in serie di Fourier esiste per una funzione periodica solo se essa soddisfa le condizioni di Dirichlet, cioè:

- 1) in ogni periodo il numero dei massimi e dei minimi deve essere finito e le ampiezze relative devono essere finite;
- 2) il numero di discontinuità in un periodo deve essere finito;
- 3) deve essere:

$$(V.6.13) \quad \int_0^T |f(t)| dt < \infty$$



Per le dimostrazioni e per le proprietà dello sviluppo in serie di Fourier, per le semplificazioni che si possono ottenere in conseguenza di proprietà particolari della

$f(t)$ (funzioni pari, dispari, ... ecc.), si rimanda ai testi specifici di analisi. Per quanto riguarda l'uso del calcolatore per effettuare tale sviluppo, si veda ad esempio il § X.5 di L.P. Huelsman, «Basic circuit theory with digital computations», Prentice-Hall, 1972.

Esempio V.6.5.

Determinare la tensione di uscita $v_u(t)$ del rettificatore di fig. V.6.9 a), nell'ipotesi che sia accettabile la schematizzazione mostrata nella parte b) di tale figura (tale schematizzazione consiste nel supporre il trasformatore ideale ed i diodi ideali).

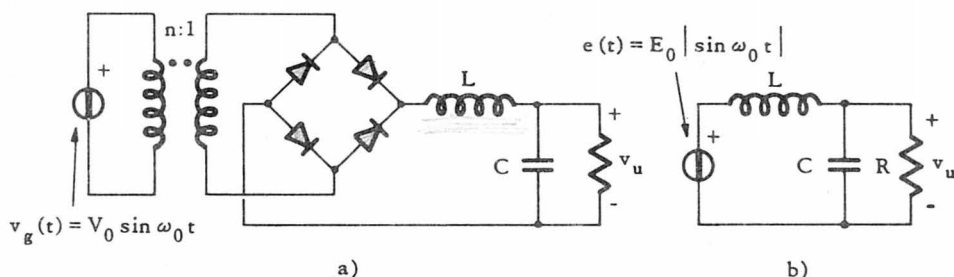


Fig. V.6.9 - Schema di un rettificatore con filtro ad induttanza di blocco. I valori dei componenti sono:

$L=3$, $C=30$, $R=2$, $E_0=10$, $\omega_0=314$, $V_0=nE_0$ (H, μ F, k Ω , V, rad/sec).

Per poter applicare il metodo di analisi in regime permanente in presenza di più eccitazioni sinusoidali, occorre sviluppare in serie di Fourier la funzione di eccitazione $e(t)$. Si ha, considerando solo $|\sin \omega_0 t|$, in base alle (V.6.12).

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| dt = \frac{2}{\pi}; \quad b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \sin \omega_0 t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x dx \right] = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \sin k \omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin x \sin kx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \sin kx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos(k-1)x dx - \int_0^{\pi} \cos(k+1)x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(k-1)x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(k+1)x dx \right] = 0$$

Sono perciò presenti solo le componenti in coseno, come del resto si può dedurre dalle proprietà generali, osservando che la funzione $|\sin \omega_0 t|$ è pari. Per quanto riguarda i coefficienti a_k , si ha:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T |\sin \omega_0 t| \cos k \omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin x \cos k x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos k x dx \right] =$$

$$\equiv \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ dispari} \\ \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)} - \frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} \right]_{x=0}^{x=\pi} & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

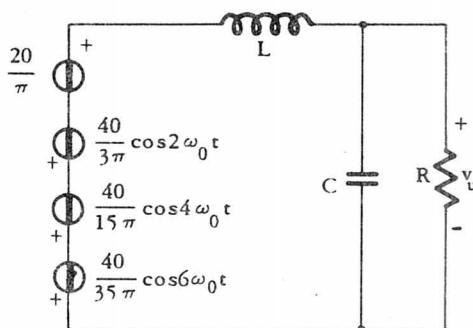
È facile constatare che sono diversi da zero solo gli a_k che corrispondono a valori pari di k . Per questi risulta:

$$a_{2h} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2h+1} - \frac{1}{2h-1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4h^2-1}$$

In particolare si ha:

$$a_2 = -\frac{4}{3\pi} \quad ; \quad a_4 = -\frac{4}{15\pi} \quad a_6 = -\frac{4}{35\pi}$$

Fig.V.6.10 - Circuito corrispondente a quello di figura V.6.9. I valori dei componenti L , C , R e di ω_0 sono quelli riportati in fig.V.6.9.



Limitandoci a considerare le componenti armoniche di ordine 2, 4, 6 il circuito risultante è quello di fig.V.6.10. È interessante osservare che nel caso presente si ha anche un'eccitazione continua, il cui effetto in regime permanente è deducibile in modo assai semplice, notando che in continua i condensatori equivalgono a circuiti aperti e gli induttori a corto-circuiti. Perciò la determinazione della componente conti-

nua di v_u viene fatta mediante il circuito di fig.V.6.11 a), ottenuto disattivando tutti i generatori fuorchè quello in continua ed eliminando il condensatore e l'induttore nel modo detto. Si vede da tale circuito che:

$$v_u^{(0)} = \frac{20}{\pi}$$

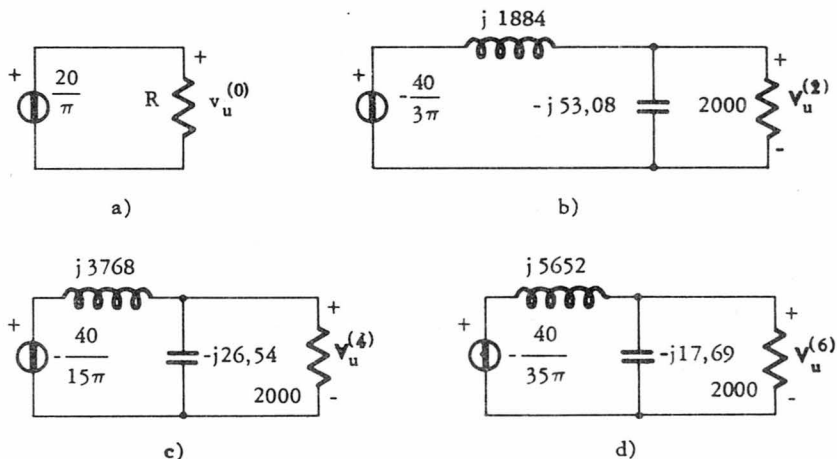


Fig.V.6.11 - Circuiti corrispondenti alle varie pulsazioni del circuito di figura V.6.10. I valori dei componenti sono in Ω , V.

Il contributo degli altri generatori viene ottenuto facilmente mediante gli schemi di fig.V.6.11. Precisamente si ha:

$$v_u^{(2)} = -\frac{40}{3\pi} \frac{-j 1,062 \cdot 10^5}{j 3,662 \cdot 10^6 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 0,0193 e^{j0,027}$$

$$v_u^{(4)} = -\frac{40}{15\pi} \frac{-j 26,54 \cdot 2000}{j 7,483 \cdot 10^6 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 9,46 \cdot 10^{-4} e^{j0,013}$$

$$v_u^{(6)} = -\frac{40}{35\pi} \frac{-j 3,538 \cdot 10^4}{j 1,127 \cdot 10^7 + 1,000 \cdot 10^5} \approx \frac{20}{\pi} 1,79 \cdot 10^{-4} e^{j0,0089}$$

In conclusione, la tensione all'uscita del rettificatore vale:

$$v_u(t) = \frac{20}{\pi} [1 + 0,0193 \cos(628t + 0,027) + 9,46 \cdot 10^{-4} \cos(1256t + 0,013) + 1,79 \cdot 10^{-4} \cos(1884t + 0,0089)]$$

e si vede chiaramente come il circuito analizzato trasformi la tensione alternata di ingresso in una ad andamento quasi costante nel tempo di valore $20/\pi$.

V.6.3 - Sviluppo in componenti sinusoidali di una eccitazione non periodica. Analisi nel dominio della frequenza.

Il regime permanente può interessare anche quando le eccitazioni non sono periodiche, nel qual caso non possiamo usufruire delle tecniche precedenti volte all'utilizzazione ripetuta del metodo dei fasori. E' tuttavia ancora possibile procedere in questo modo estremamente semplice, utilizzando una trasformazione (trasformazione di Fourier) che permette, sotto opportune ipotesi, di sviluppare una funzione di eccitazione aperiodica in una somma di infinite componenti sinusoidali a frequenza variabile con continuità da zero ad infinito.

La sviluppabilità di funzioni aperiodiche in termini sinusoidali può essere compresa intuitivamente, derivandola dallo sviluppo in serie di Fourier. A questo scopo osserviamo che tale sviluppo può essere messo in un'altra forma, equivalente alla (V.6.11), utilizzando la forma esponenziale delle funzioni trigonometriche. Precisamente si ha:

$$(V.6.14) \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

in cui:

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t] dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

(V.6.15)

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$k = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Le formule precedenti possono essere anche scritte nel modo seguente, tenendo conto che:

$$\boxed{\frac{1}{T}} = \boxed{\frac{\omega_0}{2\pi}}$$

$$(V.6.16) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} ; \quad F(\omega) = \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si vede chiaramente da queste formule che se la funzione periodica che si sta considerando ha un periodo T molto grande, e quindi una pulsazione fondamentale ω_0

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

molto piccola, l'espressione della $f(t)$ tende a divenire un integrale effettuato rispetto alla variabile ω_0 , cioè:

(V.6.17)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

in quanto i valori di $F(\omega)$ da considerare nella sommatoria tendono ad avvicinarsi. D'altra parte, al crescere del periodo T , la funzione periodica che si sta considerando si avvicina come comportamento sempre più ad una aperiodica. Il discorso qualitativo sin qui fatto può essere reso quantitativo ed esatto; per ciò si rimanda ai testi di analisi matematica⁽¹⁾. Di seguito riportiamo solo i risultati, che vengono usualmente utilizzati nelle applicazioni sotto il nome di trasformazione di Fourier.

Trasformata di Fourier - «Data una funzione del tempo $f(t)$, che abbia soltanto un numero finito di massimi, minimi e discontinuità e che soddisfi la relazione:

(V.6.18)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

summabile in $(-\infty, +\infty)$

essa si può esprimere nella forma:

(V.6.19)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

in cui l'integrale è di tipo improprio ed $F(\omega)$ è data da:

(V.6.20)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Trasf. di Fourier

La funzione $F(\omega)$ prende il nome di trasformata di Fourier della funzione $f(t)$.

La trasformata di Fourier di una funzione è una funzione complessa, caratterizzata perciò da un modulo e da un argomento, quindi da due funzioni reali della variabile ω . A tali funzioni si dà il nome rispettivamente di «spettro di ampiezza» e «spettro di fase». La conoscenza dei due suddetti spettri è sufficiente a determinare la corrispondente funzione del tempo.

(1) - Si veda ad esempio A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, «Lezioni di complementi di matematica», Ed. Veschi (Roma), 1972, par. IV.10.

Fourier $\longleftrightarrow$ Laplace

È importante tenere presente che lo sviluppo in funzioni di tipo sinusoidale di una funzione aperiodica, che avviene tramite la trasformazione di Fourier, implica la presenza di infinite componenti sinusoidali a spettro continuo. Ciò significa che l'analisi del circuito in questo caso si può effettuare mediante il metodo dei fasori, lasciando però variabile la pulsazione ω . Le grandezze elettriche vanno quindi determinate tramite un'operazione di antitrasformazione del tipo (V.6.19) e la loro $F(\omega)$ si determina a partire dalle trasformate di Fourier delle eccitazioni e dalle funzioni di rete relative. In altre parole si procede in modo del tutto simile a quello che si fa nel caso del metodo di analisi basato sulla trasformata di Laplace, specializzando il metodo al caso $s=j\omega$. Quanto detto richiede, per avere validità dal punto di vista analitico, che le funzioni soddisfino opportune condizioni.

$$F(s) \xrightarrow{\text{non sempre}} F(\omega)$$

Il legame tra la trasformazione di Fourier e quella di Laplace può essere posto in termini esatti nel modo seguente: «se una funzione $f(t) u_{-1}(t)$ è una funzione del tempo nulla per $t < 0$, che ammette la trasformata di Laplace $F(s)$, allora se esiste la sua trasformata di Fourier, essa deve coincidere necessariamente con $F(j\omega)$. Analogamente, se la funzione $g(t) u_{-1}(t)$ ammette la trasformata di Fourier $G(j\omega)$, allora la sua trasformata di Laplace esiste ed è uguale a $G(s)$ ».

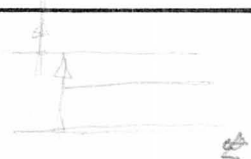
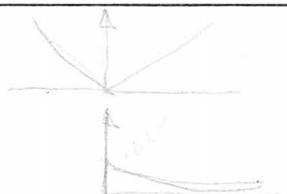
Per effetto dell'esistenza del legame precedente è possibile effettuare l'analisi in regime permanente nel caso più generale di eccitazioni aperiodiche, esattamente come nel caso di Laplace, salvo la sostituzione della variabile s con la variabile $j\omega$. Vale quindi il seguente procedimento di analisi, che viene detto «metodo di analisi nel dominio della frequenza».

Metodo di analisi nel dominio della frequenza.

(Valido nel caso che le eccitazioni siano trasformabili secondo Fourier).

- 1) Effettuare le trasformazioni secondo Fourier delle grandezze impresse. Utilizzare dove possibile la corrispondenza di tab.V.6.1;
- 2) Analizzare con il metodo dei fasori il circuito, considerando però la pulsazione come un parametro;
- 3) La generica grandezza elettrica viene ad essere individuata tramite i suoi spettri di ampiezza e fase. L'andamento nel tempo può essere ricavato con l'operazione di antitrasformazione secondo Fourier. Utilizzare dove possibile la corrispondenza di tab.V.6.1.

Tabella V.6.1 - Trasformate di Fourier.

$f(t)$	$F(j\omega)$
$u_0(t)$ $u_{-1}(t)$	1 $\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 
$ t $ $e^{-at} u_{-1}(t)$	$-\frac{2}{\omega^2}$ $\frac{1}{a + j\omega}$ 
$t e^{-at} u_{-1}(t)$ $\sin \omega_0 t * u_{-1}(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$ $\frac{\pi}{2j} [u_0(\omega - \omega_0) + u_0(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin \omega_0 t$ $e^{-at} \sin \omega_0 t * u_{-1}(t)$	$j\pi [u_0(\omega + \omega_0) - u_0(\omega - \omega_0)]$ $\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

Esempio V.6.6

Un filtro passa-basso ideale è definito ^{modell} tramite la risposta in frequenza di figura V.6.12, cioè: 1) ha una risposta in ampiezza costante ed uguale ad uno nell'intervallo $-\omega_0 \div \omega_0$, dove ω_0 è la sua pulsazione di taglio e costante ed uguale a zero per le altre pulsazioni; 2) ha una risposta in fase ^{argomento} decrescente linearmente con la pulsazione e zero per $\omega = 0$.

Fare vedere che tale risposta provoca l'assurdo fisico che un'eccitazione applicata all'istante $t = 0$, ha un effetto antecedente all'applicazione.

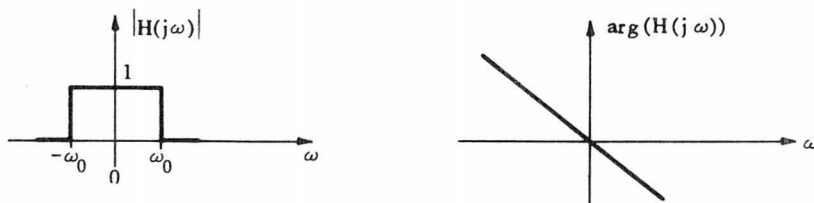


Fig.V.6.12 - Risposta in frequenza di un filtro passa basso ideale.

Consideriamo come eccitazione il gradino unitario, che ha la trasformata di Fourier (tab.V.6.1) uguale a:

$$\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Determiniamo quindi la risposta, moltiplicando la funzione $H(j\omega)$ per lo spettro dell'eccitazione, cioè:

$$U(j\omega) = \left[\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] |H(j\omega)| e^{-jt_0\omega}$$

in cui $-t_0$ è la pendenza della curva $\arg(H(j\omega))$.

Calcolando l'andamento della risposta nel tempo mediante la (V.6.19), si ha:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} u_0(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{e^{j\omega(t-t_0)} - e^{-j\omega(t-t_0)}}{2j\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t-t_0)}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} [\omega_0(t-t_0)] \end{aligned}$$

in cui la funzione $\text{Si} [\dots]$ è la funzione seno integrale⁽¹⁾. L'andamento della risposta è mostrato in fig.V.6.13 e chiaramente è assurdo, in quanto è diverso da zero per $t < 0$.

(1) - La funzione seno integrale è considerata in dettaglio in A. Angot, «Compléments de mathématiques», Ed. de la Revue d'Optique, 1957, cap.VII.2.

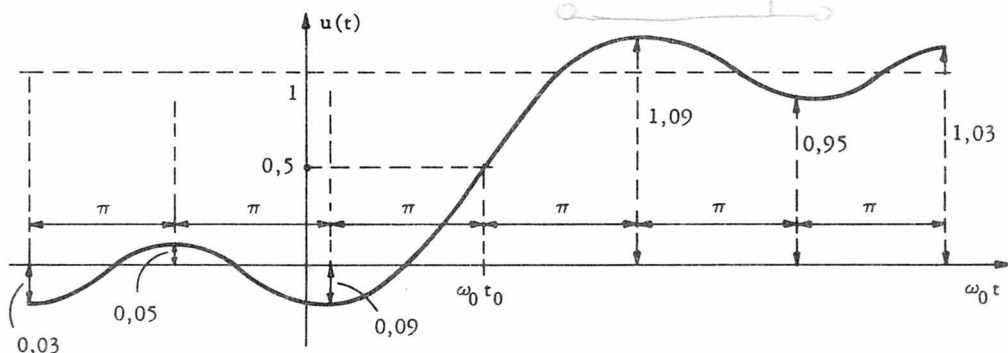


Fig.V.6.13 - Andamento della risposta del filtro passa-basso ideale ad un'eccitazione a gradino.

