

GIUSEPPE MARTINELLI

MARIO SALERNO

FONDAMENTI DI ELETTROTECNICA

**CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE
LINEARI E PERMANENTI**

Volume II

Edizioni **SIDERE A**
Scientifiche



GIUSEPPE MARTINELLI

MARIO SALERNO

CATTEDRA DI ELETTROTECNICA (ELETTRONICI) - ISTITUTO DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'UNIVERSITÀ DI ROMA.

FONDAMENTI DI ELETTROTECNICA

**CIRCUITI A COSTANTI CONCENTRATE
LINEARI E PERMANENTI**

Volume II

Edizioni Scientifiche SIDEREA



tale condizione in modo automatico; tuttavia, in altri casi, che vedremo successivamente nei § VI.8 e VI.10, occorre verificare esplicitamente la condizione, non essendo possibile dire a priori se è soddisfatta oppure no.

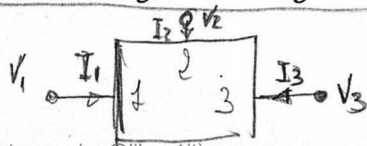
Le grandezze elettriche che caratterizzano lo stato di una porta sono due. Nel caso usuale esse sono la tensione tra i morsetti e la corrente entrante in uno di essi, con i versi positivi coordinati nel modo usuale previsto per i bipoli in fig.I.2.1. In alcuni casi particolari, quando interessa mettere in evidenza la potenza transitante nelle porte, può convenire usare altri tipi di grandezze come vedremo nei § VI.2.1, VI.3.2, VI.6.2.

Da quanto detto risulta evidente che quando interessa il circuito da un punto di vista esterno è necessario:

- 1) individuare in esso un certo numero N di porte;
- 2) supporre che tutte le eccitazioni presenti siano applicate ad alcune di queste N porte, sotto forma di generatori indipendenti di tensione o di corrente, corredati di eventuali bipoli non separabili in pratica dai generatori;
- 3) conoscere come sono chiuse le rimanenti porte e le grandezze elettriche d'interesse in corrispondenza ad esse.

È importante sottolineare il punto 2), che prescrive che nell'interno del circuito N -porte non vi siano generatori indipendenti di qualsiasi tipo (tensione o corrente, in relazione a cause esterne o al passato). Ogni rapporto con l'esterno o con il passato nel circuito N -porte, si deve localizzare solo in corrispondenza alle porte. Tale esigenza, d'altra parte, non è limitativa, poiché può essere sempre preventivamente soddisfatta estraendo i generatori dal circuito con le tecniche che vedremo nei § VI.2.2, VI.2.3, VI.4.2.

L'effetto di un circuito N -porte è quello di stabilire un legame tra le $2N$ grandezze elettriche che caratterizzano lo stato delle porte nel suo complesso. Tale legame per i circuiti che consideriamo, lineari e permanenti, è costituito da un sistema di N equazioni lineari omogenee a coefficienti reali, complessi o funzioni della variabile s , a seconda del circuito considerato e del metodo di analisi impiegato (caso di circuiti senza memoria, metodo dei fasori ovvero metodo della trasformata di Laplace). Una prova molto semplice di questa affermazione si ottiene descrivendo un modo possibile per ottenere le suddette N equazioni. Precisamente, consideriamo il circuito in dettaglio nel suo interno e completiamolo con bipoli di corrente e tensione incognita al posto delle porte. Prendiamo per questo circuito un albero e scriviamo le equazioni di equilibrio relative alle maglie ed ai tagli fondamentali.



3 porte (3.2 grandezze dette

Se il numero totale dei rami del circuito è R , le equazioni scritte sono in totale R . Aggiungiamo a queste le equazioni di definizione dei componenti. Tali equazioni sono in numero di $(R - N)$, in quanto i bipoli che abbiamo messo al posto delle porte sono indeterminati. Le grandezze elettriche che compaiono nelle $2R - N$ equazioni sono le R correnti e le R tensioni dei rami. Eliminando da queste tutte le grandezze elettriche con l'esclusione delle $2N$ dei bipoli che sostituiscono le porte, rimangono un numero di equazioni uguale a:

(VI.1.1)

$$2R - N - (2R - 2N) = N$$

grandezze elettriche

Tali equazioni contengono solo le $2N$ grandezze elettriche delle N porte e sono omogenee in quanto nell'interno del circuito N -porte per ipotesi non ci sono generatori indipendenti.

Le N equazioni precedenti già di per se stesse costituiscono una rappresentazione del circuito N -porte, come vedremo nel § VI.4.1. Tuttavia, nelle applicazioni sono utili moltissimi altri tipi di rappresentazione, che si ottengono esplicitando un gruppo di N grandezze elettriche in funzione delle rimanenti N , come verrà messo in evidenza nel § VI.5, oppure ricorrendo a procedimenti particolari finalizzati ad esigenze precise (§ VI.6). I vari tipi di rappresentazione sono poi caratterizzati da proprietà che conseguono dalla forma o dalla natura del circuito (§ VI.9, VI.B).

VI.2 - Caratterizzazione di un circuito in corrispondenza ad una porta.

Iniziamo a considerare il caso più semplice in cui interessi il comportamento di un circuito in corrispondenza ad una porta. Gli aspetti che prendiamo in considerazione sono due: la caratterizzazione esterna in assenza di eccitazioni interne e la caratterizzazione nel caso generale in cui nell'interno ci sono eccitazioni. Nel primo caso ci soffermeremo sulla rappresentazione mediante variabili diverse da quelle usuali, tensione e corrente, che come abbiamo già visto nel cap. I portano alla rappresentazione del bipolo mediante l'impedenza e l'ammettenza. Nel secondo caso tratteremo i noti teoremi di sostituzione, di Thevenin e di Norton.

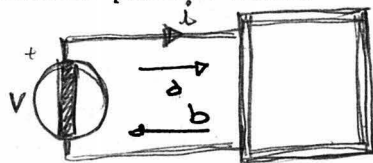
VI.2.1 - Rappresentazione di un bipolo con le variabili onda incidente e riflessa: coefficiente di riflessione.

Come detto nell'introduzione, è opportuno fare riferimento ad una coppia di grandezze diverse dalla tensione e dalla corrente quando si vuole mettere in evidenza qualche aspetto particolare del comportamento del circuito. Nel caso presente il comportamento che vogliamo evidenziare è quello del trasferimento energetico tra il generatore e il bipolo stesso. I dettagli di tale importante aspetto e i benefici che conseguono dall'uso delle grandezze che introdurremo in questo paragrafo saranno discussi in dettaglio nel prossimo § VI.3.

È evidente che per caratterizzare lo stato elettrico di un bipolo, è possibile fare riferimento a due grandezze qualsiasi in corrispondenza biunivoca con la tensione e la corrente. Tali grandezze possono essere ottenute in generale con il sistema:

(VI.2.1)

$$\begin{aligned} a &= A_{11} v + A_{12} i \\ b &= A_{21} v + A_{22} i \end{aligned}$$



con l'unica condizione che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero, cioè:

(VI.2.2)

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \neq 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{R_0}} v + \frac{\sqrt{R_0}}{2} i$$

Nel caso presente i coefficienti suddetti vengono scelti in modo che le grandezze a e b permettano di analizzare in modo molto semplice il trasferimento energetico tra il bipolo ed un eventuale generatore ad esso connesso. La scelta che ne consegue, giustificata nel § VI.3.2, è la seguente:

(VI.2.3)

$$A_{11} = A_{21} = \frac{1}{2\sqrt{R_0}} ; \quad A_{12} = -A_{22} = \frac{\sqrt{R_0}}{2}$$

in cui R_0 è una quantità positiva, avente dimensioni fisiche di una resistenza elettrica e denominata costante di normalizzazione⁽¹⁾. Le grandezze elettriche risultanti sono:

(1) - La dimensione fisica della grandezza R_0 si ottiene dalla (VI.2.4), notando che le quantità $v/\sqrt{R_0}$ e $\sqrt{R_0} i$ devono avere le stesse dimensioni. Si ottiene:

$$[v] [R_0]^{-\frac{1}{2}} = [i] [R_0]^{\frac{1}{2}} \quad \text{da cui} \quad [R_0] = [v] [i]^{-1} = [\Omega]$$

(VI.2.4)

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_0}} + \frac{\sqrt{R_0}}{2} i$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_0}} - \frac{\sqrt{R_0}}{2} i$$

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_0}}}{\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_0}} - \frac{\sqrt{R_0}}{2} i} + \frac{\frac{\sqrt{R_0}}{2} i}{\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_0}} - \frac{\sqrt{R_0}}{2} i}$
i è la corrente entrante
 $\frac{v}{R_0} - i$

e prendono il nome rispettivamente di onda incidente a e onda riflessa b. È facile verificare che le onde incidenti e riflesse hanno le stesse dimensioni fisiche, pari alla radice quadrata di una potenza. Note le grandezze a e b, possiamo facilmente riottenere v ed i, invertendo le (VI.2.4), cioè:

(VI.2.5)

$$v = \sqrt{R_0} (a + b)$$

$$i = \frac{1}{\sqrt{R_0}} (a - b)$$

Le grandezze (a) e (b) relative ad un bipolo possono essere misurate, in via di principio, utilizzando opportuni schemi. Ad esempio, in quello di fig. VI.2.1, utilizzando due trasformatori ideali il cui rapporto di trasformazione è legato al valore di R_0 nel modo indicato, si ottiene una tensione (tra i morsetti A e B) di valore uguale all'onda incidente a.

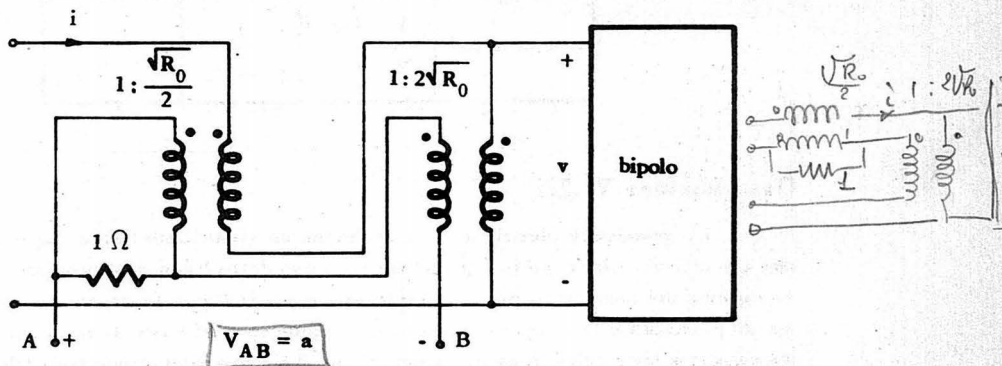


Fig. VI.2.1 - Circuito per ottenere una tensione uguale all'onda incidente a.

La rappresentazione del bipolo, nel caso che si usino le grandezze elettriche a e b, si ottiene, per i bipoli lineari e permanenti qui considerati, prendendo una delle due grandezze come causa e l'altra come effetto. Si hanno due rappresentazioni possibili; tuttavia solo una di esse viene usata comunemente. Precisamente è quella che si ottiene

considerando come causa l'onda incidente e come effetto l'onda riflessa, cioè:

$$(VI.2.6) \quad r = b/a$$

La rappresentazione r prende il nome di «coefficiente di riflessione del bipolo». È facile verificare che si tratta di una grandezza adimensionale. A differenza dell'impedenza e dell'ammettenza tale rappresentazione richiede la conoscenza della costante ausiliaria R_0 (costante di normalizzazione).

È facile passare da una rappresentazione all'altra per uno stesso bipolo. Le formule di passaggio sono riassunte in tab.VI.2.1.

TABELLA VI.2.1 - Formule di passaggio da una rappresentazione all'altra per un bipolo.

$$Y = \frac{\frac{1}{\sqrt{R_0}} V}{\frac{1}{\sqrt{R_0}} I} = \frac{\frac{1}{\sqrt{R_0}} V - \sqrt{R_0} I}{\frac{1}{\sqrt{R_0}} V + \sqrt{R_0} I}$$

moltiplicando per $\frac{\sqrt{R_0}}{I}$ sopra e sotto

$$Y = \frac{Z - R_0}{Z + R_0}$$

	r	z	y
coeff. di riflessione		$\frac{z - R_0}{z + R_0}$	$\frac{1 - R_0 y}{1 + R_0 y}$
impedenza	$R_0 \frac{1+r}{1-r}$		$\frac{1}{y}$
ammettenza	$\frac{1}{R_0} \frac{1-r}{1+r}$	$\frac{1}{z}$	

Osservazione VI.2.1

Le grandezze elettriche a e b hanno un significato fisico esplicito nel caso dei circuiti distribuiti ed in particolare nel caso delle linee di trasmissione. Questa è la ragione dei nomi usati per caratterizzarle e per indicare la rappresentazione relativa. In particolare la costante di normalizzazione in quel caso coincide con la resistenza caratteristica della linea di trasmissione. Tale interpretazione fisica delle grandezze a e b può essere conservata anche nel caso presente dei circuiti a costanti concentrate e può aiutare a derivare per via intuitiva risultati che altrimenti sarebbe complesso ricavare per via analitica⁽¹⁾. Nel § VI.3.2 vedremo che è possibile interpretare in modo analogo a quello fisico il regime elettrico che si stabilisce sul bipolo.

(1) - Un esempio tipico di questa affermazione è la derivazione delle proprietà dei bipoli passivi. Si veda ad esempio: G. Martinelli, op. cit., cap. II.

VI.2.2 - Caratterizzazione limitata di un bipolo con una tensione od una corrente: teorema di sostituzione.

In situazioni particolari un bipolo comunque complesso può essere caratterizzato tramite una sola delle due grandezze elettriche ad esso applicate. Ciò equivale nel circuito, a sostituire al suddetto bipolo un generatore indipendente.

Il problema di caratterizzazione presente rientra quindi nel problema più generale di sostituibilità di una porzione di rete, accessibile da una porta, con un bipolo opportuno, in modo tale che la situazione elettrica della parte rimanente della rete risulti inalterata.

La situazione che si vuole esaminare è quindi quella di fig.VI.2.2. Si tratta di caratterizzare il bipolo che si sostituisce alla porzione di rete N_1 , in modo che sia equivalente alla porzione sostituita, limitatamente all'effetto che ha sulla parte restante N . Ciò implica che nella situazione b) di fig.VI.2.2 la corrente i e la tensione v siano le stesse che si hanno nella situazione a). Se analizziamo il circuito della parte b), scrivendo le equazioni di equilibrio per le maglie e per i tagli fondamentali relativi ad un albero e le equazioni costitutive dei componen-

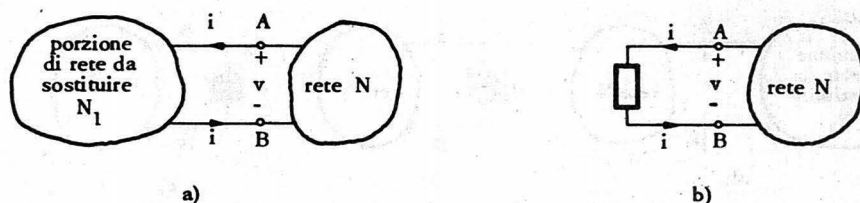


Fig.VI.2.2 - Sostituzione di una porzione di rete accessibile da una porta con un bipolo.

ti, otteniamo un sistema di $(2R-1)$ equazioni lineari in $2R$ variabili, se R è il numero dei componenti. Manca un'equazione, in quanto il bipolo che sostituisce la porzione N_1 di rete è per il momento indeterminato. Tale sistema di equazioni si riduce ad un'unica equazione non omogenea in i e v , eliminando le grandezze elettriche di tutti i rami con l'esclusione di quello incognito. Perciò, affinché il bipolo dello schema di figura VI.2.2 b) sia equivalente alla porzione N_1 di rete, è sufficiente garantire nella sostituzione l'uguaglianza di una delle due grandezze di porta i oppure v . Ciò si può fare facilmente con un generatore indipendente.

Unica eccezione, del resto banale, è quella in cui l'unica equazione risultante manca di una delle due variabili; in questo caso è possibile sostituire solo uno dei generatori. Infatti, se manca nell'equazione la corrente i , ciò implica che la rete N appare al bipolo, tra A e B , equivalente ad un generatore di tensione. Perciò potremo usare come bipolo equivalente solo il generatore di corrente, in quanto avremmo altrimenti in parallelo due generatori di tensione di uguale grandezza impressa. Una situazione del tutto simile vale se manca la tensione v nell'equazione suddetta. Quanto detto può essere enunciato nel seguente teorema:

Teorema di sostituzione: «In una rete qualsiasi, una sua porzione, accessibile da una porta, può essere sostituita con un generatore indipendente di tensione o di corrente, avente come grandezza impressa la corrispondente grandezza elettrica di porta, come mostrato in fig.VI.2.3. La scelta del tipo di generatore è in generale indifferente, salvo quando tra A e B la rete N di fig.VI.2.3 appare come un generatore. In questo caso occorre scegliere nella sostituzione il generatore di tipo opposto a quello secondo cui si comporta la rete N »⁽¹⁾.

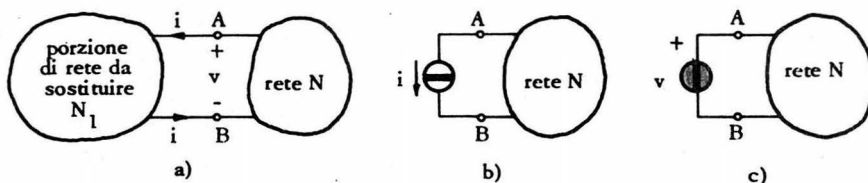


Fig.VI.2.3 - Possibili sostituzioni di una porzione di rete.

Osservazione VI.2.2

Il teorema di sostituzione non è estendibile in modo immediato al caso dei circuiti non lineari e non permanenti. In questo caso molto generale occorre applicarlo con precauzione, in quanto, a differenza di ciò che si verifica per i circuiti lineari e permanenti che stiamo considerando, i circuiti non lineari e non permanenti possono avere più di una soluzione. È intuitivo che per poter applicare il teorema di sostituzione in questo caso è assolutamente necessario che la rete di partenza e quella in cui è avvenuta la sostituzione abbiano una soluzione unica. Un esempio molto semplice di non

(1) - È opportuno osservare che il teorema non si può applicare se la porzione di rete che si vuole sostituire ha dei legami con il resto. Tali legami sono causati dalla presenza di elementi multiporta presenti contemporaneamente nelle due parti.

applicabilità del teorema di sostituzione è quello mostrato in fig.VI.2.4, che si riferisce ad un diodo tunnel, alimentato da un generatore di tensione E in serie alla resistenza R . Tale circuito ha una soluzione unica, come messo in evidenza nella parte b) della figura. Applicando il teorema di sostituzione, come mostrato nella parte c) della figura, si ottiene un circuito risultante che ha tre soluzioni, come si rileva graficamente dalla parte d) della figura. Perciò in questo caso il teorema di sostituzione non si può applicare.

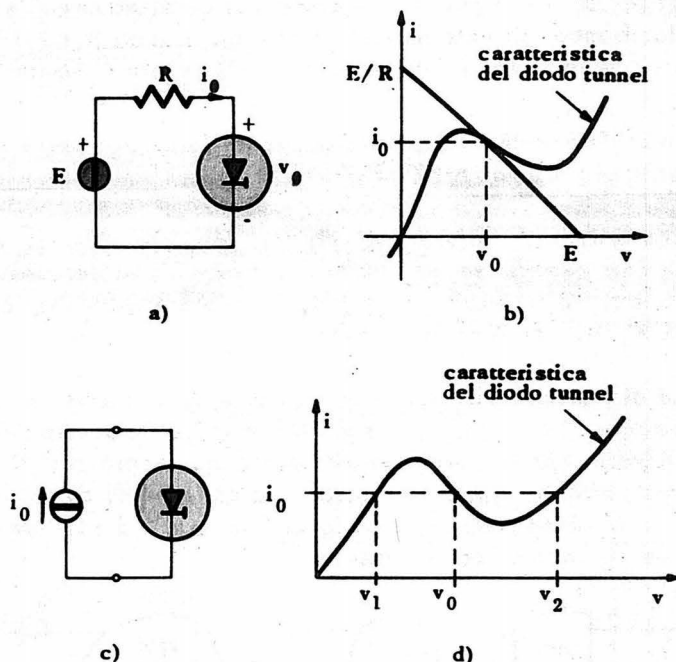


Fig.VI.2.4 - Esempio di non applicabilità del teorema di sostituzione per un circuito non lineare comprendente un diodo tunnel.

VI.2.3 - Caratterizzazione esterna di un bipolo contenente nel suo interno eccitazioni: teoremi di Thevenin e Norton.

Nel § VI.2.1 abbiamo affrontato il problema della caratterizzazione esterna di un circuito accessibile in corrispondenza ad una porta nell'ipotesi che nel suo interno non siano presenti eccitazioni, cioè generatori indipendenti ed energia immagazzinata negli elementi con memoria all'istante iniziale. Nel presente paragrafo rimuoviamo tale limitazione ed esaminiamo ciò che occorre aggiungere a quanto detto in precedenza per caratterizzare il bipolo.

Generatori dipendenti di tensione e di corrente non devono venire disattivati nelle reti disattivate.

Abbiamo già visto nel paragrafo precedente che la rete N di figura VI.2.2 b) appare al bipolo come equivalente ad un circuito caratterizzato da una equazione lineare non omogenea nelle due quantità i e v . Poiché la rete N è del tutto generale, ciò fa intuire la possibilità di caratterizzarla molto semplicemente con i coefficienti di tale equazione, che possono essere ridotti a due, supponendo di dividerli preliminarmente per uno di essi. In conclusione possiamo affermare che nel caso più generale occorrono due quantità per caratterizzare esternamente un bipolo. Il modo di determinare queste due quantità ed il loro significato fisico sono suggeriti dai teoremi di **Thevenin e Norton**.

Teorema di Thevenin - «Una rete accessibile da una porta è equivalente, esternamente alla porta, alla rete stessa in cui le eccitazioni siano state disattivate, con in serie alla porta un generatore di tensione, avente una tensione impressa uguale alla tensione che si manifesta a vuoto in corrispondenza alla porta della rete e con la stessa polarità. L'equivalenza è mostrata in fig. VI.2.5, in cui è sottinteso che tra le reti N ed N_1 non ci sono legami» ⁽¹⁾.

Teorema di Norton - «Una rete accessibile da una porta è equivalente, esternamente alla porta, alla rete stessa in cui le eccitazioni siano state disattivate, con in parallelo alla porta un generatore di corrente, avente una corrente impressa uguale alla corrente di corto-circuito della porta, con il verso precisato in fig. VI.2.6, in cui è sottinteso che tra le reti N ed N_1 non ci sono legami» ⁽¹⁾.

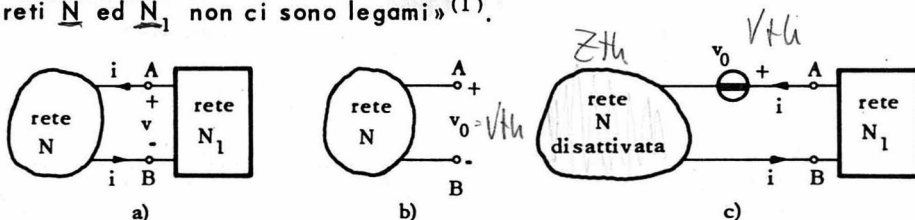


Fig. VI.2.5 - Caratterizzazione esterna alla porta AB della rete bipolare N con il teorema di Thevenin.

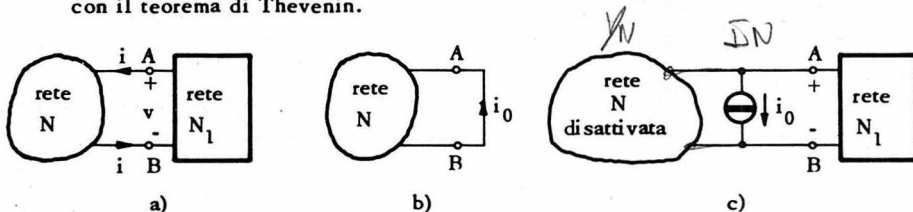


Fig. VI.2.6 - Caratterizzazione esterna alla porta AB della rete bipolare N con il teorema di Norton.

(1) - Ricordiamo che tra due reti si possono stabilire dei legami a causa di elementi multiporta presenti contemporaneamente in ambedue.

È opportuno ricordare che la disattivazione delle eccitazioni consiste nell'annullamento delle grandezze impresse dei generatori indipendenti. Ciò non significa l'eliminazione del generatore in ogni caso, ma solo quando si tratta di quello di corrente. Infatti porre la corrente impressa a zero riduce il generatore di corrente ad un circuito aperto, mentre porre la tensione impressa a zero riduce il generatore di tensione ad un corto-circuito.

La dimostrazione del teorema di Thevenin può essere effettuata in modo molto semplice applicando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il teorema di sostituzione. Precisamente, sostituiamo in base al teorema di sostituzione alla rete N_1 di fig. VI.2.5a) un generatore di corrente avente una corrente impressa uguale ad i , come messo in evidenza in fig. VI.2.7a). Calcoliamo quindi con il principio di sovrapposizione degli effetti la tensione v_{AB} in questo circuito, dividendo le eccitazioni in due gruppi: quelle interne alla rete N ed il generatore di corrente esterno. L'effetto del primo gruppo si ottiene disattivando il generatore di corrente; quindi in questo caso $v_{AB} = v_0$. L'effetto dell'altro gruppo si ottiene disattivando la rete N ; quindi in questo caso v_{AB} è uguale alla tensione che si manifesta ai capi della rete N disattivata e percorsa dalla corrente i . Sommando i due effetti si ha una tensione v_{AB} coincidente con quella che si manifesta tra A e B nel circuito c) di figura VI.2.5, ciò che dimostra il teorema.

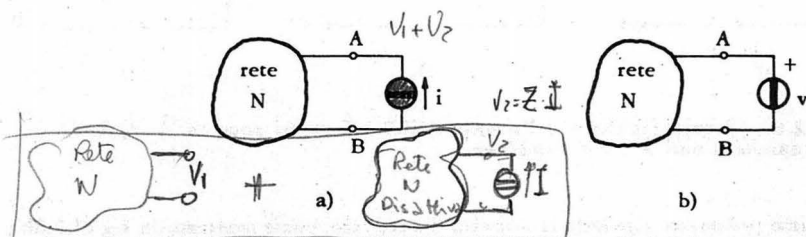


Fig. VI.2.7 - Circuiti considerati nelle dimostrazioni dei teoremi di Thevenin e di Norton.

La dimostrazione del teorema di Norton si può effettuare in modo del tutto simile con l'unica differenza di applicare il teorema di sostituzione con il generatore di tensione, come mostrato in fig. VI.2.7b), e di calcolare la corrente totale relativa alla porta A-B, invece che la tensione⁽¹⁾.

(1) - In generale si può applicare indifferentemente sia il teorema di Thevenin sia quello di Norton; tuttavia, limitatamente a quei casi in cui il teorema di sostituzione non è valido in entrambe le forme indicate nelle figg. VI.2.7a) e b), uno dei due teoremi non può essere applicato; in questi casi, però, è sempre applicabile l'altro teorema.

Riassumendo i risultati ottenuti nel presente paragrafo, possiamo dire che un bipolo può essere caratterizzato esternamente mediante due parametri, di cui uno è analogo a quelli già visti nel § VI.1 (impedenza, ammettenza o coefficiente di riflessione) e si riferisce al bipolo in cui le eccitazioni interne sono state disattivate⁽¹⁾, l'altro è una tensione od una corrente (tensione della porta a bipolo aperto, corrente della porta a bipolo corto-circuitato). Le forme sotto cui i due parametri si presentano dipendono dal tipo di analisi che si sta effettuando. Nel caso che si utilizzi il metodo dei fasori, i due parametri sono numeri complessi; nel caso che si utilizzi il metodo della trasformata di Laplace essi sono funzioni della variabile s . Illustriamo questi punti con degli esempi.

Esempio VI.2.1

Caratterizzare esternamente con il teorema di Thevenin il bipolo di fig. VI.2.8a), supponendo di usare il metodo dei fasori ad una pulsazione $\omega = 1$ rad/sec.

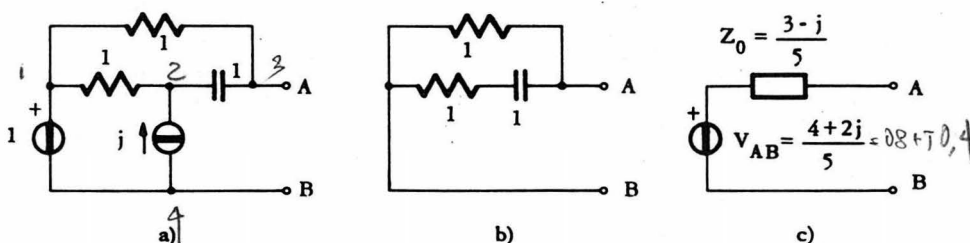


Fig. VI.2.8 - Circuiti riguardanti l'esempio VI.2.1. I valori sono in Ω , F, A, V. La pulsazione è pari a: $\omega = 1$ rad/sec.

Il primo parametro riguarda il circuito disattivato, come mostrato in fig. VI.2.8b); usando per la rappresentazione di tale circuito l'impedenza, si ha:

$$Z_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-j}} = \frac{1-j}{2-j} = \frac{3-j}{5}$$

Il secondo parametro è la tensione quando la porta è aperta e prendendo come morsetto positivo A. La tensione d'interesse si calcola immediatamente applicando il

(1) - È opportuno ribadire il fatto che con eccitazioni interne si intendono tutti i generatori indipendenti presenti nella rete N, compresi quelli derivanti da condizioni iniziali; non vanno invece annoverati come eccitazioni le tensioni o le correnti relative agli eventuali generatori controllati.

principio di sovrapposizione degli effetti per i due generatori presenti nella rete assegnata; si ha:

$$V_{AB} = 1 + j \frac{1-j}{2-j} \frac{1}{1-j} = \frac{4+2j}{5}$$

Perciò il bipolo è caratterizzato esternamente dall'impedenza Z_0 e dalla tensione V_{AB} , come indicato nello schema di fig.VI.2.8 c).