V.6.4 - Risposta in frequenza di un circuito.

Il metodo di analisi in frequenza di un circuito fornisce la possibilità di individuare il suo comportamento utilizzando il metodo dei fasori. Ciò è vantaggioso soprattutto dal punto di vista pratico. Infatti come conseguenza della sua applicazione, vediamo che possiamo caratterizzare il legame risposta-eccitazione mediante la relativa funzione di rete definita per $s=j\omega$. Perciò, al posto di una funzione di variabile complessa s , in conseguenza del metodo precedente, possiamo mettere due funzioni reali di variabile reale coincidenti rispettivamente con il modulo e l'argomento della funzione di rete calcolati per $s=j\omega$. Tali funzioni reali prendono il nome rispettivamente di «risposta in ampiezza» e «risposta in fase» di un circuito (globalmente vengono chiamate le risposte in frequenza del circuito). Vedremo più in dettaglio tali nozioni nel § VI.7.2, poiché quando interessa una sola eccitazione ed una sola risposta stiamo già specializzando il circuito al caso 2-porte, considerato specificatamente nel cap.VI.

L'importanza della caratterizzazione di un circuito tramite la sua risposta in frequenza sta nel fatto che tale risposta è facilmente rilevabile sperimentalmente tramite strumenti opportuni, a differenza sia della risposta nel tempo sia della risposta nel dominio di Laplace;

V.7 - Analisi automatica in regime permanente sinusoidale.

Quando occorre analizzare in regime permanente un circuito molto complesso oppure quando interessa l'analisi per molti valori di fre-

quenza, è necessario ricorrere all'uso del calcolatore. Utilizzando il metodo dei fasori, il circuito assegnato risulta trasformato in un circuito simile ad uno senza memoria, eccitato in continua, con l'unica differenza che i valori dei componenti e le eccitazioni sono numeri complessi; per questo motivo i programmi per l'analisi in regime permanente si ottengono con poche modifiche a partire da quelli in continua.

Nel presente paragrafo verrà descritto un programma di tale tipo, ottenuto come estensione del programma NODI descritto nel § II.7; il programma qui descritto ha lo scopo di analizzare in regime permanente un circuito elettrico per molti valori della frequenza, in modo da ottenere, per punti, l'andamento della risposta in ampiezza, introdotta nel § V.6.4.

Nell'appendice V.B verrà fornita la traduzione in FORTRAN del programma qui presentato, mentre alcuni esempi di applicazione verranno sviluppati nell'appendice V.C.2.

Lo schema a grandi linee del programma di calcolo è mostrato in fig.V.7.1; nel seguito verranno descritti in dettaglio i singoli blocchi.

Blocco di ingresso dati.

L'ingresso dei dati riguarda diverse quantità, alcune relative alla rete (componenti e topologia del circuito), altre relative al campo di frequenza che interessa e alle grandezze di cui interessa la stampa.

Per il primo gruppo di dati si rimanda al § I.11; il secondo gruppo riguarda le seguenti quantità:

1) dati relativi alle frequenze; sono previste tre grandezze (già utilizzate nel diagramma di fig.V.7.1): F_1 , F_2 , DF , di cui le prime due indicano il campo di frequenze di interesse (da F_1 a F_2 , con $F_1 < F_2$), mentre l'ultima indica il passo DF . Pertanto l'analisi verrà effettuata per tutte le seguenti frequenze:

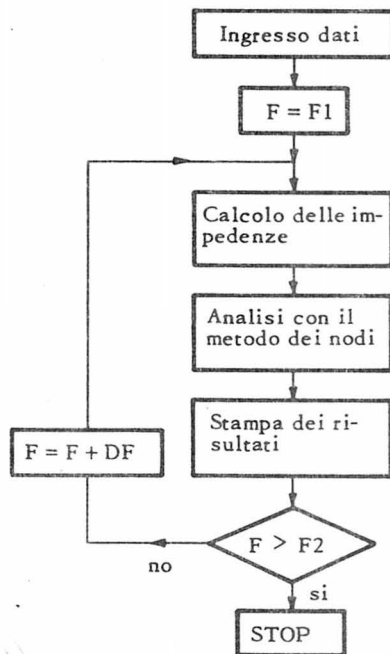


Fig.V.7.1 - Schema a blocchi del programma considerato.

$F1, F1 + DF, F1 + 2 DF, \dots, F1 + N DF$

fino a $F2$.

2) dati relativi alle grandezze di uscita; tali dati sono ⁽¹⁾:

NU numero delle grandezze di uscita considerate;

JU(1), JU(2), ... JU(NU): numeri d'ordine dei nodi per i quali si desidera la stampa del modulo della tensione in uscita.

Blocco relativo al calcolo delle impedenze.

Questo blocco ha lo scopo di trasformare il circuito assegnato nel circuito trasformato nel dominio dei fasori, sostituendo a ciascun componente la relativa impedenza. Il circuito trasformato è ottenuto in forma tale da poter essere direttamente analizzato per mezzo del programma NODI descritto nel § II.7; ciò è ottenuto per mezzo dello schema a blocchi di fig.V.7.2.

Per il significato delle quantità NR, R, N1, N2; NL, ZL, NL1, NL2; NQ, ZQ, NQ1, NQ2, relative alla rete assegnata, si rimanda al § I.11.

Lo scopo dello schema di fig.V.7.2 è quello di determinare un numero NZ di impedenze pari alla somma del numero NR dei resistori, NL degli induttori e NQ dei condensatori; la k-esima impedenza viene caratterizzata tramite le seguenti quantità:

- 1) ZZ(K) valore dell'impedenza come numero complesso;
- 2) NZ1(K), NZ2(K) nodi a cui è connessa l'impedenza.

In fig.V.7.3 è mostrata la convenzione adottata per le impedenze; si può notare che essa è identica a quella adottata per i resistori, a meno dei cambiamenti di denominazione delle quantità.

Lo schema a blocchi di fig.V.7.2 viene percorso per ogni valore di frequenza ⁽²⁾; inoltre in esso sono previste delle verifiche necessarie quando nel circuito non fossero presenti alcuni tipi di componenti (assenza di resistori oppure di induttori oppure di condensatori).

(1) - Tali grandezze sono le stesse già introdotte e utilizzate nel § III.6, in relazione al programma di analisi con il metodo alle differenze finite.

(2) - Si può notare che alcune operazioni effettuate nello schema a blocchi di fig.V.7.2 non dipendono dalla frequenza; tali operazioni potrebbero pertanto essere eseguite fuori dal ciclo delle frequenze, previsto in fig.V.7.1.

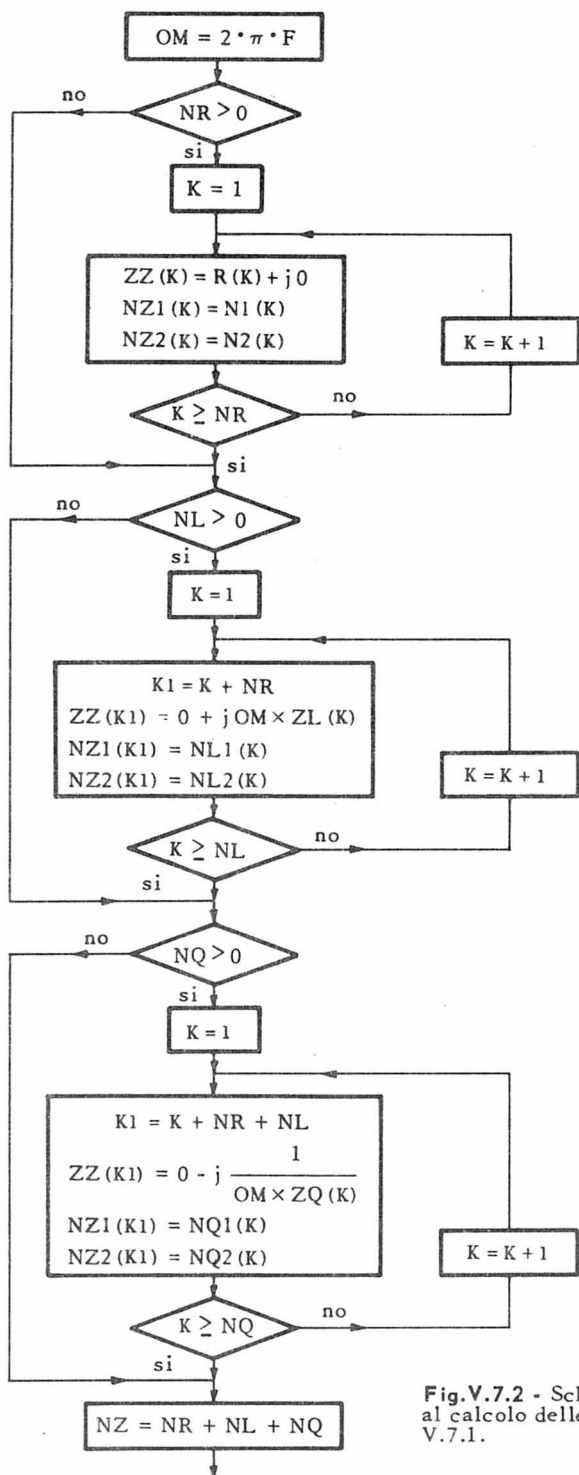
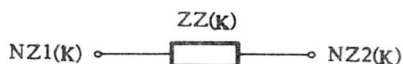


Fig.V.7.2 - Schema a blocchi relativo al calcolo delle impedenze di figura V.7.1.

Fig.V.7.3 - Impedenza k-esima utilizzata.



Blocco relativo all'analisi con il metodo dei nodi.

L'analisi del circuito trasformato nel dominio dei fasori non presenta alcuna difficoltà; essa può essere infatti effettuata per mezzo di sottoprogrammi del tutto simili a quelli già esaminati per l'analisi in continua nel § II.7. Tuttavia è necessario predisporre alcune modifiche che tengano conto delle operazioni con i numeri complessi. Ciò vale per il sottoprogramma che permette di ottenere dalla rete il sistema risolvante e per il sottoprogramma che risolve il sistema stesso.

Alcuni dettagli delle modifiche necessarie sono riportati nella appendice V.B.

Blocco relativo alla stampa dei risultati.

Poichè il programma descritto ha lo scopo di effettuare i calcoli per ottenere la risposta in ampiezza del circuito dato, occorrerà prevedere delle stampe che forniscano le grandezze d'interesse per ogni singolo valore di frequenza considerato.

Le stampe previste sono descritte in modo dettagliato nell'appendice V.B.

Osservazione V.7.1

L'analisi in regime permanente dà luogo sovente a calcoli mediante valori numerici variabili entro limiti molto vasti che interessano parecchi ordini di grandezza; ciò dà spesso luogo ad inconvenienti nell'esecuzione del programma, a causa delle implicazioni numeriche associate al numero limitato di cifre. Per limitare tali inconvenienti è sempre opportuno analizzare circuiti i quali siano stati preventivamente normalizzati; le modalità con cui è opportuno effettuare la normalizzazione sono descritte nel § V.8.

SS

V.8 - Normalizzazione in livello ed in frequenza.

I valori che assumono i parametri che caratterizzano i componenti disponibili commercialmente sono variabili entro limiti molto vasti.

che dipendono dal campo di frequenze in cui è destinato a funzionare il circuito in cui essi sono inseriti. Di conseguenza i valori delle resistenze, capacità, induttanze e della frequenza possono assumere valori molto grandi o molto piccoli. Ciò è estremamente dannoso per la precisione dei calcoli da svolgere nell'applicazione dei metodi di analisi. Infatti, quando si eseguono i calcoli le quantità con cui si ha a che fare vengono rappresentate con un numero limitato di cifre, entro campi di variazione ben definiti. Per sfruttare appieno tali campi di variazione occorre che i valori delle suddette quantità siano centrati rispetto ad essi, cioè abbiano valori il più possibile vicini all'unità. Una situazione ancora più pericolosa per le implicazioni numeriche associate è quella che si ha quando si utilizza la rappresentazione in virgola fissa; in questo caso la centratura preliminare delle quantità usate è essenziale per una loro corretta rappresentazione. Si veda a questo scopo quanto detto nel § II.A.1, relativamente a questo problema nella soluzione di un sistema di equazioni lineari, del tipo di quelli che si debbono risolvere nei problemi di analisi.

Per riportare i valori dei parametri entro i campi voluti, occorre ricorrere ai cambiamenti di scala della frequenza e del livello delle impedenze.

V.8.1 - Cambiamento di scala della frequenza.

Il cambiamento di scala delle frequenze consiste nell'alterare i valori delle frequenze in ragione di una quantità prestabilita f_0 . Contemporaneamente, si altera anche la scala delle pulsazioni e della variabile di Laplace s in ragione della medesima quantità f_0 . Le grandezze risultanti vengono indicate come «normalizzate in frequenza»; si ha la seguente corrispondenza con le quantità effettive

$$(V.8.1) \quad f^{(N)} = \frac{f}{f_0} ; \quad \omega^{(N)} = \frac{\omega}{f_0} ; \quad s^{(N)} = \frac{s}{f_0}$$

Le (V.8.1) sono usabili nei due sensi, cioè esse vengono impiegate sia per effettuare la *normalizzazione* sia per ricavare, alla fine dei calcoli, i valori effettivi (*denormalizzazione*). È importante tenere presente l'effetto che ha la normalizzazione di frequenza sul valore dei parametri più comuni e sulle funzioni di rete. Vale la seguente corrispondenza in cui con l'apice N si indica il valore normalizzato e senza apice il valore effettivo:

$$\text{capacità: } C^{(N)} = C f_0$$

$$\text{induttanza: } L^{(N)} = L f_0$$

(V.8.2) elementi senza memoria (resistenza, rapporto di trasformazione, resistenza di girazione, parametri di controllo dei generatori controllati): inalterati

$$\text{Funzione di rete } F(s): \quad F^{(N)}(s^{(N)}) = F(s^{(N)} f_0)$$

Osservazione V.8.1.

Quando si usa la normalizzazione di frequenza f_0 , il circuito assegnato viene normalizzato in modo che al valore di frequenza effettivo $f = f_0$ corrisponda il valore normalizzato $f^{(N)} = 1$ e quindi al valore effettivo di pulsazione $\omega = \omega_0 = 2\pi f_0$ il valore normalizzato $\omega^{(N)} = 2\pi$. A volte interessa invece che al valore effettivo $\omega = \omega_0$ corrisponda il valore normalizzato $\omega^{(N)} = 1$. In questi casi occorre effettuare una normalizzazione in ragione della quantità $\omega_0 = 2\pi f_0$ e allora si parla di *pulsazioni normalizzate*. Ovviamente tutte le formule fornite nel presente paragrafo rimangono in tal caso valide, purché si sostituisca ovunque il valore ω_0 al posto di f_0 .

V.8.2 - Cambiamento di scala delle impedenze.

Il cambiamento di scala del livello delle impedenze consiste nell'alterare i valori delle impedenze di una quantità prestabilita R_0 ; contemporaneamente si alterano della quantità inversa $1/R_0$ le ammettenze. I valori risultanti vengono indicati come «normalizzati in livello». Vale la seguente corrispondenza, indicando sempre con l'apice N i valori normalizzati e senza apice i valori effettivi.

$$\begin{aligned} \text{resistenza:} & \quad R^{(N)} = R/R_0 \\ \text{capacità:} & \quad C^{(N)} = C R_0 \\ \text{induttanza:} & \quad L^{(N)} = L/R_0 \\ \text{rapporto di trasformazione:} & \quad \text{inalterato} \\ \text{transimpedenza } r: & \quad r^{(N)} = r/R_0 \\ \text{transammettenza } g: & \quad g^{(N)} = g R_0 \end{aligned}$$

(segue)

resistenza di girazione R : $R^{(N)} = R/R_0$

parametri di controllo del generatore
di tensione controllato in tensione e
del generatore di corrente controllato
in corrente:

inalterati

(V.8.3) impedenza di ingresso o di trasferimento $Z(s)$:

$$Z^{(N)}(s) = Z(s)/R_0$$

ammettenza di ingresso o di trasferimento $Y(s)$:

$$Y^{(N)}(s) = Y(s) R_0$$

funzioni di trasferimento in tensione
o in corrente:

inalterati

Le due normalizzazioni in frequenza e livello sono utilizzate contemporaneamente nelle applicazioni nei due sensi. Infatti è opportuno, per gli inconvenienti numerici detti in precedenza, effettuare preventivamente la normalizzazione prima di risolvere il problema d'interesse. Quindi i risultati ottenuti vanno riportati ai valori effettivi con la denormalizzazione. Nella tab. V.8.1 sono riassunte le relazioni tra le quantità normalizzate ed effettive nel caso che siano presenti ambedue le normalizzazioni.

Tabella V.8.1 - Legame tra valori normalizzati ed effettivi nel caso di normalizzazione contemporanea di frequenza (pulsazione) e livello.

Quantità effettiva	Quantità normalizzata $\Phi_0 = f_0$: normalizzazione in frequenza $\Phi_0 = \omega_0$: normalizzazione in pulsazione
Resistenza R	$R^{(N)} = R/R_0$
Capacità C	$C^{(N)} = C R_0 \Phi_0$
Induttanza L	$L^{(N)} = L \Phi_0 / R_0$
Rapporto di trasformazione (trasformatore)	inalterato
Transimpedenza r	$r^{(N)} = r/R_0$
Transammettenza g	$g^{(N)} = g R_0$
Resistenza di girazione R	$R^{(N)} = R/R_0$

(segue)

Quantità effettiva	Quantità normalizzata $\Phi_0 = f_0$: normalizzazione in frequenza $\Phi_0 = \omega_0$: normalizzazione in pulsazione
Parametri di controllo dei generatori di tensione controllati in tensione e di corrente controllati in corrente	inalterati
Impedenza di ingresso o di trasferimento $Z(s)$	$Z^{(N)}(s^{(N)}) = Z(s^{(N)} \Phi_0) / R_0$
Ammettenza di ingresso o di trasferimento $Y(s)$	$Y^{(N)}(s^{(N)}) = Y(s^{(N)} \Phi_0) R_0$
Funzioni di trasferimento in tensione o in corrente $F(s)$	$F^{(N)}(s^{(N)}) = F(s^{(N)} \Phi_0)$

Esempio V.8.1.

Mettere in evidenza le operazioni di normalizzazione e denormalizzazione seguite nell'analisi del circuito di fig.V.8.1, che rappresenta un filtro passa-basso tipo Cauer⁽¹⁾.

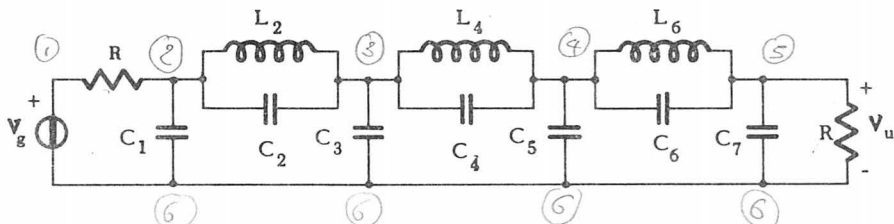


Fig.V.8.1 - Circuito considerato nell'esempio V.8.1. I valori dei componenti sono: $R=600$, $C_1=27,50$, $C_2=7,813$, $C_3=31,50$, $C_4=46,85$, $C_5=24,42$, $C_6=31,88$, $C_7=15,58$, $L_2=9,899$, $L_4=4,244$, $L_6=5,232$ (Ω , nF, mH).

Effettuiamo le normalizzazioni in pulsazione e livello, scegliendo:

$$\omega_0 = 66.130,5 \text{ rad/sec} ; \quad R_0 = 600 \Omega$$

(1) - Lo schema del filtro è preso da R.Saal, «Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe», Ed. Telefunken, 1963.

Applicando le corrispondenze di tab.V.8.1 con $\Phi_0 = \omega_0$, si ha:

$$R=1$$

$$C_1=1,091; C_2=0,3102; C_3=1,250; C_4=1,859;$$

$$C_5=0,9689; C_6=1,265; C_7=0,6181;$$

$$L_2=1,091; L_4=0,4678; L_6=0,5767$$

Effettuando l'analisi in frequenza del circuito mediante il calcolatore con il programma descritto nel § V.B, si ottiene per il modulo della funzione di trasferimento in tensione $\frac{V_u}{V_g}$ l'andamento di fig.V.8.2.

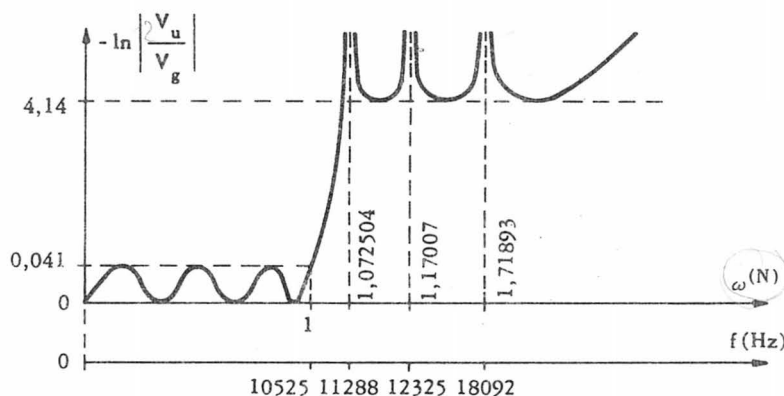


Fig.V.8.2 - Risposta in frequenza del circuito di fig.V.8.1, dopo la normalizzazione e successiva denormalizzazione.

La risposta effettiva del circuito si ottiene denormalizzando la frequenza in figura V.8.2. Ciò comporta semplicemente la modifica dell'asse delle ascisse, come indicato nell'asse riportato in basso nella stessa figura. L'asse delle ordinate rimane inalterato, in quanto la funzione di trasferimento in tensione non subisce variazioni per effetto della normalizzazione in livello.

Osservazione V.8.2.

L'operazione di normalizzazione può essere intesa in senso più ampio di quello fatto, per raggiungere scopi particolari. Di seguito riportiamo un esempio a tale riguardo, relativo alle normalizzazioni generalizzate di frequenza e di livello, usate per trasformare un circuito costituito solo da resistori e condensatori in uno costituito da in-

duttori e condensatori⁽¹⁾. La normalizzazione generalizzata in livello consiste nel sostituire al posto di R_0 una funzione di una variabile p opportuna, cioè:

$$(V.8.4) \quad R_0 = g(p)$$

La normalizzazione generalizzata in frequenza consiste nel sostituire alla variabile s la nuova variabile p tramite la relazione:

$$(V.8.5) \quad s = f(p)$$

Per effetto delle due normalizzazioni contemporanee, il resistore di resistenza R corrisponde ad un bipolo nella variabile p d'impedenza:

$$(V.8.6) \quad Z^{(N)}(p) = R/g(p)$$

ed il condensatore di capacità C ad un bipolo di impedenza:

$$(V.8.7) \quad Z^{(N)}(p) = \frac{1}{C f(p) g(p)}$$

Volendo trasformare un circuito costituito da resistori e condensatori in uno costituito da induttori e condensatori, si vede facilmente che è sufficiente scegliere:

$$(V.8.8) \quad g(p) = 1/p; \quad f(p) = p^2$$

In tale modo il resistore corrisponde nella variabile p ad un induttore di induttanza R ed il condensatore rimane inalterato. Supponendo di conoscere le proprietà dei circuiti costituiti da induttori e condensatori è facile ricavare quelle dei circuiti costituiti da resistori e condensatori (circuiti RC); infatti la funzione di rete del circuito RC è legata a quella del circuito LC nel seguente modo, effettuando la denormalizzazione:

	impedenza di ingresso o di trasferimento	$Z_{RC}(s) = \left\{ \frac{1}{p} Z_{LC}(p) \right\}_{p=\sqrt{s}}$
(V.8.9)	ammettenza di ingresso o di trasferimento	$Y_{RC}(s) = \{ p Y_{LC}(p) \}_{p=\sqrt{s}}$
	funzione di trasferimento in tensione o in corrente	$F_{RC}(s) = \{ F_{LC}(p) \}_{p=\sqrt{s}}$

(1) - La trasformazione riportata come esempio è la base del metodo per la derivazione delle proprietà dei circuiti costituiti da resistori e condensatori da quelle dei circuiti
(segue)

V.9 - Caratterizzazione nel dominio della frequenza di alcuni circuiti tipici.

La caratterizzazione nel dominio della frequenza dei circuiti è di fondamentale importanza, in quanto, come messo in evidenza nel paragrafo precedente, è la più facilmente rilevabile per via sperimentale. Il caso più importante dal punto di vista delle applicazioni, cioè quello in cui interessi una sola eccitazione ed una sola risposta (caso della rete 2-porte), verrà considerato in dettaglio nel § VI.7.2. Nel caso presente limiteremo la nostra attenzione ad una categoria di circuiti elementari di grande importanza pratica: i circuiti risonanti. La caratteristica di questi circuiti è il fenomeno della «risonanza», che consiste in un'intensificazione notevole dell'effetto dell'eccitazione, quando il circuito considerato si trova in una situazione particolare, detta di «risonanza». Il fenomeno della risonanza è chiaramente visibile nel dominio della frequenza per i due schemi possibili di circuito risonante parallelo (figura V.9.1a) e di circuito risonante serie (fig.V.9.1 b).

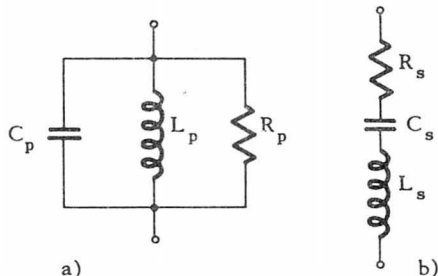


Fig.V.9.1 - Circuiti risonanti:
a) parallelo; b) serie.

V.9.1 - Circuito risonante parallelo.

Consideriamo per primo il circuito risonante parallelo, eccitandolo con un generatore di corrente sinusoidale di ampiezza unitaria e frequenza variabile. Come risposta consideriamo la corrente i_R che scorre nel resistore. Usando i fasori, si ha (fig.V.9.2):

costituiti solo da induttori e condensatori. Si veda ad esempio G.Martinelli, « Sintesi delle reti elettriche », Ed. Siderea, 1970, Vol.I, § II.8.

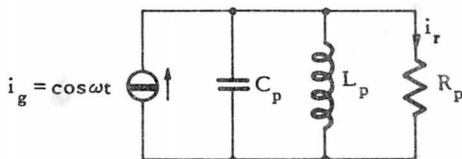
$$E \left(G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p} \right) = I_g$$

$$(V.9.1) \quad I_g = 1; \quad I_R = \frac{G_p}{G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

in cui:

$$(V.9.2) \quad Q = \omega_0 C_p R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L_p}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}}$$

Fig.V.9.2 - Circuito risonante parallelo con eccitazione mediante generatore di corrente.



Il rapporto tra risposta ed eccitazione è di conseguenza:

$$(V.9.3) \quad \left| \frac{I_R}{I_g} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$(V.9.4) \quad \arg(I_R/I_g) = -\operatorname{arctg} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

Gli andamenti di tali due funzioni, che definiscono la risposta in frequenza del circuito risonante parallelo, sono riportati in fig.V.9.3. Il fenomeno della risonanza risulta chiaramente visibile nell'andamento del modulo, in quanto al variare di ω_0 l'effetto, a parità di causa, varia notevolmente, essendo esaltato in corrispondenza alla pulsazione ω_0 . Per questa ragione alla pulsazione ω_0 definita nella (V.9.2), si dà il nome di «pulsazione di risonanza» ed alla corrispondente frequenza «frequenza di risonanza». L'entità della risonanza, cioè della rapidità di variazione dell'effetto al variare della pulsazione, dipende dal coefficiente Q , a cui si dà di conseguenza il nome di «coefficiente di risonanza». In particolare il coefficiente Q fornisce una misura diretta della forma della «campana» che rappresenta l'andamento del modulo della risposta. Infatti, se calcoliamo i valori di pulsazione per i quali il modulo al qua-

drato della risposta è ridotto a metà del valore ⁽¹⁾ che ha in corrispondenza alla risonanza, si trova

$$(V.9.5) \quad \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}$$

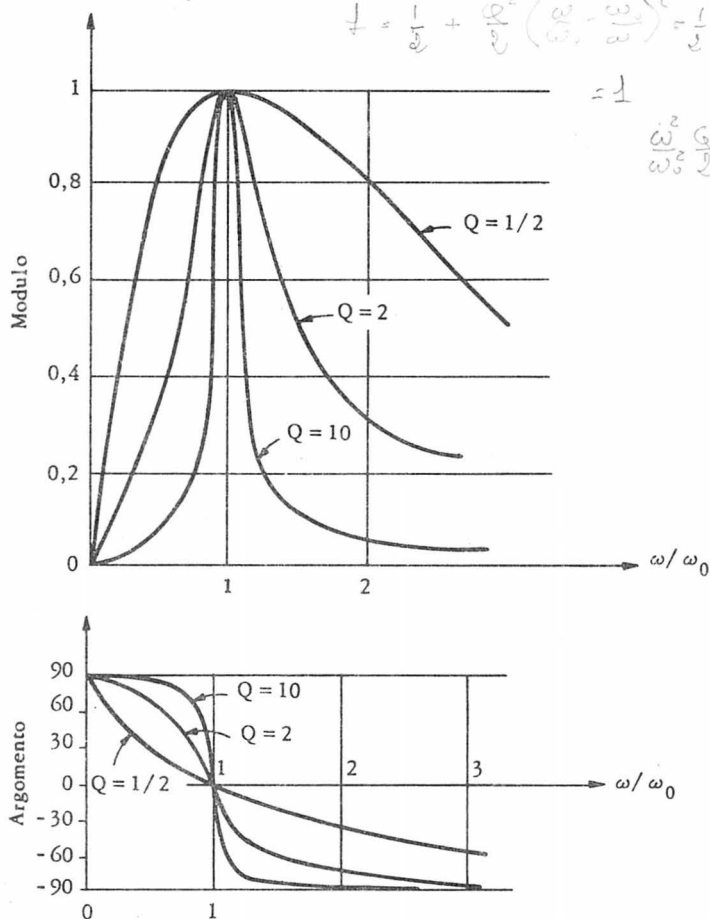


Fig.V.9.3 - Andamento del modulo e dell'argomento della risposta in frequenza del circuito risonante.

(1) - Utilizzando le unità logaritmiche, tale riduzione corrisponde a 3 dB, poichè la misura in decibel (dB) è definita da:

$$- 20 \log_{10} | \text{risposta} | = \text{decibel}$$

Le pulsazioni che si considerano, definiscono di conseguenza la banda entro cui l'attenuazione è inferiore a 3 dB.

I valori che interessano in pratica per il coefficiente Q sono molto maggiori di uno, per cui:

$$(V.9.6) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q} \quad Q \gg 1$$

a cui corrisponde:

$$(V.9.7) \quad f_1 = f_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad f_2 = f_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)$$

Di conseguenza il coefficiente Q è uguale a:

$$(V.9.8) \quad Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

che corrisponde alla seguente definizione:

Definizione V.9.1 - «Il coefficiente di risonanza di un circuito risonante è il rapporto tra la frequenza di risonanza e la larghezza della banda di frequenza per cui la risposta in ampiezza è ridotta per non più di $1/\sqrt{2}$ di quella a risonanza (3 dB). Tale definizione vale solo se il coefficiente Q è sufficientemente maggiore di uno».

La definizione V.9.1 fornisce un procedimento operativo per misurare sperimentalmente il coefficiente di risonanza Q .

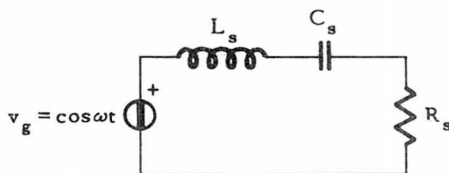
V.9.2 - Circuito risonante serie.

Consideriamo il circuito risonante serie, eccitandolo mediante un generatore di tensione sinusoidale di ampiezza costante e pulsazione variabile, come indicato in fig. V.9.4. Come risposta consideriamo la tensione v_R ai capi del resistore R_s . Usando i fasori, si ha:

$$(V.9.9) \quad V_g = 1 \quad ; \quad V_R = \frac{R_s}{R_s + j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s}} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Dalla (V.9.9) si vede chiaramente che il comportamento del circuito risonante serie, eccitato con un generatore di tensione e considerando come risposta la tensione sul resistore, coincide con quello del circuito risonante parallelo, eccitato con un generatore di corrente e con-

Fig. V.9.4 - Circuito risonante serie eccitato con un generatore di tensione.



siderando come risposta la corrente nel resistore. Di conseguenza si possono estendere al caso serie tutto quello che è stato detto per il caso parallelo.

V.9.3 - Considerazioni fisiche ed energetiche sulla risonanza.

Il fenomeno della risonanza è caratterizzato dal punto di vista fisico dall'equilibrio tra l'azione del condensatore e quella dell'induttore. Ciò può essere visto sia in termini energetici sia in termini di corrente per il circuito risonante parallelo ed in termini di tensione per il circuito risonante serie.

Consideriamo il circuito risonante parallelo. In questo caso i fasori delle correnti che percorrono i tre elementi, rapportati al fasore della corrente del generatore (fig. V.9.2) valgono:

$$I_R = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$(V.9.11) \quad I_C = \frac{j\omega C_p}{G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$I_L = \frac{\frac{1}{j\omega L_p}}{G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}} = \frac{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Si vede dalle formule (V.9.11) che negli elementi reattivi, in corrispondenza della risonanza:

1) le correnti nel condensatore e nell'induttore differiscono solo per il segno;

2) il modulo della corrente che scorre in ciascuno degli elementi reattivi è Q volte maggiore di quello della corrente che scorre nel resistore, che coincide con la corrente erogata dal generatore.

La prima osservazione mette in evidenza l'azione di bilanciamento tra le azioni del condensatore e dell'induttore, per effetto del quale si ha la risonanza. La seconda osservazione deve essere tenuta presente nella valutazione effettiva delle correnti che scorrono negli elementi. Per valori elevati del Q la corrente negli elementi reattivi è di ampiezza notevolmente maggiore di quella che il circuito risonante assorbe esternamente dal generatore. In particolare dalla osservazione 2) scaturisce la seguente definizione del coefficiente Q nel caso del circuito risonante parallelo:

Definizione V.9.2 - «Il coefficiente di risonanza di un circuito risonante parallelo è definito come il rapporto tra l'ampiezza della corrente in uno qualsiasi dei due elementi reattivi (condensatore o induttore) e l'ampiezza della corrente erogata dal generatore quando la frequenza della eccitazione è quella di risonanza».