Esempio VI.2.2

Caratterizzare esternamente con il teorema di Norton il bipolo di fig.VI.2.9 a), supponendo di applicare il metodo della trasformata di Laplace.

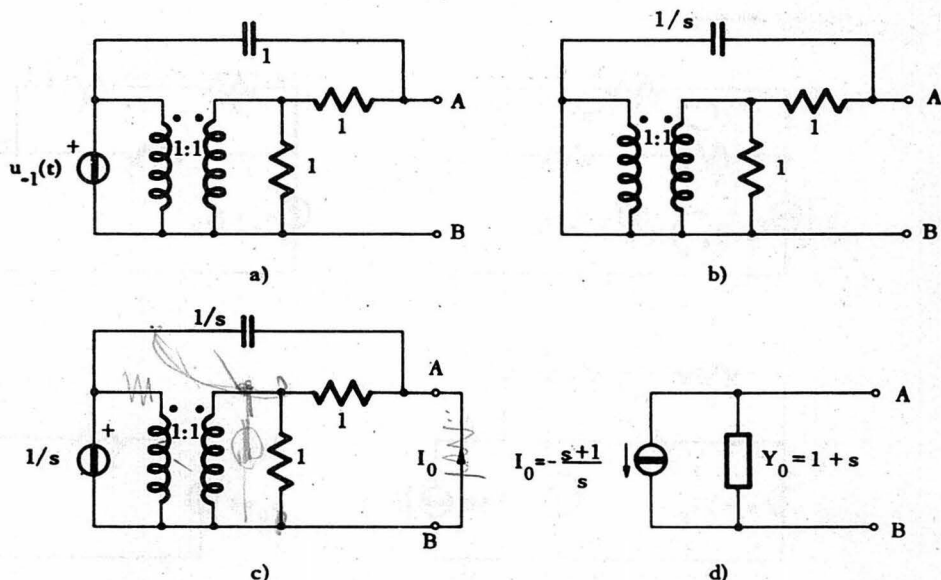


Fig.VI.2.9 - Circuiti riguardanti l'esempio VI.2.2; i valori sono in Ω , F, V; la trasformata della corrente è espressa in $A \times \text{sec}$.

Il primo parametro riguarda il circuito disattivato, come mostrato in fig.VI.2.9b), dopo aver effettuato la trasformazione nel dominio di Laplace. Usando per la rappresentazione di tale circuito l'ammettenza, si ha:

$$Y_0 = 1 + s$$

Il secondo parametro è la corrente che fluisce da B verso A nel circuito di figura VI.2.9 a), quando i due morsetti sono corto-circuitati, come mostrato in fig.VI.2.9c).

Nel dominio della trasformata di Laplace si ottiene:

$$I_0 = - \left(s \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \right) = - \frac{s+1}{s}$$

Perciò il bipolo è caratterizzato esternamente dall'ammettenza Y_0 e dalla corrente I_0 , come indicato nello schema di fig.VI.2.9 d).

Esempio VI.2.3

Caratterizzare esternamente con il teorema di Thevenin il bipolo di fig.VI.2.10a). Trattandosi di un circuito senza memoria, conviene usare il metodo di analisi nel dominio del tempo.

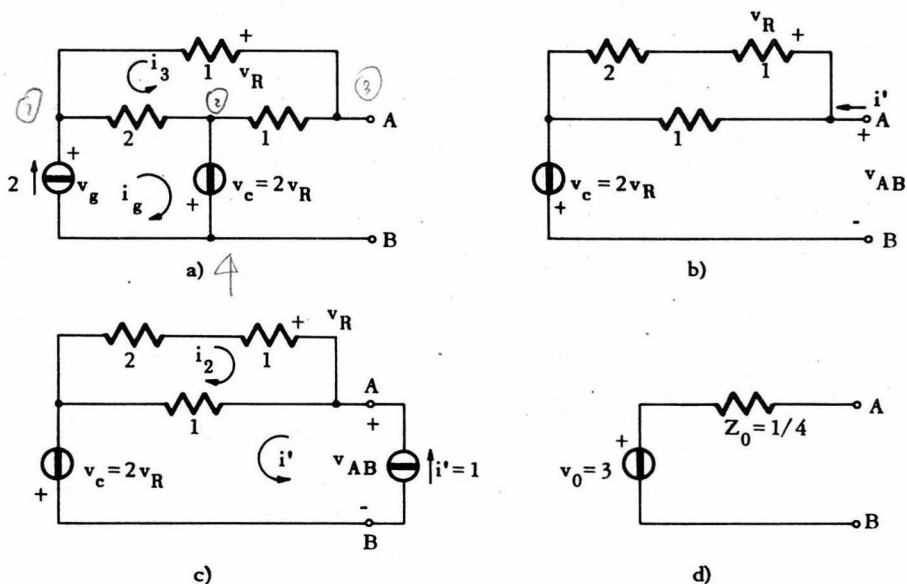


Fig.VI.2.10- Circuiti riguardanti l'esempio VI.2.3; i valori sono in Ω , F, V;

Il primo parametro riguarda il circuito disattivato, indicato in fig.VI.2.10b); si noti che il generatore di tensione controllato v_c non è stato disattivato. Usando per la rappresentazione di tale circuito l'impedenza, è necessario calcolare il rapporto fra la tensione e la corrente relative ai morsetti della porta A-B, quando tale circuito è alimentato da un generatore ausiliario. Utilizzando un generatore di corrente ausiliario di valore $i' = 1$, si ottiene il circuito di fig.VI.2.10c). Analizzando tale circuito con il metodo delle maglie, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} i' + i_2 = v_{AB} + v_c \\ i' + 4i_2 = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto che $i' = 1$, $v_c = -2i_2$, risolvendo si ottiene $v_{AB} = 1/4$. Pertanto usando la rappresentazione impedenza per il circuito di fig.VI.2.10 b), si ottiene:

$$Z_0 = v_{AB}/i' = 1/4$$

Tale impedenza risulta ovviamente resistiva⁽¹⁾.

Il secondo parametro è la tensione del morsetto A rispetto al morsetto B nel circuito di fig.VI.2.10 a), quando i morsetti sono aperti. Analizzando tale circuito con il metodo delle maglie, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2i_g + 2i_3 = v_g + v_c \\ 2i_g + 4i_3 = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto che $i_g = 2$, $v_c = 2i_3$ e risolvendo il sistema, si ottiene $i_3 = -1$, $v_g = 4$, $v_c = -2$. Pertanto la tensione v_0 è pari a:

$$v_0 = -v_c - i_3 = 3$$

Pertanto il bipolo è caratterizzato esternamente dall'impedenza resistiva Z_0 e dalla tensione v_0 , come indicato nello schema di fig.VI.2.10 d).

Esempio VI.2.4

Caratterizzare esternamente, nel dominio delle trasformate di Laplace, mediante il teorema di Thevenin il bipolo di fig.VI.2.11 a), nel quale il condensatore risulta carico alla tensione v_{c0} all'istante iniziale.

Trasformando il circuito secondo Laplace, si ottiene lo schema indicato in figura VI.2.11 b).

Il primo parametro riguarda il circuito disattivato, indicato in fig.VI.2.11 c), ottenuto ponendo a zero il generatore di tensione (tale circuito coincide anche con quello iniziale, con condizioni iniziali nulle). Rappresentando tale circuito mediante l'impedenza si ottiene:

(1) - Negli esempi VI.2.1 e VI.2.2, non è stata necessaria l'introduzione del generatore ausiliario; essendo banale l'analisi del circuito disattivato.

$$Z_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2s}}} = \frac{1}{1 + \frac{2s}{2s+1}} = \frac{2s+1}{4s+1}$$

Il secondo parametro è la tensione del morsetto A rispetto al morsetto B, nel circuito di fig.VI.2.11b), quando i morsetti sono aperti. Si ottiene facilmente:

$$V_0 = \frac{V_{c0}}{s} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{2s}} = \frac{2V_{c0}}{4s+1}$$

Pertanto il bipolo assegnato è caratterizzato esternamente dall'impedenza Z_0 e dalla tensione V_0 , come indicato nello schema di fig.VI.2.11d).

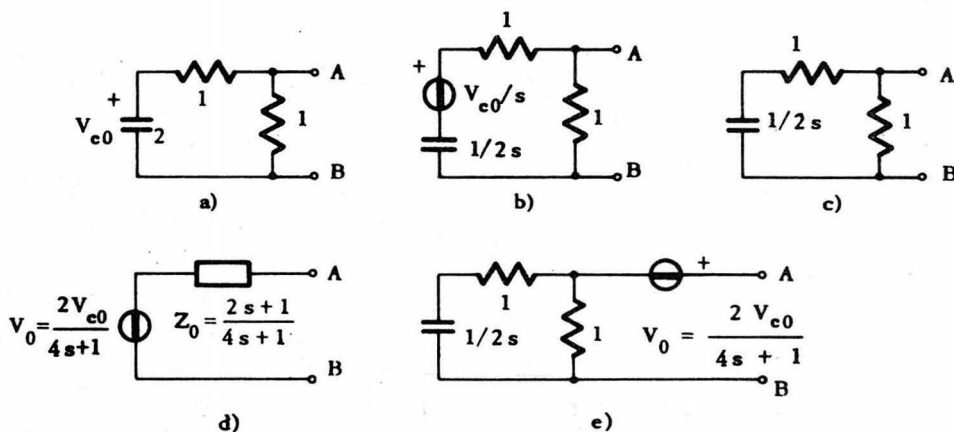


Fig.VI.2.11 - Circuiti riguardanti l'esempio VI.2.4. I valori dei componenti sono in F , Ω , V .

Uno schema equivalente a quello di fig.VI.2.11d) e atto a caratterizzare esternamente il bipolo dato, secondo il teorema di Thevenin, è anche quello indicato in figura VI.2.11e), in cui il generatore di tensione V_0 è stato posto direttamente in serie al bipolo disattivato di fig.VI.2.11c); tale schema mostra che il bipolo in serie al generatore coincide con il bipolo iniziale avente condizioni iniziali nulle.

VI.3 - Trasferimento di potenza attiva nei bipoli.

Un problema di grande importanza pratica è quello della trasmissione di potenza attiva ad un circuito attraverso una porta. Tale problema si presenta sotto due aspetti fondamentalmente diversi, a seconda che il circuito che si sta considerando faccia parte di un sistema di trasmissione di segnali ovvero riguardi un sistema di trasmissione di energia elettrica. Infatti nel primo caso quello che interessa è ottenere il massimo trasferimento di potenza attiva dalla sorgente, schematizzata come generatore di tensione con una impedenza interna caratteristica del mezzo trasmissivo (spazio libero, cavo, guida d'onda, linea ecc.); in questo caso non ha alcuna importanza il rendimento del trasferimento di potenza attiva, in quanto usualmente la frazione di potenza che può essere utilizzata è una minima parte di quella trasmessa inizialmente. Nel caso invece dei sistemi di trasmissione di energia elettrica, il rendimento del trasferimento di potenza è ciò che si vuole controllare e costituisce perciò l'obiettivo principale del problema stesso. Nel § VI.3.1 considereremo in dettaglio il primo caso, introducendo anche le quantità tipiche che si utilizzano a questo proposito.

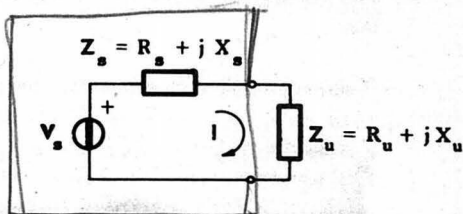
Vedremo successivamente nel § VI.3.2 come la rappresentazione «coefficiente di riflessione», introdotta nel § VI.2.1, si presti particolarmente bene a caratterizzare questo aspetto del comportamento dei bipoli nei casi pratici d'interesse.

VI.3.1 - Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva.

Per transmiss. di segnali

Il problema che considereremo in questo paragrafo è quello dell'individuazione dell'impedenza del bipolo che assorbe la massima potenza attiva da un generatore di tensione caratterizzato da una propria impedenza interna. La situazione è quella di fig. VI.3.1 ed è sottinteso che si sta usando il metodo dei fasori, relativamente ad una pulsazione ω .

Fig. VI.3.1 - Schema del circuito a cui si applica il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva.



L'espressione della potenza attiva in funzione di Z_u è, con riferimento alla figura:

$$(VI.3.1) \quad P_a = \frac{1}{2} |I|^2 R_u = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_u}{(R_u + R_s)^2 + (X_u + X_s)^2}$$

Il problema che dobbiamo risolvere è quello di determinare R_u ed X_u in modo che P_a sia massima, nelle ipotesi che R_s sia non-negativa ed R_u sia positiva. Viene escluso il caso $R_u = 0$, in quanto in questo caso risulterebbe $P_a = 0$, escludendo un valore infinito per l'ampiezza della corrente.

Il massimo trasferimento di potenza attiva al bipolo si ha quando risulta minima la seguente funzione:

$$(VI.3.2) \quad F = \frac{(R_u + R_s)^2 + (X_u + X_s)^2}{R_u}$$

I corrispondenti valori di R_u ed X_u soddisfano le seguenti condizioni:

$$(VI.3.3) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial R_u} \right)_{X_u = \text{costante}} = 1 - \frac{R_s^2 + (X_u + X_s)^2}{R_u^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_u} \right)_{R_u = \text{costante}} = \frac{2}{R_u} (X_u + X_s) = 0$$

Tali valori sono:

$$(VI.3.4) \quad \boxed{R_u = R_s} \quad \boxed{X_u = -X_s} \quad Z_u = Z_s^*$$

e corrispondono ad un punto di minimo della funzione F , come si rileva direttamente dalla (VI.3.2). In conclusione perciò vale il seguente teorema:

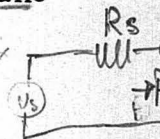
Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva: «Un bipolo alimentato da un generatore di tensione di impedenza interna Z_s assorbe da questo la massima potenza attiva quando la sua impedenza vale Z_s^* . È importante tenere presente che il teorema vale nell'ipotesi che le parti reali dell'impedenza del bipolo e del generatore siano positive».



In base al teorema precedente, vediamo che la massima potenza attiva che può essere erogata da un generatore con impedenza interna passiva verso un bipolo passivo, è una quantità caratteristica del generatore stesso. Tale quantità viene perciò denominata «potenza disponibile del generatore». Il valore della potenza disponibile (P_d), in base alle (VI.3.1) e (VI.3.4), è pari a:

$$(VI.3.5) \quad |I|_{\max}^2 = \frac{|V_s|^2}{4R_s^2}$$

$$P_d = \frac{|V_s|^2}{8R_s} = \frac{1}{2} R_s |I|^2 \quad \text{potenza}$$



$$|I|_{\max} = \frac{|V_s|}{2R_s}$$

La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere solo una frazione di P_d , con valore massimo unitario, cioè:

(VI.3.6)

$$\frac{P_a}{P_d} \leq 1$$

Più il valore del rapporto precedente è basso, minore è la capacità del bipolo di assorbire la potenza attiva che il generatore sarebbe in grado di erogare. Una misura di tale eventuale inefficienza del bipolo, comunemente usata, è la seguente:

(VI.3.7)

$$10 \log_{10} \frac{P_d - P_a}{P_d} = 10 \log_{10} \left(1 - \frac{P_a}{P_d} \right) \quad \text{P_riflessa}$$

a cui si dà il nome di «attenuazione di ritorno». L'attenuazione di ritorno misura, nelle unità logaritmiche «decibel», il rapporto tra la potenza attiva che non è ricevuta dal bipolo rispetto a quella disponibile dal generatore, che è la massima che il bipolo potrebbe ricevere.

Il rendimento del trasferimento di potenza attiva vale:

$$(VI.3.8) \quad \eta = \frac{\text{potenza attiva ricevuta dal bipolo}}{\text{potenza attiva erogata dal generatore}} = \frac{R_u}{R_u + R_s}$$

Pertanto, nella situazione di massimo trasferimento di potenza attiva, si ha un rendimento pari a 0,5. Tale valore basso non ha alcuna importanza nei sistemi di trasmissione dei segnali, in quanto l'energia utilizzata è sempre una frazione estremamente bassa di quella trasmessa inizialmente.

Osservazione VI.3.1

Una situazione completamente diversa si ha nel caso della trasmissione di energia elettrica da un generatore verso un carico, dove un rendimento del 50% è del tutto inaccettabile.

Per analizzare la situazione che si ha in questo caso, supponiamo di avere $X_u = -X_s$ e tracciamo, sotto questa ipotesi, gli andamenti della potenza attiva P_a ricevuta dal bipolo di carico e del rendimento η in funzione del rapporto R_u/R_s ; in base alle relazioni (VI.3.1) e (VI.3.8), si ottengono i diagrammi indicati nella fig. VI.3.2.

Da tali diagrammi si vede che l'aumento del rendimento si ottiene per valori di R_u molto maggiori di R_s ed a scapito della potenza assorbita dal carico. Tali condizioni di funzionamento sono comunemente utilizzate in tutti quei casi in cui è importante dissipare la minima potenza attiva possibile nell'impedenza interna del generatore e quindi avere un rendimento prossimo all'unità; si vede che tali condizioni sono molto lontane da quelle corrispondenti al massimo trasferimento di potenza attiva.

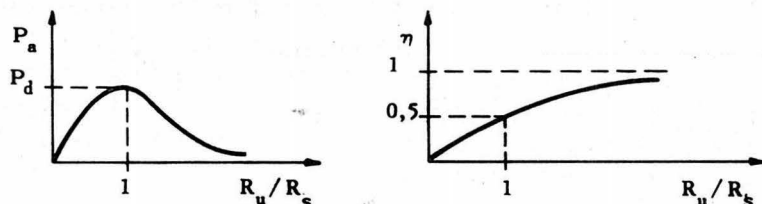


Fig. VI.3.2 - Andamenti della potenza attiva P_a e del rendimento η in funzione di R_u/R_s .

Osservazione VI.3.2

Quando si analizza l'effetto del rumore nei circuiti, con particolare riferimento agli amplificatori, risulta utile considerare anche il caso di un generatore con impedenza interna avente parte reale negativa. In questo caso, si ottiene una situazione simile a quella prevista dal teorema precedente pur di fare riferimento alla massimizzazione della potenza attiva ceduta dal bipolo che si suppone abbia negativa la parte reale della propria impedenza. La potenza attiva erogata dal bipolo vale:

$$(VI.3.9) \quad P_a = -\frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_u}{(R_u + R_s)^2 + (X_u + X_s)^2}$$

e tenendo conto delle ipotesi fatte, cioè $R_u < 0$, $R_s \leq 0$, si ha che tale quantità è massima quando $Z_u = Z_s^*$. In questa situazione di massimo, la potenza ceduta dal bipolo dipende solo dal generatore ed è uguale a:

(VI.3.10)

$$P_s = - \frac{|V_s|^2}{8 R_s}$$

a cui si dà il nome di potenza scambiabile del generatore.

R_0

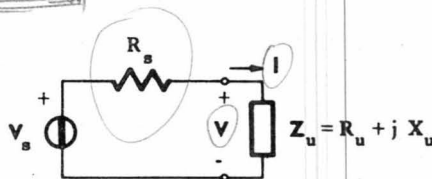
VI.3.2 - Legame tra il coefficiente di riflessione e il massimo trasferimento di potenza attiva.

L'utilizzazione delle variabili onda incidente ed onda riflessa, con la relativa rappresentazione coefficiente di riflessione, introdotte nel §VI.2.1, semplifica notevolmente la trattazione dei problemi di trasferimento di potenza attiva nel caso tipico più importante, dal punto di vista delle applicazioni, in cui l'impedenza del generatore è reale e positiva. La situazione in cui si considera il trasferimento di potenza attiva è quindi quella mostrata in fig. VI.3.3. Il vantaggio dell'uso delle suddette variabili si raggiunge solo se la costante di normalizzazione R_0 viene scelta opportunamente; si può vedere che la scelta più appropriata è la seguente:

(VI.3.11)

$$R_0 = R_s$$

Fig. VI.3.3 - Situazione tipica in cui interessa il trasferimento di potenza attiva.



Con questa scelta infatti risulta la seguente espressione della potenza attiva assorbita dal bipolo, ottenuta utilizzando le (VI.2.5), nell'ipotesi di applicazione del metodo dei fasori:

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(a + b)(a^* - b^*)] = \\ (VI.3.12) \quad &= \frac{1}{2} [|a|^2 - |b|^2] = \frac{1}{2} |a|^2 [1 - |r|^2] \end{aligned}$$

D'altra parte, tenendo conto dell'espressione di a data dalla formula (VI.2.4) e della scelta di R_0 data dalla (VI.3.11), si ottiene per il circuito di fig. VI.3.3:

$$P_d = \frac{1}{2} |a|^2$$

$$(VI.3.13) \quad \frac{1}{2} |a|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_s}} + \frac{\sqrt{R_s}}{2} I \right|^2 = \frac{1}{8} \frac{1}{R_s} |v + R_s I|^2 = \frac{|v_s|^2}{8 R_s} = P_d$$

Ricordando la definizione di potenza disponibile di un generatore, data dalla (VI.3.5), la (VI.3.12) diviene:

$$(VI.3.14) \quad P_a = P_d (1 - |r|^2) \quad \frac{P_d}{P_d} = (1 - |r|^2)$$

Nella situazione di massimo trasferimento di potenza attiva, in cui $Z_u = R_s$, risulta $r = 0$ e perciò $P_a = P_d$, come sappiamo che deve accadere. La formula (VI.3.14) mette in evidenza che:

- 1) la potenza attiva associata all'onda incidente, cioè $\frac{1}{2} |a|^2$, è proprio la potenza attiva disponibile del generatore di tensione con impedenza interna resistiva;
- 2) la potenza attiva associata all'onda riflessa, cioè $\frac{1}{2} |b|^2$ è uguale a $|r|^2 P_d$ e coincide con la frazione di potenza disponibile non assorbita dal bipolo. Pertanto, in base alla definizione (VI.3.7), l'attenuazione di ritorno vale:

$$(VI.3.15) \quad \text{attenuazione di ritorno} = 20 \log_{10} |r| \quad \text{(-) Return Loss}$$

Il regime elettrico sul bipolo si può quindi pensare come dovuto alla sovrapposizione di un'onda incidente ed una riflessa; l'onda incidente che trasporta una potenza pari a P_d (dal generatore verso il carico, viene riflessa in ragione del coefficiente di riflessione sul bipolo di carico, dando luogo all'onda riflessa che trasporta una potenza pari a $|r|^2 P_d$ dal carico verso il generatore). Pertanto sul bipolo di carico viene dissipata la potenza residua, data dalla (VI.3.14). In questa interpretazione intuitiva, il bipolo di carico ha l'effetto di dare luogo all'onda riflessa in ragione del coefficiente di riflessione; si vede inoltre che risulta particolarmente semplice tenere conto dell'impedenza interna del generatore di tensione, quando questa è resistiva e la costante di normalizzazione R_0 del bipolo è stata scelta coincidente con essa. In questo caso infatti l'onda incidente ha l'espressione semplificata:

$$(VI.3.16) \quad a = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{R_s}} + \frac{1}{2} \sqrt{R_s} I = \frac{1}{2 \sqrt{R_s}} (v + R_s I) = \frac{v_s}{2 \sqrt{R_s}}$$

Tale interpretazione intuitiva del fenomeno verrà ripresa e utilizzata successivamente nel § VI.6.2.

Esempio VI.3.1

Per il circuito di fig.VI.3.4a), si consideri il trasferimento di potenza attraverso la porta A-B, interpretando il bipolo a sinistra come generatore e quello a destra come carico. Determinare:

- il coefficiente di riflessione relativo al carico;
- l'onda diretta e la potenza disponibile del generatore;
- la potenza attiva dissipata sul carico.

Si supponga che la pulsazione ω sia pari ad uno.

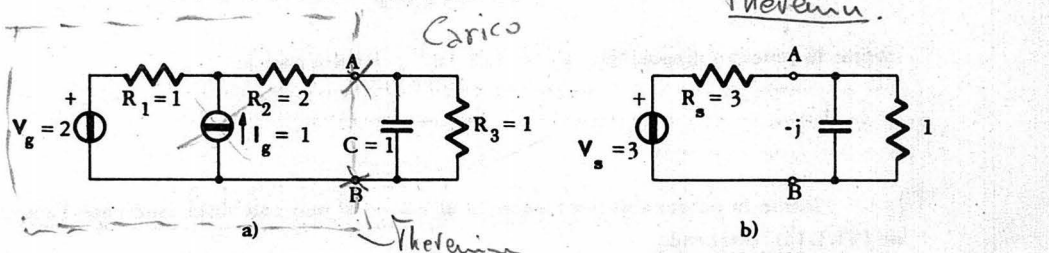


Fig.VI.3.4 - Circuiti considerati nell'esempio VI.3.1. I valori sono in V, A, Ω , F; la pulsazione è $\omega = 1$ rad/sec.

Il primo passo da effettuare consiste nel trasformare il bipolo a sinistra della porta A-B mediante il teorema di Thevenin, in modo da ottenere un circuito simile a quello di fig.VI.3.3. La resistenza interna R_s corrispondente alla condizione in cui i generatori sono disattivati, è pari a:

$$R_s = R_1 + R_2 = 3$$

La tensione a vuoto V_s , corrispondente al caso in cui la porta A-B è disconnessa dal carico, è pari a:

$$V_s = V_g + R_1 I_g = 3$$

Pertanto, utilizzando il metodo dei fasori, il circuito che si ottiene è quello indicato in fig.VI.3.4b).

Come detto nel § VI.3.2, conviene scegliere la costante di normalizzazione pari a:

$$R_0 = R_s = 3$$

Poiché l'ammettenza del bipolo di carico è uguale a

$$Y_c = 1 + j$$

utilizzando la formula di passaggio di tab.VI.2.1, si ottiene per il coefficiente di riflessione:

$$r = \frac{1 - R_0 Y_c}{1 + R_0 Y_c} = \frac{-2 - 3j}{4 + 3j}$$

L'onda diretta a , in base alla espressione (VI.3.16), risulta uguale a:

$$a = \frac{V_s}{2\sqrt{R_s}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

mentre la potenza disponibile $P_d = 1/2 |a|^2$, risulta pari a:

$$P_d = \frac{3}{8}$$

Infine la potenza attiva trasferita al carico si può calcolare mediante l'espressione (VI.3.14), ottenendo:

$$P_a = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{4+9}{16+9} \right) = \frac{9}{50}$$

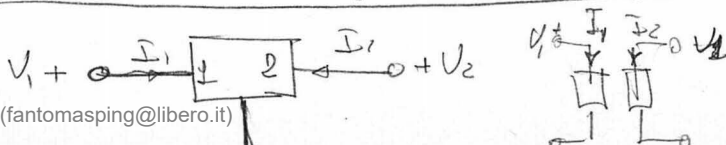
VI.4 - Caratterizzazione di un circuito in corrispondenza a due porte.

Nel caso che un circuito sia accessibile da due porte il problema della caratterizzazione esterna alle porte stesse si presenta in modo del tutto simile a quello visto nel caso di una porta sola. Quindi anche in questo caso occorre fare distinzione dal caso in cui nell'interno del circuito ci siano oppure no le eccitazioni. I due casi verranno trattati in dettaglio di seguito nel contesto più generale.

VI.4.1 - Rappresentazione generale di una rete 2-porte.

Indicheremo nel seguito con il nome di rete 2-porte un circuito accessibile da due porte e privo di eccitazioni nel suo interno. La caratterizzazione di una rete 2-porte richiede quattro parametri, come si deduce facilmente con la seguente osservazione.

Poniamo al posto delle due porte due bipoli indeterminati, caratterizzati da quattro grandezze elettriche; scegliamo un albero nel circuito risultante e scriviamo le relative equazioni di equilibrio per le maglie e i ta-



desano R

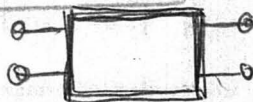
(R-2) relazioni costitutive

gli fondamentali. Quindi scriviamo le equazioni costitutive dei componenti (eccetto che per i due bipoli indeterminati connessi alle porte). Se i rami del circuito sono in totale R , avremo $[2R - 2]$ equazioni in $2R$ variabili. Eliminando dal sistema di queste equazioni lineari tutte le variabili, con l'esclusione di quelle che si riferiscono ai due bipoli indeterminati, rimarranno due sole equazioni lineari omogenee nelle quattro grandezze elettriche dei bipoli indeterminati. L'omogeneità delle due equazioni è conseguenza dell'assenza di eccitazioni nell'interno della rete. Poiché le grandezze elettriche dei bipoli coincidono con quelle delle due porte, possiamo affermare che la rete 2-porte è caratterizzata da due equazioni omogenee nelle quattro grandezze elettriche di porta. Esprimendo nelle due equazioni esplicitamente due grandezze in funzione delle rimanenti due, le equazioni risultanti sono caratterizzate da quattro coefficienti; questi coefficienti sono i parametri della rappresentazione.

Vedremo successivamente, nel § VI.5, i vari tipi di rappresentazione che conseguono dalle varie possibili scelte di coppie di grandezze elettriche da esplicitare nelle due equazioni. Nel caso presente ci vogliamo soffermare sul fatto che già le due equazioni, ricavate nel modo detto, costituiscono una rappresentazione del circuito. Precisamente, esse possono essere scritte nella forma:

(VI.4.1)

$$[A][V] + [B][I] = [0]$$



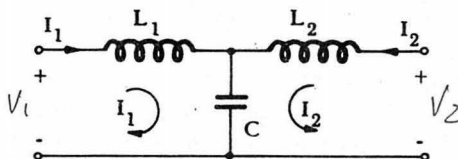
in cui: $[0]$ è un vettore di ordine due con componenti nulle; $[V] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $[I] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ sono vettori di ordine due corrispondenti alle tensioni e alle correnti di porta. Le due matrici $[A]$ e $[B]$ sono quadrate, di ordine due, e costituiscono la rappresentazione più generale possibile per la rete 2-porte⁽¹⁾. I termini di tali matrici sono o numeri complessi, se stiamo usando i fasori, oppure polinomi nella variabile s , se stiamo usando la trasformata di Laplace.

Esempio VI.4.1

Ricavare la rappresentazione $[A]$, $[B]$ per la rete due porte di fig. VI.4.1, analizzata nel dominio della trasformata di Laplace.