Un'ulteriore definizione del coefficiente di risonanza è basata sull'aspetto energetico del bilanciamento delle azioni del condensatore e dell'induttore. A questo scopo calcoliamo l'energia media immagazzinata in questi due elementi, in funzione della corrente del generatore di corrente (fig. V.9.2). In base alle (V.5.43) e (V.5.49), si ha:

$$\bar{\epsilon}_L = \frac{1}{4} L_p \frac{Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (V.9.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_C &= \frac{1}{4} C_p |V_C|^2 = \frac{1}{4} C_p \left(\frac{1}{\omega C_p} \right)^2 \frac{Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{4} L_p \frac{Q^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \end{aligned}$$

In corrispondenza della risonanza risulta:

$$(V.9.13) \quad \bar{\mathcal{E}}_L = \frac{1}{4} L_p Q^2 \quad ; \quad \bar{\mathcal{E}}_C = \frac{1}{4} L_p Q^2 \quad ; \quad \omega = \omega_0$$

Contemporaneamente la potenza attiva dissipata sul resistore vale $R_p/2$. Quindi tenendo conto di ciò e della (V.9.13), si vede che:

$$(V.9.14) \quad Q = \omega_0 \frac{(\bar{\mathcal{E}}_L + \bar{\mathcal{E}}_C)_{\omega = \omega_0}}{\frac{1}{2} R_p}$$

da cui scaturisce la seguente definizione alternativa di Q :

Definizione V.9.3 - «Il coefficiente di risonanza di un circuito risonante è il prodotto della pulsazione per il rapporto tra l'energia media immagazzinata negli elementi reattivi e la potenza attiva assorbita dal resistore in corrispondenza alla risonanza».

Consideriamo ora il circuito risonante serie nella situazione di eccitazione di fig. V.9.4. In questo caso i fasori delle tensioni applicate ai vari elementi valgono:

$$(V.9.15) \quad \begin{aligned} V_R &= \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ V_C &= \frac{\frac{1}{j\omega C_s}}{R_s + j\omega L_s + 1/j\omega C_s} = \frac{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ V_L &= \frac{j\omega L_s}{R_s + j\omega L_s + 1/j\omega C_s} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \end{aligned}$$

Da queste formule derivano osservazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto nel caso del circuito risonante parallelo ed in particolare una definizione analoga alla V.9.2, cioè:

$$Q_s = \frac{V_c}{V_g} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

Definizione V.9.4 - « Il coefficiente di risonanza di un circuito risonante serie è definito come il rapporto tra l'ampiezza della tensione ai capi di uno qualsiasi degli elementi reattivi e l'ampiezza della tensione impressa dal generatore, quando la frequenza dell'eccitazione è quella di risonanza ».

Una conseguenza interessante di questa definizione è che nel caso di circuiti ad alto Q la tensione ai capi degli elementi reattivi è molto più elevata di quella del generatore. Si ha perciò un aumento notevole della tensione, a cui è opportuno fare attenzione. Nel caso del circuito risonante serie l'energia media immagazzinata nei due elementi reattivi vale:

$$\bar{\epsilon}_C = \frac{1}{4} C_s \frac{Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

(V.9.16)

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_L &= \frac{1}{4} L_s |I_L|^2 = \frac{1}{4} L_s \frac{1}{\omega^2 L_s^2} \frac{Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} C_s Q^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \end{aligned}$$

Tenendo conto che la potenza attiva dissipata sul resistore vale $1/2 R_s$ e che a risonanza:

$$(V.9.17) \quad (\bar{\epsilon}_C + \bar{\epsilon}_L)_{\omega=\omega_0} = \frac{C_s}{2} Q^2$$

si ottiene che, anche nel caso del circuito risonante serie, il coefficiente di risonanza può essere caratterizzato mediante la definizione V.9.3.

$$Q = \sqrt{\frac{2(\bar{\epsilon}_C + \bar{\epsilon}_L)}{C_s}}$$

V.9.4 - Legame tra coefficiente di risonanza ed i coefficienti di merito dell'induttore e del condensatore.

La presenza di un resistore nei due tipi di circuiti risonanti è dovuta al fatto che l'induttore ed il condensatore reali sono affetti da perdite. Come messo in evidenza nel §1.6.7 tali perdite vengono schematizzate mediante opportuni coefficienti di merito che dipendono usualmente, oltre che dalla tecnologia con cui vengono realizzati gli elementi, anche dalla frequenza. Chiamando con Q_L e con Q_c i coefficienti di merito dei due elementi reattivi per $\omega = \omega_0$ ed utilizzando il circuito equiva-

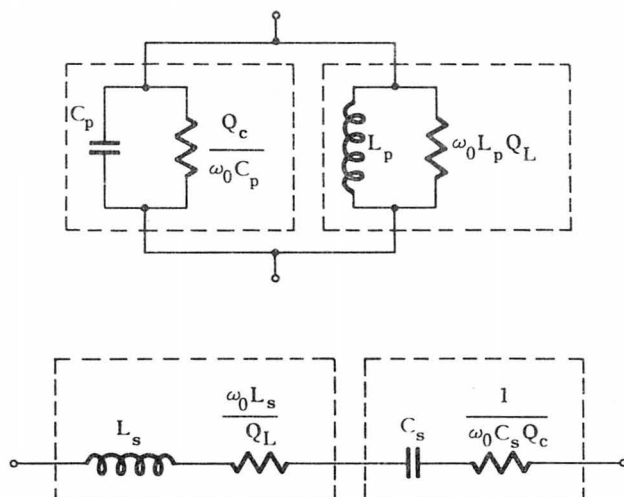


Fig.V.9.5 - Circuiti risonanti parallelo e serie realizzati con componenti reattivi reali.

lente serie o parallelo di fig.1.6.9, si ha per i due tipi di circuiti risonanti la situazione di fig. V.9. 5. Si vede che il coefficiente di risonanza nei due casi vale:

$$\text{caso serie: } \frac{1}{Q} = \frac{R_s}{\omega_0 L_s} = \frac{1}{\omega_0 L_s} \left[\frac{\omega_0 L_s}{Q_L} + \frac{1}{\omega_0 C_s Q_c} \right] = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_c}$$

(V.9.18)

$$\text{caso parallelo: } \frac{1}{Q} = \omega_0 L_p \frac{1}{R_p} = \omega_0 L_p \left[\frac{\omega_0 C_p}{Q_c} + \frac{1}{Q_L \omega_0 L_p} \right] = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_c}$$

che dimostra la seguente proprietà:

Proprietà V.9.1 - «Il coefficiente di risonanza di un circuito risonante è sempre inferiore al coefficiente di merito degli elementi reattivi che compongono il circuito risonante».

Ulteriori notizie e proprietà riguardanti i circuiti risonanti possono essere trovate in un qualsiasi testo di radiotecnica. Si veda ad esempio: F.E. Terman, «Electronic and Radio Engineering», McGraw-Hill, 1955, Cap.III.

*

APPENDICI AL CAPITOLO V

14/2/04

APPENDICE V.A - Sistemi trifase tipici.

Nel par. V.4.4 è stata considerata la soluzione di un sistema trifase generico, nel quale non vi era alcuna relazione fra le tensioni e le correnti di fase. Tuttavia, in molte applicazioni, risultano particolarmente importanti quei sistemi trifase nei quali il triangolo delle tensioni e quello delle correnti, nel piano dei fasori, soddisfano a particolari condizioni di simmetria. Nel presente paragrafo verranno presi in esame tali sistemi e verranno descritte alcune loro proprietà caratteristiche.

V.A.1 - Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati.

Con riferimento alla fig. V.A.1, si considerino le tre tensioni stelate E_1 , E_2 , E_3 . Se esse godono delle seguenti proprietà:

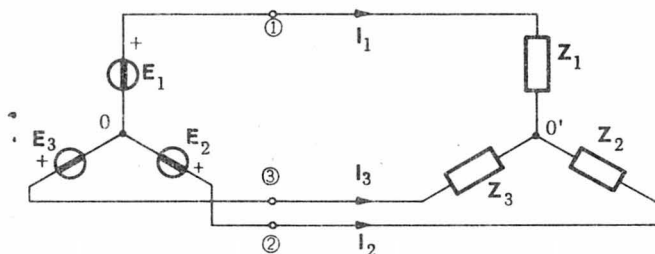


Fig.V.A.1 - Schema generale di un sistema trifase.

14/2/84

$$(V.A.1) \quad \mathbf{E}_k = \mathbf{E} e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{3}} \quad \text{con } k = 1, 2, 3$$

ove $\mathbf{E}$ è un vettore generico, allora il sistema trifase viene detto simmetrico, di tipo diretto. Se invece della (V.A.1) è soddisfatta la seguente proprietà:

$$(V.A.2) \quad \mathbf{E}_k = \mathbf{E} e^{+j(k-1)\frac{2\pi}{3}}, \quad \text{con } k = 1, 2, 3$$

allora il sistema trifase viene detto simmetrico di tipo inverso. Riportando le tre tensioni stellate sul piano dei fasori, si ottengono i diagrammi riportati nella fig. V.A.2, per il caso diretto a) e per il caso inverso b), avendo scelto arbitrariamente $\mathbf{E} = \mathbf{j}$.

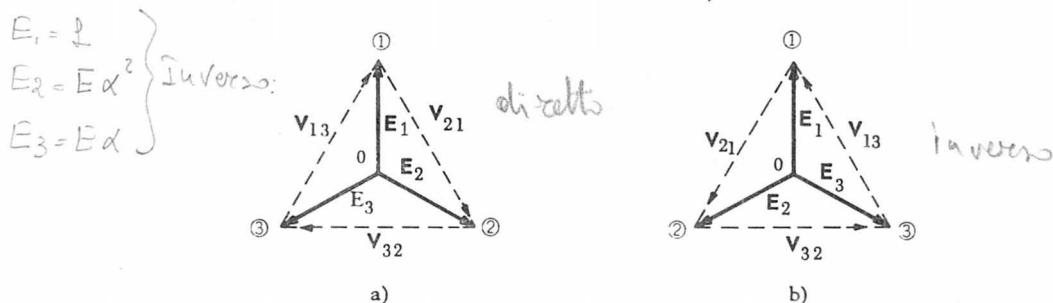


Fig.V.A.2 - Diagramma delle tensioni stellate e concatenate per sistemi trifase simmetrici; a) sistema trifase simmetrico diretto, b) sistema trifase simmetrico inverso.

È evidente dalle fig. V.A.2 che anche le tre tensioni concatenate V_{21} , V_{32} , V_{13} godono di particolari condizioni di simmetria ed in particolare hanno tutte lo stesso modulo V ; è facile ricavare la relazione fra il modulo V ed il modulo E delle tensioni stellate. Tale relazione è la seguente:

$$(V.A.3)$$

$$V = \sqrt{3} E$$

Se le tre impedenze di carico Z_1 , Z_2 , Z_3 sono uguali fra loro:

$$(V.A.4)$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

allora anche le tre correnti di fase I_1 , I_2 , I_3 godono di particolari condizioni di simmetria. Infatti, in questo caso, in base alla (V.4.6), si ricava per la tensione E_x fra i nodi 0 e 0' di fig. V.A.1:

$$(V.A.5)$$

$$E_x = 0$$

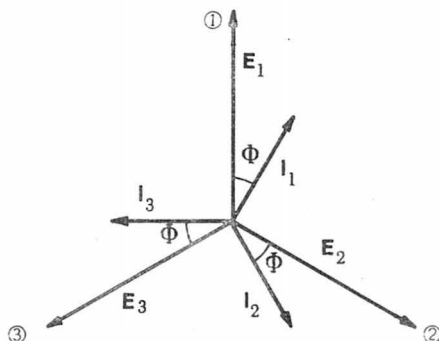
Pertanto le tre correnti di fase si possono ricavare con le relazioni seguenti:

$$(V.A.6) \quad I_k = E_k / Z \quad \text{con} \quad k = 1, 2, 3$$

Quindi le correnti di fase godono di proprietà del tutto analoghe alle (V.A.1) per i sistemi diretti e (V.A.2) per i sistemi inversi. In questo caso il sistema trifase prende il nome di «equilibrato».

Il diagramma delle tensioni e delle correnti per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è mostrato in fig.V.A.3, nel caso diretto.

Fig.V.A.3 - Diagramma delle tensioni stellate e delle correnti di fase per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato.



Applicando le definizioni di potenza attiva e reattiva, date nel § V.5, si ottiene per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato:

$$(V.A.7) \quad \text{potenza attiva} = P_a = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_k I_k^*) = \frac{3}{2} E \cdot I \cos \Phi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} VI \cos \Phi$$

ove I è il modulo comune delle tre correnti di fase e Φ è l'angolo di sfasamento fra ciascuna tensione stellata e la relativa corrente di fase, come mostrato in fig.V.A.3. La potenza P_a rappresenta la potenza attiva trasferita globalmente dai tre generatori verso le tre impedenze di carico. Per la potenza reattiva si ha:

$$(V.A.8) \quad P_R = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Im}[E_k I_k^*] = \frac{3}{2} E \cdot I \sin \Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} VI \sin \Phi$$

Una notevole proprietà si ha nei riguardi della potenza istantanea totale transitante dai generatori verso il carico. Utilizzando infatti la (V.5.7) si ottiene:

$$p(t) = \sum_{k=1}^3 p_k(t) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}_k \mathbf{I}_k^* \right] + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_k \mathbf{I}_k e^{j2\omega t}]$$

Tenendo conto delle (V.A.1) e delle (V.A.6) si ottiene:

$$p(t) = \frac{3}{2} E \cdot I \cos \Phi + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{Z}} e^{j2\omega t} \sum_{k=1}^3 e^{-j(k-1) \frac{4\pi}{3}} \right]$$

Essendo:

(V.A.9)

$$\sum_{k=1}^3 e^{-j(k-1) \frac{4\pi}{3}} = 0$$

risulta:

(V.A.10)

$$p(t) = \frac{3}{2} E I \cos \Phi = P_a$$

e pertanto si ottiene la seguente proprietà⁽¹⁾:

Proprietà V.A.1 - *Un sistema trifase simmetrico ed equilibrato trasferisce dai generatori verso il carico una potenza istantanea totale costante nel tempo ed uguale alla potenza attiva totale.*

Osservazione V.A.1.

La proprietà V.A.1 mostra che, a differenza del caso generico in cui la potenza istantanea $p(t)$ in regime permanente dipende dal tempo (si veda ad esempio la figura V.5.2 riferita al circuito di fig.V.5.1), nel caso di un circuito trifase simmetrico ed equilibrato si ha l'indipendenza dal tempo della potenza istantanea totale; naturalmente la proprietà V.A.1 non vale nei riguardi delle singole potenze istantanee assorbite da ciascuno dei tre bipoli costituenti il carico.

In base alla proprietà suddetta è facile prevedere che il trasferimento di energia dai generatori verso il carico, nel caso dei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati debba avere dei vantaggi rispetto al caso generico, poiché in quest'ultimo caso la potenza attiva è pari solo in media alla potenza istantanea e non istante per istante. Tale risultato può essere provato facilmente facendo riferimento ai due circuiti mostrati nelle figg.V.A.4a e b.

Il circuito di fig.V.A.4a mostra un carico trifase alimentato da una linea caratterizzata da tre resistori di resistenza R ; il circuito di fig.V.A.4b mostra invece un

(1) - Si vede facilmente che la proprietà V.A.1 vale anche per i sistemi trifase di tipo inverso.

singolo bipolo alimentato da una linea caratterizzata da due resistori di resistenza R . Quest'ultimo circuito verrà denominato per contrapposizione «circuitto monofase».

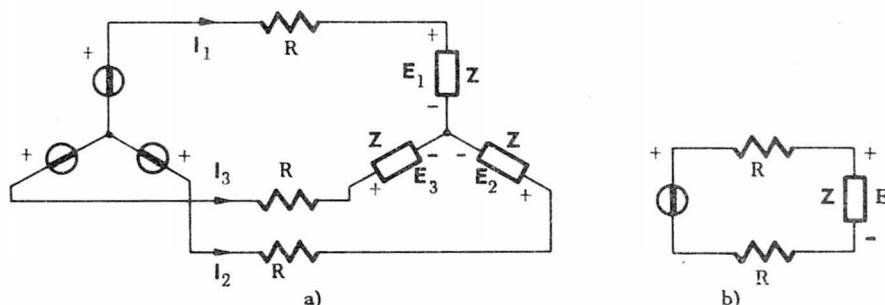


Fig.V.A.4 - Confronto fra un circuito trifase simmetrico ed equilibrato (a) ed un circuito monofase (b).

Considerando come «utile» la potenza dissipata sul carico e come «perduta» la potenza dissipata sui resistori di linea, nel caso trifase si ottiene:

$$(V.A.11) \quad \text{potenza utile} = \frac{3}{2} E \cdot I \cos \Phi = P_u^{(1)}$$

$$(V.A.12) \quad \text{potenza perduta} = \frac{3}{2} |I|^2 R = P_p^{(1)}$$

mentre nel caso del circuito monofase si ottiene:

$$(V.A.13) \quad \text{potenza utile} = \frac{1}{2} E \cdot I \cos \Phi = P_u^{(2)}$$

$$(V.A.14) \quad \text{potenza perduta} = |I|^2 R = P_p^{(2)}$$

Effettuando il rapporto fra potenza utile e potenza perduta, si ottiene:

$$(V.A.15) \quad P_u^{(1)} / P_p^{(1)} = 2 P_u^{(2)} / P_p^{(2)}$$

che mostra la convenienza del sistema trifase rispetto a quello monofase nei riguardi della trasmissione dell'energia nel caso simmetrico ed equilibrato.

V.A.2 - Sistemi trifase non simmetrici e non equilibrati.

Nelle applicazioni, il caso dei sistemi trifase perfettamente simmetrici ed equilibrati è difficile da ottenere, in quanto uno squilibrio sulle tre impedenze di carico dà luogo ad uno squilibrio fra le tre correnti di linea e quindi una dissimmetria fra le tre tensioni sul carico a causa delle impedenze interne dei generatori (pur ammettendo perfettamente simmetrico il sistema delle tensioni a vuoto). Pertanto risulta molto importante il caso dei sistemi trifase che si discostano da quelli considerati nel paragrafo precedente.

Tuttavia il caso simmetrico ed equilibrato conserva la sua importanza a causa della seguente proprietà, che permette di ricondurre ad esso anche il caso più generale.

Proprietà V.A.2 - Ogni terna di grandezze (tensioni o correnti) costituita da tre vettori generici A_1, A_2, A_3 , si può sempre suddividere nella somma di tre terne, nel modo seguente:

- una terna trifase simmetrica diretta A_{d1}, A_{d2}, A_{d3} ;
- una terna trifase simmetrica inversa A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} ;
- una terna monofase A_0, A_0, A_0 .

La dimostrazione della proprietà V.A.2 si riduce alla risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite. Infatti la proprietà stessa si può esprimere analiticamente nel modo seguente:

$$(V.A.16) \quad \begin{cases} A_0 + A_{d1} + A_{i1} = A_1 \\ A_0 + A_{d2} + A_{i2} = A_2 \\ A_0 + A_{d3} + A_{i3} = A_3 \end{cases}$$

Ricordando le (V.A.1) e le (V.A.2), detto $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, si ha:

$$(V.A.17) \quad \begin{cases} A_{d1} = A_d; & A_{d2} = A_d \alpha^{-1}; & A_{d3} = A_d \alpha^{-2} \\ A_{i1} = A_i; & A_{i2} = A_i \alpha; & A_{i3} = A_i \alpha^2 \end{cases}$$

e tenendo conto che $\alpha^3 = 1$, si ha $\alpha^{-1} = \alpha^2$, $\alpha^{-2} = \alpha$.

Quindi il sistema (V.A.16) diviene:

$$\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} A_{d1} = A_d \\ A_{d2} = \alpha A_{d1} \\ A_{d3} = \alpha^2 A_{d2} \end{cases} \quad \text{diretta}$$

$$\begin{cases} A_{i1} = A_i \\ A_{i2} = \alpha^{-1} A_{i1} = \alpha^2 A_{i1} \\ A_{i3} = \alpha^{-2} A_{i2} = \alpha A_{i2} \end{cases} \quad \text{inversa}$$

$$0 \neq \alpha^4 + \alpha + \alpha - \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha^2 \quad \alpha^4 - 3\alpha^2 + 2\alpha =$$

$p_0 \quad A_d \quad A_i$

(V.A.18)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_d \\ A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

Essendo il determinante dei coefficienti diverso da zero, si possono ricavare le tre incognite A_0 , A_d e A_i , il che dimostra la proprietà (V.A.2).

Il sistema (V.A.18) permette anche di determinare la formula per il calcolo di A_0 , A_d e A_i ; infatti ricordando che $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, si ottiene facilmente:

(V.A.19)

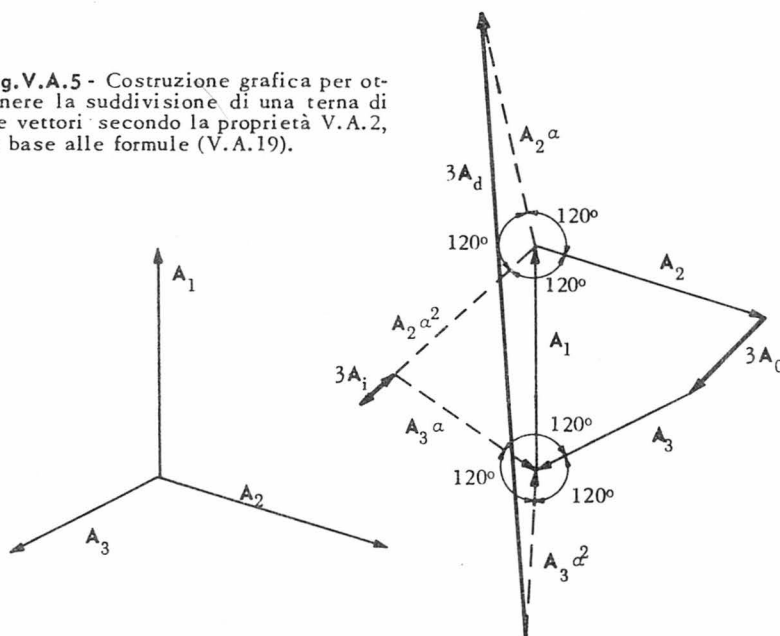
$$A_0 = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + A_3)$$

$$A_d = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 \alpha + A_3 \alpha^2)$$

$$A_i = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha)$$

Le formule (V.A.19) possono essere utilizzate facilmente anche per via grafica, osservando che α è un operatore che ruota un vettore di un terzo di angolo giro in senso antiorario; tale interpretazione grafica è data in fig.V.A.5.

Fig.V.A.5 - Costruzione grafica per ottenere la suddivisione di una terna di tre vettori secondo la proprietà V.A.2, in base alle formule (V.A.19).



La proprietà V.A.2 è notevolmente importante in molte applicazioni, quali ad esempio quelle riguardanti le macchine elettriche sia nel caso che la si utilizzi per trattare una terna non simmetrica di tensioni sia nel caso di una terna non equilibrata di correnti. Particolarmente utili sono le conseguenze di tale proprietà sulla potenza complessa transiente globalmente in un sistema trifase.

Considerando infatti un sistema trifase generico, la potenza complessa assorbita dal carico risulta:

$$(V.A.20) \quad P_c = \sum_{k=1}^3 P_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_k I_k^*$$

$$P_c = P_{ed} + P_{ei}$$

Supponendo che il sistema trifase sia non simmetrico e non equilibrato, applicando la proprietà V.A.2 si ottiene:

$$(V.A.21) \quad P_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (E_0 + E_{dk} + E_{ik}) (I_{dk}^* + I_{ik}^*)$$

tenendo conto che il termine monofase della corrente è nullo in base alla prima della (V.A.19), essendo $\sum_{k=1}^3 I_k = 0$. La (V.A.21) si può semplificare notevolmente, poiché:

$$\sum_{k=1}^3 E_{dk} = 0; \quad \sum_{k=1}^3 E_{ik} = 0; \quad \sum_{k=1}^3 I_{dk}^* = 0; \quad \sum_{k=1}^3 I_{ik}^* = 0$$

$$\sum_{k=1}^3 E_{dk} I_{ik}^* = 0 \quad \sum_{k=1}^3 E_{ik} I_{dk}^* = 0$$

Quindi si ottiene:

$$(V.A.22) \quad P_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_{dk} I_{dk}^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 E_{ik} I_{ik}^*$$

Pertanto la potenza complessa totale è pari alla somma delle potenze trasportate dai due sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, diretto e inverso, essendo nulli tutti i termini mutui nell'espressione (V.A.21). Si ha pertanto la seguente proprietà:

Proprietà V.A.3 - «La potenza complessa trasportata da un sistema trifase generico è pari alla somma delle potenze complesse trasportate sin-

golarmente dai due sistemi trifase simmetrici ed equilibrati, diretto ed inverso, ottenibili applicando la proprietà V.A.2 alla terna delle tensioni e alla terna delle correnti».

Ovviamente la proprietà V.A.3 dà luogo a due analoghe proprietà riguardanti la potenza attiva e reattiva.

Esempio V.A.1.

Assegnato il sistema trifase simmetrico di fig.V.A.6, ricavare con il metodo grafico la terna delle correnti di fase. Suddividere quindi tale terna secondo la proprietà V.A.2 ed ottenere la potenza assorbita dal carico utilizzando la proprietà V.A.3.

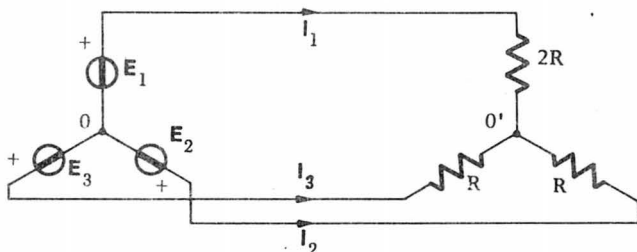


Fig.V.A.6 - Sistema trifase simmetrico e non equilibrato considerato nell'esempio V.A.1, $E = 200 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$.

Utilizzando la (V.4.6) si ottiene la tensione del nodo $0'$ rispetto al nodo 0 , E_c .

Si ha:

$$E_x = \frac{E_1 \frac{G}{2} + E_2 G + E_3 G}{\frac{G}{2} + 2G} = \frac{-\frac{E_1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{E_1}{5}$$

Utilizzando il metodo grafico e scegliendo arbitrariamente pari a $\pi/2$ la fase di E_1 , si ottiene il diagramma delle tensioni indicato in fig.V.A.7 a; il corrispondente diagramma delle correnti è riportato in fig.V.A.7 b.

Dalla fig.V.A.7 b si ottengono i seguenti valori approssimati per le correnti:

$$I_1 \cong j 12 ; \quad I_2 \cong 17,5 - j 6 ; \quad I_3 \cong -17,5 - j 6 \quad (\text{A})$$

Suddividendo la terna delle correnti in base alla proprietà V.A.2, secondo la costruzione di fig.V.A.5, si ottiene il diagramma di fig.V.A.7 c; dal suddetto diagramma si ottengono i seguenti valori approssimati di $3I_d$ e $3I_i$:

$$3I_d \approx j 48 \quad ; \quad 3I_i \approx -j 12 \quad (A)$$

da cui si ottiene $I_d \approx j 16$ e $I_i \approx -j 4$.

Per quanto riguarda la potenza, si ottiene che la potenza reattiva è nulla, essendo il carico resistivo ed inoltre risulta anche nulla la potenza trasportata dal sistema trifase inverso delle correnti, essendo il sistema trifase delle tensioni simmetrico e diretto. Pertanto, per la potenza attiva, si ha:

$$P_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{I}_{dk}^* = \frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}_d \approx 4800 \text{ W}$$

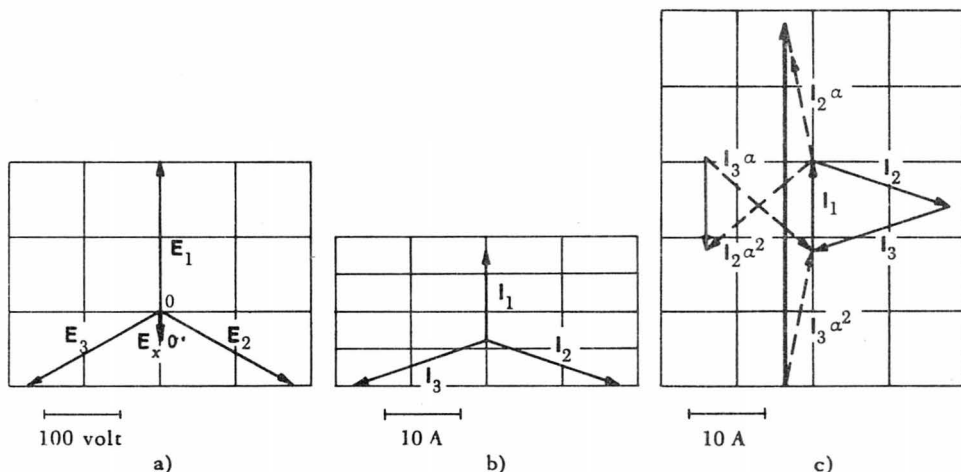


Fig.V.A.7 - Diagrammi utilizzati nell'esempio V.A.1.

- a) diagramma delle tensioni;
- b) diagramma delle correnti;
- c) diagramma per ricavare i sistemi equilibrati diretto e inverso delle correnti.

APPENDICE V.B - Programma FREQUENZA.

Nella presente appendice viene riportata la lista in FORTRAN del programma FREQUENZA, che permette di analizzare in regime permanente un circuito elettrico con il metodo dei fasori. Tale programma è la traduzione fedele dello schema a blocchi descritto nel § V.7 (figure V.7.1 e V.7.2).

Il programma FREQUENZA utilizza le subroutine NOD11 e GAUSS, per la cui descrizione si rimanda all'appendice II.B del cap.II; tuttavia tali subroutine devono essere nel caso presente lievemente modificate, allo scopo di permettere l'esecuzione dei calcoli nel campo dei numeri complessi, mentre in origine, per l'analisi in continua, era necessario solo l'analisi nel campo reale. Poiché tali modifiche riguardano poche frasi, riportiamo di seguito solo le frasi da modificare rispetto alla lista di istruzioni dell'appendice II.B.

Modifiche alla subroutine NOD11.

- 1) Dichiarare complesse le quantità A, B, R.
- 2) Eliminare la frase dichiarativa «doppia precisione», che risulta incompatibile con l'analisi nel campo complesso.

Modifiche alla subroutine GAUSS.

- 1) Dichiarare complesse le quantità A, B, SUM, PIV.
- 2) Eliminare la frase dichiarativa «doppia precisione».
- 3) Sostituire le frasi contenenti il calcolo del valore assoluto nel campo reale (DABS), con altre contenenti il calcolo del modulo nel campo complesso (CABS).

Di seguito verrà descritto il modo con cui presentare i dati che descrivono il circuito da analizzare e le stampe previste in uscita; seguirà la lista delle istruzioni del programma.

Nell'appendice V.C.2 verranno riportati vari esempi di applicazione del programma FREQUENZA; in particolare, per ogni esempio, verranno indicate le schede di ingresso dei dati e le stampe di uscita.

V.B.1 - Dati di ingresso.

Le schede che formano l'ingresso di ogni problema che si vuole risolvere con il programma FREQUENZA sono, in gran parte, le stesse utilizzate per i dati di ingresso del programma TEMPO, riguardante l'analisi con il metodo alle differenze finite e descritto nell'appendice III.B al cap.III. Facendo riferimento a tale appendice, ed in particolare al § III.B.1 relativo ai dati di ingresso, di seguito verranno riportate solo le differenze del caso presente rispetto a quello citato.

Le schede indicate da a) fino ad h), riguardanti la struttura del circuito e il valore dei componenti, sono identiche, salvo:

- 1) tutti i formati di ingresso relativi alle variabili reali sono modificati in E10.3 (semplice precisione), invece di D10.3 (doppia precisione);
- 2) le schede c), relative agli induttori, e d), relative ai condensatori, devono essere private dei dati relativi alle condizioni iniziali e pertanto il formato di ingresso diviene per ambedue: E10,3, 2I3.

Le schede indicate con i) e l), riguardanti le grandezze che interessa ottenere come uscita, rimangono invariate e mantengono lo stesso significato previsto nel § III.B.1.

La scheda m) è omessa e sostituita con la seguente:

m)- Una scheda dati nella quale è indicato nell'ordine:

- la frequenza iniziale;
- la frequenza finale;
- il passo di incremento delle frequenze.

Il formato di ingresso è il seguente: 3FE10.3.

Osservazione V.B.1

Il programma FREQUENZA è stato elaborato con finalità didattiche, allo scopo di ottenere la *risposta in ampiezza* di una rete per vari valori della frequenza. Esso ha pertanto dei limiti di utilizzabilità derivanti principalmente dalle seguenti osservazioni:

- 1) i calcoli sono eseguiti in semplice precisione; ciò rende inadatto il programma per analizzare circuiti con un numero di nodi superiore alla decina e che danno luogo a sistemi mal condizionati;
- 2) riguardo a tutti i generatori indipendenti, è previsto l'ingresso solo con quantità reali; pertanto tali generatori devono avere tutti la stessa fase (questo peraltro è il caso più comune quando interessa la risposta in ampiezza);
- 3) i valori della frequenza sono in progressione aritmetica, mentre in molti casi è richiesta una diversa classe di valori.

È evidente che, mentre alcuni dei limiti suddetti possono essere rimossi con piccole modifiche al programma, altri necessitano modifiche più sostanziali.

V.B.2 - Dati di uscita.

Prima di presentare i dati relativi alla soluzione del problema dell'analisi del circuito, vengono stampati, a scopo di controllo, i dati di ingresso relativi al circuito stesso. Seguono le stampe riguardanti la soluzione e sono rappresentate da tante righe di stampa quanti sono i valori delle frequenze. Ciascuna riga contiene nell'ordine le seguenti quantità:

- un numero d'ordine;
- il valore della frequenza;
- i valori delle ampiezze delle tensioni richieste dei vari nodi rispetto al nodo di riferimento.