(1) - È utile sottolineare che tale rappresentazione esiste sempre per un circuito lineare e permanente, quale ci interessa. Tale proprietà non è goduta dalle rappresentazioni più comuni che vedremo successivamente.

Fig. VI.4.1 - Rete 2-porte considerata nell'esempio VI.4.1.



Supponendo di mettere al posto delle due porte due bipoli indeterminati aventi le relative tensioni e correnti coincidenti con quelle di porta, scriviamo per il circuito risultante le equazioni alle maglie; si ottiene:

$$\begin{cases} sC V_1 = (sL_1 C + 1) \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \\ sC V_2 = (sL_2 C + 1) \tilde{I}_2 + \tilde{I}_1 \end{cases}$$

$$\textcircled{V_1} = sL_1 I_1 + \frac{1}{sC} (I_1 + I_2) = \left[sL_1 + \frac{1}{sC} \right] \tilde{I}_1 + \frac{1}{sC} \tilde{I}_2$$

$$\textcircled{V_2} = sL_2 I_2 + \frac{1}{sC} (I_1 + I_2) = \left[sL_2 + \frac{1}{sC} \right] \tilde{I}_2 + \frac{1}{sC} \tilde{I}_1$$

Dalle equazioni precedenti otteniamo:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{sC} & 0 \\ 0 & \textcircled{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+s^2 L_1 C & 1 \\ 1 & 1+s^2 L_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che fornisce direttamente le due matrici della rappresentazione.

VI.4.2 - Caratterizzazione di un circuito accessibile da due porte quando nell'interno ci sono eccitazioni: il teorema generalizzato di Thevenin.

In un circuito accessibile da due porte, se sono presenti nel suo interno delle eccitazioni, la (VI.4.1) si modifica nel senso di divenire non omogenea. La caratterizzazione del circuito quindi si potrebbe fare, utilizzando ancora le matrici A e B precedenti ed inoltre un vettore di termini noti; ciò mette in evidenza che anche per i circuiti accessibili da due porte, la caratterizzazione avviene tramite due gruppi di parametri di cui uno riguarda espressamente le eccitazioni e l'altro il circuito disattivato. La determinazione di questi parametri può essere fatta in modo più utile per le applicazioni con il teorema generalizzato di Thevenin.

Teorema generalizzato di Thevenin: « Un circuito accessibile da due porte può essere caratterizzato mediante i due seguenti gruppi di parametri: 1) parametri che rappresentano la rete 2-porte, ottenuta dal circuito di-

sattivando le eccitazioni; 2) le tensioni che si manifestano ai morsetti delle due porte quando sono lasciati aperti. Il circuito equivalente che consegue da questa caratterizzazione è mostrato in fig. IV.4.2*.

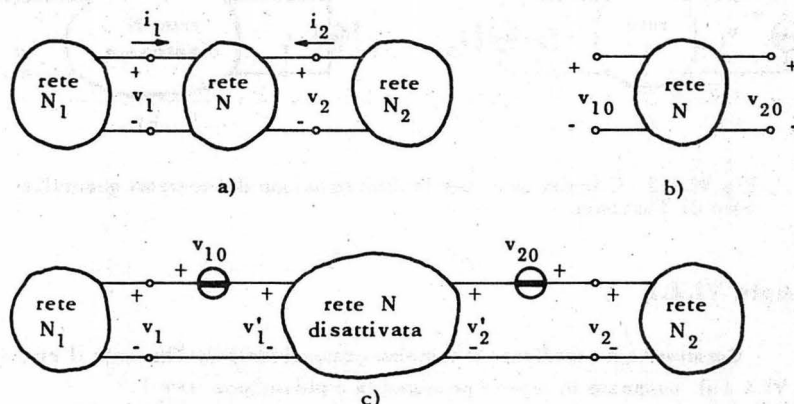


Fig. VI.4.2 - Circuito equivalente ad una rete accessibile da due porte secondo il teorema generalizzato di Thevenin.

La dimostrazione del teorema precedente segue lo stesso procedimento usato nel caso di una sola porta. Infatti, preventivamente sostituiamo nello schema a) di fig. VI.4.2 alle reti N_1 ed N_2 due generatori di corrente, applicando il teorema di sostituzione alle due porte⁽¹⁾. Il circuito risultante è mostrato in fig. VI.4.3 a). Successivamente utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti per calcolare in questo circuito le tensioni in corrispondenza alle porte. Dividiamo le eccitazioni in due gruppi: quelle interne alla rete N ed i due generatori aggiunti esternamente. L'effetto del primo gruppo sono le tensioni v_{10} e v_{20} di fig. VI.4.2 b); l'effetto del secondo gruppo sono le tensioni v'_1 e v'_2 , indicate in fig. VI.4.3 b). In conclusione le tensioni che si stabiliscono in corrispondenza alle due porte nel circuito di fig. VI.4.3 a) sono:

$$(VI.4.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= v'_1 + v_{10} \\ v_2 &= v'_2 + v_{20} \end{aligned}$$

(1) - Come è noto tale sostituzione non sempre è fattibile e precisamente qualora una delle due porte (od entrambe) si comporta, verso la rete N , come un generatore di corrente. In tali casi particolari il teorema generalizzato di Thevenin non può essere applicato e la caratterizzazione della rete può essere fatta ricorrendo a generalizzazioni del teorema di Norton.

Tali tensioni coincidono esattamente con quelle che si stabiliscono nelle due porte del circuito di fig. VI.4.2 c), ciò che dimostra il teorema.

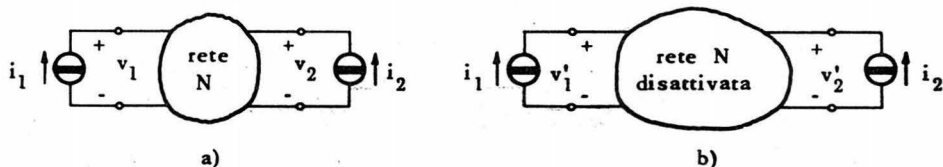


Fig. VI.4.3 - Circuiti usati per la dimostrazione del teorema generalizzato di Thevenin.

Esempio VI.4.2

Caratterizzare mediante il teorema generalizzato di Thevenin il circuito di figura VI.4.4 a), supposto in regime permanente a pulsazione $\omega = 1$.

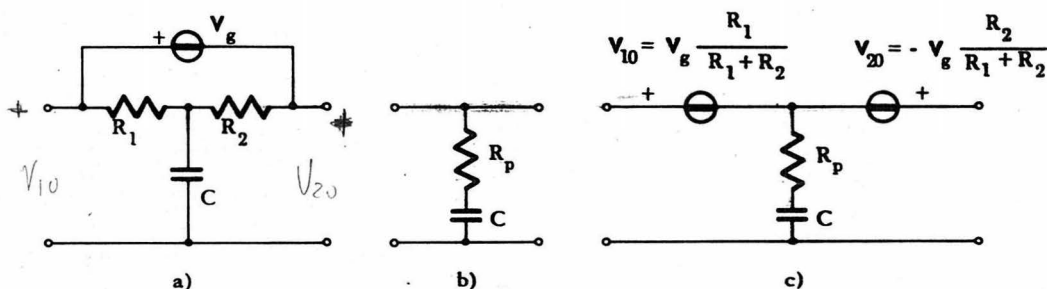


Fig. VI.4.4 - Circuiti considerati nell'esempio VI.4.2.

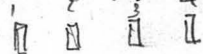
Disattivando il generatore di tensione si ottiene il circuito due porte di figura VI.4.4 b), ove si ha:

$$\boxed{R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

La rete due porte disattivata può essere caratterizzata mediante la rappresentazione $[A]$, $[B]$ con un metodo analogo a quello visto nell'esempio VI.4.1.

I generatori di tensione V_{10} e V_{20} si possono ricavare facilmente analizzando il circuito di fig. VI.4.4 a), supponendo aperte le porte. Si ottiene:

$$V_{10} = V_g \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



12 1-3 14 2-3 2-4 3-4

$$V_{20} = -V_g \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Si ottiene pertanto il circuito equivalente indicato in fig.VI.4.4 c).

VI.5 - Rappresentazioni comuni delle reti due porte.

La rappresentazione di una rete 2-porte mediante le matrici $[A]$ e $[B]$ è sempre possibile. Tuttavia essa implica più parametri del necessario per la caratterizzazione della rete 2-porte. Per questa ragione nelle applicazioni pratiche, si preferisce utilizzare rappresentazioni che richiedono in totale solo quattro parametri per la caratterizzazione. Le più comuni di queste rappresentazioni, che considereremo nel presente paragrafo, si ottengono esplicitando nelle due equazioni lineari che caratterizzano la rete, due delle quattro grandezze elettriche di porta in funzione delle altre due. Occorre a questo proposito osservare:

1) ad ogni scelta delle due grandezze corrisponde una rappresentazione diversa, che si presta ad essere impiegata meglio delle altre in particolari condizioni di chiusura delle porte. In totale le scelte possibili sono sei, cioè tante quante sono le possibili coppie estraibili da un gruppo di quattro grandezze. In tabella VI.5.1 riportiamo per tali sei rappresentazioni le coppie di grandezze elettriche da considerare come variabili indipendenti e dipendenti, i simboli usati, le condizioni di chiusura più convenienti per l'impiego della rappresentazione;

2) non è detto che per una rete 2-porte esistano tutte le sei suddette rappresentazioni. Ciò che si può affermare è che necessariamente ne esiste almeno una. Dimostriamo di seguito questa affermazione. Sappiamo che le due equazioni (VI.4.1) sono linearmente indipendenti; infatti esse derivano dall'eliminazione di alcune variabili da un sistema di equazioni linearmente indipendenti. Scrivendo le equazioni (VI.4.1) come segue:

$$(VI.5.1) \quad \begin{bmatrix} [A] & [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [I] \end{bmatrix} = [0]$$

Rango = 2 in quanto le due equazioni sono linearmente indipendenti.

si deduce pertanto che la matrice dei coefficienti ha rango uguale a due; quindi esiste almeno un minore di ordine due non degenere. Le due colonne della matrice dei coefficienti con cui è formato tale minore individuano le due grandezze elettriche che si possono esplicitare nelle due equazioni e quindi la rappresentazione tra le sei che esiste. Per maggior

Tabella VI.5.1 - Rappresentazioni più comuni di una rete 2-porte.

Tipi di rappresentazione (simbolo usato)	Grandezze elettriche		Relazioni tra le grandezze elettriche	Situazioni convenienti di chiusura
	indipendenti	dipendenti		
matrice impedenze a vuoto: $[Z]$	I_1, I_2	V_1, V_2	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	generatori indipendenti di corrente o porte aperte;
matrice ammettenze di corto circuito: $[Y]$	V_1, V_2	I_1, I_2	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	generatori indipendenti di tensione o porte chiuse in corto-circuito;
matrice ibrida: $[H]$	I_1, V_2	V_1, I_2	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	alla prima porta circuito aperto o generatore indipendente di corrente; alla seconda porta corto-circuito o generatore indipendente di tensione;
matrice ibrida: $[G]$	V_1, I_2	I_1, V_2	$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	alla prima porta corto-circuito o generatore indipendente di tensione; alla seconda porta circuito aperto o generatore indipendente di corrente;
matrice di trasmissione diretta: $[T']$	V_1, I_1	$V_2, -I_2$	$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$	rappresentazione poco usata;
matrice di trasmissione inversa: $[T]$	$V_2, -I_2$	V_1, I_1	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$	Connessione in cascata con altre reti 2-porte. (Per questa ragione si prende in considerazione la corrente $-I_2$, al posto di I_2 .)

VI.5

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$$

Rappresentazioni comuni delle reti due porte

$$[V][A] + [I][B] = [0]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

chiarezza supponiamo che il minore non degenerare sia formato dalle prime due colonne (matrice $[A]$). Allora possiamo esplicitare le tensioni, cioè:

$$[V][A] = -[B][I]$$

$$(VI.5.2) \quad [V] = -[A]^{-1}[B][I] = [Z][I]$$

In questo caso quindi esiste la rappresentazione matrice impedenze a vuoto (cfr. tabella VI.5.1).

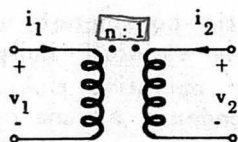
La maggior parte delle reti 2-porte ammette tutte e sei le rappresentazioni; tuttavia, come detto, può accadere in alcuni casi particolari che ne manchi qualcuna. Di seguito riportiamo due esempi di reti per cui non esiste qualche rappresentazione.

Esempio VI.5.1

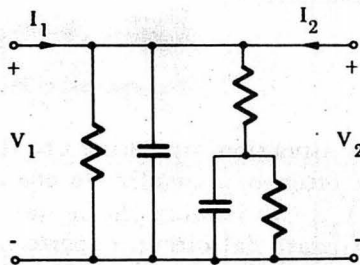
La rete 2-porte di fig. VI.5.1 a) (trasformatore ideale) non ammette le rappresentazioni $[Z]$ o $[Y]$. Le equazioni di definizione del trasformatore sono:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Tali equazioni non permettono di esplicitare le tensioni o le correnti contemporaneamente.



a)



b)

Fig. VI.5.1 - Esempi di reti 2-porte che non ammettono qualche rappresentazione.

Esempio VI.5.2

La rete 2-porte di fig. VI.5.1 b) non ammette la rappresentazione $[Y]$. Dalla figura si vede che $V_1 = V_2$, quindi le due tensioni non possono essere considerate indipendenti, come richiesto dalla rappresentazione $[Y]$.

I vari tipi di rappresentazione, come abbiamo detto, sono utili in situazioni diverse; deve essere ben chiaro, tuttavia, che esse sono equivalenti le une alle altre. In particolare, è sempre possibile passare dall'una all'altra (purché esista la corrispondente rappresentazione). Tale passaggio consiste semplicemente nel riordinare le equazioni di definizione della rete 2-porte. In tabella VI.5.2 sono riassunte le formule di passaggio per i tipi di rappresentazione più usati in pratica⁽¹⁾.

I parametri che caratterizzano ciascuna delle rappresentazioni considerate in tabella VI.5.1 sono i termini della relativa matrice. Tali termini sono numeri complessi, se stiamo utilizzando il metodo dei fasori per analizzare il circuito, ovvero funzioni razionali reali della variabile s , se stiamo usando la trasformata di Laplace. Il calcolo di ciascuno di essi è facilitato dall'interpretazione fisica che se ne può dare come funzione di rete. Per questa ragione, di seguito, considereremo in dettaglio le definizioni operative dei termini delle matrici associate alle varie rappresentazioni, illustrando con esempi le formule ottenute.

SI

~~VI.5.1~~ - Matrice impedenze a vuoto.

13/3/84

L'interpretazione fisica come funzione di rete di ciascun parametro di questa rappresentazione, si ottiene scrivendo per esteso le equazioni di definizione. Dalla tabella VI.5.1 si ha:

(VI.5.3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ [Z] &= \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi le due situazioni operative che è necessario considerare sono quelle che si ottengono annullando una alla volta le variabili indipendenti (I_1 e I_2). Ciò implica che le due situazioni operative richieste sono caratterizzate dal circuito aperto in corrispondenza ad una delle due porte. Inoltre, essendo la variabile indipendente una corrente, l'eccitazione deve essere un generatore di corrente. In fig. VI.5.2 sono mostrate le due situazioni operative risultanti. Con riferimento alla parte a) di questa figura, otteniamo:

$$(VI.5.4) \quad z_{11} = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0} ; \quad z_{21} = \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0}$$

(1) - Si noti che è stata omessa la matrice di trasmissione diretta $[T']$, in quanto è poco usata.

Tabella VI.5.2 - Formule di passaggio da una rappresentazione all'altra per le reti 2-porte (Δ_i indica il determinante della matrice i).

	Z	Y	T	H	G
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta_G}{g_{11}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_Z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_Z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta_T}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta_Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ \frac{-\Delta_Y}{y_{21}} & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta_H}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta_G}{g_{21}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta_Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta_G} & \frac{-g_{12}}{\Delta_G} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta_G} & \frac{g_{11}}{\Delta_G} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{-y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-\Delta_T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta_H} & \frac{-h_{12}}{\Delta_H} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta_H} & \frac{h_{11}}{\Delta_H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$

e con riferimento alla parte b):

$$(VI.5.5) \quad z_{22} = \left(\frac{V'_2}{I'_2} \right)_{I'_1=0} ; \quad z_{12} = \left(\frac{V'_1}{I'_2} \right)_{I'_1=0}$$

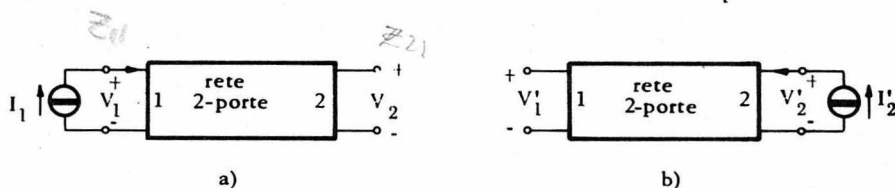


Fig.VI.5.2 - Situazioni operative per l'interpretazione fisica dei termini della matrice impedenze a vuoto.

Le formule (VI.5.4) e (VI.5.5) mettono in evidenza che:

- 1) il termine z_{11} è l'impedenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua prima porta e lasciando aperta la seconda;
- 2) il termine z_{21} è l'impedenza di trasferimento tra le porte 1 e 2, con l'eccitazione posta in corrispondenza alla porta 1 e lasciando aperta la porta 2;
- 3) il termine z_{22} è l'impedenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua seconda porta e lasciando aperta la prima;
- 4) il termine z_{12} è l'impedenza di trasferimento tra le porte 1 e 2, con l'eccitazione posta in corrispondenza alla porta 2 e lasciando aperta la porta 1.

Esempio VI.5.3

Determinare la matrice impedenze a vuoto della rete 2-porte considerata nell'esempio VI.4.1.

In fig.VI.5.3 riportiamo le due situazioni operative necessarie per calcolare i termini della matrice. Con riferimento alla fig.VI.5.3 a), si ottiene:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = sL_1 + \frac{1}{sC}$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{sC}$$

e con riferimento alla fig.VI.5.3 b), si ottiene:

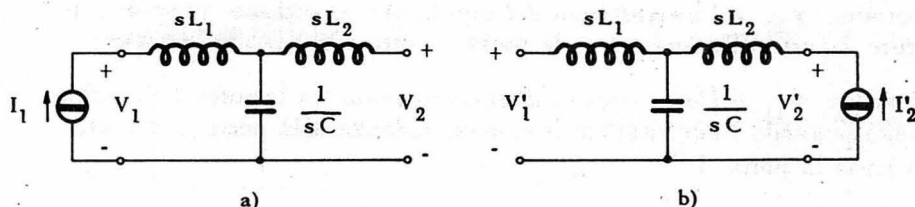


Fig.VI.5.3 - Situazioni operative per il calcolo dei termini della matrice impedenze a vuoto della rete di fig.VI.4.1.

$$z_{22} = \frac{V_2'}{I_2'} = sL_2 + \frac{1}{sC}$$

$$z_{12} = \frac{V_1'}{I_2'} = \frac{1}{sC}$$

VI.5.2 - Matrice ammettenze di corto circuito.

L'interpretazione fisica di ciascun parametro di questa rappresentazione si ottiene, come nel caso della matrice delle impedenze a vuoto, scrivendo le equazioni di definizione per esteso ed individuando le situazioni operative che corrispondono all'annullamento, una per volta, delle grandezze considerate indipendenti, cioè V_1 e V_2 . In figura VI.5.4 sono mostrate le due situazioni operative risultanti. Con riferimento a questa figura, otteniamo:

$$(VI.5.6) \quad \begin{aligned} y_{11} &= \left(\frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0} ; & y_{21} &= \left(\frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0} \\ y_{22} &= \left(\frac{I_2'}{V_2'} \right)_{V_1=0} ; & y_{12} &= \left(\frac{I_1'}{V_2'} \right)_{V_1=0} \end{aligned}$$

Le formule precedenti mettono in evidenza che:

- 1) il termine y_{11} è l'ammettenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua prima porta e corto-circuitando la seconda;
- 2) il termine y_{21} è l'ammettenza di trasferimento tra le porte 1 e 2 che si ottiene ponendo l'eccitazione in corrispondenza alla porta 1 e corto-circuitando la porta 2;

3) il termine y_{22} è l'ammettenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua seconda porta e corto-circuitando la prima;

4) il termine y_{12} è l'ammettenza di trasferimento tra le porte 1 e 2, che si ottiene ponendo l'eccitazione in corrispondenza alla porta 2 e corto-circuitando la porta 1.

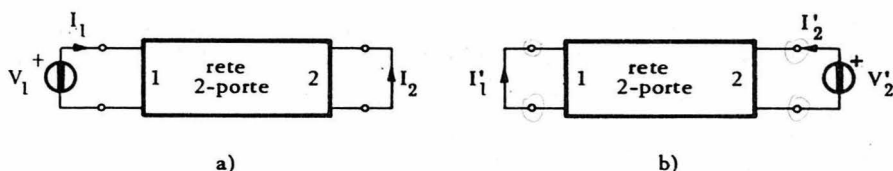


Fig.VI.5.4 - Situazioni operative per l'interpretazione fisica dei termini della matrice ammettenze di corto-circuito.

Esempio VI.5.4

Determinare la matrice ammettenze di corto-circuito della rete 2-porte di figura VI.4.1.

In fig.VI.5.5 riportiamo le due situazioni operative necessarie per calcolare i termini della matrice. Risulta, con riferimento alla fig.VI.5.5 a):

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\frac{1}{sL_1} \left(\frac{1}{sL_2} + sC \right)}{sC + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)} = \frac{s^2 L_2 C + 1}{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{sL_1}}{\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + sC} \left(\frac{-1}{sL_2} \right) = \frac{-1}{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}$$

e con riferimento alla fig.VI.5.5 b):

$$y_{22} = \frac{I'_2}{V'_2} = \frac{\frac{1}{sL_2} \left(\frac{1}{sL_1} + sC \right)}{sC + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)} = \frac{s^2 L_1 C + 1}{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}$$

$$V = R \cdot I$$

$$P = V \cdot I$$

$$y_{12} = \frac{I'_1}{V'_2} = \frac{\frac{1}{sL_2}}{\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{sL_1} + sC} \left(\frac{-1}{sL_1} \right) = \frac{-1}{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}$$

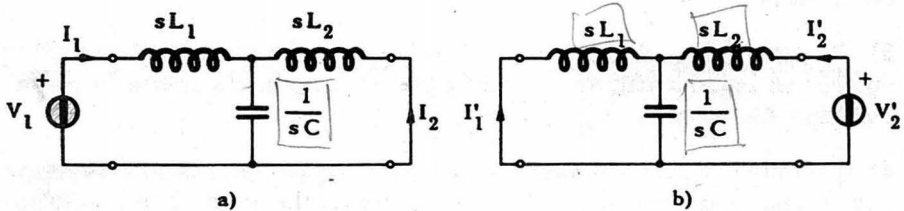


Fig.VI.5.5 - Situazioni operative per il calcolo della matrice ammettenze di corto-circuito della rete di fig. VI.4.1.

VI.5.3 - Matrice ibrida [H].

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Scrivendo le equazioni di definizione per esteso, si individuano facilmente le situazioni operative che corrispondono all'annullamento, una alla volta, delle grandezze considerate indipendenti, cioè I_1 e V_2 . In fig. VI.5.6 sono mostrate le due situazioni operative risultanti, rispetto alle quali si ha:

$$(VI.5.7) \quad \begin{aligned} h_{11} &= \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{V_2=0} & h_{21} &= \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{V_2=0} \\ h_{22} &= \left(\frac{I'_2}{V'_2} \right)_{I_1=0} & h_{12} &= \left(\frac{V'_1}{V'_2} \right)_{I_1=0} \end{aligned}$$

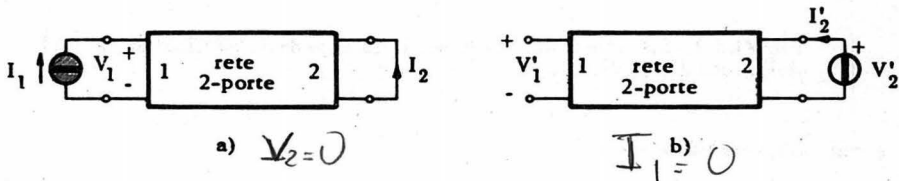


Fig.VI.5.6 - Situazioni operative per il calcolo della matrice ibrida [H].

Le formule precedenti mettono in evidenza che:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

1) il termine h_{11} è l'impedenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua prima porta e corto-circuitando la seconda. È evidente che risulta $h_{11} = \boxed{1/y_{11}}$;

2) il termine h_{21} è la funzione di trasferimento in corrente tra le porte 1 e 2 che si ottiene ponendo l'eccitazione alla porta 1 e corto-circuitando la porta 2;

3) il termine h_{22} è l'ammettenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua seconda porta e lasciando aperta la prima. È evidente che risulta $h_{22} = \boxed{1/z_{22}}$;

4) il termine h_{12} è la funzione di trasferimento in tensione tra le porte 1 e 2 che si ottiene ponendo l'eccitazione alla porta 2 e lasciando aperta la porta 1.

Esempio VI.5.5

Determinare la matrice ibrida $[H]$ della rete 2-porte di fig. VI.4.1.

In fig. VI.5.7 riportiamo le due situazioni operative necessarie per calcolare i termini della matrice. Risulta, con riferimento alla fig. VI.5.7 a):

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}{s^2 L_2 C + 1} \quad ; \quad h_{21} = -\frac{1}{s^2 L_2 C + 1}$$

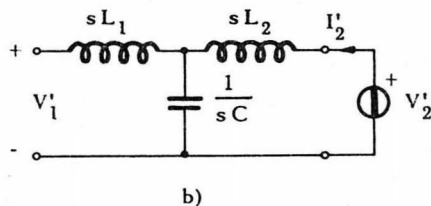
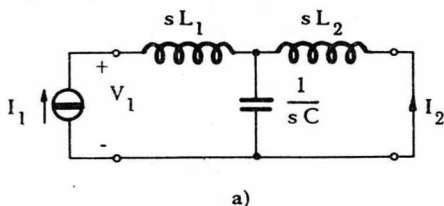


Fig. VI.5.7 - Situazioni operative per il calcolo della matrice ibrida $[H]$ della rete di fig. VI.4.1.

e con riferimento alla fig. VI.5.7 b):

$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{sC}{s^2 L_2 C + 1} \quad ; \quad h_{12} = \frac{1}{s^2 L_2 C + 1}$$

VI.5.4 - Matrice ibrida $[G]$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Scrivendo le equazioni di definizione per esteso, si individuano facilmente le situazioni operative che corrispondono all'annullamento, una alla volta, delle grandezze considerate indipendenti, cioè V_1 e I_2 . In fig. VI.5.8 sono mostrate le due situazioni operative risultanti, rispetto alle quali si ha:

$$(VI.5.8) \quad \begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{I_1}{V_1} \right)_{I_2=0} & g_{21} &= \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{I_2=0} \\ g_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{V_1=0} & g_{12} &= \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{V_1=0} \end{aligned} \quad \begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{21} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

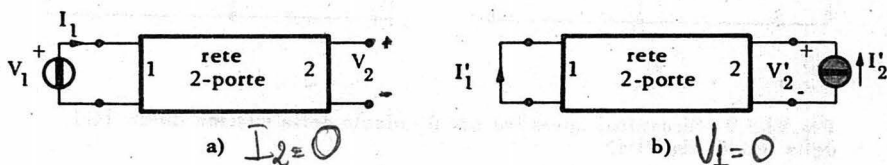


Fig. VI.5.8 - Situazioni operative per il calcolo della matrice ibrida $[G]$.

Le formule precedenti mettono in evidenza che:

- 1) il termine g_{11} è l'ammettenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua prima porta e lasciando aperta la seconda. È evidente che risulta $g_{11} = 1/z_{11}$;
- 2) il termine g_{21} è la funzione di trasferimento in tensione tra le porte 1 e 2 che si ottiene ponendo l'eccitazione alla porta 1 e lasciando aperta la porta 2;
- 3) il termine g_{22} è l'impedenza del bipolo che si ottiene considerando la rete 2-porte alla sua seconda porta e corto-circuitando la prima. È evidente che risulta $g_{22} = 1/y_{22}$;
- 4) il termine g_{12} è la funzione di trasferimento in corrente tra le porte 1 e 2 che si ottiene ponendo l'eccitazione alla porta 2 e corto-circuitando la porta 1.

Esempio VI.5.6

Determinare la matrice ibrida $[G]$ della rete 2-porte di fig. VI.4.1.

In fig. VI.5.9 riportiamo le due situazioni operative necessarie per calcolare i termini della matrice. Risulta, con riferimento alla fig. VI.5.9 a):

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{sC}{s^2 L_1 C + 1} \quad ; \quad g_{21} = \frac{1}{s^2 L_1 C + 1}$$

e con riferimento alla fig. VI.5.9 b):

$$g_{22} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{s^3 C L_1 L_2 + s(L_1 + L_2)}{s^2 L_1 C + 1} \quad ; \quad g_{12} = -\frac{1}{s^2 L_1 C + 1}$$

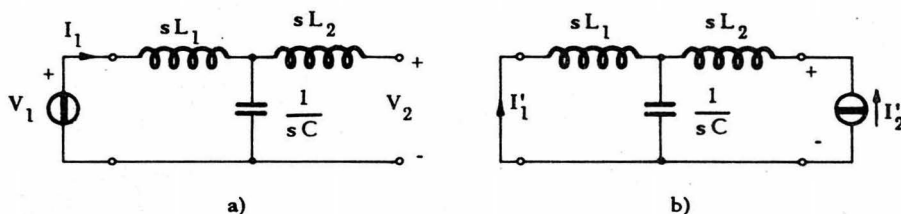


Fig. VI.5.9 - Situazioni operative per il calcolo della matrice ibrida $[G]$ della rete di fig. VI.4.1.

VI.5.5 - Matrice di trasmissione.