V.B.3 - Lista del programma.

```

1      C      PROGRAMMA FREQUENZA
2      COMPLEX A,B,ZZ
3      DIMENSION A(60,60),B(60)
4      DIMENSION R(50),N1(50),N2(50)
5      DIMENSION C(50),NC1(50),NC2(50)
6      DIMENSION T(10),NT1(10),NT2(10)
7      DIMENSION ZL(20),NL1(20),NL2(20)
8      DIMENSION ZQ(20),NQ1(20),NQ2(20)
9      DIMENSION CT(20),NCT1(20),NCT2(20),NCT3(20),NCT4(20)
10     DIMENSION NN1(20),NN2(20),NN3(20),NN4(20)
11     DIMENSION ZZ(100),NZ1(100),NZ2(100),JU(10),BU(10)
12
13     C
14     C
15     C
16     READ(5,1)ND,NR,NL,NQ,NC,NT,NCT,NN
17     1 FORMAT(8I3)
18     WRITE(6,2)ND,NR,NL,NQ,NC,NT,NCT,NN
19     2 FORMAT(1H0,5X,'CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI=',I3/
20     *6X,'NUMERO RESISTORI=',I3/
21     *6X,'NUMERO INDUTTORI =',I3/
22     *6X,'NUMERO CONDENSATORI =',I3/
23     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE=',I3/
24     *6X,'NUMERO GENERATORI DI TENSIONE=',I3/
25     *6X,'NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.=',I3/
26     *6X,'NUMERO NULLORI=',I3//)
27     IF(NR)11,11,12
28     12 READ(5,3)(R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
29     3 FORMAT(E10.3,2I3)
30     WRITE(6,4)(L,R(L),N1(L),N2(L),L=1,NR)
31     4 FORMAT(1X,'RES.N.',I3,E12.3,2I4)
32     11 CONTINUE
33     IF(NL)23,23,24
34     24 READ(5,3)(ZL(L),NL1(L),NL2(L),L=1,NL)
35     WRITE(6,22)(L,ZL(L),NL1(L),NL2(L),L=1,NL)

```

(segue)

```

36      22 FORMAT(1X,'IND.N.',I3,E12.3,2I4)
37      23 CONTINUE
38      IF(NQ)25,25,26
39      26 READ(5,3)(ZQ(L),NQ1(L),NQ2(L),L=1,NQ)
40      WRITE(6,27)(L,ZQ(L),NQ1(L),NQ2(L),L=1,NQ)
41      27 FORMAT(1X,'COND.N.',I3,E12.3,2I4)
42      25 CONTINUE
43      IF(NC)13,13,14
44      14 READ(5,3)(C(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
45      WRITE(6,5)(L,C(L),NC1(L),NC2(L),L=1,NC)
46      5   FORMAT(1X,'G.CORR.N.',I3,E12.3,2I4)
47      13 CONTINUE
48      IF(NT)15,15,16
49      16 READ(5,3)(T(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
50      WRITE(6,6)(L,T(L),NT1(L),NT2(L),L=1,NT)
51      6   FORMAT(1X,'GEN.TENSIONE: N.',I3,E12.3,2I4)
52      15 CONTINUE
53      IF(NCT)17,17,18
54      18 READ(5,7)(CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
55      7   FORMAT(E10.3,4I3)
56      WRITE(6,8)(L,CT(L),NCT1(L),NCT2(L),NCT3(L),NCT4(L),L=1,NCT)
57      8   FORMAT(1X,'GEN.CONTR.TENS.N:',I3,E12.3,4I3)
58      17 CONTINUE
59      IF(NN)20,20,19
60      19 READ(5,9)(NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
61      9   FORMAT(4I3)
62      WRITE(6,10)(L,NN1(L),NN2(L),NN3(L),NN4(L),L=1,NN)
63      20 CONTINUE
64      10 FORMAT(1X,'NULLORE N:',I3,2X,4I3)
65      N=ND-1
66      NA=N+NT
67      NB=NA+NN
68      C
69      C
70      C   INGRESSO DATI RELATIVI ALLA RISPOSTA
71      READ(5,301)NU
72      301 FORMAT(10I3)
73      READ(5,301)(JU(L),L=1,NU)
74      READ(5,302)F1,F2,DF
75      302 FORMAT(3E10.3)
76      WRITE(6,305)F1,F2,DF
77      305 FORMAT(1H0,5X,'RISPOSTA IN FREQUENZA'/
78      *6X,'F.INIZIALE ='E8.3,' F.FINALE ='E8.3,' PASSO ='E8.3)
79      WRITE(6,307)ND,(JU(L),L=1,NU)
80      307 FORMAT(1H0,5X,'MODULO TENSIONI RISP. AL NODO',I4/
81      *6X,9HFREQUENZE,1X,'NODI:',10(I2,8X))
82      C
83      C
84      C   CALCOLO DELLE IMPEDENZE
85      C   RESISTORI
86      IF(NR)320,320,321
87      321 D0322K=1,NR
88      A1=R(K)
89      ZZ(K)=CMPLX(A1,0.)
90      NZ1(K)=N1(K)
91      322 NZ2(K)=N2(K)
92      320 CONTINUE
93      C
94      C   INDUTTORI E CONDENSATORI
95      PI2=4.*ACOS(0.)
96      NFR=1
97      F=F1
98      NZ=NR+NL+NQ
99      330 CONTINUE
100      OM=PI2*F
101      IF(NL)340,340,341
102      341 D0342K=1,NL

```

(segue)

```

103      K1=K+NR
104      A1=OM*ZL(K)
105      ZZ(K1)=CMPLX(0.,A1)
106      NZ1(K1)=NL1(K)
107      342 NZ2(K1)=NL2(K)
108      340 CONTINUE
109      IF(NQ)350,350,351
110      351 DO352K=1,NQ
111          K1=K+NR+NL
112          A1=OM*ZQ(K)
113          A1=-1./A1
114          ZZ(K1)=CMPLX(0.,A1)
115          NZ1(K1)=NQ1(K)
116      352 NZ2(K1)=NQ2(K)
117      350 CONTINUE
118      C
119      C      ANALISI
120      CALL NODIC(A,B,N,NA,NB,ND,ZZ,NZ1,NZ2,NZ,CT,NCT1,NCT2,NCT3,
121      *          NCT4,NCT,T,NT1,NT2,NT,C,NC1,NC2,NC,NN1,NN2,
122      *          NN3,NN4,NN)
123      C
124      C      STAMPA DEI RISULTATI A FREQUENZA F
125      DO380L=1,NU
126      J=JU(L)
127      A1=CABS(B(J))
128      380 BU(L)=A1
129      WRITE(6,381)NFR,F,(BU(L),L=1,NU)
130      381 FORMAT(1X,I3,E10.3,1X,10E10.3)
131      C
132      C      VERIFICA FINE CICLO
133      IF(F-F2)362,362,364
134      362 F=F+DF
135      NFR=NFR+1
136      IF(NFR-200)330,330,364
137      364 CONTINUE
138      C
139      STOP
140      END

```

APPENDICE V.C - Esempi di analisi in regime permanente.

Riportiamo di seguito alcuni esempi di applicazione dei metodi di analisi proposti nel presente capitolo.

Un primo gruppo di esempi riguarda l'applicazione contemporanea, nello stesso esercizio, sia dei metodi considerati in questo capitolo, sia di quelli sviluppati nel cap.III. Tale situazione si presenta usualmente quando viene variato lo stato elettrico di un circuito eccitato da un tempo molto distante da quello in cui interviene la variazione. In questi casi occorre determinare la situazione elettrica al momento della variazione con i metodi di analisi in regime permanente e, successivamente, applicare i metodi sviluppati nel cap.III.

Un secondo gruppo di esempi riguarda la determinazione della risposta in ampiezza utilizzando il programma di calcolo descritto nel § V.7, per quanto riguarda lo schema a blocchi, e nel § V.B, per quanto riguarda la lista in FORTRAN.

V.C.1 - Primo gruppo di esempi: permanente-transitorio.

Esempio V.C.1.

Nel circuito di fig.V.C.1, l'interruttore si apre all'istante $t=0$. Nell'ipotesi che il generatore di tensione indipendente sinusoidale agisca da un tempo sufficientemente lontano rispetto a $t=0$, in modo da poter supporre il circuito a regime nel momento dell'apertura dell'interruttore, determinare quanto vale l'energia immagazzinata nel condensatore di capacità C_1 all'istante $t=1$ sec.

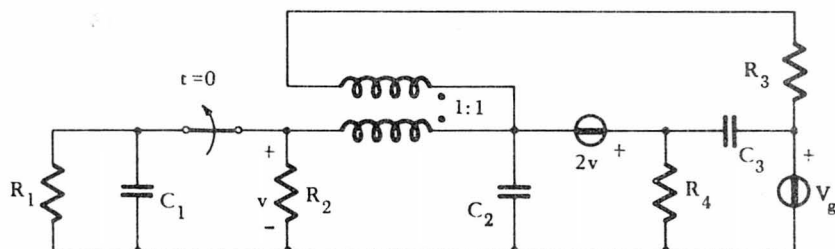


Fig.V.C.1 - Circuito considerato nell'esempio V.C.1. I valori dei componenti, espressi in Ω , F, V, sono:

$$R_1 = 2; R_3 = 1, C_1 = 0,5, V_g = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$R_2 = 2; R_4 = 3, C_2 = C_3 = 1$$

Il circuito da analizzare può essere considerato con buona approssimazione in regime permanente sinusoidale all'istante $t=0$, prima dell'apertura dell'interruttore. Occorre perciò analizzarlo con il metodo dei fasori. Tenendo conto che la pulsazione è $\omega = 2$ e che il fasore della tensione del generatore indipendente è

$$\mathbf{E} = 2 e^{-j\pi/6}$$

si ottiene il circuito trasformato nel dominio dei fasori mostrato in fig.V.C.2.

Analizzando tale circuito con il metodo dei nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 6, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\text{nodo 1: } (1 + 2j) \mathbf{E} - \mathbf{E}_5 - 2j \mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_g$$

$$\text{nodo 2: } \left(\frac{1}{3} + 2j\right) \mathbf{E}_2 - 2j \mathbf{E} = \mathbf{I}_x$$

$$\text{nodo 3: } 2j \mathbf{E}_3 = -\mathbf{I}_x - \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\text{nodo 4: } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j \right) E_4 = I_1$$

$$\text{nodo 5: } E_5 - E = -I_2$$

A causa della presenza del trasformatore ideale otteniamo le seguenti equazioni aggiuntive:

$$E_4 = E_5 ; \quad I_1 = I_2$$

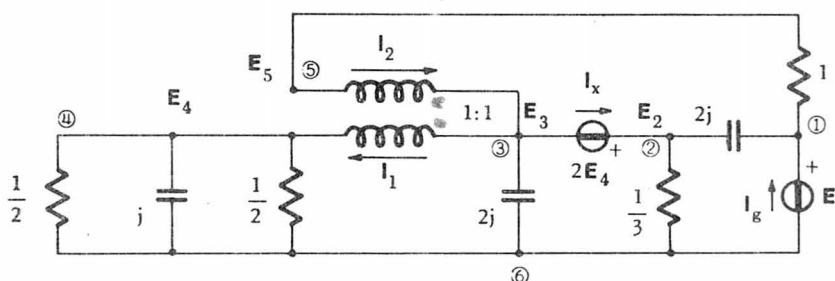


Fig.V.C.2 - Circuito trasformato nel dominio dei fasori a partire da quello di fig.V.C.1; accanto ai condensatori ed ai resistori è indicata la relativa ammettenza.

Per la presenza del generatore controllato otteniamo ancora:

$$E_2 - E_3 = 2E_4$$

Nel nostro caso non occorre analizzare completamente il circuito, ma è sufficiente calcolare la tensione E_4 ai capi del condensatore C_1 . Utilizzando le equazioni del trasformatore, insieme a quelle dei nodi 4 e 5, si ottiene:

$$(1+j) E_4 = I_1 \quad E_4 - E = -I_1$$

da cui si ha:

$$E_4 (2+j) = E$$

e quindi:

$$E_4 = \frac{E}{2+j} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j\left(\frac{\pi}{6} + \arctg \frac{1}{2}\right)} = 0,8944 e^{-j0,9872}$$

Quindi la tensione ai capi del condensatore C_1 all'istante $t=0$ vale:

$$v(0) = 0,8944 \cos(2t - 0,9872) \Big|_{t=0} = 0,4928$$

Dopo l'apertura dell'interruttore la tensione ai capi del condensatore decresce in quanto questo si scarica sul resistore R_1 . Per determinare l'andamento nel tempo della tensione, utilizziamo i risultati dell'esempio III.1.3, per cui, in base alla (III.1.12), si ha:

$$v_c(t) = v(0) e^{-t/R_1 C_1} = 0,4928 e^{-t} \quad (\text{volt})$$

Poiché l'energia immagazzinata nel condensatore vale:

$$\frac{1}{2} C_1 v_c^2 = \frac{1}{4} (0,4928)^2 e^{-2t} \quad (\text{Joule})$$

all'istante $t=1$ sec, si ha un'energia di $8,217 \cdot 10^{-3}$ Joule.

Esempio V.C.2.

Nel circuito di fig. V.C.3, le eccitazioni sinusoidali agiscono da un tempo molto distante da quello di apertura dell'interruttore, considerato come $t=0$. Determinare, se esiste, quel valore φ della fase di uno dei due generatori di corrente, per cui è nulla la tensione ai capi del condensatore all'istante $t=0$.

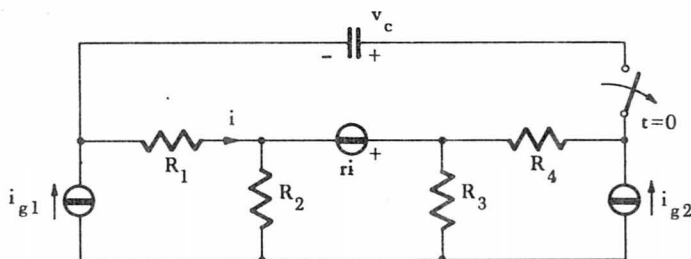


Fig. V.C.3 - Circuito considerato nell'esempio V.C.2. I valori dei componenti, espressi in A, Ω , F, sono:

$$\begin{aligned} i_{g1}(t) &= 2 \cos 3t; & i_{g2}(t) &= \cos(t + \varphi); \\ R_1 = R_2 &= 1; & R_3 = R_4 &= 2; & r &= 3; & C &= 1. \end{aligned}$$

In base all'ipotesi di applicazione dell'eccitazione da tempo molto lontano rispetto a $t=0$, possiamo analizzare il circuito per $t < 0$ con il metodo dei fasori. Per determinare la tensione ai capi del condensatore, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, essendo i generatori di pulsazione diversa.

Nel caso in cui è presente solo il generatore di pulsazione 3, il circuito diviene, nel dominio dei fasori, quello di fig.V.C.4. Applicando il metodo delle maglie, secondo le indicazioni di fig.V.C.4, si ha:

$$2 I_1 - I_2 - I_3 = V_g$$

$$\left(3 + \frac{1}{j3}\right) I_2 - I_1 + 3 i = 0$$

$$3 I_3 - I_1 - 3 i = 0$$

a cui occorre aggiungere le equazioni:

$$I_1 = 2 ; \quad i = I_1 - I_2 = 2 - I_2$$

Dalla seconda equazione del sistema si ha:

$$\left(3 + \frac{1}{j3} - 3\right) I_2 + 2 I_1 = 0$$

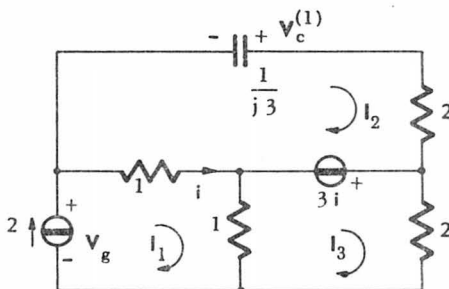
e quindi:

$$I_2 = -6j I_1 = -j 12$$

La tensione ai capi del condensatore vale perciò:

$$V_c^{(1)} = -\frac{1}{j3} I_2 = 4$$

Fig.V.C.4 - Circuito risultante da quello di fig.V.C.3 quando: 1) viene disattivato il generatore di pulsazione $\omega = 1$; 2) viene considerato nel dominio dei fasori per $\omega = 3$.



e quindi, nel dominio del tempo:

$$v_c^{(1)}(t) = 4 \cos 3 t$$

Nel caso in cui agisca l'altro generatore, il circuito diviene, nel relativo dominio dei fasori ($\omega = 1$), quello mostrato in fig.V.C.5. Scrivendo le equazioni alle maglie si ha:

$$3 I_1 - 2 I_3 + 3 i = 0$$

$$(3 - j) I_2 - 2 I_3 - 3 i = 0$$

$$4 I_3 - 2 I_1 - 2 I_2 = V_g$$

a cui occorre aggiungere le equazioni:

$$I_3 = e^{j\varphi}; \quad i = I_2$$

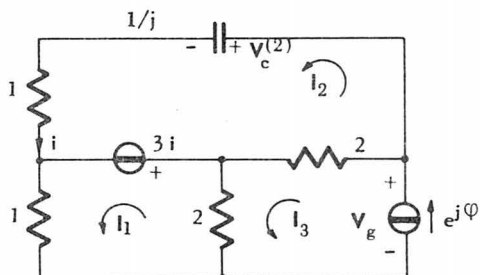
Dalla seconda equazione del sistema si ha:

$$(3 - j - 3) I_2 - 2 e^{j\varphi} = 0$$

e quindi si ha:

$$I_2 = 2j e^{j\varphi}$$

Fig.V.C.5 - Circuito risultante da quello di fig.V.C.3, quando: 1) viene disattivato il generatore di pulsazione $\omega = 3$; 2) viene considerato nel dominio dei fasori per $\omega = 1$.



La tensione ai capi del condensatore vale pertanto:

$$V_c^{(2)} = \frac{1}{j} 2j e^{j\varphi} = 2 e^{j\varphi}$$

e quindi, nel dominio del tempo:

$$v_c^{(2)}(t) = 2 \cos(t + \varphi)$$

L'andamento nel tempo della tensione v_c è perciò:

$$v_c(t) = v_c^{(1)}(t) + v_c^{(2)}(t) = 4 \cos 3t + 2 \cos(t + \varphi)$$

e, per $t=0$, vale:

$$v_c(0) = 4 + 2 \cos \varphi$$

Dalla espressione precedente si vede che non esiste alcun valore di φ per cui $v_c(0)$ è nulla.

V.C.2 - Secondo gruppo di esempi: determinazione della risposta di ampiezza.

Nel presente paragrafo riportiamo alcuni esempi di determinazione della risposta di ampiezza, utilizzando il programma di calcolo descritto nel § V.7; per chiarimenti riguardanti i formati con cui debbono essere presentati i dati di ingresso, si rimanda all'appendice V.B, ove è descritta la lista in FORTRAN del programma stesso.

Esempio V.C.3.

Si consideri il filtro passa-basso indicato in fig.V.C.6. Vogliamo determinare lo andamento della risposta in ampiezza per vari valori della frequenza, sia in banda passante, sia in banda opaca.