La più usata tra le matrici di trasmissione, elencate in tabella VI.5.1, è quella inversa, per cui usualmente quando si parla di «matrice di trasmissione» ci si riferisce a questa. Per questa ragione nel presente paragrafo ci limiteremo a considerare solo questo tipo di matrice di trasmissione, indicandola nel modo usuale suddetto. Scrivendo le equazioni di definizione di tale rappresentazione, cioè:

$$(VI.5.9) \quad \begin{cases} V_1 = A V_2 + B (-I_2) \\ I_1 = C V_2 + D (-I_2) \end{cases}$$

si nota che le variabili indipendenti appartengono ambedue alla porta 2. Ciò implica che l'eccitazione e la chiusura devono essere alla stessa porta; per poter raggiungere questo scopo è inevitabile l'uso del nullo che è appunto caratterizzato da due vincoli alla stessa porta. Si ottengono perciò le due situazioni operative indicate nella fig. VI.5.10, rispetto alle quali si ha:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$(VI.5.10) \quad \begin{aligned} A &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{I_2=0} & C &= \left(\frac{I_1}{V_2} \right)_{I_2=0} \\ B &= \left(\frac{V'_1}{-I'_2} \right)_{V'_2=0} & D &= \left(\frac{I'_1}{-I'_2} \right)_{V'_2=0} \end{aligned}$$

Le formule precedenti mettono in evidenza che i termini della matrice di trasmissione sono tutte funzioni di trasferimento; inoltre la loro definizione è strettamente connessa alla presenza del nullore.

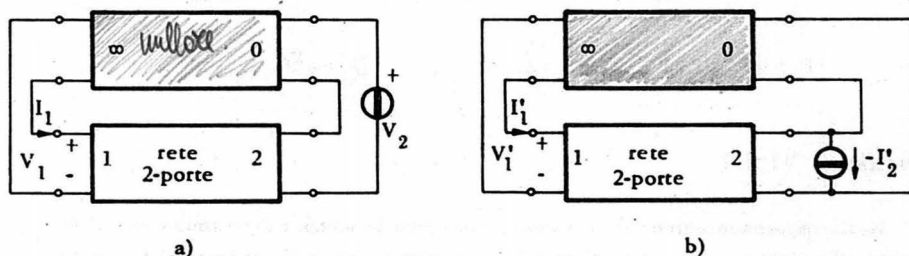


Fig.VI.5.10 - Situazioni operative per il calcolo della matrice di trasmissione. Nel caso a) il nullore permette di applicare la tensione V_2 alla porta 2 senza assorbimento di corrente, mentre nel caso b) permette di applicare la corrente $-I'_2$, con tensione V'_2 uguale a zero. In ambedue i casi lascia indeterminate entrambe le grandezze elettriche alla porta 1.

Esempio VI.5.7

Determinare la matrice di trasmissione della rete 2-porte di fig.VI.4.1.

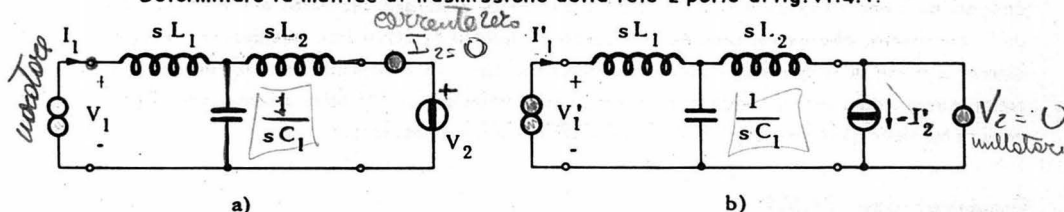


Fig.VI.5.11 - Situazioni operative per il calcolo dei termini della matrice di trasmissione del circuito di fig.VI.4.1; i nullori sono stati scissi nei due elementi nullatore e noratore.

In fig.VI.5.11 riportiamo le due situazioni operative necessarie per calcolare i termini della matrice (per evitare confusione tra la capacità ed il termine C della rappresentazione, abbiamo indicato la capacità con C_1). Con riferimento alla fig.VI.5.11 a), calcoliamo i termini A e C . Alla porta 2, per la presenza del nullore e del generatore di tensione, la tensione è pari a V_2 e la corrente è nulla. Pertanto, si ha:

$$(VI.5.11) \quad \begin{aligned} I_1 &= sC_1 V_2 \\ V_1 &= V_2 + sL_1 I_1 = V_2 + s^2 L_1 C_1 V_2 \end{aligned}$$

da cui:

$$(VI.5.12) \quad A = 1 + s^2 L_1 C_1 \quad ; \quad C = s C_1$$

Con riferimento alla fig. VI.5.11 b), calcoliamo i termini B e D. Alla porta 2 risulta, per la presenza del nullore e del generatore di corrente, la tensione nulla e la corrente (uscente) uguale a $-I'_2$. Pertanto, detta V_0 la tensione ai capi di C_1 , si ha:

$$(VI.5.13) \quad \begin{aligned} I'_1 &= -I'_2 + s C_1 V_0 = -I'_2 - s^2 C_1 L_2 I'_2 \\ V'_1 &= V_0 + s L_1 I'_1 = -s L_2 I'_2 - s L_1 (1 + s^2 C_1 L_2) I'_2 \end{aligned}$$

da cui:

$$(VI.5.14) \quad B = s^3 C_1 L_1 L_2 + s (L_1 + L_2) \quad ; \quad D = s^2 C_1 L_2 + 1$$

Osservazione VI.5.1

Nella rappresentazione di una rete 2-porte con la matrice di trasmissione si fa riferimento alla corrente $-I'_2$. La ragione del segno negativo è di rendere più facile lo uso della matrice di trasmissione nell'analisi di una rete 2-porte, costituita dalla cascata di più reti 2-porte. Vedremo questo punto in dettaglio nel § VI.8.

Osservazione VI.5.2

Come è stato detto all'inizio di questo paragrafo, tutte le rappresentazioni precedenti possono essere ottenute a partire da quella generale descritta nel § VI.4.1. Un utile esercizio, che viene lasciato al lettore, è quello di effettuare tale derivazione per la rete 2-porte dell'esempio VI.4.1, controllando che i termini delle matrici delle varie rappresentazioni, ottenuti per questa via, siano uguali a quelli ottenuti mediante i procedimenti operativi descritti in dettaglio nel presente paragrafo.

Osservazione VI.5.3

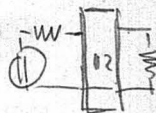
È importante osservare che la determinazione dei parametri A, B, C, D può essere effettuata anche senza utilizzare il nullore e facendo riferimento ad una qualsiasi chiusura della rete 2-porte. L'utilizzazione del nullore rende omogenea la definizione di questi parametri rispetto alle altre rappresentazioni.

VI.6 - Rappresentazioni delle reti 2-porte orientate verso la sintesi.

Un importante aspetto della rappresentazione di una rete 2-porte riguarda la sua utilizzazione in fase di sintesi della rete stessa. Le rap-

presentazioni precedentemente illustrate non sono adatte a questo scopo per due ragioni:

- 1) non permettono di controllare facilmente, in una rete costituita da una cascata di reti 2-porte semplici, il trasferimento globale del segnale in funzione del trasferimento entro ciascun blocco; tale aspetto è molto importante e si presenta comunemente nelle applicazioni;
- 2) non permettono di tenere conto in modo semplice del tipo più comune di chiusura di una rete 2-porte, cioè tra un generatore con impedenza interna puramente resistiva ed un carico anch'esso resistivo;



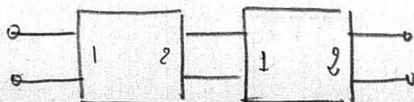
Le due rappresentazioni che descriveremo nel presente paragrafo permettono in parte di soddisfare le due esigenze precedenti. In particolare, la prima, basata sui «parametri immagine» è orientata al soddisfacimento totale della prima esigenza suddetta e risolve parzialmente la seconda. La seconda rappresentazione, basata sulla «matrice di diffusione», soddisfa esattamente la seconda esigenza, non curando la prima. I procedimenti di sintesi a cui conducono i due tipi di rappresentazione sono completamente diversi; in particolare, la sintesi basata sulla matrice di diffusione richiede calcoli di elevata complessità il cui svolgimento necessita l'uso di mezzi automatici di calcolo. Ciò a differenza della sintesi basata sui parametri immagine che porta a procedimenti controllabili con modesti mezzi di calcolo.

VI.6.1 - Rappresentazione mediante i parametri immagine.

L'obiettivo di questa rappresentazione è quello di individuare facilmente le condizioni per cui, in una cascata di reti 2-porte, queste si comportano ciascuna in modo noto, indipendente dalle reti confinanti, con la conseguenza che il trasferimento del segnale nella rete risultante si può ottenere in modo molto semplice dalla combinazione del trasferimento in ciascuna rete componente.

Lo scopo precedente viene raggiunto con i seguenti quattro parametri, come vedremo in dettaglio successivamente nell'osservazione VI.6.1:

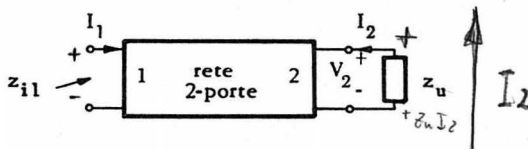
Impedenze immagini. Per definire le impedenze immagini è opportuno preventivamente osservare che l'impedenza, che una rete 2-porte presenta ad una sua porta quando l'altra è chiusa su un bipolo di impedenza z_u , è funzione sia dei parametri che caratterizzano la rete 2-porte, sia dell'impedenza z_u . Per vedere ciò facciamo riferimento alla fig. VI.6.1 e supponiamo di usare la rappresentazione $[Z]$ per la rete 2-porte. L'impedenza z_{i1} vale:



$$\begin{cases} z_{u1} I_1 + z_{12} I_2 = V_{p1} \\ z_{21} I_1 + (z_{22} + z_u) I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{u1} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = -z_u I_2 \end{aligned}$$

Fig. VI.6.1 - Bipolo ottenuto chiudendo la seconda porta di una rete due porte su un bipolo di impedenza z_u .



$$(VI.6.1) \quad z_{i1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11} I_1 + z_{12} I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1}$$

Utilizzando la seconda equazione caratteristica della rappresentazione Z , insieme con la condizione imposta dalla chiusura, abbiamo:

$$(VI.6.2) \quad \begin{cases} V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \\ V_2 = -z_u I_2 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$(VI.6.3) \quad \frac{I_2}{I_1} = - \frac{z_{21}}{z_{22} + z_u}$$

Inserendo la (VI.6.3) nella (VI.6.1), risulta:

$$(VI.6.4) \quad z_{i1} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + z_u}$$

Si vede chiaramente dalla (VI.6.4) che z_{i1} dipende dai termini di $[Z]$ e da z_u come affermato. Al variare di z_u è evidente che z_{i1} varia. Nello stesso modo, si può vedere che l'impedenza z_{i2} alla porta 2, quando la porta 1 è chiusa su z_u vale:

$$z_{i2} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + z_u}$$

Le impedenze immagini vengono definite come quelle particolari impedenze Z_{i1} e Z_{i2} , per cui si verifica che, quando la porta 2 è chiusa su un bipolo di impedenza Z_{i2} , allora si ha $z_{i1} = Z_{i1}$, e inoltre quando la porta 1 è chiusa su Z_{i1} , allora si ha $z_{i2} = Z_{i2}$; cioè:

$$(VI.6.6) \quad Z_{i1} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_{i2}}$$

$$Z_{i2} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_{i1}}$$

La ragione del nome di impedenze immagini è messa in evidenza in figura VI.6.2, dove sono indicate esplicitamente anche le impedenze che si vedono in corrispondenza alle porte. È chiaro dalla figura che quando le porte sono chiuse sulle impedenze immagine è come se ciascun bipo lo vedesse la propria immagine guardando dentro la rete 2-porte;

Fig. VI.6.2 - Situazione operativa per la definizione delle impedenze immagini.



2) esponenti di trasduzione su base immagine. Questi parametri della rappresentazione che stiamo descrivendo riguardano il trasferimento del segnale entro la rete 2-porte in una situazione standard di chiusura. Precisamente si suppone la rete 2-porte eccitata in modo qualsiasi ad una porta e chiusa sulla propria impedenza immagine all'altra. Si hanno i due schemi di fig. VI.6.3. Con riferimento alla parte a) di questa figura, si definisce il primo dei parametri, cioè l'esponente di trasduzione su base immagine ingresso-uscita:

(VI.6.7)

$$\gamma_{12} = \ln \sqrt{\frac{I_1 V_1}{-I_2 V_2}}$$

Potenza entrante alla porta 1
Potenza erogata dall'imp. immagine \$Z_{i2}\$

in cui $\ln$ indica il valore principale del logaritmo naturale. Il secondo parametro è l'esponente di trasduzione su base immagine uscita-ingresso, definito, con riferimento alla fig. VI.6.3 b).

(VI.6.8)

$$\gamma_{21} = \ln \sqrt{\frac{I'_2 V'_2}{-I'_1 V'_1}}$$

Pot. entrante
Potenza erogata da \$Z_{i1}\$

È importante notare che la definizione dei due parametri precedenti si riferisce alla chiusura della rete 2-porte sulla propria impedenza immagine.

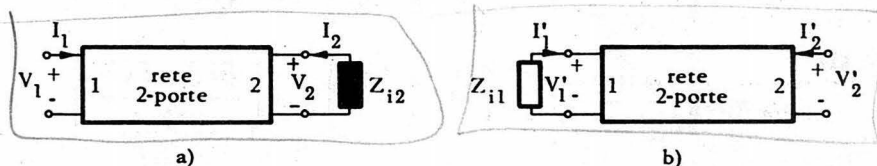


Fig. VI.6.3 - Schemi per la definizione degli esponenti di trasduzione su base immagine. L'eccitazione della rete 2-porte può essere qualsiasi.

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{Z_{11}(Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12})}{Z_{22}}}$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\frac{Z_{22}(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})}{Z_{11}}}$$

I quattro parametri immagine rappresentano completamente la rete 2-porte e quindi possono ricavarsi direttamente da qualsiasi altra rappresentazione della rete stessa. Particolarmente usate sono le formule di passaggio a partire dalla rappresentazione matrice di trasmissione $[T]$, che ricaviamo come esempio.

Esempio VI.6.1

Determinare le espressioni dei quattro parametri immagine a partire dai termini della matrice di trasmissione $[T]$.

Le impedenze immagini si ottengono esprimendo le impedenze di ingresso della rete nella situazione di fig. VI.6.2 in funzione della rappresentazione $[T]$. Si ha:

$$Z_{i1} = \frac{A V_2 + B (-I_2)}{C V_2 + D (-I_2)} = \frac{A Z_{i2} + B}{C Z_{i2} + D} \quad (\text{VI.6.9})$$

$$Z_{i2} = \frac{D Z_{i1} + B}{C Z_{i1} + A}$$

Da queste si ricava:

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad ; \quad Z_{i2} = \sqrt{\frac{DB}{AC}} \quad (\text{VI.6.10})$$

È interessante osservare che si possono avere due valori di impedenze immagini; si sceglie usualmente quello che ha parte reale positiva in funzione di ω , nell'ipotesi che i vari parametri si riferiscano a regime permanente sinusoidale di pulsazione ω . Per il calcolo degli esponenti di trasduzione su base immagine si fa riferimento alla fig. VI.6.3. Risultata:

$$\gamma_{12} = \ln \sqrt{\frac{Z_{i1} I_1^2}{Z_{i2} (-I_2)^2}} = \ln \left[\sqrt{\frac{A}{D}} (C Z_{i2} + D) \right] = \ln \left[\sqrt{BC} + \sqrt{AD} \right] \quad (\text{VI.6.11})$$

$$\gamma_{21} = \ln \sqrt{\frac{Z_{i2} I_2^2}{Z_{i1} (-I_1)^2}} = \ln \left[\sqrt{\frac{D}{A}} \frac{C Z_{i1} + A}{\Delta} \right] = \ln \left[\frac{\sqrt{BC} + \sqrt{AD}}{\Delta} \right]$$

con: $\Delta = AD - BC$.

Osservazione VI.6.1

L'obiettivo della rappresentazione mediante i parametri immagine è quello di controllare in modo semplice il contributo di ciascun blocco elementare nella cascata di celle elementari in cui si può pensare suddivisa una rete 2-porte. La base di questo controllo è la proprietà tipica di connessione tra la rappresentazione «immagine» della rete 2-porte globale e la rappresentazione «immagine» delle reti 2-porte componenti della cascata, quando si soddisfa alla condizione di «chiusura su base immagine». Per chiusura su base immagine di una cascata di reti 2-porte s'intende quella particolare situazione per cui ciascuna rete componente della cascata vede alla propria sinistra la propria impedenza immagine Z_{i1} ed alla propria destra l'analoga Z_{i2} . È evidente che una cascata di reti 2-porte può essere chiusa su base immagine solo se tale situazione è stata prevista appositamente in fase di sintesi. La proprietà tipica di connessione tra rappresentazioni immagine è la seguente:

Proprietà VI.6.1 - «I parametri immagine di una rete 2-porte costituita da una cascata di reti 2-porte, chiuse su base immagine, sono tali che:

1) le impedenze immagini coincidono rispettivamente con le $Z_{i1}^{(1)}$ e $Z_{i2}^{(N)}$ in cui $Z_{i1}^{(1)}$ è l'impedenza immagine alla prima porta della prima rete della cascata e $Z_{i2}^{(N)}$ quella alla seconda porta dell'ultima rete della cascata, essendo N il numero delle reti componenti;

2) gli esponenti di trasduzione su base immagine sono:

$$(VI.6.12) \quad \gamma_{12} = \sum_{k=1}^N \gamma_{12}^{(k)} ; \quad \gamma_{21} = \sum_{k=1}^N \gamma_{21}^{(k)}$$

in cui con k si indica la k -esima rete componente».

La verifica di questa proprietà è immediata. Infatti, con riferimento alla figura VI.6.4, vediamo che:

$$(VI.6.13) \quad V_1^{(k)} = V_2^{(k-1)} ; \quad I_1^{(k)} = -I_2^{(k-1)}$$

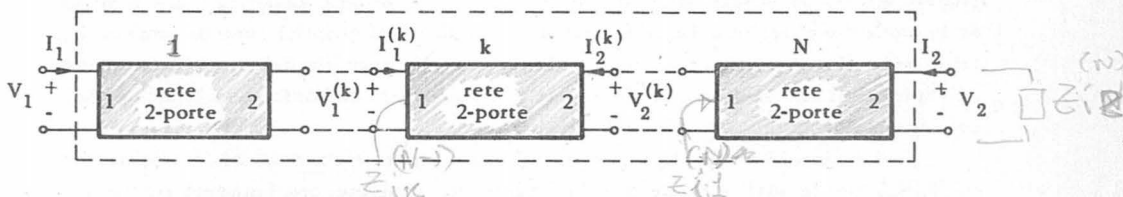


Fig. VI.6.4 - Rete 2-porte costituita da una cascata di reti 2-porte.

Quindi se supponiamo la rete 2-porte globale chiusa a destra su $Z_{i2}^{(N)}$, allora risulta:

$$(VI.6.14) \quad \frac{V_1^{(N)}}{I_1^{(N)}} = Z_{i1}^{(N)}$$

D'altra parte, per l'ipotesi di chiusura su base immagine della cascata, deve essere:

$$(VI.6.15) \quad Z_{i2}^{(N-1)} = Z_{i1}^{(N)}$$

Quindi si ha:

$$(VI.6.16) \quad \frac{V_1^{(N-1)}}{I_1^{(N-1)}} = Z_{i1}^{(N-1)}$$

Continuando in questo modo si arriva alla prima porta della prima rete componente e si trova che l'impedenza di ingresso coincide con $Z_{i1}^{(1)}$. Analogamente, se si suppone di porre in ingresso $Z_{i1}^{(1)}$, si ottiene che alla seconda porta dell'ultima rete componente si vede $Z_{i2}^{(N)}$. Ciò dimostra il punto 1) della proprietà VI.6.1. Per quanto riguarda il punto 2), utilizziamo le (VI.6.7) e (VI.6.8). Nel caso di γ_{12} , facendo riferimento alla fig. VI.6.4, chiudiamo in uscita la rete globale sull'impedenza caratteristica $Z_{i2}^{(N)}$, come richiesto dallo schema a) di fig. VI.6.3; si ha, tenendo conto delle (VI.6.13) e della chiusura su base immagine:

$$(VI.6.17) \quad \gamma_{12} = \ln \sqrt{\frac{I_1 V_1}{-I_2 V_2}} = \ln \sqrt{\frac{I_1^{(1)} V_1^{(1)}}{-I_2^{(N)} V_2^{(N)}}} = \sum_{k=1}^N \ln \sqrt{\frac{I_1^{(k)} V_1^{(k)}}{-I_2^{(k)} V_2^{(k)}}} = \sum_{k=1}^N \gamma_{12}^{(k)}$$

Relative alla 1ª porta
Relative alla Nª porta

Handwritten notes:
Left side: $K=1 \dots N$, $\frac{V_1^{(K)}}{V_2^{(K)} (-I_2^{(K)})}$
Right side: $\gamma_{12}^{(k)}$

Un risultato analogo si ha utilizzando la (VI.6.8) per γ_{21} .

La proprietà VI.6.1 è il fondamento dei procedimenti di sintesi delle reti 2-porte, basati sui parametri immagine. Vediamo infatti dalle (VI.6.12) che il trasferimento globale attraverso la rete, misurato da γ_{12} e γ_{21} si ottiene semplicemente sommando le analoghe quantità delle reti componenti; inoltre tali quantità sono determinabili a priori una volta per tutte. È ovvio che questa notevole semplificazione è conseguenza dell'ipotesi di chiusura su base immagine che può essere soddisfatta dalla rete globale solo in fase di sintesi.

Le singole reti 2-porte componenti sono sezioni elementari ad «L» del tipo di fig. VI.6.5, per le quali è facile dedurre i parametri immagine; precisamente risulta:

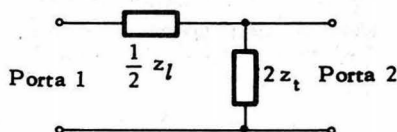
$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{z_l}{2z_t} \right)$$

$$(VI.6.18) \quad Z_{i1} = \sqrt{z_l z_t \left(1 + \frac{z_l}{4 z_t}\right)}; \quad Z_{i2} = \sqrt{\frac{z_l z_t}{1 + \frac{z_l}{4 z_t}}}$$

Tali formule si semplificano ulteriormente imponendo un vincolo sulle impedenze z_l e z_t , cioè che $z_l z_t = K^2$, con K costante reale. Con tali semplificazioni, la sintesi viene effettuata con l'ausilio di una serie di grafici sui quali sono riportati gli andamenti, in funzione della frequenza, delle parti reale ed immaginaria di γ_{12} per la singola sezione ad «L», in funzione di un opportuno parametro atto a caratterizzare la cella (oltre al parametro K).

Per quanto riguarda la condizione di chiusura su base immagine della cascata, essa è soddisfatta solo parzialmente, essendo richiesta la chiusura della rete globale su un singolo resistore (che viene scelto di valore pari alla costante K). D'altra parte l'impedenza immagine alla seconda porta della rete globale non è affatto resistiva, come si può dedurre dalla (VI.6.18); si ha come conseguenza un discostamento che può essere valutato con l'ausilio di una seconda serie di grafici che ci forniscono l'andamento delle impedenze immagini in funzione della frequenza e dei parametri caratterizzanti la cella ad «L». Come effetto si ha una deviazione tra il comportamento calcolato con i parametri immagine e quello ottenuto; tuttavia, è sempre possibile controllare la deviazione suddetta entro limiti accettabili⁽¹⁾.

Fig. VI.6.5 - Sezione ad «L» presa come blocco elementare costituente della cascata delle reti 2-porte più usate nelle applicazioni.



È da notare la grande flessibilità del procedimento di sintesi risultante, che lo rende atto a tenere conto facilmente di vincoli particolari sui componenti della rete, dovuti, ad esempio, alla tecnologia usata. Un esempio tipico in questo senso è il caso dei circuiti elettromeccanici, utilizzando barrette di acciaio come risonatori, in cui, ad esempio, si vuole imporre il vincolo che le barrette abbiano tutte lo stesso diametro trasversale (appendice B).

VI.6.2 - Rappresentazione mediante la matrice di diffusione.

L'obiettivo di questa rappresentazione è di tenere conto della chiusura delle porte della rete 2-porte così come si presenta nelle appli-

(1) - Per ulteriori dettagli sui parametri immagine e sul loro uso per la sintesi, si rimanda al testo: W. Cauer, «Synthesis of linear communication networks», Mc Graw-Hill, 1958 Cap. VI e VII.

cazioni. Un vantaggio ulteriore che si ottiene, come vedremo nel §VI.7, è la possibilità di caratterizzare in modo semplice il trasferimento di potenza attiva attraverso la rete dal generatore al carico.

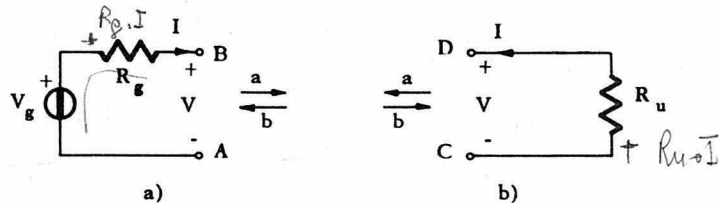


Fig.VI.6.6 - Chiusure usuali nelle applicazioni per una rete 2-porte.

La rappresentazione che consideriamo si basa sull'uso, in corrispondenza ad ambedue le porte della rete, delle grandezze a e b (onda diretta e onda riflessa), introdotte nel §VI.2.1 per i bipoli. Facciamo vedere come si può tenere conto in modo semplice con tali grandezze delle chiusure usuali della rete 2-porte. In fig. VI.6.6 riportiamo a questo scopo le chiusure in questione; precisamente in a) viene mostrato il generatore con la sua impedenza interna ed in b) il carico di tipo resistivo. Nel primo caso, utilizzando le (VI.2.4) e scegliendo come costante di normalizzazione alla porta A-B la resistenza R_g del generatore, si ha⁽¹⁾:

$$(VI.6.19) \quad a = \frac{1}{2} \frac{V}{\sqrt{R_g}} + \frac{\sqrt{R_g}}{2} I = \frac{1}{2\sqrt{R_g}} (V + R_g I) = \frac{V_g}{2\sqrt{R_g}}$$

Quindi l'onda incidente a è completamente definita dal generatore ed in particolare, nel caso dei fasori, il suo modulo al quadrato coincide con il doppio della potenza disponibile del generatore, cioè:

$$(VI.6.20) \quad |a|^2 = \frac{|V_g|^2}{4R_g} = 2P_d$$

Per quanto riguarda il carico, usando come costante di normalizzazione alla porta C-D la resistenza di carico R_u ed applicando le formule (VI.2.4), si ha:

(1) - È opportuno notare che consideriamo le grandezze a e b rispetto alle porte della rete 2-porte. Tuttavia, ciò definisce anche le analoghe grandezze verso i bipoli; infatti basta scambiare il ruolo di a e b in fig. VI.6.6 per definire tali grandezze per i bipoli invece che per la rete 2-porte.

$$b = \frac{1}{2\sqrt{R_g}} V - \frac{1}{2\sqrt{R_g}} R_g I = \frac{1}{2\sqrt{R_g}} V - \frac{1}{2\sqrt{R_g}} R_g I = \frac{1}{2\sqrt{R_g}} (V - R_g I)$$

$$V_g = R_g I + V$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{V}{\sqrt{R_u}} + \frac{\sqrt{R_u}}{2} I = \frac{1}{2} \frac{-R_u I}{\sqrt{R_u}} + \frac{\sqrt{R_u}}{2} I = 0$$

(VI.6.21)

$$b = \frac{1}{2} \frac{V}{\sqrt{R_u}} - \frac{\sqrt{R_u}}{2} I = \frac{1}{2 \sqrt{R_u}} (V - R_u I) = \frac{V}{\sqrt{R_u}}$$

Quindi l'onda incidente sul carico è nulla e l'onda riflessa è legata direttamente alla tensione su di esso, in modo tale che, nel caso dei fasori, il modulo al quadrato di b è il doppio della potenza ceduta al carico, cioè:

(VI.6.22)

$$|b|^2 = \frac{|V|^2}{R_u} = 2P_u$$

Ognuna delle porte della rete può essere caratterizzata tramite le grandezze a e b . L'effetto della rete 2-porte è quello di stabilire un legame costituito da due equazioni lineari tra le quattro grandezze a_1 , a_2 , b_1 , b_2 delle due porte. Si ottiene una rappresentazione esplicitandone due in funzione delle rimanenti due. È chiaro quindi che si potrebbero avere sei rappresentazioni, come nel caso delle grandezze tensione e corrente. Tuttavia, nel caso presente, con le chiusure di fig. VI.6.6, abbiamo visto che risultano completamente determinate le a , cioè supponendo di chiudere la prima porta con il generatore di fig. VI.6.6a) e la seconda porta con il carico di fig. VI.6.6b), avremo:

$$(VI.6.23) \quad a_1 = \frac{V_g}{2 \sqrt{R_g}} \quad ; \quad a_2 = 0$$

Risulta perciò naturale esplicitare le grandezze b_1 e b_2 in funzione di a_1 e a_2 , proprio perché la presente rappresentazione ha lo scopo di trattare nel modo più semplice possibile una rete 2-porte chiusa nel modo visto⁽¹⁾. Risulta allora:

(VI.6.24)

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11} a_1 + s_{12} a_2 \\ b_2 &= s_{21} a_1 + s_{22} a_2 \end{aligned}$$

(1) - Per altre rappresentazioni con le grandezze a e b , si veda: H.J.Carlin, A.B.Giordano, op. cit. § IV.11.

oppure in forma matriciale:

$$(VI.6.25) \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $[S]$ prende il nome di «matrice di diffusione» e costituisce la rappresentazione cercata. Il suo nome deriva dalla interpretazione della grandezze a e b come onde incidenti e riflesse dalla rete, come messo in evidenza in fig.VI.6.7.

Fig.VI.6.7 - Interpretazione delle grandezze a e b come onde incidenti e riflesse dalla rete 2-porte.



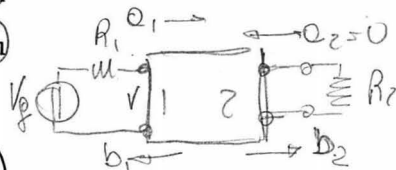
Può risultare utile fornire una interpretazione operativa della matrice $[S]$. A questo scopo dobbiamo individuare l'eccitazione e la chiusura che corrispondono rispettivamente alle due situazioni $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ e $a_1 = 0, a_2 \neq 0$, nel caso più generale in cui le costanti di normalizzazione alle due porte siano R_1 e R_2 . Nel primo caso, tenendo conto di quanto detto in relazione alla fig.VI.6.6, risulta che la seconda porta deve essere chiusa sulla resistenza R_2 . Quindi le (VI.6.24) divengono:

$$(VI.6.26) \quad \begin{aligned} b_1 &= s_{11} a_1 \\ b_2 &= s_{21} a_1 \end{aligned}$$

che forniscono rispettivamente:

$$(VI.6.27) \quad s_{11} = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)_{a_2=0}$$

$$s_{21} = \left(\frac{b_2}{a_1} \right)_{a_2=0}$$



Dall'esame delle (VI.6.27) si deduce che:

1) s_{11} è il coefficiente di riflessione del bipolo che si ottiene chiudendo la porta 2 sulla resistenza R_2 (costante di normalizzazione alla porta 2) e considerando l'ingresso alla prima porta. La costante di normalizzazione con cui è calcolato s_{11} è chiaramente pari a R_1 .

2) s_{21} si può interpretare facilmente facendo riferimento alle tensioni. Tenendo conto di quanto detto a proposito della fig. VI.6.6, cioè delle formule (VI.6.19) e (VI.6.21) e supponendo di usare un generatore con impedenza interna uguale a R_1 , si ha:

$$(VI.6.28) \quad b_2 = \frac{V_2}{\sqrt{R_2}} \quad ; \quad a_1 = \frac{V_g}{2\sqrt{R_1}} \quad \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_2}{\sqrt{R_2}} \cdot \frac{2\sqrt{R_1}}{V_g} = 2 \frac{V_2}{V_g} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

Quindi la seconda delle (VI.6.27) diviene:

$$(VI.6.29) \quad s_{21} = 2 \frac{V_2}{V_g} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

Il termine s_{21} è quindi proporzionale alla funzione di trasferimento in tensione tra l'uscita chiusa su R_2 ed il generatore di impedenza interna R_1 . Particolarmente importante è il significato fisico del modulo al quadrato di s_{21} nel caso dei fasori, cioè:

$$(VI.6.30) \quad |s_{21}|^2 = \frac{\frac{|V_2|^2}{R_2}}{\frac{|V_g|^2}{4R_1}} = \frac{P_2}{P_d}$$

Tale modulo al quadrato è quindi il rapporto tra la potenza attiva ceduta al carico R_2 e la potenza disponibile del generatore posto in ingresso.

Per quanto riguarda la caratterizzazione degli altri due parametri della rappresentazione, occorre considerare la situazione in cui $a'_1 = 0$, $a'_2 \neq 0$. Chiaramente questa situazione corrisponde a chiudere la prima porta su un bipolo resistivo di resistenza R_1 . Quindi si ha:

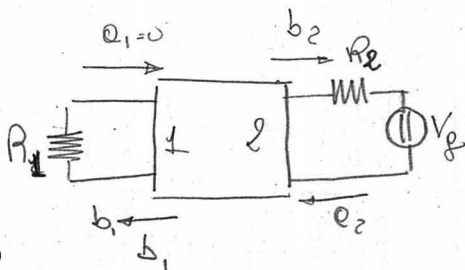
$$(VI.6.31) \quad b'_1 = s_{12} a'_2$$

$$b'_2 = s_{22} a'_2$$

che forniscono rispettivamente:

$$(VI.6.32) \quad s_{12} = \left(\frac{b'_1}{a'_2} \right)_{a'_1=0}$$

$$s_{22} = \left(\frac{b'_2}{a'_2} \right)_{a'_1=0}$$



In modo analogo a quanto fatto per i primi due parametri si deduce che:

3) s_{12} è proporzionale alla funzione di trasferimento in tensione tra la porta 1 chiusa su R_1 ed il generatore di tensione di resistenza interna R_2 posto alla porta 2, cioè:

$$(VI.6.33) \quad s_{12} = \frac{2 V_1}{V_g} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Il modulo al quadrato di s_{12} , nel caso dei fasori, è il rapporto tra la potenza attiva ceduta al bipolo di resistenza R_1 e la potenza disponibile del generatore di resistenza interna R_2 posto alla porta 2;

4) s_{22} è il coefficiente di riflessione del bipolo che si vede alla porta 2 della rete, quando la porta 1 è chiusa sul bipolo di resistenza R_1 e la costante di normalizzazione usata è pari a R_2 .

Osservazione VI.6.2

Per il modo con cui vengono ad essere definiti operativamente i termini della matrice di diffusione, cioè in termini di potenza attiva, essi esistono sempre per una rete passiva. Pertanto la matrice di diffusione esiste sempre per una rete passiva, a differenza di quello che accade per gli altri tipi di rappresentazione visti in precedenza.

Un ultimo punto che vogliamo mettere in rilievo è il legame tra la matrice $[S]$ e le matrici relative alle altre rappresentazioni. Tale legame è facilmente ricavabile, se teniamo conto della dipendenza tra le grandezze a e b e quelle usuali V e I alle porte, viste nelle formule (VI.2.4) e (VI.2.5). Riprendendo queste formule per la rete 2-porte si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} = [N] \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= [N]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (VI.6.34)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [N]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [N] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [N]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [N] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $[N]$ la matrice:

$$[V] \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix} \cdot [N]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{R_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_1} \end{bmatrix}}{\sqrt{R_1} \sqrt{R_2}}$$

L'utilizzazione delle (VI.6.34) permette di ricavare facilmente il legame voluto tra le matrici caratteristiche delle varie rappresentazioni. A titolo di esempio sviluppiamo il calcolo per la matrice impedenze a vuoto, individuando sia il legame da $[S]$ verso $[Z]$, sia quello inverso. Nel primo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{(VI.6.35)} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} [N]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [N] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ [N]^{-1} [Z] - [N] \} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ [N]^{-1} [Z] - [N] \} [N]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Quindi, esprimendo $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ in funzione di $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, si ha:

$$\text{(VI.6.36)} \quad [S] = \{ [\zeta] + [U] \}^{-1} \{ [\zeta] - [U] \}$$

con:

$$[\zeta] = [N]^{-1} [Z] [N]^{-1} \quad ; \quad [U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In modo del tutto simile, si ottiene:

$$\text{(VI.6.37)} \quad [Z] = [N] \{ [U] + [S] \} \{ [U] - [S] \}^{-1} [N]$$

Concludiamo il presente paragrafo con alcuni esempi di determinazione della matrice di diffusione di reti 2-porte.

Esempio VI.6.2

Determinare la matrice di diffusione del trasformatore ideale di fig. VI.6.8 a).

Utilizziamo le definizioni operative precedenti, supponendo che le costanti di normalizzazione alle due porte siano R_1 e R_2 :

1) Il termine s_{11} è uguale al coefficiente di riflessione alla porta 1, quando la porta 2 è chiusa su R_2 , cioè:

$$V_2 = -R_2 I_2 = R_2 u I_1 \quad \frac{V_1}{u} = R_2 u I_1 \quad V_1 = u^2 R_2 \cdot I_1$$

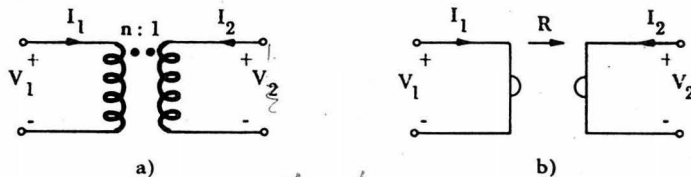


Fig. VI.6.8 - Reti 2-porte considerate negli esempi VI.6.2 e VI.6.3.

2) Il termine s_{22} vale:

$\Delta I = 0$

$s_{11} = \frac{n^2 R_2 - R_1}{n^2 R_2 + R_1}$

$s_{22} = \frac{\frac{R_1}{n^2} - R_2}{\frac{R_1}{n^2} + R_2}$

3) Il termine s_{12} vale, in base alla (VI.6.33):

$\Delta_1 = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} V + \frac{1}{2\sqrt{R_1}} \bar{V} R_1 I = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} (V + R_1 I) = \frac{V_2}{2\sqrt{R_1}}$

$b_1 = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} V - \frac{1}{2\sqrt{R_1}} \bar{V} R_1 I = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} (V - R_1 I) = \frac{V_2}{2\sqrt{R_1}}$

$\Delta_1 = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} (u^2 R_2 + R_1)$

$b_1 = \frac{1}{2\sqrt{R_1}} (u^2 R_2 - R_1)$

4) Il termine s_{21} vale in base alla (VI.6.29):

$$s_{12} = 2 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cdot n \frac{R_1}{R_1 + R_2 n^2}$$

$$s_{21} = 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{n} \frac{R_2}{\frac{R_1}{n^2} + R_2}$$

In conclusione, la matrice di diffusione del trasformatore vale:

$$[S] = \frac{1}{n^2 R_2 + R_1} \begin{bmatrix} n^2 R_2 - R_1 & 2n \sqrt{R_1 R_2} \\ 2n \sqrt{R_1 R_2} & R_1 - n^2 R_2 \end{bmatrix}$$

Tale rappresentazione si semplifica notevolmente se scegliamo le costanti di normalizzazione in modo che:

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

In questo caso infatti, la matrice di diffusione del trasformatore è data da:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio VI.6.3

Determinare la matrice di diffusione del giratore di fig. VI.6.8 b).

In questo caso utilizziamo la formula di passaggio dalla rappresentazione matrice impedenze a vuoto, in quanto tale matrice è fornita direttamente dalla definizione dell'elemento, cioè:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{bmatrix}$$

In base alla (VI.6.36), supponendo di usare costanti di normalizzazione R_1 e R_2 , si ha:

$$[\zeta] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\zeta] \cdot [U] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{[\zeta] + [U]\}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{R_1 R_2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ -\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ -\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} & -1 \end{bmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R^2} =$$

$$= \frac{1}{R^2 + R_1 R_2} \begin{bmatrix} R^2 - R_1 R_2 & -2R\sqrt{R_1 R_2} \\ 2R\sqrt{R_1 R_2} & R^2 - R_1 R_2 \end{bmatrix}$$

Tale rappresentazione si semplifica notevolmente se scegliamo le costanti di normalizzazione in modo che:

$$R = \sqrt{R_1 R_2}$$

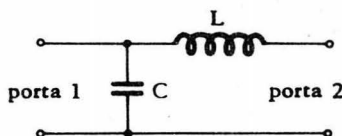
In questo modo, infatti, la matrice di diffusione del giratore diviene:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio VI.6.4

Determinare la matrice di diffusione della rete 2-porte rappresentata in figura VI.6.9. Le costanti di normalizzazione siano scelte uguali a R_1 e R_2 .

Fig. VI.6.9 - Rete 2-porte considerata nell'esempio VI.6.4.



Si possono seguire indifferentemente i due procedimenti applicati negli esempi precedenti. Si ottengono le seguenti espressioni per i vari termini della matrice di diffusione:

$$s_{11} = \frac{1}{D(s)} [-s^2 R_1 L C + s (L - R_1 R_2 C) + R_2 - R_1]$$

$$s_{22} = \frac{1}{D(s)} [s^2 R_1 L C + s (L - R_1 R_2 C) + R_1 - R_2]$$

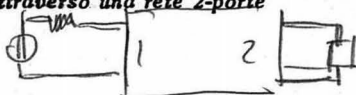
$$s_{12} = s_{21} = \frac{2 \sqrt{R_1 R_2}}{D(s)}$$

in cui è:

$$D(s) = s^2 R_1 L C + s (L + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2$$

~~VI.7~~ - Trasferimento attraverso una rete 2-porte.

La funzione che esplica usualmente una rete 2-porte è quella di manipolare opportunamente un segnale, rappresentato in ingresso dalla grandezza impressa da un generatore indipendente ed in uscita da una



grandezza elettrica sul carico. Generatori e carichi usati normalmente sono quelli considerati in dettaglio nel § VI.6.2.

È evidente quindi che risulta di fondamentale importanza caratterizzare questo trasferimento, almeno nei suoi aspetti più rilevanti. Ciò verrà fatto di seguito, introducendo allo scopo alcune grandezze tipiche che permettono una misura quantitativa degli aspetti d'interesse. Tali grandezze si riferiscono al comportamento della rete in regime permanente sinusoidale e sono quindi relative ad una sola frequenza. Di conseguenza una conoscenza completa della rete si potrà avere solo se è noto l'andamento in funzione della frequenza delle suddette grandezze.

VI.7.1 - Trasferimento di potenza attiva attraverso le reti 2-porte.

Si usano in pratica varie grandezze che servono a mettere in evidenza aspetti particolari del trasferimento di potenza attiva⁽¹⁾ attraverso la rete due porte. Consideriamo tali grandezze in dettaglio, ricavandone l'espressione in funzione dei termini della matrice di diffusione.

- Guadagno di potenza. $G = 40 \log_{10} \frac{P_u}{P_1} \text{ (dB)}$

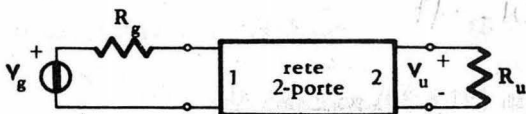
Con riferimento alla fig. VI.7.1, il guadagno di potenza è il rapporto tra la potenza assorbita dal carico e la potenza entrante nella rete 2-porte. Precisamente, se:

$$P_u = \frac{1}{2} \frac{|V_u|^2}{R_u} \quad \text{e} \quad P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_1 I_1^*]$$

si ha:

$$(VI.7.1) \quad \underline{\text{guadagno di potenza}} = G = \frac{P_u}{P_1} < 1 \quad (\text{se la rete non è energica})$$

Fig. VI.7.1 - Chiusura tipica della rete 2-porte.



Utilizzando la matrice di diffusione, abbiamo visto dalla (VI.6.30) che:

$$(VI.7.2) \quad P_u = |s_{21}|^2 P_d \quad P_d = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_g}$$

(1) - Poichè in questo paragrafo parleremo solo di potenza attiva, per brevità la indicheremo semplicemente come potenza.

e dalla (VI.6.27), insieme con la (VI.3.14), si ha:

$$(VI.7.3) \quad P_1 = P_d (1 - |s_{11}|^2)$$

Il guadagno di potenza è perciò uguale a:

$$(VI.7.4) \quad G = \frac{|s_{21}|^2}{1 - |s_{11}|^2}$$



e mette in evidenza la capacità della rete di fornire potenza. Ovviamente la rete può assorbire, invece che fornire potenza, nel qual caso è più conveniente far uso della grandezza inversa, che prende il nome di «attenuazione di potenza», cioè:

$$(VI.7.5) \quad \text{attenuazione di potenza} = A = \frac{1}{G} = \frac{1 - |s_{11}|^2}{|s_{21}|^2}$$

$$A = -W_{Op} \frac{P_u}{P_i}$$

Vedi max
trasm. di pot.
nei bipoli

Le grandezze precedenti, tuttavia, misurano il fenomeno di transito, perdita o sviluppo di potenza nella rete 2-porte, senza mettere in evidenza l'effetto molto importante che ha la resistenza del generatore. Sappiamo infatti che solo se il valore dell'impedenza di ingresso della rete 2-porte coincide con quella resistiva del generatore, la potenza entrante nella rete 2-porte è la massima possibile, cioè uguale alla potenza disponibile. Una grandezza che tiene conto anche di questo effetto è il guadagno di trasduzione.

- Guadagno di trasduzione.

È il rapporto tra la potenza assorbita dal carico e la potenza disponibile del generatore, cioè:

$$(VI.7.6) \quad \text{guadagno di trasduzione} = G_d = \frac{P_u}{P_d} \quad W_{Op} \frac{P_u}{P_d}$$

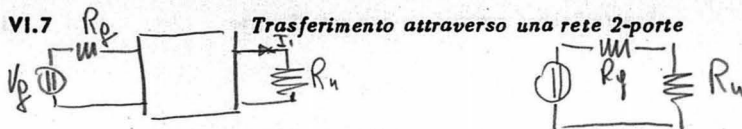
Dalla (VI.6.30) vediamo che:

$$(VI.7.7)$$

$$G_d = |s_{21}|^2$$

Ovviamente anche in questo caso si può parlare di attenuazione di trasduzione:

$$(VI.7.8) \quad \text{attenuazione di trasduzione} = A_d = \frac{1}{G_d} = \frac{1}{|s_{21}|^2} \quad -W_{Op} \frac{P_u}{P_d}$$



La presenza della rete 2-porte tra il generatore ed il carico altera il trasferimento di potenza rispetto a quello che si avrebbe se il carico venisse connesso direttamente al generatore. Una misura quantitativa di questa alterazione è utile in alcuni casi e perciò viene definita una grandezza adatta alla misura di questo aspetto.

- Guadagno di inserzione

È il rapporto tra la potenza ceduta al carico nella situazione di fig. VI.7.1 e quando è connesso direttamente al generatore. Indicando con ρ il coefficiente di riflessione del carico, normalizzato rispetto ad R_g , ed utilizzando la (VI.3.14), si ha:

$$(VI.7.9) \quad \text{guadagno di inserzione} = G_I = \frac{|s_{21}|^2}{1 - |\rho|^2}$$

Anche in questo caso si usa la quantità inversa:

$$(VI.7.10) \quad \text{attenuazione di inserzione} = A_I = \frac{1 - |\rho|^2}{|s_{21}|^2}$$

Osservazione VI.7.1

Le espressioni precedenti dei vari guadagni ed attenuazioni sono molto semplici in termini di matrice di diffusione, in quanto l'impedenza del generatore ed il carico sono resistivi ed utilizzano come costanti di normalizzazione alle due porte rispettivamente R_g ed R_u . La semplicità precedente rimane inalterata nel caso di impedenza del generatore ed impedenza del carico di tipo passivo qualsiasi. Si ha invece una notevole complicazione delle espressioni risultanti nel caso che le costanti di normalizzazione siano diverse da R_g ed R_u ⁽¹⁾.

Osservazione VI.7.2

Le grandezze introdotte in precedenza coincidono usualmente con numeri molto grandi o molto piccoli. Per ragioni di comodità conviene usare al loro posto i relativi logaritmi; per ricordare poi che i numeri che si considerano sono i logaritmi e non le grandezze stesse, si parla di grandezze espresse in decibel ovvero in neper. Precisamente, detta con F una delle grandezze introdotte in precedenza, la relativa espressione è:

(1) - Si veda ad esempio G.C. Corazza, «Fondamenti di campi elettromagnetici e circuiti», Vol. II, Ed. Patron, Bologna, 1974, § III.2.

$$(VI.7.11) \quad \begin{array}{ll} 10 \log_{10} F & \text{decibel (dB)} \\ \frac{1}{2} \ln F & \text{neper} \end{array}$$

È evidente che si può passare da un'espressione all'altra. Precisamente si ha:

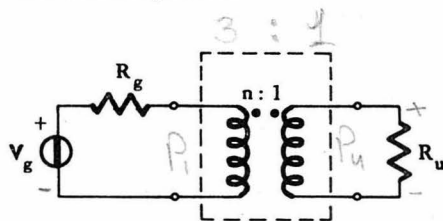
$$(VI.7.12) \quad 1 \text{ neper} = 8,68 \text{ dB}$$

Esempio VI.7.1

Calcolare le varie grandezze definite in precedenza per la rete 2-porte costituita da un trasformatore ideale, chiuso come indicato in fig. VI.7.2

Fig. VI.7.2 - Rete considerata nell'esempio VI.7.1 con:

$$\begin{array}{l} R_g = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_u = 2 \text{ k}\Omega, \\ V_g = 1 \text{ V}, \quad n = 3 \end{array}$$



Trattandosi di un trasformatore ideale, sappiamo che esso non assorbe potenza attiva; quindi il guadagno di potenza vale 1. Infatti, usando la normalizzazione rispetto ad R_g ed R_u , la matrice di diffusione è la seguente (vedi esempio VI.6.2):

$$[S] = \frac{1}{n^2 R_u + R_g} \begin{bmatrix} n^2 R_u - R_g & 2n \sqrt{R_u R_g} \\ 2n \sqrt{R_u R_g} & R_g - n^2 R_u \end{bmatrix}$$

Pertanto, dalla (VI.7.4), si ottiene:

$$G = \frac{\frac{4 n^2 R_u R_g}{(n^2 R_u + R_g)^2}}{1 - \frac{(n^2 R_u - R_g)^2}{(n^2 R_u + R_g)^2}} = \frac{4 n^2 R_u R_g}{(n^2 R_u + R_g)^2 - (n^2 R_u - R_g)^2} = 1$$

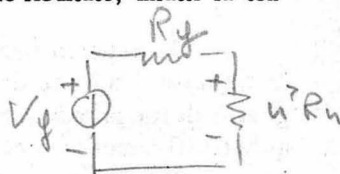
$P_u = P_i$

Per quanto riguarda il guadagno di trasduzione, si ha dalla (VI.7.7):

$$G_d = \frac{4 n^2 R_u R_g}{(n^2 R_u + R_g)^2}$$

Si può controllare direttamente sullo schema di fig.VI.7.2 tale risultato; infatti la tensione in ingresso al trasformatore vale:

$$V_1 = \frac{n^2 R_u}{n^2 R_u + R_g} V_g$$



Quindi la potenza ceduta al carico è:

$$P_u = \frac{1}{2} \frac{|V_1|^2}{n^2 R_u} = \frac{n^2 R_u |V_g|^2}{2 (n^2 R_u + R_g)^2}$$

Tenendo conto che la potenza disponibile è $P_d = |V_g|^2 / (8 R_g)$, si ottiene il risultato precedente.

Infine, per quanto riguarda il guadagno di inserzione, otteniamo:

$$\rho = \frac{R_u - R_g}{R_u + R_g}$$

Perciò dalla (VI.7.9), si ha:

$$G_I = \frac{4 n^2 R_u R_g}{(n^2 R_u + R_g)^2} \frac{(R_u + R_g)^2}{4 R_u R_g} = \frac{n^2 (R_u + R_g)^2}{(n^2 R_u + R_g)^2}$$

Utilizziamo le formule precedenti con i valori numerici riportati in fig.VI.7.2, esprimendo le varie grandezze in decibel. Si ha:

$$\text{guadagno di potenza} = 10 \log_{10} G = 0 \text{ dB}$$

$$\text{guadagno di trasduzione} = 10 \log_{10} \left[\frac{4 n^2 R_u R_g}{(n^2 R_u + R_g)^2} \right] = 10 \log_{10} (0,199) \approx -7 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} \text{guadagno di inserzione} &= -7 \text{ dB} + 10 \log_{10} \left[\frac{(R_u + R_g)^2}{4 R_u R_g} \right] = \\ &= \left(-7 + 10 \log_{10} \frac{9}{8} \right) \text{ dB} \approx -6,5 \text{ dB} \end{aligned}$$

È evidente che in questo caso conviene parlare di attenuazione di trasduzione e di attenuazione di inserzione. Tali grandezze valgono rispettivamente 7 e 6,5 dB.

VI.7.2 - Risposta in ampiezza e fase di una rete 2-porte.

Un aspetto importante del trasferimento attraverso una rete 2-porte riguarda l'azione di manipolazione che la rete stessa esplica nei riguardi della grandezza elettrica impressa. Tale azione viene misurata quantitativamente o attraverso una opportuna funzione di rete ovvero più spesso tramite le risposte in ampiezza e in fase. In ambedue i casi si fa riferimento ad una funzione di rete; usualmente viene considerata la funzione di trasferimento in tensione, tra la tensione sul carico e la tensione del generatore di tensione, con il carico ed il generatore assegnati, seguendo lo schema indicato in fig. VI.7.1. In questo caso la funzione di rete è:

(VI.7.13)

$$\frac{V_u}{V_g} = A(\omega) e^{j\beta(\omega)}$$

Risp. in ampiezza e
Risp. in fase

$$|F(j\omega)| = A(\omega)$$

$$\arg F(j\omega) = \beta(\omega)$$

Prende il nome di «risposta in ampiezza» della rete 2-porte la funzione reale $A(\omega)$ che rappresenta il modulo della funzione di trasferimento e «risposta in fase» la funzione $\beta(\omega)$ che ne rappresenta l'argomento. Come vedremo nel § VI.7.3, più che $\beta(\omega)$, ha maggiore significato la relativa derivata rispetto ad ω , che rappresenta il tempo impiegato dalla componente della grandezza impressa di pulsazione ω per attraversare la rete.

Le risposte in ampiezza e fase di una rete 2-porte non sono indipendenti tra di loro, in quanto rappresentano il modulo e l'argomento di una funzione razionale reale della variabile s , calcolati sull'asse immaginario di detta variabile ($s = j\omega$). In particolare, se la funzione di rete è caratterizzata dall'avere zeri solo nel semipiano sinistro della variabile complessa s , allora, assegnata la risposta in ampiezza, risulta completamente nota quella in fase e viceversa. Le formule di derivazione di una risposta dall'altra possono essere trovate, ad esempio, in G. Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche», op. cit. pagg. 27-36. Tali formule rivestono un'importanza notevole nel progetto dei circuiti, in quanto ciò che viene assegnato e che si vuole realizzare è la risposta in ampiezza⁽¹⁾. D'altra parte la risposta in fase è importante quando occorre controllare altri aspetti, quali ad esempio la stabilità. Per dettagli su questo punto si rimanda al testo classico di H. Bode, «Network analysis and feedback amplifier design», Val Nostrand, 1959, Cap. 13, 14 e 15.

(1) - È opportuno osservare che, per determinare la risposta in fase a partire da quella di ampiezza, è necessario conoscere quest'ultima su tutto l'asse ω e non solo su un intervallo finito di esso.

Come detto in precedenza, le due risposte in ampiezza e fase sono completamente legate, nel senso che dall'una si ricava l'altra, quando la funzione di trasferimento ha zeri solo nel semipiano sinistro della variabile s . Le reti due porte per cui si verifica questa eventualità prendono il nome di «reti 2-porte a fase minima». Le reti 2-porte di tipo più generale possono avere quindi zeri della funzione di trasferimento anche nel semipiano destro della variabile s . In questo caso, esse si possono sempre suddividere nel prodotto di due funzioni, di cui una a fase minima, nel modo seguente:

$$(VI.7.14) \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s) \cdot N_2(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s) \cdot N_2(-s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_2(-s)}$$

in cui $N_2(s)$ contiene gli zeri nel semipiano destro della variabile s del numeratore $N(s)$ della funzione di trasferimento. Perciò la $F(s)$ risulta uguale al prodotto della funzione a fase minima:

$$(VI.7.15) \quad F_m(s) = \frac{N_1(s) \cdot N_2(-s)}{D(s)}$$

e della funzione:

$$(VI.7.16) \quad F_p(s) = \frac{N_2(s)}{N_2(-s)}$$

Passatutto

La funzione F_p è caratterizzata dal fatto di avere zeri tutti nel semipiano destro e poli coincidenti con gli zeri ribaltati nel semipiano sinistro. Tale funzione può anche porsi nella forma:

$$(VI.7.17) \quad F_p(s) = \frac{N_{2p}(s^2) + s N_{2d}(s^2)}{N_{2p}(s^2) - s N_{2d}(s^2)}$$

avendo indicato con $N_{2p}(s^2)$ la parte pari del polinomio $N_2(s)$ e con $s N_{2d}(s^2)$ la relativa parte dispari. Nella forma (VI.7.17) è immediato dedurre la proprietà tipica di questa funzione, cioè il fatto che il suo modulo sia uguale all'unità per qualunque frequenza. Infatti risulta:

$$(VI.7.18) \quad |F_p(j\omega)|^2 = \frac{N_{2p}^2(-\omega^2) + \omega^2 N_{2d}^2(-\omega^2)}{N_{2p}^2(-\omega^2) + \omega^2 N_{2d}^2(-\omega^2)} = 1$$

Le funzioni di trasferimento del tipo F_p prendono il nome di «funzioni passa-tutto», proprio perchè hanno una risposta in ampiezza indipendente dalla frequenza. In conclusione vale la seguente proprietà:

Proprietà VI.7.1 - «Una generica funzione di rete può sempre mettersi sotto la forma di un prodotto di due funzioni, di cui una a fase minima e l'altra passa-tutto».

La risposta in ampiezza è determinata solo dalla funzione a fase minima, mentre la risposta in fase dipende anche dalla funzione passa-tutto. È evidente che la minima complessità per la risposta in fase si ha quando manca la rete passa-tutto; per questa ragione alle funzioni con zeri nel semipiano sinistro si dà il nome di funzioni a fase minima.

VI.7.3 - Ritardo nel trasferimento.

Vogliamo determinare, nel presente paragrafo, il tempo impiegato perché il segnale attraversi la rete 2-porte supponendo che sia sinusoidale di pulsazione ω_0 . È evidente che la trattazione si complica, in quanto da una parte ci interessa il regime permanente e dall'altra vogliamo una informazione nel tempo.

È intuitivo che potremmo arrivare al risultato voluto se potessimo aggiungere all'ampiezza del segnale sinusoidale un segno qualunque, in modo tale che, sapendolo riconoscere in uscita, saremmo in grado di valutare il tempo di attraversamento della rete stessa. Un modo molto semplice per raggiungere l'obiettivo precedente è quello di supporre il segnale di ingresso, per esempio $v_g(t)$ di fig. VI.7.1, costituito da due sinusoidi di pulsazione l'una vicina all'altra in un intorno di ω_0 , cioè:

$$(VI.7.19) \quad v_g(t) = \cos(\omega_0 - \Delta\omega)t + \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

Infatti tale segnale equivale a:

$$(VI.7.20) \quad v_g(t) = 2 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Delta\omega t$$

Vediamo che l'ampiezza varia come $2 \cos \Delta\omega t$ e quindi costituisce chiaramente un riferimento nel tempo; per esempio, per $t = 0$, si ha il valore massimo, pari a 2. D'altra parte per $\Delta\omega \rightarrow 0$, il segnale ha il solito andamento ad ampiezza costante nel tempo.