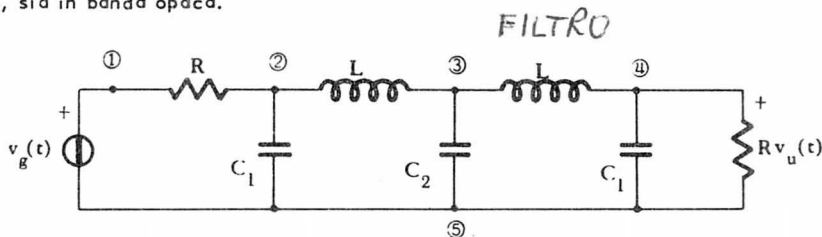


Fig.V.C.6 - Schema del filtro passa-basso normalizzato considerato nell'esempio V.C.3. I valori dei componenti sono:

$R = 1$, $C_1 = 0,1878$, $C_2 = 0,3070$, $L = 0,1942$,

$v_g(t) = \cos(2\pi ft)$, (Ω , F, H, V).

Il filtro considerato è lo stesso preso in esame nel § III.D.1, riguardante l'analisi nel dominio del tempo; qui è necessario ricordare che si tratta di un filtro normalizzato in frequenza, per cui la frequenza di transizione fra la banda passante e la banda opaca è pari al valore normalizzato unitario. Pertanto sarà necessario scegliere un campo di frequenze in cui siano presenti sia valori inferiori all'unità (banda passante), sia valori superiori ad essa (banda opaca). Un campo di questo tipo si può ottenere scegliendo:

$$R = 600 \, \Omega \quad C_1 = 2,974 \cdot 10^{-8} \, F \quad C_2 = 4,864 \cdot 10^{-8} \, F$$

$$L = 11,071 \, \mu H$$

- 1) frequenza iniziale = 0,05 (F1)
- 2) frequenza finale = 5 (F2)
- 3) passo in frequenza = 0,05 (DF)

Qui di seguito sono riportate le schede di ingresso riguardanti il circuito in esame, tenendo presente che la tensione di eccitazione è stata scelta di ampiezza unitaria e che, in uscita, è stata richiesta la stampa dei moduli della tensione di ingresso (nodo 1) e della tensione di uscita (nodo 4).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	5		2			2			3			0			1			0			0									
1	.	0	0	0		E	0	0				1			2															
1	.	0	0	0		E	0	0				4			5															
1	.	9	4	2		E	-	1				2			3															
1	.	9	4	2		E	-	1				3			4															
1	.	8	7	8		E	-	1				2			5															
3	.	0	7	0		E	-	1				3			5															
1	.	8	7	8		E	-	1				4			5															
1	.	0	0	0		E	0	0				1			5															
2																														
1			4																											
0	.	5	0	0		E	-	1				0	.	5	0	0	E	+	1				0	.	5	0	0	E	-	1

Successivamente sono riportati i dati di uscita del calcolatore. Si può vedere che, mentre il modulo della tensione del nodo 1 risulta pari all'unità (rispetto alla tensione del nodo di riferimento), sul nodo 4 si ottiene una tensione che conserva in modulo valori molto prossimi a 0,5 fino alla frequenza normalizzata unitaria (banda passante), mentre tende a zero per valori di frequenza maggiori di uno (banda opaca).

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 5
NUMERO RESISTORI= 2
NUMERO INDUTTORI = 2
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 0

```

(segue)

```

RES.N. 1 .100+01 1 2
RES.N. 2 .100+01 4 5
IND.N. 1 .194+00 2 3
IND.N. 2 .194+00 3 4
COND.N. 1 .188+00 2 5
COND.N. 2 .307+00 3 5
COND.N. 3 .188+00 4 5
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+01 1 5

```

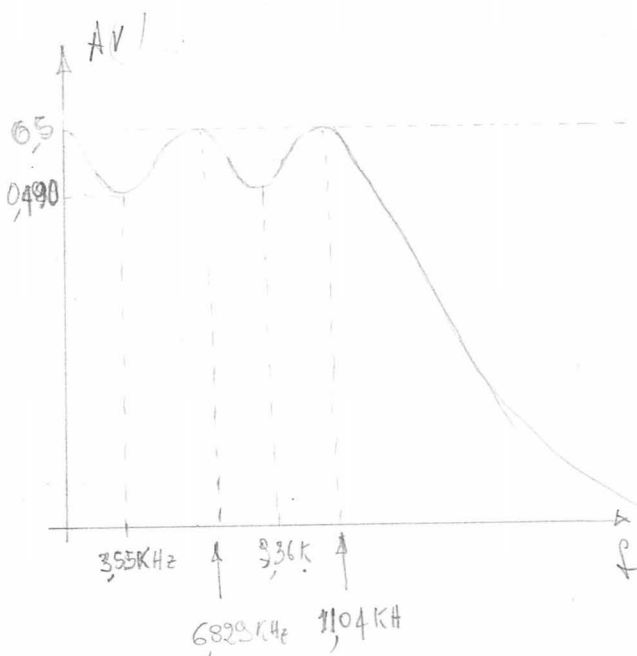
RISPOSTA IN FREQUENZA

E.INIZIALE = .500-01, F.FINALE = .500+01, PASSO = .500-01

MODULO TENSIONI RISP. AL NODO 5

FREQUENZE NODI: 1

FREQUENZE NODI: 1	MODULO TENSIONI RISP. AL NODO 5
1 .500-01	.499+00
2 .100+00	.498+00
3 .150+00	.496+00
4 .200+00	.494+00
5 .250+00	.492+00
6 .300+00	.490+00
7 .350+00	.490+00
8 .400+00	.491+00
9 .450+00	.492+00
10 .500+00	.495+00
11 .550+00	.497+00
12 .600+00	.499+00
13 .650+00	.500+00
14 .700+00	.499+00
15 .750+00	.497+00
16 .800+00	.494+00
17 .850+00	.491+00
18 .900+00	.490+00
19 .950+00	.492+00
20 .100+01	.497+00
21 .105+01	.500+00
22 .110+01	.491+00
23 .115+01	.454+00
24 .120+01	.385+00
25 .125+01	.302+00
26 .130+01	.229+00
27 .135+01	.172+00
28 .140+01	.130+00
29 .145+01	.100+00
30 .150+01	.783-01
31 .155+01	.620-01
32 .160+01	.498-01
33 .165+01	.405-01
34 .170+01	.332-01
35 .175+01	.275-01
36 .180+01	.230-01
37 .185+01	.194-01
38 .190+01	.164-01
39 .195+01	.140-01
40 .200+01	.120-01
41 .205+01	.104-01
42 .210+01	.902-02
43 .215+01	.786-02
44 .220+01	.688-02
45 .225+01	.604-02
46 .230+01	.533-02
47 .235+01	.472-02



Esempio V.C.4.

Si consideri il circuito mostrato in fig.V.C.7; tale circuito è relativo ad un pre-amplificatore per segnali in banda audio, aggiustabile su due curve di equalizzazione per mezzo di un commutatore⁽¹⁾.

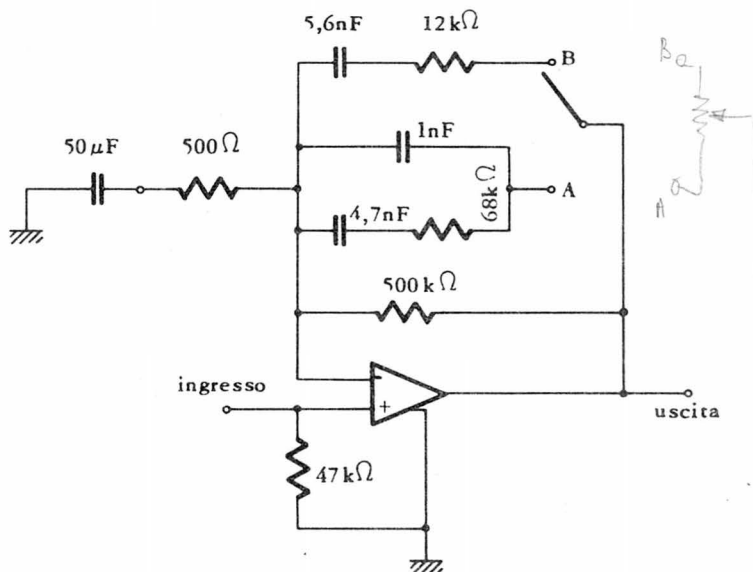


Fig.V.C.7 - Circuito considerato nell'esempio V.C.4.

Si vuole ottenere la risposta in ampiezza del circuito nel campo di frequenze da 40 fino a 3000 Hz, nei due casi in cui il commutatore si trovi nella posizione A e nella posizione B. Schematizzando l'amplificatore operazionale con un nullore, si ottengono nei due casi suddetti i circuiti indicati nelle figg.V.C.8a e b.

Di seguito si riporta nell'ordine:

- a) le schede di ingresso nel caso A e le uscite relative;
- b) le schede di ingresso nel caso B e le uscite relative.

(1) - Il circuito è stato preso dal testo J. G. Graeme, « Applications of operational amplifiers; third generation techniques », Mc Graw-Hill, 1975, pag.215; si rimanda a tale testo per la descrizione delle caratteristiche applicative del circuito.

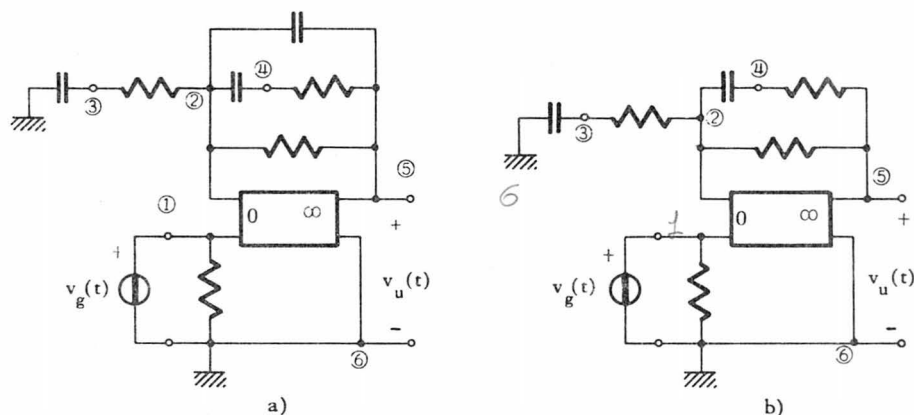


Fig.V.C.8 - Schema elettrico del circuito di fig.V.C.7, nel caso in cui l'interuttore è nella posizione A (fig. a) e nella posizione B (fig. b). I valori dei componenti sono deducibili da fig.V.C.7, mentre l'amplificatore operazionale è stato schematizzato con un nullore.

- Schede di ingresso nel caso 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
			6			4			0				3			0			1			0				1						
			0			4	7	0	E +	5			1			6																
			0			5	0	0	E +	3			3			2																
			0			5	0	0	E +	6			2			5																
			0			6	8	0	E +	5			5			4																
			0			1	0	0	E -	8			2			5																
			0			4	7	0	E -	8			2			4																
			0			5	0	0	E -	4			3			6																
			1			0	0	0	E 0	0			1			6																
			1				2						5			6																
			2																													
			1				5																									
			0			4	0	0	F -	2			0			3	0	0	E ÷	4				0			1	0	0	E +	3	

- Uscita del calcolatore nel caso A.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 6
NUMERO RESISTORI= 4
NUMERO INDUTTORI = 0
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 1

RES.N.  1      .470+05   1   6
RES.N.  2      .500+03   3   2
RES.N.  3      .500+06   2   5
RES.N.  4      .680+05   5   4
COND.N.  1      .100-08   2   5
COND.N.  2      .470-08   2   4
COND.N.  3      .500-04   3   6
GEN.TENSIONE: N.  1      .100+01   1   6
NULLORE N:  1      1   2   5   6

RISPOSTA IN FREQUENZA
F.INIZIALE = .400+02, F.FINALE = .300+04, PASSO = .100+03

MODULO TENSIONI RISP. AL NODO  6
FREQUENZE NODI: 1      5
1  .400+02   .100+01   .781+03
2  .140+03   .100+01   .356+03
3  .240+03   .100+01   .231+03
4  .340+03   .100+01   .179+03
5  .440+03   .100+01   .153+03
6  .540+03   .100+01   .137+03
7  .640+03   .100+01   .127+03
8  .740+03   .100+01   .121+03
9  .840+03   .100+01   .116+03
10 .940+03   .100+01   .112+03
11 .104+04   .100+01   .108+03
12 .114+04   .100+01   .106+03
13 .124+04   .100+01   .103+03
14 .134+04   .100+01   .101+03
15 .144+04   .100+01   .991+02
16 .154+04   .100+01   .972+02
17 .164+04   .100+01   .954+02
18 .174+04   .100+01   .937+02
19 .184+04   .100+01   .920+02
20 .194+04   .100+01   .904+02
21 .204+04   .100+01   .889+02
22 .214+04   .100+01   .873+02
23 .224+04   .100+01   .858+02
24 .234+04   .100+01   .843+02
25 .244+04   .100+01   .829+02
26 .254+04   .100+01   .815+02
27 .264+04   .100+01   .801+02
28 .274+04   .100+01   .787+02
29 .284+04   .100+01   .774+02
30 .294+04   .100+01   .761+02
31 .304+04   .100+01   .748+02

```

- Schede di ingresso nel caso B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
	6			4				0			2			0		1			0			1									
	0	.	4	7	0	E	+	5			1			6																	
	0	.	5	0	0	E	+	3			3			2																	
	0	.	5	0	0	E	+	6			2			5																	
	0	.	1	2	0	E	+	5			5			4																	
	0	.	5	6	0	E	-	8			2			4																	
	0	.	5	0	0	E	-	4			3			6																	
	1	.	0	0	0	E	0	0			1			6																	
	1			2				5			6																				
	2																														
	1			5																											
	0	.	4	0	0	E	+	2			0	.	3	0	0	E	+	4			0	.	1	0	0	E	+	3			

- Uscita del calcolatore nel caso B.

CIRCUITO ASSEGNATO: NUMERO NODI= 6
 NUMERO RESISTORI= 4
 NUMERO INDUTTORI = 0
 NUMERO CONDENSATORI = 2
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
 NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
 NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
 NUMERO NULLORI= 1

RES.N.	1	.470+05	1	6
RES.N.	2	.500+03	3	2
RES.N.	3	.500+06	2	5
RES.N.	4	.120+05	5	4
COND.N.	1	.560-08	2	4
COND.N.	2	.500-04	3	6
GEN.TENSIONE: N.	1	.100+01	1	6
NULLORE N:	1	1	2	5

RISPOSTA IN FREQUENZA
 F.INIZIALE = .400+02, F.FINALE = .300+04, PASSO = .100+03

MODULO TENSIONI RISP. AL NODO			
FREQUENZE NODI: 1 5			
1	.400+02	.100+01	.802+03
2	.140+03	.100+01	.369+03
3	.240+03	.100+01	.227+03

(segue)

4	.340+03	.100+01	.163+03
5	.440+03	.100+01	.128+03
6	.540+03	.100+01	.105+03
7	.640+03	.100+01	.899+02
8	.740+03	.100+01	.787+02
9	.840+03	.100+01	.704+02
10	.940+03	.100+01	.639+02
11	.104+04	.100+01	.587+02
12	.114+04	.100+01	.545+02
13	.124+04	.100+01	.510+02
14	.134+04	.100+01	.481+02
15	.144+04	.100+01	.456+02
16	.154+04	.100+01	.436+02
17	.164+04	.100+01	.419+02
18	.174+04	.100+01	.402+02
19	.184+04	.100+01	.389+02
20	.194+04	.100+01	.376+02
21	.204+04	.100+01	.366+02
22	.214+04	.100+01	.356+02
23	.224+04	.100+01	.348+02
24	.234+04	.100+01	.341+02
25	.244+04	.100+01	.334+02
26	.254+04	.100+01	.328+02
27	.264+04	.100+01	.322+02
28	.274+04	.100+01	.318+02
29	.284+04	.100+01	.313+02
30	.294+04	.100+01	.309+02
31	.304+04	.100+01	.305+02

Esempio V.C.5.

Si consideri il circuito mostrato in fig.V.C.9; tale circuito è relativo ad un equalizzatore per il controllo dei toni bassi ed alti di un sistema audio ad alta fedeltà⁽¹⁾. Il circuito contiene due potenziometri per la regolazione indipendente dei toni bassi ed alti. Si vuole determinare la risposta in ampiezza in corrispondenza a varie posizioni di tali potenziometri, avendo schematizzato l'amplificatore operazionale con un nullo-re.

$$\text{Caso a: } R_1 = 50 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 50 \text{ k}\Omega, \quad R'_1 = 5 \text{ k}\Omega, \quad R'_2 = 5 \text{ k}\Omega$$

I potenziometri sono in posizione centrale. La risposta del dispositivo in tale caso è uniforme al variare della frequenza. Ciò si rileva chiaramente dall'uscita del calcolatore.

(1) - Il circuito è stato preso dal testo J.G. GRAEME, op. cit. pag.216; si rimanda a tale testo per la descrizione delle caratteristiche applicative del circuito.