Supponiamo che la funzione di trasferimento della rete 2-porte sia $H(j\omega)$, cioè:

$$(VI.7.21) \quad V_u(j\omega) = H(j\omega) V_g(j\omega) = A(\omega) e^{j\beta(\omega)} V_g(j\omega)$$

Allora il valore in regime permanente sinusoidale di $v_u(t)$ è:

$$(VI.7.22) \quad v_u(t) = A(\omega_0 - \Delta\omega) \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t + \beta(\omega_0 - \Delta\omega)] + \\ + A(\omega_0 + \Delta\omega) \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \beta(\omega_0 + \Delta\omega)]$$

$$H(j\omega) = A(\omega) \cos[\omega t + \beta(\omega)]$$

in cui:

$$(VI.7.23) \quad H(j\omega) = A(\omega) e^{j\beta(\omega)}$$

Tenendo conto che ci interessa il comportamento per $\Delta\omega \rightarrow 0$, possiamo scrivere:

(VI.7.24)

$$\begin{aligned} A(\omega_0 \pm \Delta\omega) &= [A_0 \pm A'_0 \Delta\omega] \\ \beta(\omega_0 \pm \Delta\omega) &= [\beta_0 \pm \beta'_0 \Delta\omega] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Derivazione rispetto ad } \omega \\ \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega_0 \pm \Delta\omega) - A(\omega_0)}{\Delta\omega} = A'_0 \end{array}$$

in cui il pedice zero indica i valori calcolati per $\omega = \omega_0$ e l'apice la derivazione rispetto ad ω . Utilizzando le (VI.7.24) nelle (VI.7.22), si ha:

$$(VI.7.25) \quad v_u(t) = 2 A_0 \cos(\omega_0 t + \beta_0) \cos[\Delta\omega(t + \beta'_0)] + \\ - 2 A'_0 \Delta\omega \sin(\omega_0 t + \beta_0) \sin[\Delta\omega(t + \beta'_0)]$$

Tenendo conto che ci interessa il limite per $\Delta\omega \rightarrow 0$, possiamo trascurare l'ultimo termine, cioè:

$$(VI.7.26) \quad v_u(t) = 2 A_0 \cos(\omega_0 t + \beta_0) \cos[\Delta\omega(t + \beta'_0)]$$

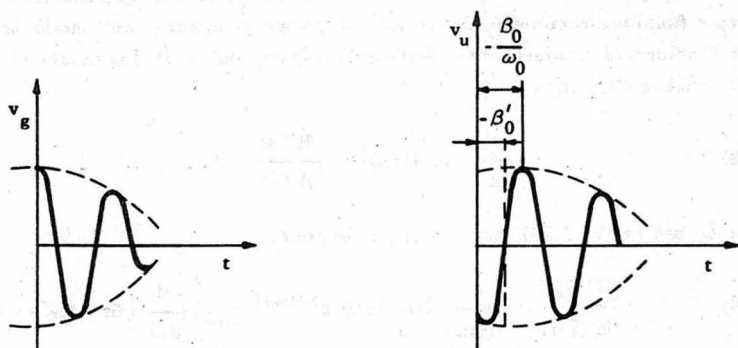


Fig. VI.7.3 - Andamenti della tensione di ingresso e di uscita di una rete due porte, utilizzati per valutare il tempo di transito sulla rete.

Gli andamenti della tensione di ingresso $v_g(t)$ e della tensione di uscita $v_u(t)$, dati rispettivamente dalle espressioni (VI.7.20) e (VI.7.26), sono riportati nella fig. VI.7.3. Confrontando tali andamenti, si riconosce che il massimo dell'ampiezza del segnale sinusoidale (massimo dell'involuppo), si è spostata della quantità $-\beta'_0$, mentre il massimo del segnale sinusoidale si è spostato della quantità $-\beta_0/\omega_0$ rispetto al segnale di ingresso. Alla prima quantità si dà il nome di ritardo di

$$-\beta'$$

$$-\frac{\beta_0}{\omega_0}$$

gruppo, alla seconda ritardo di fase. Per quanto detto precedentemente, è il ritardo di gruppo la grandezza che dà conto del tempo di transito attraverso la rete due porte, mentre il ritardo di fase è legato soltanto allo sfasamento fra ingresso e uscita. Ciò dimostra la seguente proprietà.

Proprietà VI.7.2 - «La trasmissione di un segnale sinusoidale entro una rete 2-porte avviene con un ritardo uguale a:

(VI.7.27)

$$\tau = - \frac{d\beta}{d\omega} = -\beta' \quad \text{RITARDO DI GRUPPO}$$

essendo $\beta(\omega)$ l'argomento della funzione di trasferimento. Alla quantità τ si dà il nome di ritardo di gruppo».

Osservazione VI.7.3

In tutti quei casi in cui è necessario il calcolo del ritardo di gruppo τ a partire dalla funzione di trasferimento $H(s)$, non è mai conveniente ricorrere direttamente alla relazione di definizione (VI.7.27), per funzioni di trasferimento razionali reali.

Si può infatti dimostrare che, sebbene la funzione $\beta(\omega)$ sia una funzione trascendente, la sua derivata è una funzione razionale reale.

Una semplice formula che superando la suddetta difficoltà permette il calcolo diretto, come funzione razionale, del ritardo di gruppo si ottiene nel modo seguente. Sia $H(s)$ la funzione di trasferimento; derivando rispetto ad s il logaritmo di questa funzione, si ottiene l'identità:

$$(VI.7.28) \quad \frac{d}{ds} [\ln H(s)] = \frac{H'(s)}{H(s)}$$

Utilizzando ora la (VI.7.23), per $s = j\omega$, si ottiene:

$$(VI.7.29) \quad \begin{aligned} \frac{H'(j\omega)}{H(j\omega)} &= \frac{d}{d(j\omega)} [\ln A(\omega) e^{j\beta(\omega)}] = -j \frac{d}{d\omega} [\ln A(\omega) + j\beta(\omega)] = \\ &= \frac{d\beta}{d\omega} - j \frac{d}{d\omega} [\ln A(\omega)] \end{aligned}$$

Da quest'ultima espressione si riconosce che il ritardo di gruppo τ può essere calcolato con la formula seguente:

$$(VI.7.30) \quad \tau = - \frac{d\beta}{d\omega} = - \operatorname{Re} \left[\frac{H'(j\omega)}{H(j\omega)} \right]$$

Se la funzione di trasferimento $H(s)$ è assegnata in funzione dei suoi poli e zeri, allora si può utilizzare una formula ancora più semplice per il calcolo di τ . Se si ha:

$$(VI.7.31) \quad H(s) = \frac{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_m)}{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n)}$$

allora il ritardo di gruppo risulta pari a:

$$(VI.7.32) \quad \tau = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\omega^2 + \alpha_k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\omega^2 + \beta_k^2}$$

Per la dimostrazione della formula (VI.7.32) e per altre proprietà sulla funzione ritardo di gruppo, si rimanda al testo L. Weinberg, «Network analysis and synthesis», Mx Graw-Hill, § 5.5.

Osservazione VI.7.4.

È molto utile avere dei metodi per determinare, direttamente dall'analisi della rete e senza dover determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$, il valore del ritardo di gruppo. Tale determinazione si può fare utilizzando il concetto di sensibilità della funzione di rete rispetto ai suoi elementi, ed in particolare rispetto agli elementi con memoria; tale concetto verrà sviluppato diffusamente nel Cap. VIII. Nel caso presente è sufficiente conoscere la definizione di sensibilità ed il fatto che tali quantità possono essere determinate in modo estremamente semplice con l'analisi della rete. La sensibilità di una funzione di rete $H(j\omega)$ rispetto all'induttanza L_k di un induttore è definita:

$$(VI.7.33) \quad S_{(L_k)}^{(H)} = \frac{\partial \ln H(j\omega)}{\partial \ln L_k}$$

e rispetto alla capacità C_i di un condensatore:

$$(VI.7.34) \quad S_{(C_i)}^{(H)} = \frac{\partial \ln H(j\omega)}{\partial \ln C_i}$$

Considerando ora il logaritmo naturale della funzione di rete $H(j\omega)$, in base alle formule (VI.7.28) e (VI.7.30), si ha:

$$(VI.7.35) \quad \tau = - \operatorname{Im} \left[\frac{d \ln H(j\omega)}{d \omega} \right]$$

D'altra parte la funzione $H(j\omega)$ dipende da ω tramite le suscettanze ωC_i dei condensatori e le reattanze ωL_k degli induttori. Quindi risulta:

$$(VI.7.36) \quad \tau = - \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial \ln H(j\omega)}{\partial \omega C_i} \frac{d\omega C_i}{d\omega} + \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\partial \ln H(j\omega)}{\partial \omega L_k} \frac{d\omega L_k}{d\omega} \right]$$

in cui N_c è il numero dei condensatori presenti ed N_L quello degli induttori. Tenuto conto delle (VI.7.33), (VI.7.34) nella (VI.7.36), si ha:

$$(VI.7.37) \quad \tau = - \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^{N_c} S_{(C_i)}^{(H)} + \sum_{k=1}^{N_L} S_{(L_k)}^{(H)} \right]$$

La formula (VI.7.37) mette in evidenza come il ritardo di gruppo si possa ottenere direttamente dalle sensibilità. L'utilità della formula è connessa al fatto che le sensibilità si possono ottenere in forma esplicita, senza derivazione, analizzando la rete, come messo in evidenza nel Cap. VIII.

VI.8 - Connessioni delle reti 2-porte.

Come detto nell'introduzione l'utilità del concetto di rete N-porte sta nel fatto che in questo modo è possibile concentrare l'attenzione durante la soluzione del problema dell'analisi esternamente ad alcuni blocchi, di cui, in qualche modo, è nota la rappresentazione. In questa affermazione è tuttavia sottinteso che la rappresentazione del blocco ha senso solo se la rete N-porte si comporta come tale nella rete più ampia in cui essa è inserita. È necessario perciò preliminarmente stabilire quando una rete N-porte si comporta come tale. A questo scopo occorre esaminare quali ipotesi sono state fatte per la definizione di una tale rete. Ci si accorge immediatamente che l'unica ipotesi fatta è che ciascuna porta si comporti come tale; in altre parole è necessario che la corrente entrante in corrispondenza ad uno dei morsetti di ogni porta coincida con la corrente uscente dall'altro, ad ogni istante. Di conseguenza per usare correttamente la rappresentazione di una rete N-porte in una rete più ampia occorrerà effettuare la suddetta verifica per ogni sua porta.

Esistono in pratica, tuttavia, dei casi tipici che è opportuno trattare in dettaglio. Essi riguardano il caso della connessione di due reti. In tab. VI.8.1, tali casi sono elencati insieme con la rappresentazione globale della rete risultante in funzione di quella delle reti parziali. Si vede come per ogni tipo di connessione sia conveniente usare una rappresentazione particolare. È inoltre da sottolineare che ciascuna delle relazioni riportate nella tabella è valida purché le reti componenti si comportino come reti 2-porte. Ciò richiede alcune verifiche che

prendono il nome di «prove di validità» e variano da caso a caso. Ci limitiamo di seguito a considerare in dettaglio i casi più comuni.

VI.8.1 - Connessione serie-serie.

Consideriamo la rete 2-porte ottenuta collegando in serie due reti 2-porte. Dobbiamo individuare quali condizioni debbono essere verificate nel caso più generale possibile perché ciascuna delle reti componenti si comporti come rete 2-porte. Nella situazione generale, a ciascuna delle porte della rete globale risulta applicata una corrente ed una tensione per cui tale situazione generale può essere sempre schematizzata, in base al teorema di sostituzione visto nel §VI.2.2, con un generatore di tensione o con un generatore di corrente applicato a ciascuna delle porte. Nel caso presente utilizziamo i generatori di corrente. Quindi dobbiamo individuare per la rete di fig. VI.8.1 le condizioni per

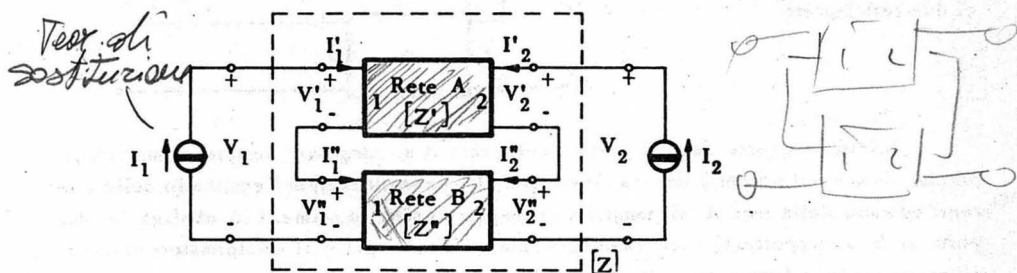


Fig. VI.8.1 - Connessione serie-serie di due reti 2-porte.

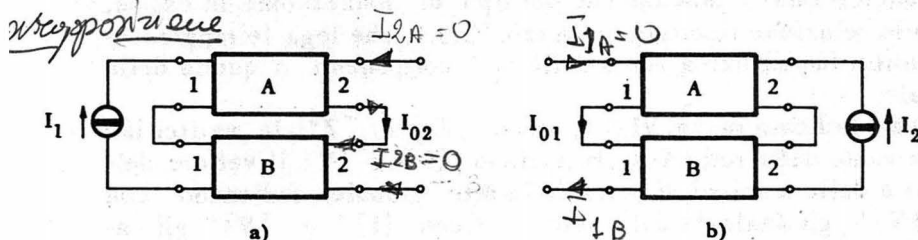


Fig. VI.8.2 - Prove di validità della connessione serie-serie ($I_{01} = 0$, $I_{02} = 0$).

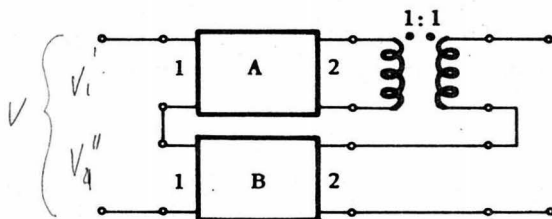
cui le reti componenti si comportano come reti 2-porte. Le reti che stiamo esaminando sono lineari; quindi possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè possiamo considerare l'effetto separato di ciascun generatore. Se le reti componenti si comportano come reti 2-porte in presenza di ciascun generatore, allora ciò continuerà a valere anche quando agiscono contemporaneamente i due generatori, cioè

nel caso generale. Facciamo dunque riferimento a fig. VI.8.2a); la condizione da verificare è che la corrente I_{02} sia nulla. Analogamente nel caso di fig. VI.8.2b), deve essere nulla la corrente I_{01} . In queste due verifiche consiste la «prova di validità» della connessione serie-serie.

Osservazione VI.8.1

Un metodo semplice per rendere sempre verificata la prova di validità precedente (riportata in fig. VI.8.2), senza alterare la rappresentazione delle reti 2-porte componenti, è quello di aggiungere in cascata ad una delle due reti un trasformatore ideale, avente rapporto di trasformazione unitario, come indicato in fig. VI.8.3.

Fig. VI.8.3 - Artificio per rendere sempre valida la connessione serie-serie di due reti 2-porte.



Infatti in questo caso la porta 2 della rete A si comporta sempre come porta, perché chiusa sul primario del trasformatore. Di conseguenza, per l'equilibrio delle correnti entranti nella rete A, si comporta come porta anche la prima. Ciò obbliga le due porte di B a comportarsi anch'esse come porte. D'altra parte il trasformatore unitario, disposto come in figura, non altera la rappresentazione della rete A.

Concludiamo la discussione del tipo di connessione in esame, ricavando la relazione riportata nella tab. VI.8.1, che lega le rappresentazioni matrici impedenze a vuoto delle reti componenti a quella della rete globale.

Come indicato in fig. VI.8.1, siano $[Z']$ e $[Z'']$ le matrici impedenze a vuoto delle reti A e B e siano $[I]$ e $[V]$ il vettore delle correnti e delle tensioni di porta della rete globale. Indicando con $[I]'$ e $[V]'$ gli analoghi della rete A e con $[I]''$ e $[V]''$ gli analoghi della rete B, si ha:

$$[I] = [I]' = [I]'' \quad (VI.8.1)$$

$$[V] = [V]' + [V]'' = [Z'] [I]' + [Z''] [I]'' = \{[Z'] + [Z'']\} [I]$$

da cui:

$$[Z] = [Z'] + [Z''] \quad (VI.8.2)$$

Tabella VI.8.1 - Connessione di reti 2-porte.

Tipo di connessione	Relazioni tra matrici caratteristiche
Connessione serie-serie	$[Z] = [Z'] + [Z'']$
Connessione parallelo-parallelo	$[Y] = [Y'] + [Y'']$
Connessione serie-parallelo	$[H] = [H'] + [H'']$
Connessione parallelo-serie	$[G] = [G'] + [G'']$

VI.8.2 - Connessione parallelo-parallelo.

La situazione generale di inserimento della rete composta in una rete più complessa può essere schematizzata come in fig. VI.8.4, cioè con due generatori di tensione. Utilizziamo anche in questo caso il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando un generatore alla volta. Se la connessione è valida in ciascuno dei due casi è valida in generale. Occorre perciò verificare che ciascuna rete si comporti come rete 2-porte nelle due situazioni prospettate in fig. VI.8.5 a) e b). Ciò richiede che siano nulle le due correnti I_{01} ed I_{02} . In queste due verifiche consiste la «prova di validità» della connessione parallelo-parallelo.

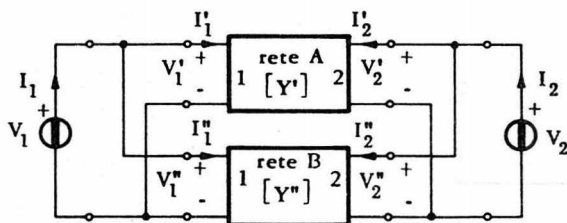


Fig. VI.8.4 - Connessione parallelo-parallelo di due reti 2-porte.

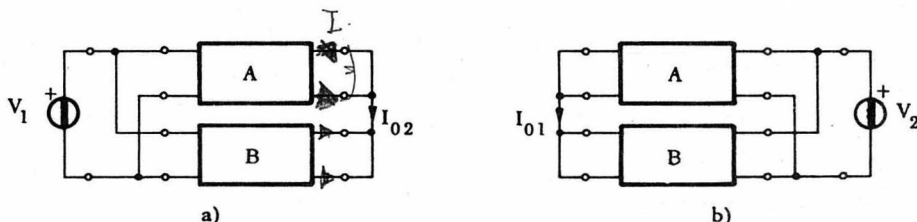


Fig. VI.8.5 - Prove di validità della connessione parallelo-parallelo ($I_{02} = 0$, $I_{01} = 0$).

Per rendere sempre verificata la prova di validità, senza alterare la rappresentazione delle reti 2-porte componenti, si può ricorrere anche in questo caso all'artificio di porre in cascata ad una delle due reti un trasformatore ideale di rapporto unitario.

Infine ricaviamo la relazione riportata nella tab. VI.8.1, che lega la rappresentazione della rete composta a quella delle reti componenti. Siano $[Y']$ ed $[Y'']$ le matrici ammettenze di cortocircuito delle due reti componenti. Siano $[I']$, $[V']$ i vettori delle correnti e delle tensioni di porta per la rete A e $[I'']$ e $[V'']$ gli analoghi per la rete B. Dette con $[I]$, $[V]$, $[Z]$ le grandezze analoghe della rete composta, si ha, come risulta chiaramente dalla fig. VI.8.4:

(VI.8.3)

$$[V] = [V'] = [V'']$$

$$[I] = [I'] + [I''] = [Y'] [V'] + [Y''] [V''] = \{[Y'] + [Y'']\} [V]$$

da cui:

(VI.8.4)

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

Osservazione VI.8.2

Nel caso che le prove di validità precedenti non siano verificate, non è possibile usare la rappresentazione nota delle reti componenti. È chiaro che questo non significa che non esiste la rappresentazione della rete 2-porte globale. La determinazione della rappresentazione di quest'ultima dovrà farsi in base ai soliti procedimenti di analisi, per applicare i quali occorre conoscere in dettaglio la struttura interna di ciascuna rete 2-porte componente; pertanto, in questo caso, non basta conoscere solo la rappresentazione delle reti 2-porte componenti, come accade nel caso in cui siano verificate le prove di validità.

VI.8.3 - Connessione in cascata.

Nella connessione in cascata le reti componenti sono collegate come indicato in fig. VI.8.6. È facile rendersi conto che in questo caso non occorre effettuare verifiche di comportamento per le reti componenti. Infatti, essendo la prima porta della rete globale coincidente con la prima porta della rete A ed essendo la rete globale utilizzata, per definizione, come rete due porte, ne risulta che la prima porta della rete A si comporta sempre come porta; per l'equilibrio delle correnti entranti nella rete A, si comporta come porta anche la seconda. Di conseguenza, per la connessione, si comporta come porta anche la prima porta della rete B e quindi la sua seconda porta.

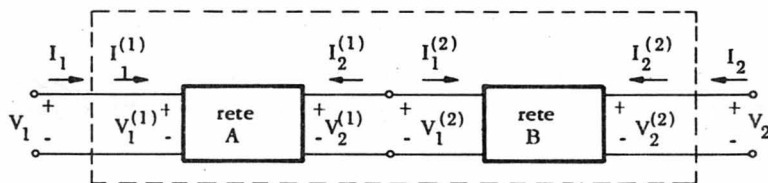


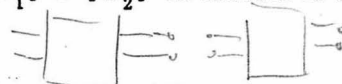
Fig. VI.8.6 - Connessione in cascata di due reti 2-porte

Nel caso della connessione in cascata conviene usare la matrice di trasmissione sia per le reti componenti e sia per la rete globale. In-

fatti la proprietà caratteristica di questa connessione è che:

$$(VI.8.5) \quad \boxed{V_2^{(1)} = V_1^{(2)}} \quad ; \quad I_2^{(1)} = -I_1^{(2)}$$

Quindi, indicando con $[T_1]$ e $[T_2]$ le matrici di trasmissione delle reti A e B, si ha:



$$(VI.8.6) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ I_1^{(1)} \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} V_2^{(1)} \\ -I_2^{(1)} \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} V_1^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= [T_1] [T_2] \begin{bmatrix} V_2^{(2)} \\ -I_2^{(2)} \end{bmatrix} = [T_1] [T_2] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

La (VI.8.6) dimostra che la matrice di trasmissione della rete globale è il prodotto delle matrici di trasmissione delle reti componenti, cioè:

$$(VI.8.7) \quad [T] = \boxed{[T_1] [T_2]}$$

VI.9 - Reciprocità e simmetria nelle reti 2-porte.

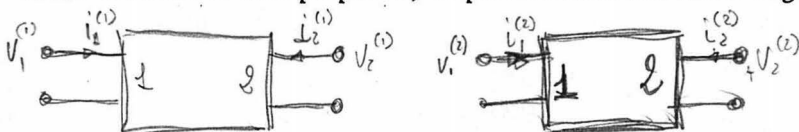
Nel presente paragrafo esamineremo l'effetto di alcune proprietà generali delle reti 2-porte sulla loro rappresentazione; le proprietà considerate sono la reciprocità e la simmetria.

La proprietà di reciprocità è già stata introdotta nel § I.5.3, con riferimento ai circuiti in generale; nel presente paragrafo ci riferiremo a questa proprietà utilizzando la legge di reciprocità di Lorentz, enunciata nel § I.5.3 ed espressa in generale dalla (I.5.2). Nel caso delle reti 2-porte, tale legge può essere enunciata nel modo seguente:

«Una rete 2-porte è reciproca quando, considerate due situazioni elettriche diverse, indicate rispettivamente con gli apici 1 e 2, le grandezze elettriche alle due porte soddisfano la seguente espressione (VI.9.1)».

$$(VI.9.1) \quad v_1^{(1)} i_1^{(2)} + v_2^{(1)} i_2^{(2)} = v_1^{(2)} i_1^{(1)} + v_2^{(2)} i_2^{(1)}$$

Per quanto riguarda la simmetria, limitandoci alla caratterizzazione esterna di tale proprietà, si può definire nel modo seguente:



«Una rete 2-porte è simmetrica se, scambiando la prima porta con la seconda, ciò non provoca alcuna conseguenza esterna alla rete stessa»

È chiaro che con questa definizione non consideriamo l'eventuale simmetria interna della rete, che, se esiste, ha implicazioni più estese di quelle espresse dalla definizione stessa, come vedremo nel § VII.2.

Un primo punto che occorre mettere in evidenza è che la simmetria comporta sempre la reciprocità della rete 2-porte. Per vedere ciò basta dimostrare che una rete 2-porte simmetrica soddisfa sempre la legge di Lorentz, data dalla (VI.9.1).

A questo scopo utilizziamo per la rete simmetrica la rappresentazione generale $[A]$, $[B]$, introdotta nel § VI.4.1 e notiamo che, essendo $b_{11} = b_{22}$ e $b_{12} = b_{21}$ per la simmetria della rete, vale la seguente identità:

$$(VI.9.2) \quad [i_1^{(1)} \ i_2^{(1)}] [B] \begin{bmatrix} i_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix} - [i_1^{(2)} \ i_2^{(2)}] [B] \begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

in cui i pedici si riferiscono alle porte e gli apici a due situazioni elettriche diverse. Introducendo la (VI.4.1) nella (VI.9.2), si ottiene:

$$(VI.9.3) \quad \begin{bmatrix} i_1^{(2)} & i_2^{(2)} \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_1^{(1)} & i_2^{(1)} \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} (v_1^{(1)} i_1^{(2)} - v_1^{(2)} i_1^{(1)}) + a_{22} (v_2^{(1)} i_2^{(2)} - v_2^{(2)} i_2^{(1)}) +$$

$$+ a_{12} (v_2^{(1)} i_1^{(2)} - v_2^{(2)} i_1^{(1)}) + a_{21} (v_1^{(1)} i_2^{(2)} - v_1^{(2)} i_2^{(1)}) = 0$$

Dalla (VI.9.3), tenendo conto che per la simmetria si ha anche $a_{11} = a_{22}$ ed $a_{12} = a_{21}$ e ricordando che la (VI.9.3) deve valere per la generica rete 2-porte simmetrica, si deducono le due seguenti espressioni:

$$(VI.9.4) \quad \begin{bmatrix} v_1^{(1)} i_1^{(2)} + v_2^{(1)} i_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} i_1^{(1)} + v_2^{(2)} i_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2^{(1)} i_1^{(2)} + v_1^{(1)} i_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2^{(2)} i_1^{(1)} + v_1^{(2)} i_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

La prima delle (VI.9.4) coincide con la (VI.9.1), ciò che dimostra la proprietà enunciata, cioè

$$v_1^{(1)} i_1^{(2)} + v_2^{(1)} i_2^{(2)} = v_1^{(2)} i_1^{(1)} + v_2^{(2)} i_2^{(1)}$$

Proprietà VI.9.1 - «Una rete simmetrica è anche reciproca»⁽¹⁾.

VI.9.1 - Conseguenze della reciprocità sulla rappresentazione delle reti 2-porte.

Le rappresentazioni comuni delle reti 2-porte, considerate nel § VI.5, e quelle orientate verso la sintesi, considerate nel § VI.6, sono tutte caratterizzate da quattro parametri. Nel caso che la rete 2-porte sia reciproca, tali quattro parametri non sono più indipendenti, in conseguenza della (VI.9.1), che la rete deve soddisfare. Nel presente paragrafo analizziamo in dettaglio l'effetto della reciprocità sulle varie rappresentazioni, riassumendo i relativi risultati in tab. VI.9.1.

Tabella VI.9.1 - Conseguenze della reciprocità e della simmetria sulla rappresentazione delle reti 2-porte.

Rappresentazione	Reciprocità	Simmetria
[Z]	$z_{12} = z_{21}$	$z_{12} = z_{21} ; z_{11} = z_{22}$
[Y]	$y_{12} = y_{21}$	$y_{12} = y_{21} ; y_{11} = y_{22}$
[H]	$h_{12} = -h_{21}$	$h_{12} = -h_{21} ;$ $h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 1$
[G]	$g_{12} = -g_{21}$	$g_{12} = -g_{21} ;$ $g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = 1$
[T]	$AD - BC = 1$	$AD - BC = 1 ; A = D$
parametri immagine	$\gamma_{12} = \gamma_{21}$	$\gamma_{12} = \gamma_{21} ; Z_{i1} = Z_{i2}$
[S]	$s_{12} = s_{21}$	$s_{12} = s_{21} ; s_{11} = s_{22}$

(1) - È opportuno sottolineare che non vale la proprietà inversa della VI.9.1, in quanto la simmetria richiede che sia soddisfatta anche la seconda equazione delle (VI.9.4).

- Matrice $[Z]$.

Per individuare l'effetto della reciprocità, consideriamo le due situazioni, necessarie per la (VI.9.1), coincidenti con quelle operative per la definizione dei parametri, che riportiamo in fig. VI.9.1. La (VI.9.1) diviene:

(VI.9.5)

$$V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)}$$

$$\begin{aligned} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 &= V_1^{(2)} \\ Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 &= V_2^{(1)} \end{aligned}$$

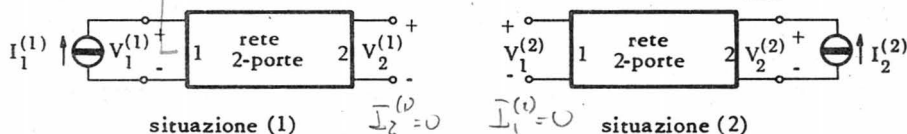


Fig. VI.9.1 - Situazioni di eccitazione che si considerano nel caso della rappresentazione con la matrice $[Z]$ per sviluppare la (VI.9.1).

Utilizzando la rappresentazione $[Z]$, la (VI.9.5) equivale a:

(VI.9.6)

$$V_2^{(1)} I_1^{(1)} I_2^{(2)} = Z_{12} I_2^{(2)} I_1^{(1)}$$

Perciò la reciprocità comporta per la matrice $[Z]$:

(VI.9.7)

$$Z_{21} = Z_{12}$$

Pertanto la matrice $[Z]$ di una rete reciproca è simmetrica.

- Matrice $[Y]$.

Si ha un risultato analogo a quello trovato per la matrice $[Z]$, considerando come situazioni di riferimento per la (VI.9.1) quelle operative; il risultato in questione è riportato in tab. VI.9.1.

- Matrice $[H]$.

conseguenze della reciprocità

Facciamo riferimento alle situazioni operative riportate per comodità in fig. VI.9.2. La (VI.9.1) diviene:

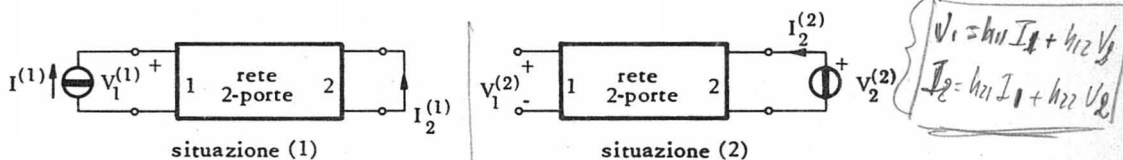


Fig. VI.9.2 - Situazioni di eccitazione che si considerano nel caso della rappresentazione con la matrice $[H]$ per sviluppare la (VI.9.1).

$$h_{11} = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{V_2=0} \quad h_{21} = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{V_2=0}$$

$$h_{22} = \left(\frac{I_2}{V_2} \right)_{I_1=0} \quad h_{12} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{I_1=0}$$

$$V_1^{(1)} I_1^{(2)} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)} + V_2^{(2)} I_2^{(1)}$$

$$(VI.9.8) \quad 0 = V_1^{(2)} I_1^{(1)} + V_2^{(2)} I_2^{(1)}$$

Utilizzando la rappresentazione $[H]$, tale espressione diviene:

$$(VI.9.9) \quad 0 = h_{12} V_2^{(2)} I_1^{(1)} + V_2^{(2)} h_{21} I_1^{(1)}$$

Perciò la reciprocità comporta per la matrice $[H]$:

$$(VI.9.10) \quad h_{12} = -h_{21}$$

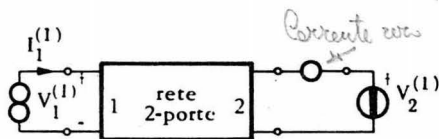
- Matrice $[G]$.

Si ha un risultato analogo a quello trovato per la matrice $[H]$, che si riporta in tab. VI.9.1.

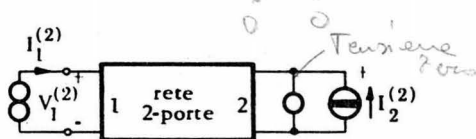
- Matrice $[T]$.

Facciamo riferimento alle situazioni operative, riportate per comodità in fig. VI.9.3. La (VI.9.1) diviene:

$$(VI.9.11) \quad V_1^{(1)} I_1^{(2)} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)} + V_2^{(2)} I_2^{(1)}$$



Situazione (1)



Situazione (2)

Fig. VI.9.3 - Situazioni di eccitazione che si considerano nel caso della rappresentazione con la matrice T , per sviluppare la (VI.9.1); i nullori sono stati sostituiti con le coppie nullatori-noratori.

Utilizzando la matrice di trasmissione, la (VI.9.11) diviene:

$$(VI.9.12) \quad (A V_2^{(1)} - B I_2^{(1)}) (C V_2^{(2)} - D I_2^{(2)}) + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = (A V_2^{(2)} - B I_2^{(2)}) (C V_2^{(1)} - D I_2^{(1)})$$

Tenendo conto che $I_2^{(1)}$ e $V_2^{(2)}$ sono uguali a zero, la (VI.9.12) diviene:

$$(VI.9.13) \quad -A D V_2^{(1)} I_2^{(2)} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = -B C V_2^{(1)} I_2^{(2)}$$

che equivale a:

(VI.9.14)

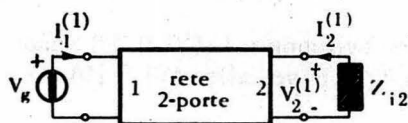
$$AD - BC = 1$$

Pertanto la matrice $[T]$ di una rete reciproca ha determinante uguale ad 1.

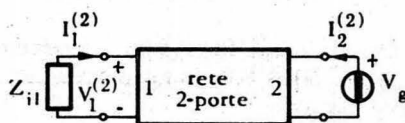
Parametri immagine.

Facendo riferimento alle situazioni di fig. VI.9.4, la (VI.9.1) diviene:

$$(VI.9.15) \quad V_g I_1^{(2)} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)} + V_g I_2^{(1)}$$



Situazione (1)



Situazione (2)

Fig. VI.9.4 - Situazioni di eccitazione che si considerano nel caso della rappresentazione mediante i parametri immagine, per sviluppare la VI.9.1.

Per la particolare chiusura dei circuiti, risulta:

$$I_1^{(1)} = \frac{V_g}{Z_{i1}}; \quad V_2^{(1)} = V_g e^{-\gamma_{12}} \sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}}; \quad I_2^{(1)} = -\frac{V_2^{(1)}}{Z_{i2}}$$

(VI.9.16)

$$I_1^{(2)} = -\frac{V_1^{(2)}}{Z_{i1}}; \quad V_1^{(2)} = V_g e^{-\gamma_{21}} \sqrt{\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}}}; \quad I_2^{(2)} = \frac{V_g}{Z_{i2}}$$

Sostituendo tali valori nella (VI.9.15), si ha:

$$(VI.9.17) \quad -\frac{V_g^2}{Z_{i1}} e^{-\gamma_{21}} \sqrt{\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}}} + \frac{V_g^2}{Z_{i2}} e^{-\gamma_{12}} \sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}} =$$

$$= \frac{V_g^2}{Z_{i1}} e^{-\gamma_{21}} \sqrt{\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}}} - \frac{V_g^2}{Z_{i2}} e^{-\gamma_{12}} \sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}}$$

La (VI.9.17), dopo semplificazione, equivale a:

$$(VI.9.18) \quad e^{-\gamma_{12}} = e^{-\gamma_{21}}$$

Quindi la conseguenza della reciprocità per i parametri immagine è che:

$$(VI.9.19) \quad \gamma_{12} = \gamma_{21}$$

- Matrice $[S]$.

Conviene trasformare preventivamente la (VI.9.1) in termini di grandezze onda incidente e onda riflessa. Utilizzando a questo scopo le (VI.6.34), la (VI.9.1) diviene:

$$(VI.9.20) \quad b_1^{(2)} a_1^{(1)} + b_2^{(2)} a_2^{(1)} = b_1^{(1)} a_1^{(2)} + b_2^{(1)} a_2^{(2)}$$

Le situazioni a cui facciamo riferimento per sviluppare la (VI.9.20) sono quelle di fig. VI.9.5, per le quali sappiamo, in base alle (VI.6.19) e (VI.6.21), che:

$$(VI.9.21) \quad a_1^{(1)} = \frac{V_g}{2\sqrt{R_1}}; \quad a_2^{(1)} = 0; \quad a_2^{(2)} = \frac{V_g}{2\sqrt{R_2}}; \quad a_1^{(2)} = 0;$$

$$b_1^{(1)} = s_{11} a_1^{(1)}; \quad b_2^{(1)} = s_{21} a_1^{(1)}; \quad b_1^{(2)} = s_{12} a_2^{(2)}; \quad b_2^{(2)} = s_{22} a_2^{(2)}.$$

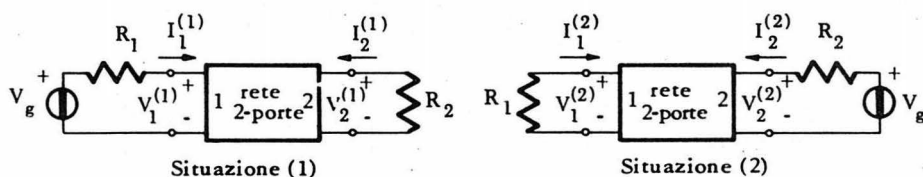


Fig. VI.9.5 - Situazioni di eccitazioni che si considerano nel caso della rappresentazione mediante la matrice $[S]$.

Inserendo le (VI.9.21) nella (VI.9.20), si ha:

$$(VI.9.22) \quad s_{12} a_2^{(2)} a_1^{(1)} = s_{21} a_1^{(1)} a_2^{(2)}$$

Perciò la conseguenza della reciprocità sulla matrice S è:

$$(VI.9.23) \quad \boxed{s_{12} = s_{21}}$$

Pertanto la matrice $[S]$ di una rete reciproca è simmetrica.

$$V_1^{(1)} \cdot I_1^{(2)} + V_2^{(1)} \cdot I_2^{(2)} = V_1^{(2)} \cdot I_1^{(1)} + V_2^{(2)} \cdot I_2^{(1)}$$

$$V_1^{(1)} \cdot I_2^{(2)} + V_2^{(1)} \cdot I_1^{(2)} = V_1^{(2)} \cdot I_2^{(1)} + V_2^{(2)} \cdot I_1^{(1)}$$

VI.9.2 - Conseguenze della simmetria sulla rappresentazione delle reti 2-porte.

L'effetto della simmetria della rete 2-porte sulla sua rappresentazione è quello di ridurre a due i parametri indipendenti della rappresentazione. Ciò è evidente dalla (VI.9.4), che rappresenta le due equazioni che debbono soddisfare le grandezze elettriche della rete 2-porte nel caso che essa sia simmetrica. Nel presente paragrafo analizziamo in dettaglio la conseguenza della simmetria per le varie rappresentazioni, riportando in tab. VI.9.1 i risultati di tale analisi.

Matrice [Z]. $V_1^{(1)} \cdot I_2^{(2)} = V_2^{(2)} \cdot I_1^{(1)}$ $Z_{11} = \frac{V_1^{(1)}}{I_1^{(1)}} \Big|_{V_2=0}$ $Z_{12} = \frac{V_1^{(2)}}{I_2^{(2)}} \Big|_{I_1=0}$

I quattro parametri di questa rappresentazione si presentano in coppie dello stesso tipo, che si scambiano fra loro sostituendo una porta con l'altra. Poiché per una rete simmetrica tale sostituzione non ha effetto esterno, i termini di ciascuna coppia devono essere uguali, cioè:

$$(VI.9.24) \quad \boxed{Z_{11} = Z_{22}} \quad ; \quad \boxed{Z_{12} = Z_{21}}$$

È opportuno notare come l'ultima delle relazioni precedenti è proprio quella che si ottiene per una rete reciproca, come deve essere in base alla proprietà VI.9.1.

Matrice [Y].

Si ha una situazione analoga a quella della matrice [Z]. Il risultato è riportato in tab. VI.9.1.

Matrice [H].

In questo caso conviene utilizzare le (VI.9.4). La prima delle due equazioni riguarda la reciprocità; perciò è sufficiente sviluppare la seconda. Con riferimento alla fig. VI.9.2, si ha:

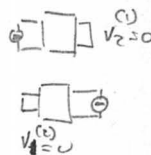
$$(VI.9.25) \quad V_1^{(1)} I_2^{(2)} = V_2^{(2)} I_1^{(1)} + V_1^{(2)} I_2^{(1)}$$

Utilizzando la matrice [H] ed il fatto che $V_2^{(1)}$ ed $I_1^{(2)}$ sono nulli, si ottiene:

$$(VI.9.26) \quad h_{11} I_1^{(1)} h_{22} V_2^{(2)} = V_2^{(2)} I_1^{(1)} + h_{12} V_2^{(2)} h_{21} I_1^{(1)}$$

Pertanto la condizione aggiuntiva dovuta alla simmetria è che:

$$(VI.9.27) \quad h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 1$$



– Matrice $[G]$.

Si ha una situazione analoga a quella della matrice $[H]$. Il risultato è riportato in tab. VI.9.1.

– Matrice $[T]$.

Utilizziamo la seconda delle (VI.9.4). Con riferimento alla figura VI.9.3, si ha:

$$(VI.9.28) \quad V_2^{(1)} I_1^{(2)} + V_1^{(1)} I_2^{(2)} = 0$$

Esprimendo le grandezze della prima porta in funzione di quelle della seconda, tramite la matrice $[T]$, la (VI.9.28) diviene:

$$(VI.9.29) \quad V_2^{(1)} (-D I_2^{(2)}) + A V_2^{(1)} I_2^{(2)} = 0$$

Perciò la condizione aggiuntiva dovuta alla simmetria è:

$$(VI.9.30) \quad A = D$$

– Parametri immagine e matrice $[S]$.

Per tali rappresentazioni si ha una situazione analoga a quella della matrice $[Z]$. I risultati sono riportati in tab. VI.9.1.

VI.9.3 - Reciprocità dei bipoli e delle reti 2-porte costituite da bipoli.

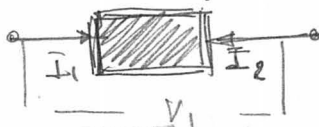
La reciprocità è una proprietà molto comune delle reti 2-porte. Vedremo infatti nel presente paragrafo che una rete 2-porte costituita da bipoli è reciproca⁽¹⁾. Per provare ciò è opportuno far vedere preventivamente che ogni bipolo è reciproco. A questo scopo basta verificare che per esso è soddisfatta la relazione di Lorentz (I.5.2), che diviene:

$$(VI.9.31) \quad V_1^{(1)} I_1^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)}$$

Utilizzando la rappresentazione impedenza, la (VI.9.31) diviene la seguente identità:

$$(VI.9.32) \quad Z I_1^{(1)} I_1^{(2)} = Z I_1^{(2)} I_1^{(1)}$$

(1) - È importante tenere presente che i generatori indipendenti non debbono figurare tra i bipoli che si considerano interni alla rete; infatti essi servono solo ad introdurre le eccitazioni dall'esterno (vedi § VI.4.1).



Perciò risulta:

Proprietà VI.9.2 - «Ogni bipolo è reciproco».

$$\frac{V_1^{(1)}}{I_1^{(1)}} = \frac{V_1^{(2)}}{I_1^{(2)}}$$

Osservazione VI.9.1

Non soddisfano necessariamente alla proprietà precedente i rami staccati di un elemento a più porte; ciò ad esempio vale per i rami controllati dei generatori dipendenti e per i noratori.

Consideriamo una rete 2-porte costituita da bipoli ed applichiamo il teorema di sostituzione nelle due situazioni di eccitazioni che occorre considerare in relazione alla legge di Lorentz, espressa dalla (VI.9.1), ponendo in corrispondenza alle porte due generatori di corrente. Indichiamo con l'apice 1 la prima situazione e con l'apice 2 la seconda; la rete 2-porte si presenta come in fig. VI.9.6. È evidente che, nei due casi, $k=1$ e $k=2$, le correnti e le tensioni dei generatori coincidono con le corrispondenti grandezze elettriche di porta. Appliciamo il teorema di Tellegen al circuito di fig. VI.9.6; essendo N il numero dei bipoli componenti, risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N v_j^{(1)} i_j^{(2)} - V_1^{(1)} I_1^{(2)} - V_2^{(1)} I_2^{(2)} &= 0 \\ \sum_{j=1}^N v_j^{(2)} i_j^{(1)} - V_1^{(2)} I_1^{(1)} - V_2^{(2)} I_2^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} [V]^{(1)T} [I]^{(2)} &= \\ [V]^{(2)T} [I]^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Poichè ogni bipolo componente è reciproco, le sommatorie che compaiono nelle due equazioni precedenti sono uguali; pertanto eliminando tali sommatorie, si ottiene dalle (VI.9.33) la (VI.9.1); ciò dimostra la reciprocità della rete 2-porte. In conclusione si ha:

Proprietà VI.9.3 - «Una rete 2-porte costituita di bipoli è reciproca».

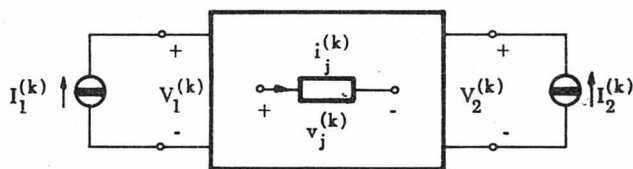


Fig. VI.9.6 - Rete 2-porte costituita da bipoli, di cui l' j -esimo è messo in evidenza. Le eccitazioni, nei due casi $k=1$ e $k=2$, sono schematizzate, tramite il teorema di sostituzione, da due generatori di corrente.

VI.9.4 - Reciprocità del trasformatore ideale, delle induttanze accoppiate e delle reti 2-porte costituite da elementi reciproci.

Facciamo vedere, nel presente paragrafo, che la famiglia delle reti reciproche è ancora più estesa di quanto visto nel paragrafo precedente. In particolare sono reciproci anche alcuni elementi di base, costituenti dei circuiti.

Iniziamo dal trasformatore ideale. Con riferimento alla figura VI.9.7 a), la (VI.9.1) diviene, utilizzando le relazioni costitutive del trasformatore:

$$(VI.9.34) \quad n V_2^{(1)} I_1^{(2)} - V_2^{(1)} n I_1^{(2)} = n V_2^{(2)} I_1^{(1)} - V_2^{(2)} n I_1^{(1)}$$

Poichè ambo i membri della (VI.9.34) sono nulli, essa si riduce ad una identità; ciò dimostra la seguente proprietà:

Proprietà VI.9.4 - «Il trasformatore ideale è reciproco».

$$V_1 = n V_2 \quad I_2 = -n I_1$$

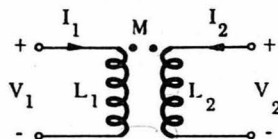
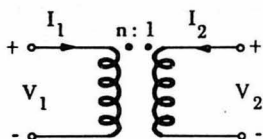


Fig. VI.9.7 - Elementi reciproci a due porte.

Consideriamo ora le induttanze accoppiate, con riferimento alla fig. VI.9.7 b); utilizzando le relazioni costitutive, la (VI.9.1) diviene:

$$(VI.9.35) \quad [s L_1 I_1^{(1)} + s M I_2^{(1)}] I_1^{(2)} + [s L_2 I_2^{(1)} + s M I_1^{(1)}] I_2^{(2)} = \\ = [s L_1 I_1^{(2)} + s M I_2^{(2)}] I_1^{(1)} + [s L_2 I_2^{(2)} + s M I_1^{(2)}] I_2^{(1)}$$

che chiaramente costituisce una identità. Pertanto si ha:

Proprietà VI.9.5 - «Le induttanze accoppiate sono un elemento reciproco».

Ovviamente le proprietà VI.9.4 e VI.9.5 si sarebbero potute ricavare anche a partire da una rappresentazione degli elementi suddetti, considerati come reti 2-porte.

Consideriamo infine una rete 2-porte costituita da elementi reciproci ad una, due, ..., M porte; supponiamo che tali elementi siano in numero rispettivamente di $N_1, N_2, \dots, N_M$. Procedendo come nella dimostrazione della proprietà VI.9.3, applicando il teorema di Tellegen in due situazioni diverse di eccitazione, schematizzate con generatori di corrente, otteniamo due relazioni analoghe alle (VI.9.33) e precisamente:

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} (V_{j1}^{(1)} I_{j1}^{(2)} + V_{j2}^{(1)} I_{j2}^{(2)} + \dots + V_{jk}^{(1)} I_{jk}^{(2)}) +$$

$$(VI.9.36) \quad - V_1^{(1)} I_1^{(2)} - V_2^{(1)} I_2^{(2)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} (V_{j1}^{(2)} I_{j1}^{(1)} + V_{j2}^{(2)} I_{j2}^{(1)} + \dots + V_{jk}^{(2)} I_{jk}^{(1)}) +$$

$$- V_1^{(2)} I_1^{(1)} - V_2^{(2)} I_2^{(1)} = 0$$

Poichè per ipotesi gli elementi componenti sono reciproci, le doppie sommatorie che compaiono nella (VI.9.36) sono uguali; eliminandole si perviene alla (VI.9.1), ciò che dimostra la reciprocità della rete 2-porte. In conclusione si ha:

Proprietà VI.9.6 - «Una rete 2-porte costituita da elementi reciproci accessibili da un numero qualsiasi di porte è reciproca».

VI.10 - Analisi di circuiti contenenti blocchi che si comportano come reti 2-porte.

Molto spesso il circuito che si deve analizzare contiene, oltre agli elementi introdotti nel Cap.I, anche blocchi più o meno complessi di cui si conosce la rappresentazione quando si comportano come reti 2-porte. Tale comportamento, tuttavia, non è sempre garantibile a priori, per cui, quando sussiste incertezza riguardo a questo punto occorre effettuare un accertamento supplementare. Vedremo in dettaglio questo punto nel § VI.10.3. Nei § VI.10.1 e VI.10.2, descriveremo i due metodi di analisi più usuali che consistono, rispettivamente, nel sostituire al blocco due generatori indipendenti oppure un circuito equivalente opportuno.

VI.10.1 - Procedimento di analisi derivato dal teorema di sostituzione.

In base al teorema di sostituzione, ad ogni porta di un circuito comunque complesso si può sostituire o un generatore di tensione, avente una tensione equivalente a quella che si ha sulla porta nella particolare situazione di eccitazione che si sta considerando, oppure un generatore di corrente, avente una corrente uguale a quella entrante nella porta. In conseguenza di ciò, un blocco che si comporta come rete 2-porte, contenuto nell'interno di un circuito, può essere sostituito con due generatori indipendenti al posto delle porte. Le grandezze impresse da questi generatori sono incognite, così come le rimanenti due grandezze elettriche. D'altra parte tra queste quattro grandezze sussistono le due relazioni che caratterizzano la rappresentazione della rete 2-porte. L'analisi del circuito può quindi farsi con uno qualsiasi dei metodi visti nel Cap.II, aggiungendo al sistema di equazioni ottenuto con il metodo usato le due equazioni proprie della rappresentazione. Chiariamo con esempi il procedimento di analisi proposto.

Esempio VI.10.1

Il circuito da analizzare è mostrato in fig.VI.10.1. Esso contiene un blocco di cui si conosce la rappresentazione $[Z]$ come rete 2-porte. Supponiamo che sia richiesta la tensione V_R , nel dominio della trasformata di Laplace, nell'ipotesi che allo istante iniziale il circuito sia a riposo.

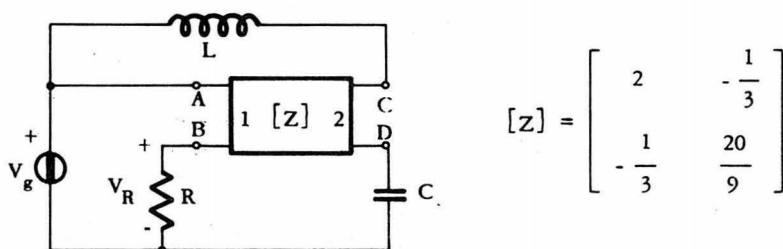
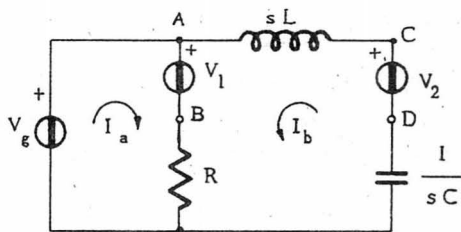


Fig.VI.10.1 - Circuito considerato nell'esempio VI.10.1. La rete 2-porte ha la matrice impedenze a vuoto indicata in figura; i valori dei componenti sono: $R = 2/3$; $L = 1$; $C = 1$ (Ω , F, H).

Applichiamo il procedimento di analisi proposto nel presente paragrafo e sostituiamo alle porte due generatori di tensione, in quanto intendiamo applicare il metodo delle maglie. Si ottiene il circuito di fig.VI.10.2, in cui sono indicate esplicitamente le maglie che si considerano, con l'orientazione delle relative correnti. Le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie sono le seguenti:

Fig.VI.10.2 - Schema risultante dopo la sostituzione della rete 2-porte con due generatori di tensione.



$$V_g = V_1 + R(I_a + I_b)$$

$$0 = V_1 - V_2 + R(I_a + I_b) + \left(sL + \frac{1}{sC}\right)I_b$$

A queste equazioni aggiungiamo quelle costitutive della rete 2-porte:

$$\boxed{V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2} \quad ; \quad \boxed{V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2}$$

in cui V_1 e V_2 sono le tensioni dei due generatori posti in fig. VI.10.2 al posto della rete 2-porte. Le correnti di porta I_1 e I_2 , in base alla fig. VI.10.2, coincidono con:

$$I_1 = I_a + I_b \quad ; \quad I_2 = -I_b$$

Eliminando dalle equazioni precedenti I_1 , I_2 , V_1 , V_2 , si ha:

$$V_g = (z_{11} + R) I_a + (z_{11} - z_{12} + R) I_b$$

$$0 = (z_{11} - z_{21} + R) I_a + \left(z_{11} - z_{12} - z_{21} + z_{22} + R + sL + \frac{1}{sC}\right) I_b$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$V_g = \frac{8}{3} I_a + 3 I_b$$

$$0 = 3 I_a + \left(\frac{50}{9} + s + \frac{1}{s}\right) I_b$$

Risolvendo il sistema, si ottiene il valore di V_R , cioè:

$$V_R = R(I_a + I_b) = 2 \frac{\frac{23}{9} + s + \frac{1}{s}}{\frac{157}{9} + 8s + \frac{8}{s}} V_g$$

Esempio VI.10.2

Nel circuito di fig. VI.10.3 a), determinare la tensione V_c sul condensatore, supponendo di essere in regime permanente sinusoidale. Le induttanze accoppiate costituiscono un elemento a due porte, come messo in evidenza in fig. VI.10.3 b).

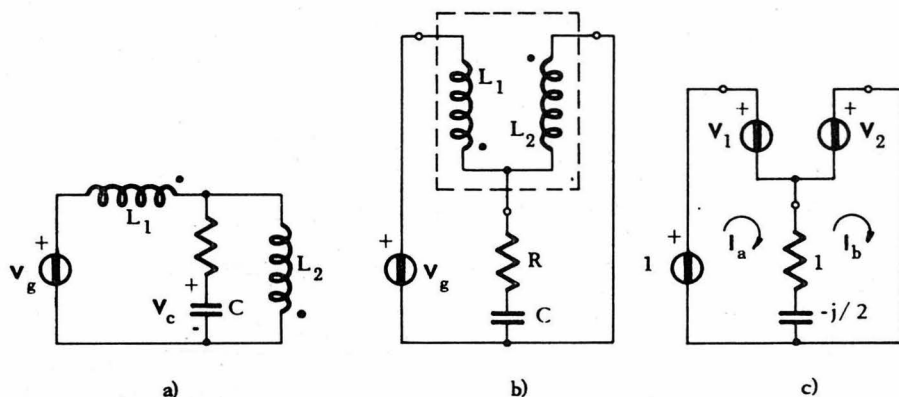


Fig. VI.10.3 - Circuito considerato nell'esempio VI.10.2. I valori dei componenti sono: $v_g(t) = \cos t$, $R = 1$, $L_1 = 4$, $L_2 = 1$, $M = 1$, $C = 2$ (Ω , F, H, V).

Applichiamo il procedimento proposto nel presente paragrafo, utilizzando due generatori di tensione al posto della rete due porte, come messo in evidenza in figura VI.10.3 c). Utilizzando il metodo delle maglie, come indicato in questa figura, si ha:

$$1 = V_1 + \left(1 - \frac{j}{2}\right) (I_a - I_b) \quad ; \quad 0 = -V_2 + \left(1 - \frac{j}{2}\right) (I_b - I_a)$$

Le relazioni costitutive delle induttanze accoppiate sono:

$$V_1 = j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b \quad ; \quad V_2 = -j\omega L_2 I_b - j\omega M I_a$$

In conclusione, il sistema di equazioni risolventi è:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + \frac{7}{2}j\right) I_a + \left(-1 + \frac{3}{2}j\right) I_b \\ 0 &= \left(-1 + \frac{3}{2}j\right) I_a + \left(1 + \frac{1}{2}j\right) I_b \end{aligned}$$

Da questo sistema si ricava:

$$I_a = \frac{1 + \frac{1}{2}j}{\frac{1}{2} + 7j} ; \quad I_b = \frac{1 - \frac{3}{2}j}{\frac{1}{2} + 7j}$$

Quindi la soluzione è:

$$V_c = -\frac{j}{2} (I_a - I_b) = \frac{2}{1 + 14j}$$

VI.10.2 - Procedimento di analisi con i circuiti equivalenti

Le equazioni che caratterizzano ciascuna rappresentazione di una rete 2-porte nelle variabili tensione e corrente di porta possono interpretarsi in termini di bipoli e generatori controllati, portando quindi direttamente all'individuazione di un circuito equivalente alla rete 2-porte. Sviluppiamo in dettaglio questa osservazione per la rappresentazione mediante la matrice impedenze a vuoto.

Le equazioni caratteristiche della rappresentazione sono:

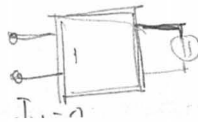
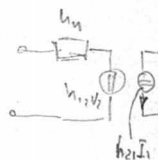
$$(VI.10.1) \quad \boxed{V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2} ; \quad \boxed{V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2}$$

La prima equazione esprime il fatto che la tensione alla porta 1 è la somma di due tensioni; la prima è proporzionale alla corrente I_1 entrante nella porta, la seconda alla corrente I_2 . Il primo termine perciò equivale alla caduta di tensione che si ha su un bipolo di impedenza z_{11} , quando in esso fluisce la corrente I_1 ; il secondo termine è la tensione che si stabilisce su un generatore di tensione controllato, con ramo di controllo coincidente con la porta 2 e grandezza di controllo uguale ad I_2 ; si tratta perciò di una transimpedenza di valore z_{12} . Un discorso del tutto simile si può fare per la seconda equazione. Il circuito equivalente alla rete 2-porte risultante è riportato in tab. VI.10.1.

In questa tabella sono anche riportati i circuiti equivalenti che corrispondono alle altre rappresentazioni. La loro derivazione si effettua come per la rappresentazione $[Z]$, con l'eccezione della rappresentazione mediante la matrice di trasmissione. In questo caso, infatti, le equazioni della rappresentazione sono:

$$(VI.10.2) \quad V_1 = A V_2 - B I_2 ; \quad \boxed{I_1 = C V_2 - D I_2}$$

Quindi tutti e quattro i termini corrispondono a generatori controllati. Inoltre, poichè tali generatori debbono imporre contemporaneamente sia



$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

Tabella VI.10.1 - Circuiti equivalenti delle reti 2-porte in funzione dei vari tipi di rappresentazione.