- Dati di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

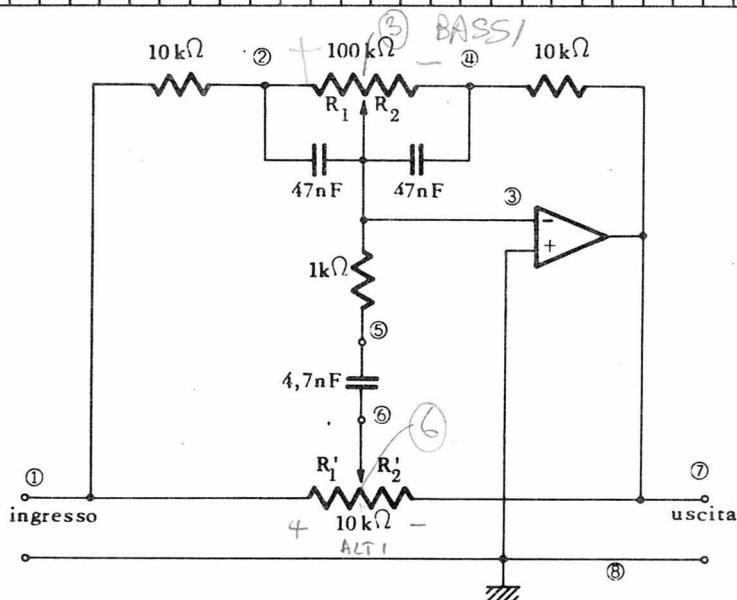


Fig.V.C.9 - Circuito considerato nell'esempio V.C.5.

- Uscita del calcolatore.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 8
NUMERO RESISTORI= 7
NUMERO INDUTTORI = 0
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 1

RES.N. 1 .100+05 1 2
RES.N. 2 .100+05 4 7
RES.N. 3 .100+04 3 5
RES.N. 4 .500+04 6 1
RES.N. 5 .500+04 6 7
RES.N. 6 .500+05 3 2
RES.N. 7 .500+05 3 4
COND.N. 1 .470-08 5 6
COND.N. 2 .470-07 3 2
COND.N. 3 .470-07 3 4
GEN.TENSIONE: N. 1 .100+01 1 8
NULLORE N: 1 3 8 7 8

RISPOSTA IN FREQUENZA
F.INIZIALE = .300+02, F.FINALE = .100+05, PASSO = .500+03

MODULO TENSIONI RISP. AL NODO 8
FREQUENZE NODI: 1 7
1 .300+02 .100+01 .100+01
2 .530+03 .100+01 .100+01
3 .103+04 .100+01 .100+01
4 .153+04 .100+01 .100+01
5 .203+04 .100+01 .100+01
6 .253+04 .100+01 .100+01
7 .303+04 .100+01 .100+01
8 .353+04 .100+01 .100+01
9 .403+04 .100+01 .100+01
10 .453+04 .100+01 .100+01
11 .503+04 .100+01 .100+01
12 .553+04 .100+01 .100+01
13 .603+04 .100+01 .100+01
14 .653+04 .100+01 .100+01
15 .703+04 .100+01 .100+01
16 .753+04 .100+01 .100+01
17 .803+04 .100+01 .100+01
18 .853+04 .100+01 .100+01
19 .903+04 .100+01 .100+01
20 .953+04 .100+01 .100+01
21 .100+05 .100+01 .100+01

```

Caso b: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 99k\Omega$, $R'_1 = 100\Omega$, $R'_2 = 9,9k\Omega$

I potenziometri sono disposti in modo da esaltare sia i toni bassi che quelli alti. Ciò si rileva chiaramente dall'uscita del calcolatore.

- Dati di ingresso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
		8				7			0			3			0			1			0			1							
		0	.	1	0	0	E + 5					1			2																
		0	.	1	0	0	E + 5					4			7																
		0	.	1	0	0	E + 4					3			5																
		0	.	1	0	0	E + 3					6			1																
		0	.	9	9	0	E + 4					6			7																
		0	.	1	0	0	E + 4					3			2																
		0	.	9	9	0	E + 5					3			4																
		0	.	4	7	0	E - 8					5			6																
		0	.	4	7	0	E - 7					3			2																
		0	.	4	7	0	E - 7					3			4																
		1	.	0	0	0	E 0 0					1			8																
		3			8			7			8																				
		2																													
		1			7																										
		0	.	3	0	0	E + 2					0	.	1	0	0	E + 5				0	.	5	0	0	E + 3					

- Uscita del calcolatore.

```

CIRCUITO ASSEGNATO:NUMERO NODI= 8
NUMERO RESISTORI= 7
NUMERO INDUTTORI = 0
NUMERO CONDENSATORI = 3
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE= 0
NUMERO GENERATORI DI TENSIONE= 1
NUMERO GENERATORI DI CORRENTE CONTR. IN TENS.= 0
NUMERO NULLORI= 1

```

(segue)

RES.N.	1	.100+05	1	2	
RES.N.	2	.100+05	4	7	
RES.N.	3	.100+04	3	5	
RES.N.	4	.100+03	6	1	
RES.N.	5	.990+04	6	7	
RES.N.	6	.100+04	3	2	
RES.N.	7	.990+05	3	4	
COND.N.	1	.470-08	5	6	
COND.N.	2	.470-07	3	2	
COND.N.	3	.470-07	3	4	
GEN.TENSIONE: N.	1	.100+01	1	8	
NULLORE N:	1	3	8	7	8

RISPOSTA IN FREQUENZA

F.INIZIALE = .300+02, F.FINALE = .100+05, PASSO = .500+03

MODULO TENSIONI RISP. AL NODO 8

FREQUENZE NODI: 1 7

1	.300+02	.100+01	.747+01
2	.530+03	.100+01	.113+01
3	.103+04	.100+01	.104+01
4	.153+04	.100+01	.109+01
5	.203+04	.100+01	.117+01
6	.253+04	.100+01	.128+01
7	.303+04	.100+01	.139+01
8	.353+04	.100+01	.151+01
9	.403+04	.100+01	.164+01
10	.453+04	.100+01	.177+01
11	.503+04	.100+01	.190+01
12	.553+04	.100+01	.204+01
13	.603+04	.100+01	.217+01
14	.653+04	.100+01	.230+01
15	.703+04	.942+00	.244+01
16	.753+04	.100+01	.257+01
17	.803+04	.978+00	.275+01
18	.853+04	.100+01	.284+01
19	.903+04	.100+01	.297+01
20	.953+04	.999+00	.308+01
21	.100+05	.100+01	.323+01

APPENDICE V.D - Riferimenti bibliografici.

L'analisi in regime permanente è il nucleo fondamentale di qualsiasi testo riguardante l'analisi dei circuiti lineari. Il metodo dei fasori, che ne costituisce la base, ha rappresentato sin dalla sua introduzione, dovuta a Steinmetz (A.E. Kennelly, C.P. Steinmetz, Trans. Amer. Eng., vol. 10, 1893), lo strumento più caratteristico di coloro che si sono occupati dell'analisi dei circuiti.

È importante sottolineare che hanno rilievo in connessione con questo argomento tutti i metodi e gli algoritmi che portino ad una ridu-

zione del numero di operazioni richieste per il calcolo della trasformata di Fourier. Particolarmente importante ed utile a questo riguardo è la F.F.T. (fast Fourier transform). Per dettagli sulla lista e sull'applicazione di tale algoritmo si rimanda a: M.Decina, F.Riciniello, A.Roveri, «Esercizi di sistemi digitali», Ed. Siderea, 1976, cap.V.

*

INDICE

INDICE

Pag.

Premessa

CAPITOLO I: Introduzione ai circuiti a costanti concentrate di tipo elettrico

I. 1 - Grandezze fisiche considerate	7
I. 2 - Il circuito elettrico	8
I. 3 - Le leggi di Kirchhoff	9
1 - Prima legge di Kirchhoff (legge delle correnti)	10
2 - Seconda legge di Kirchhoff (legge delle tensioni)	11
I. 4 - Elementi a più di due terminali. Definizione di porta	11
I. 5 - Proprietà generali dei componenti e dei circuiti	13
1 - Linearità	13
2 - Permanenza	14
3 - Reciprocità	14
4 - Passività	15
5 - Causalità	16
I. 6 - Relazioni costitutive degli elementi bipolari lineari e permanenti	17
1 - Resistore	17
2 - Condensatore	18
3 - Induttore	20
4 - Il generatore indipendente di tensione	21
5 - Il generatore indipendente di corrente	22
6 - Corto-circuito e circuito aperto	22
7 - Incongruenze associate agli elementi ideali e circuiti equivalenti dei bipoli reali	23
I. 7 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte attivi lineari e permanenti	25
1 - Generatori controllati	26
2 - Convertitori d'impedenza negativa	28
3 - Invertitori d'impedenza negativa	30
4 - Nullore	31
I. 8 - Relazioni costitutive degli elementi ideali a due porte passivi lineari e permanenti	35
1 - Induttori mutuamente accoppiati e trasformatore ideale	35
2 - Giratore	40
3 - Trasformatore ideale a più di due porte	42
I. 9 - Circuiti equivalenti a costanti concentrate lineari e permanenti dei componenti reali	44
1 - Approccio esterno alla determinazione del circuito equivalente del BJT	46

	Pag.
2 - Approccio fisico alla determinazione del circuito equivalente: il circuito a π -ibrido o di Giacoletto	49
3 - Paradossi legati all'uso di elementi ideali	52
I.10 - Grafo di un circuito e sue proprietà topologiche	52
1 - Nozioni topologiche fondamentali	54
2 - Albero e co-albero	56
3 - Conseguenze topologiche delle leggi di Kirchhoff: principio della conservazione della potenza e teorema di Tellegen	62
4 - Circuiti non connessi	64
I.11 - Rappresentazione di un circuito sul calcolatore	65
I.12 - Riferimenti bibliografici	69
 CAPITOLO II: Analisi di circuiti senza memoria in presenza di eccitazioni costanti nel tempo	
II. 1 - Il problema dell'analisi	70
II. 2 - Analisi su base maglie di circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti	71
1 - Caso in cui siano presenti generatori indipendenti solo di tensione	71
2 - Correnti fittizie di maglia e loro uso nell'analisi su base maglie dei circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di tensione	75
3 - Analisi su base maglie in presenza di generatori indipendenti di corrente	80
4 - Metodo misto di analisi su base maglie	81
5 - Metodo diretto di analisi su base maglie	89
II. 3 - Analisi su base tagli di circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti	94
1 - Caso in cui siano presenti generatori indipendenti solo di corrente	94
2 - Espressioni esplicite delle equazioni risolventi nel metodo di analisi su base tagli, nel caso di circuiti contenenti resistori e generatori di corrente	99
3 - Analisi su base tagli in presenza di generatori indipendenti di tensione	103
II. 4 - Caso limite del metodo dei tagli: metodo dei nodi	115
1 - Il circuito aumentato	115
2 - Il metodo dei nodi	118
3 - Analisi su base nodi in presenza di generatori indipendenti di tensione	122
II. 5 - Estensione del metodo delle maglie e del metodo dei nodi all'analisi dei circuiti contenenti generatori controllati	127
1 - Introduzione	127
2 - Estensione del metodo delle maglie	128
3 - Estensione del metodo dei nodi	132

Pag.

II. 6 - Estensione del metodo dei nodi all'analisi dei circuiti contenenti nullori	136
1 - Introduzione	136
2 - Estensione del metodo dei nodi ai circuiti contenenti nullori	138
II. 7 - Analisi automatica di un circuito elettrico senza memoria: programma NODI	140
1 - Generalità	140
2 - Analisi automatica dei circuiti senza memoria con il metodo dei nodi	142
APPENDICI AL CAPITOLO II	
II.A - Introduzione alla soluzione dei sistemi di equazioni lineari	154
1 - Descrizione dello schema a blocchi del metodo di eliminazione di Gauss	154
2 - Inconvenienti connessi con il metodo di eliminazione di Gauss	157
II.B - Programma NODI	158
1 - Dati di ingresso	159
2 - Dati di uscita	160
3 - Lista del programma	161
II.C - Esempi	165
1 - Esempi del primo gruppo	165
2 - Esempi del secondo gruppo	177
II.D - Bibliografia	194
CAPITOLO III - Analisi dei circuiti con memoria	
III. 1 - La presenza della variabile tempo nell'analisi dei circuiti lineari e permanenti	197
1 - Esempi del primo ordine	204
2 - Esempi del secondo ordine	211
III. 2 - Andamenti tipici delle grandezze impresse nei circuiti con memoria	223
1 - Funzione gradino unitario	224
2 - Funzione impulso unitario	227
3 - Funzioni sinusoidali	232
III. 3 - Applicazione della trasformazione di Laplace all'analisi dei circuiti con memoria	234
1 - Introduzione	234
2 - Trasformazioni delle relazioni costitutive dei componenti e loro circuiti equivalenti nel dominio di Laplace	240
3 - Trasformazione delle leggi di Kirchhoff nel dominio della trasformata di Laplace	246

	<i>Pag.</i>
III. 4 - Analisi nel dominio di Laplace di un circuito lineare e permanente	248
III. 5 - Impiego dei metodi alle differenze finite per l'analisi dei circuiti	260
1 - Algoritmi alle differenze finite e relativi metodi di analisi	262
2 - Valutazione degli errori connessi con i procedimenti di analisi basati sui metodi alle differenze finite	266
III. 6 - Analisi automatica dei circuiti con memoria con il metodo alle differenze finite	269
 APPENDICI AL CAPITOLO III	
III.A - Cenni alla trasformazione ed antitrasformazione di Laplace	283
1 - Ulteriore proprietà della trasformazione di Laplace	284
2 - Calcolo delle trasformate di Laplace delle funzioni più comuni nei circuiti a costanti concentrate	286
3 - Trasformazione inversa di Laplace	288
4 - Sviluppo in frazioni parziali	289
5 - Antitrasformazione delle funzioni elementari facenti parte dello sviluppo in frazioni parziali	296
III.B - Programma TEMPO	306
1 - Dati di ingresso	306
2 - Dati di uscita	309
3 - Lista del programma	310
III.C - Esempi di applicazione del metodo della trasformata di Laplace	313
1 - Esempi riguardanti un filtro	329
2 - Esempi riguardanti un amplificatore video	340
III.D - Esempi di applicazione del metodo alle differenze finite	328
III.E - Riferimenti bibliografici	348
 CAPITOLO IV: Funzioni di rete	
IV. 1 - Eccitazione e risposta di un circuito	350
1 - Caso di una sola eccitazione	350
2 - Caso di più eccitazioni	354
IV. 2 - Classificazione delle funzioni di rete	357
IV. 3 - La risposta impulsiva	359
IV. 4 - Proprietà delle funzioni di rete	365
1 - Proprietà derivanti dal carattere «costanti concentrate»	365
2 - Proprietà derivanti dalla stabilità	367
IV. 5 - Suddivisione della risposta di un circuito in parti significative	379

APPENDICE AL CAPITOLO IV

IV.A - Proprietà delle funzioni di rete conseguenti dalla struttura del circuito	383
1 - Proprietà derivanti dalla natura dei componenti	383
2 - Proprietà derivanti dalla topologia del circuito	384

CAPITOLO V - Analisi in regime permanente

V. 1 - Suddivisione della risposta di un circuito nella parte transitoria e nella parte permanente	387
1 - Definizione di risposta transitoria e permanente	387
2 - Limiti di validità della suddivisione della risposta di un circuito nelle parti transitoria e permanente	391
V. 2 - Derivazione del metodo dei fasori da quello della trasformazione di Laplace	396
1 - Fasori associati alle funzioni sinusoidali	396
2 - Legame fra il fasore dell'eccitazione ed il fasore della risposta in regime permanente	398
V. 3 - Descrizione del metodo dei fasori	401
V. 4 - Metodo grafico dei fasori	408
1 - Interpretazione grafica del legame fra le grandezze nel tempo e dei fasori	408
2 - Interpretazione grafica dei legami fra i fasori delle grandezze elettriche relative ai simboli componenti elementari	410
3 - Interpretazione grafica delle leggi di Kirchhoff nel piano dei fasori	411
4 - Primo esempio tipico di applicazione dei metodi grafici: i sistemi trifase	415
5 - Secondo esempio tipico di applicazione del metodo grafico: il circuito a scala	418
V. 5 - Potenza ed energia permanente sinusoidale	421
1 - Espressione della potenza istantanea in regime permanente	421
2 - Potenza attiva	423
3 - Potenza complessa e potenza reattiva	425
4 - Conservazione della potenza complessa	430
5 - Espressione esplicita della potenza attiva e reattiva assorbita dai componenti di un circuito	435
6 - Bilancio energetico di un circuito	440
V. 6 - Regime permanente in presenza di grandezze elettriche di tipo non sinusoidale	446
1 - Proprietà della potenza attiva in regime permanente non sinusoidale	450
2 - Sviluppo in componenti sinusoidali di un'eccitazione periodica	455
3 - Sviluppo in componenti sinusoidali di un'eccitazione non periodica. Analisi nel dominio della frequenza	461

4 - Risposta in frequenza di un circuito	466
V. 7 - Analisi automatica in regime permanente sinusoidale	466
V. 8 - Normalizzazione in livello ed in frequenza	470
1 - Cambiamento di scala della frequenza	471
2 - Cambiamento di scala delle impedenze	472
V. 9 - Caratterizzazione nel dominio della frequenza di alcuni circuiti digitali	477
1 - Circuito risonante parallelo	477
2 - Circuito risonante serie	480
3 - Considerazioni fisiche ed energetiche sulla risonanza	481
4 - Legame tra coefficiente di risonanza ed i coefficienti di merito dell'induttanza e del condensatore	485
 APPENDICI AL CAPITOLO V	
V.A - Sistemi trifase tipici	487
1 - Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati	487
2 - Sistemi trifase non simmetrici e non equilibrati	492
V.B - Programma frequenza	496
1 - Dati di ingresso	497
2 - Dati di uscita	499
3 - Lista del programma	499
V.C - Esempi di analisi in regime permanente	501
1 - Primo gruppo di esempio permanente-transitorio	502
2 - Secondo gruppo di esempi: determinazione della risposta di ampiezza	507
V.D - Riferimenti bibliografici	518

*

FINITO DI STAMPARE
Gennaio 1979