Rappresentazione	Circuito equivalente
[Z]	
[Y]	
[G]	
[H]	
[T]	

la tensione sia la corrente alla prima porta, risulta necessario inserire nel circuito equivalente della rete 2-porte un nullore. Si ha in definitiva il circuito riportato in tab.VI.10.1.

Quanto detto mette in evidenza la possibilità di ricondurre un circuito contenente blocchi, che si comportano come reti 2-porte e di cui si conosce la rappresentazione, ad un circuito contenente soltanto bipoli, generatori controllati e nullori. Circuiti di questo tipo si possono facil-

mente analizzare con i procedimenti visti nel Cap.II ed estesi nei Capitoli III e V.)

Esempio VI.10.3

Calcolare l'impedenza di ingresso della rete di fig.VI.10.4, supponendo di conoscere la rappresentazione ibrida $[H]$ della rete 2-porte interna, cioè:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

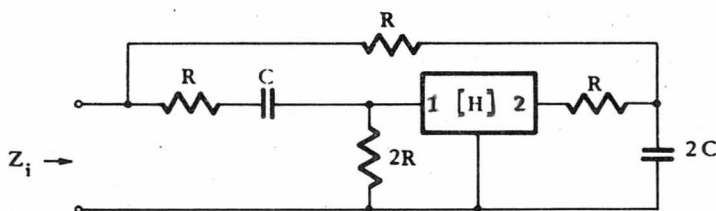


Fig.VI.10.4 - Circuito considerato nell'esempio VI.10.3.

Poniamo in ingresso al circuito, come eccitazione, un generatore di corrente I_0 e sostituiamo alla rete 2-porte il circuito equivalente corrispondente alla rappresentazione ibrida $[H]$ riportato in tab.VI.10.1. Risulta il circuito di fig.VI.10.5, che ana-

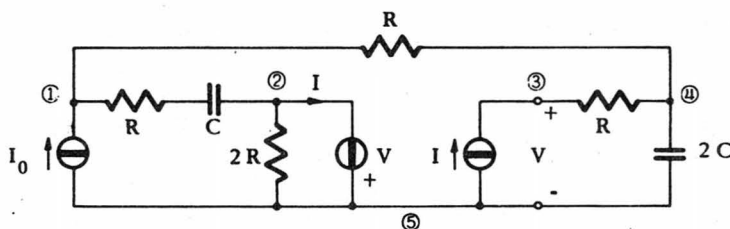


Fig.VI.10.5 - Circuito derivato da quello di fig.VI.10.4 con inserita l'eccitazione.

lizziamo su base nodi, prendendo come nodo di riferimento il nodo 5. Le equazioni risultanti sono, tenendo conto che $V_3 = V$ e $V_2 = -V$:

$$\text{nodo 1} \quad I_0 = G(V_1 - V_4) + \frac{sC}{1 + sRC} (V_1 + V)$$

$$\text{nodo 2} \quad 0 = I - \frac{G}{2} V - \frac{sC}{1 + sRC} (V_1 + V)$$

$$\text{nodo 3} \quad 0 = -I + G(V - V_4)$$

$$\text{nodo 4} \quad 0 = G(V_4 - V_1) + G(V_4 - V) + 2sC V_4$$

Da questo sistema si ottiene:

$$V_1 = 2sCR^2 I_0$$

Quindi l'impedenza di ingresso del circuito di fig. VI.10.4 vale:

$$Z_i = \frac{V_1}{I_0} = 2CR^2 s$$

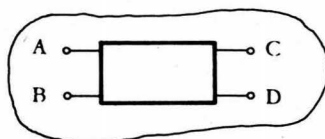
Esso equivale pertanto ad un induttore di induttanza $2CR^2$.

VI.10.3 - Controllo del comportamento dei blocchi come reti 2-porte.

Il comportamento di un blocco, accessibile da due porte nell'interno di un circuito, spesso non può essere garantito a priori come quello di una rete 2-porte; nel caso in cui ci si trovi in questa situazione è necessario effettuare un controllo. Tale controllo richiede ovviamente la conoscenza dettagliata della struttura interna del blocco e pertanto non è sufficiente conoscerne solo la rappresentazione esterna come rete 2-porte.

Un modo semplice di operare consiste nel supporre il blocco come rete 2-porte, indipendentemente dall'esito del controllo, e nell'applicare quindi uno dei procedimenti di analisi visti nei paragrafi precedenti, determinando nel circuito completo le tensioni dei morsetti di ingresso rispetto ad uno di essi; con riferimento a fig. VI.10.6, determiniamo le tensioni dei morsetti A, C, D rispetto a B. Successivamente, considerando a parte e in dettaglio la rete 2-porte, alimentiamola nel modo in cui risulta alimentata nel circuito precedente, determinando di nuovo le tensioni dei morsetti A, C, D rispetto a B. Se tali tensioni coincidono con quelle calcolate in precedenza, allora possiamo senz'altro dire che il blocco si comporta come una rete 2-porte; nel caso contrario ciò non è vero e quindi la rappresentazione del blocco non è utilizzabile ed occorre effettuare l'analisi prescindendo da essa.

Fig. VI.10.6 - Circuito in cui è contenuto un blocco accessibile da due porte.



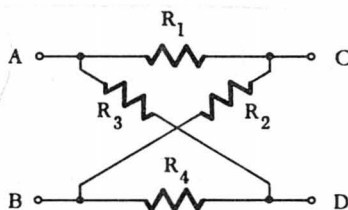
È opportuno osservare che se il blocco è a tre terminali, cioè se le due porte hanno un morsetto in comune, non è necessario effettuare alcuna verifica, in quanto il comportamento come rete 2-porte è sempre garantito. Ciò accade, ad esempio, per il circuito di fig. VI.10.4.

Esempio VI.10.4

Verificare il comportamento come rete 2-porte del blocco contenuto nel circuito di fig. VI.10.1, supponendo che abbia la configurazione di fig. VI.10.7.

Fig. VI.10.7 - Struttura interna del blocco riportato in fig. VI.10.1. I valori delle resistenze sono:

$$R_1 = R_2 = 3 \quad ; \quad R_3 = 1 \quad ; \quad R_4 = 2 \quad (\Omega)$$



Nel caso presente si può facilmente giungere alla conclusione che il blocco non si comporta come rete 2-porte. Esaminiamo infatti il comportamento del circuito quando la variabile di Laplace s assume il valore zero. Per questo particolare valore della variabile s , si vede chiaramente dalla fig. VI.10.1 che risulta $V_C - V_A = 0$ (essendo nulla l'impedenza dell'induttore). Andiamo ora a calcolare il valore di $V_C - V_A$ per la rete 2-porte di fig. VI.10.7, supponendola alimentata come nel circuito di figura VI.10.1 per $s = 0$. Risultato:

$$I_1 = I_a + I_b = 3 \frac{\frac{23}{9} + s + \frac{1}{s}}{\frac{157}{9} + 8s + \frac{8}{s}} V_g \quad ; \quad \text{per } s \rightarrow 0 \quad (I_1)_{s=0} = \frac{3}{8} V_g$$

$$I_2 = -I_b = \frac{9 V_g}{\frac{157}{9} + 8s + \frac{8}{s}} \quad ; \quad \text{per } s \rightarrow 0 \quad (I_2)_{s=0} = 0$$

Pertanto l'alimentazione del circuito si riduce ad un generatore di corrente in ingresso, pari ad I_1 . È facile vedere che si ha:

$$V_C - V_A = -z_{11} \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_1 \neq 0$$

Risulta quindi che il circuito di fig. VI.10.7 non si comporta come rete 2-porte nell'interno del circuito di fig. VI.10.1. In questo caso è sempre possibile fare in modo che il

blocco precedente si comporti come rete 2-porte, aggiungendo in cascata un trasformatore ideale di rapporto unitario, come mostrato in fig.VI.10.8; infatti la presenza del trasformatore ideale garantisce in ogni caso il comportamento corretto delle due porte.

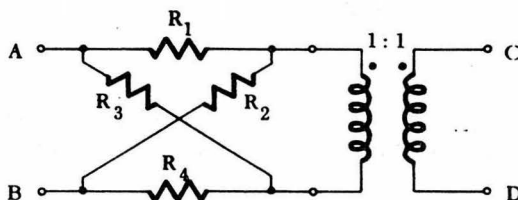


Fig.VI.10.8 - Circuito derivato da quello di fig.VI.10.7, che si comporta come rete 2-porte nell'interno del circuito di fig.VI.10.1.

VI.11 - Reti 2-porte tipiche.

Alcune configurazioni particolari delle reti 2-porte sono di impiego corrente, per cui è opportuno conoscerle, insieme con le rappresentazioni più usate per esse. Non verranno considerate le reti 2-porte simmetriche, per le quali si rimanda al Cap.VII, dove tali tipi di rete sono trattati in dettaglio, insieme con le trasformazioni e le equivalenze tra configurazioni diverse.

Le reti 2-porte si possono suddividere in due grandi classi a seconda che i morsetti di accesso siano quattro oppure tre, cioè a seconda che le due porte abbiano o meno un morsetto in comune. Le reti che hanno il morsetto in comune, come mostrato in fig.VI.11.1, prendono il nome di reti 2-porte sbilanciate, le altre sono le reti 2-porte bilanciate. Le reti due-porte tipiche che illustreremo di seguito appartengono tutte, con l'unica eccezione del traliccio, alla classe delle reti 2-porte sbilanciate.



Fig.VI.11.1 - Reti 2-porte sbilanciate e bilanciate.

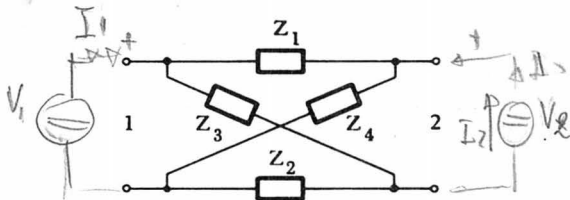
VI.11.1 - Traliccio.

La configurazione generale del traliccio è quella mostrata in figura VI.11.2; considerando il caso più generale determiniamo per esso la rappresentazione $[Z]$.

Osserviamo che, quando la porta 2 è aperta, l'impedenza che si vede alla porta 1 è il parallelo di due bipoli, costituiti rispettivamente dalla serie dei bipoli di impedenza Z_2 e Z_3 e di impedenza Z_1 e Z_4 ; pertanto si ha:

$$(VI.11.1) \quad z_{11} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1 + Z_4} + \frac{1}{Z_2 + Z_3}} = \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{\sum_{k=1}^4 Z_k} = \frac{5 \cdot 6}{11} = 2,7$$

Fig. VI.11.2 - Il traliccio di tipo generale.



Analogamente si deduce che:

$$(VI.11.2) \quad z_{22} = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{\sum_{k=1}^4 Z_k} = \frac{7 \cdot 4}{11} = 2,5$$

Per quanto riguarda le impedenze di trasferimento, che hanno lo stesso valore essendo la rete reciproca, si ha, inserendo un generatore di corrente I_1 alla porta 1 e lasciando aperta la porta 2 :

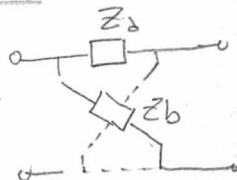
$$(VI.11.3) \quad V_2 = z_{11} I_1 \left[\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \right] = I_1 \frac{Z_4 Z_3 - Z_1 Z_2}{\sum_{k=1}^4 Z_k}$$

Quindi risulta:

$$(VI.11.4) \quad z_{12} = z_{21} = \frac{Z_4 Z_3 - Z_1 Z_2}{\sum_{k=1}^4 Z_k}$$

Una configurazione particolare, molto usata nelle applicazioni, è quella simmetrica, in cui si ha $Z_1 = Z_2 = Z_a$ e $Z_3 = Z_4 = Z_b$. Per questa configurazione risulta:

$$(VI.11.5) \quad z_{11} = z_{22} = \frac{Z_a + Z_b}{2} ; \quad z_{12} = z_{21} = \frac{Z_b - Z_a}{2}$$



Una proprietà importante della configurazione a traliccio simmetrico è la seguente. Se le impedenze Z_a e Z_b soddisfano la relazione:

(VI.11.6)

$$Z_a Z_b = R^2$$

allora chiudendo la porta 2 su un resistore di resistenza R , in ingresso si vede ancora R . L'importanza della proprietà è legata al fatto che il tipo di chiusura usuale è quello su resistori. Per dimostrare la proprietà precedente, è sufficiente scrivere l'impedenza di ingresso del traliccio simmetrico in funzione dei termini della sua matrice $[Z]$; si ha:

(VI.11.7)

$$\begin{aligned} Z_{\text{ING}} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + R} &= \frac{Z_a + Z_b}{2} - \frac{(Z_b - Z_a)^2}{4} \frac{1}{\frac{Z_a + Z_b}{2} + R} = \\ &= \frac{\frac{(Z_a + Z_b)^2}{4} + R \frac{Z_a + Z_b}{2} - \frac{(Z_b - Z_a)^2}{4}}{\frac{Z_a + Z_b}{2} + R} = \frac{Z_a Z_b + R \frac{Z_a + Z_b}{2}}{\frac{Z_a + Z_b}{2} + R} = R \end{aligned}$$

Vedi Impedenze immagine.

VI.11.2 - Rete 2-porte a « T ».

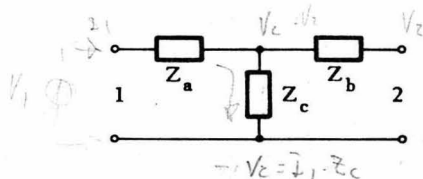
La rete a T è mostrata in fig. VI.11.3. La rappresentazione $[Z]$ relativa può essere determinata direttamente per ispezione visiva ed è uguale a:

(VI.11.8)

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Fig. VI.11.3 - Rete 2-porte a T.

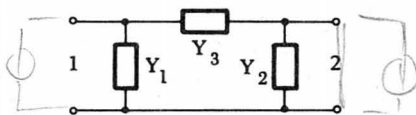


VI.11.3 - Rete 2-porte a « π » (pi-greco).

La rete è mostrata in fig. VI.11.4. Per essa è immediato ottenere la rappresentazione $[Y]$; si ha:

$$(VI.11.9) \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

Fig. VI.11.4 - Rete 2-porte a π (i bipoli sono rappresentati con le loro ammettenze).



VI.11.4 - Rete 2-porte ad «L».

La rete è mostrata in fig. VI.11.5 nelle due versioni possibili e può considerarsi come un sottocaso di quelle a T ed a π . Di conseguenza la rappresentazione, che può ottenersi per ispezione visiva, è la $[Z]$ oppure la $[Y]$, deducibili direttamente dalle (VI.11.8) e (VI.11.9), mettendo a zero il termine mancante.



Fig. VI.11.5 - Rete due porte ad L, nelle due versioni possibili.

VI.11.5 - Rete 2-porte a «T-derivato».

La rete è mostrata in fig. VI.11.6. Essa può considerarsi il parallelo di una rete 2-porte a T con una rete 2-porte costituita da un ramo bipolare che connette l'ingresso con l'uscita, come mostrato nella parte b) della figura. Poichè ambedue le reti in parallelo sono a tre terminali, non è necessario verificare la validità della connessione e la matrice ammettenze di corto-circuito del T-derivato è la somma delle matrici ammettenze delle due reti 2-porte componenti, cioè:

$$(VI.11.10) \quad [Y] = \frac{1}{\det [Z_T]} \begin{bmatrix} Z_7 + Z_8 & -Z_7 \\ -Z_7 & Z_6 + Z_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_5} \\ -\frac{1}{Z_5} & \frac{1}{Z_5} \end{bmatrix}$$

in cui $\det [Z_T] = Z_6 Z_7 + Z_7 Z_8 + Z_8 Z_6$.

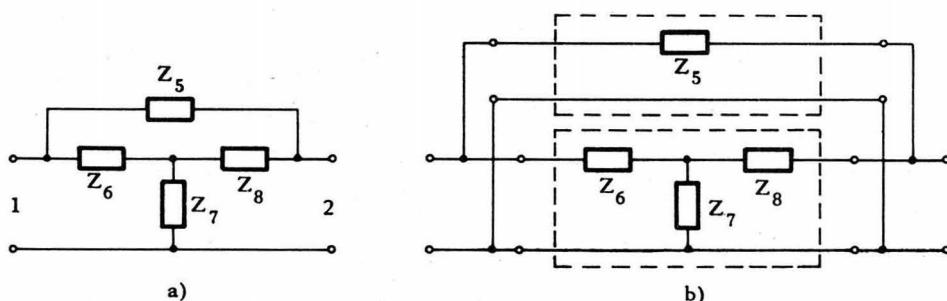


Fig. VI.11.6 - Rete 2-porte a T-derivato. In b) viene mostrata tale rete come il parallelo di due reti più semplici.

VI.11.6 - Rete 2-porte a «doppio T».

La rete è mostrata in fig. VI.11.7. Chiaramente essa risulta il parallelo di due reti a T e quindi la sua matrice $[Y]$ è la somma di quelle delle due reti componenti, cioè:

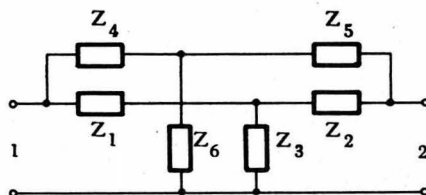
(VI.11.11)

$$[Y] = \frac{1}{\det[Z_{T1}]} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{\det[Z_{T2}]} \begin{bmatrix} Z_5 + Z_6 & -Z_6 \\ -Z_6 & Z_4 + Z_6 \end{bmatrix}$$

in cui: $\det[Z_{T1}] = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$

$\det[Z_{T2}] = Z_4 Z_5 + Z_4 Z_6 + Z_5 Z_6$

Fig. VI.11.7 - Rete 2-porte a doppio T.



VI.11.7 - Rete 2-porte a «scala».

La rete è mostrata in fig. VI.11.8 e si può considerare come risultante dalla connessione in cascata di reti 2-porte elementari ad L. I rami non connessi al morsetto comune delle due porte prendono il nome di rami longitudinali; quelli connessi al morsetto comune prendono il nome di rami trasversali. Tenendo conto del legame con le reti elementari ad L, si ottiene facilmente la matrice di trasmissione, cioè:

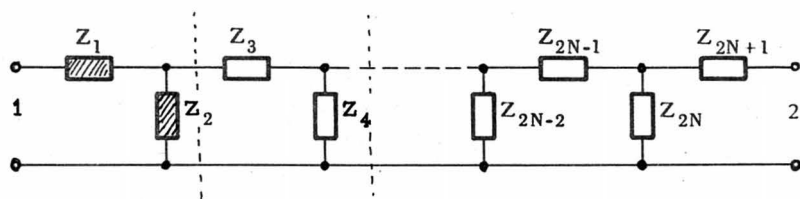


Fig.VI.11.8 - Rete 2-porte a scala.

$$(VI.11.12) \quad [T] = \left\{ \prod_{k=0,1,2,\dots,N-1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_{2K+1}}{Z_{2K+2}} & Z_{2K+1} \\ \frac{1}{Z_{2K+2}} & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & Z_{2N+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*

APPENDICI AL CAPITOLO VI

APPENDICE VI.A - Reti N -porte.

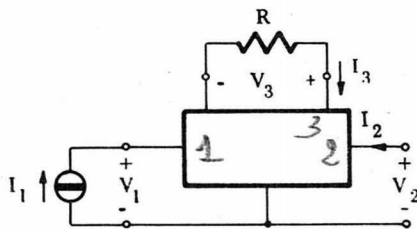
Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato in dettaglio la caratterizzazione esterna di una rete accessibile da una e due porte. Il caso in cui le porte di accesso siano in numero N maggiore di due può essere trattato in modo del tutto simile a quanto fatto per $N = 2$. In particolare si può sviluppare una teoria identica a quella disponibile nei § VI.4 e VI.5, con l'unica differenza che le matrici con cui si ha a che fare sono di ordine N invece che due e che le rappresentazioni possibili sono molte di più di quelle relative al caso 2-porte. Si può anche parlare di matrice di diffusione come nel § VI.6.2, mentre non ha più senso di parlare di parametri immagine. Valgono infine proprietà, definizioni e regole analoghe a quelle viste nei § VI.7, VI.8, VI.9 e VI.10.

Poichè non è possibile entrare in dettaglio sui vari punti, ci limiteremo a presentare due esempi di utilizzazione di reti con più di due porte, considerando le rappresentazioni $[Z]$ ed $[S]$.

Esempio VI.A.1

Nella rete di fig.VI.A.1, individuare l'effetto della resistenza R sulla tensione V_2 .

Fig.VI.A.1 - Esempio di utilizzazione di rete 3-porte.



Utilizziamo a questo scopo la rappresentazione $[Z]$ per la rete 3-porte, che si ottiene dal circuito in esame, mettendo in evidenza l'eccitazione, l'utilizzazione e il bipolo che potrebbe disturbare il risultato. Con i simboli di figura, si ha:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 + z_{13} I_3$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 + z_{23} I_3$$

$$V_3 = z_{31} I_1 + z_{32} I_2 + z_{33} I_3$$

Per effetto delle condizioni di chiusura, risulta I_1 noto, $I_2 = 0$, $V_3 = -R I_3$. Quindi, dalla terza equazione risulta:

$$I_3 = - \frac{z_{31} I_1}{z_{33} + R}$$

Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$V_2 = \left(z_{21} - \frac{z_{23} z_{31}}{z_{33} + R} \right) I_1$$

Questa formula mette in evidenza con chiarezza l'effetto della resistenza R sulla tensione V_2 , in funzione della rappresentazione $[Z]$ della suddetta rete 3-porte.

Esempio VI.A.2

Determinare la matrice di diffusione della rete 4-porte mostrata in fig.VI.A.2, che rappresenta un circuito importante dal punto di vista delle applicazioni (chiamato «bobina ibrida»).

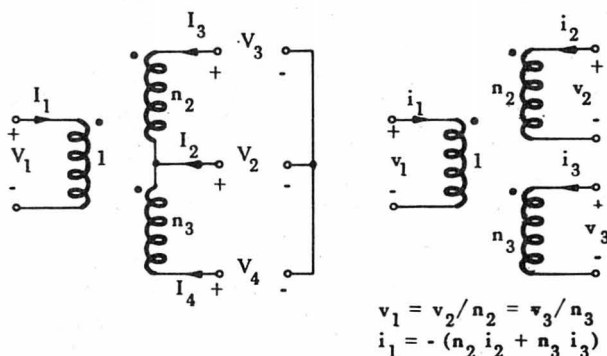


Fig.VI.A.2 - Bobina ibrida considerata nell'esempio VI.A.2; in evidenza sono indicate le relazioni costitutive del trasformatore a tre avvolgimenti da cui risulta formata.

Supponiamo che le quattro porte siano normalizzate rispetto ai quattro valori di resistenze R_1, R_2, R_3 e R_4 dei resistori su cui la rete verrà chiusa. Supporremo inoltre che risultino soddisfatte le seguenti relazioni, importanti nelle applicazioni d'interesse:

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{n_2}{n_3} ; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{n_2 n_3}$$

Tali condizioni corrispondono, rispettivamente, ad evitare il trasferimento tra le porte 1 e 2 e le porte 3 e 4.

Il calcolo della matrice $[S]$ può essere fatto utilizzando le formule ricavate nel § VI.6.2; tenendo conto, inoltre, che la rete è reciproca, la matrice $[S]$ risulta simmetrica per quanto visto nel § VI.9. Di conseguenza si ha $s_{ik} = s_{ki}$ ed i termini della matrice $[S]$ si calcolano come segue:

1) $s_{kk} = \frac{Z_k - R_k}{Z_k + R_k}$, in cui Z_k è l'impedenza vista all'ingresso della porta k , quando tutte le altre porte sono chiuse sulle resistenze di normalizzazione;

2) $s_{ki} = \frac{2V_k}{V_g} \sqrt{\frac{R_i}{R_k}}$, in cui V_k è la tensione della porta k , chiusa sulla resistenza R_k , quando la porta i è alimentata da un generatore di tensione di valore V_g e resistenza interna R_i e le rimanenti porte sono chiuse sulle resistenze di normalizzazione.

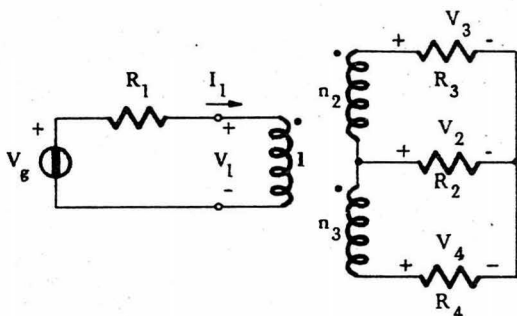


Fig. VI.A.3 - Circuito risultante nella situazione operativa per il calcolo della prima colonna della matrice $[S]$ della rete di fig. VI.A.2.

Sviluppiamo i calcoli in dettaglio per la prima colonna della matrice $[S]$. Occorre a tale scopo calcolare le tensioni di porta nella rete di fig. VI.A.3. Tenendo conto delle relazioni costitutive del trasformatore a tre avvolgimenti, si ha:

$$V_1 = \frac{V_3 - V_2}{n_2} = \frac{V_2 - V_4}{n_3}$$

$$V_g = V_1 + R_1 \left(n_2 \frac{V_3}{R_3} - n_3 \frac{V_4}{R_4} \right)$$

A queste equazioni occorre aggiungere l'equazione dell'equilibrio delle correnti nel morsetto comune alle porte 2, 3 e 4, cioè:

$$\frac{V_3}{R_3} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_4}{R_4} = 0$$

Utilizzando le prime due equazioni insieme all'ultima, si ha:

$$V_2 = \frac{V_1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \left(\frac{n_3}{R_4} - \frac{n_2}{R_3} \right) = 0$$

Quindi risulta

$$V_3 = n_2 V_1; \quad V_4 = -n_3 V_1$$

$$V_1 = \frac{V_g}{1 + \frac{R_1}{R_3} n_2^2 + \frac{R_1}{R_4} n_3^2}$$

$$I_1 = \left(\frac{n_2^2}{R_3} + \frac{n_3^2}{R_4} \right) V_1 = \frac{n_2^2}{R_3} \left(1 + \frac{n_3}{n_2} \right) V_1$$

I termini della prima colonna di $[S]$ valgono:

$$s_{11} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - R_1}{\frac{V_1}{I_1} + R_1} = \frac{1 - \frac{R_1}{R_3} n_2^2 \left(1 + \frac{n_3}{n_2} \right)}{1 + \frac{R_1}{R_3} n_2^2 \left(1 + \frac{n_3}{n_2} \right)} = \frac{R_3 - R_2 \frac{n_2}{n_3} \left(1 + \frac{n_3}{n_2} \right)}{R_3 + R_2 \frac{n_2}{n_3} \left(1 + \frac{n_3}{n_2} \right)}$$

$$s_{21} = 0$$

$$s_{31} = \frac{2 V_3}{V_g} \sqrt{\frac{R_1}{R_3}} = \frac{2 n_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_3}}}{1 + \frac{R_1}{R_3} n_2^2 + \frac{R_1}{R_4} n_3^2} = \frac{2 n_2 \sqrt{\frac{R_2}{R_3 n_2 n_3}}}{1 + \frac{R_2}{R_3} \frac{n_2}{n_3} + \frac{R_2}{R_3}}$$

$$s_{41} = \frac{2 V_4}{V_g} \sqrt{\frac{R_1}{R_4}} = - \frac{2 n_3 \sqrt{\frac{R_1}{R_4}}}{1 + \frac{R_1}{R_3} n_2^2 + \frac{R_1}{R_4} n_3^2} = \frac{-2 \sqrt{\frac{R_2}{R_3}}}{1 + \frac{R_2}{R_3} \frac{n_2}{n_3} + \frac{R_2}{R_3}}$$

Riportiamo di seguito l'espressione completa della matrice [S]:

$$[S] = \frac{1}{R_3 + R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right)} \begin{bmatrix} R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) & 0 & 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 & -2 \sqrt{R_2 R_3} \\ 0 & R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) & 2 \sqrt{R_2 R_3} & 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 \\ 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 & 2 \sqrt{R_2 R_3} & R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) - R_3 & 0 \\ -2 \sqrt{R_2 R_3} & 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 & 0 & R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) - R_3 \end{bmatrix}$$

Utilizzando i seguenti valori per le resistenze di normalizzazione e di chiusura: $R_3 = R_4 = 2 R_2$; $R_1 = R_2 / n_2^2$, si perviene alla seguente forma semplificata di [S]:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

APPENDICE VI.B - Cenni alle proprietà delle rappresentazioni delle reti.

Per ogni tipo di rete è di fondamentale importanza, ai fini della sintesi e quindi del progetto finale, conoscere le proprietà che possiede la rappresentazione prescelta. Ciò è già stato messo in evidenza nella premessa del libro, mentre nell'appendice IV.A sono state elencate e discusse alcune proprietà rilevanti delle singole funzioni di rete. È opportuno ricordare che tali proprietà dipendono in modo complesso dai tre seguenti parametri:

- 1) la struttura topologica della rete;
- 2) il tipo dei componenti;
- 3) la rappresentazione considerata.

Il compito di individuare le proprietà dei vari tipi di rappresentazione esula dagli argomenti del presente testo. Tuttavia, nel seguito, daremo un cenno al tipo di proprietà a cui si perviene almeno in casi tipici. Si ometteranno ovviamente i procedimenti seguiti per ricavare le suddette proprietà. Per dettagli si rimanda ai testi specializzati, citati nell'appendice VI.E.

VI.B.1 - Reti N-porte costituite dagli elementi resistenza, induttanza, capacità, trasformatore ideale (reti RLCT).

Le reti N-porte comunque complesse costituite dagli usuali componenti passivi rappresentati dagli elementi resistenza, induttanza, capacità, trasformatore ideale, sono caratterizzate dalle seguenti proprietà con riferimento alle rappresentazioni $[Z]$, $[Y]$ ed $[S]$.

Proprietà VI.B.1 - «Una rete N-porte RLCT ha come rappresentazione $[Z]$ oppure $[Y]$ una matrice razionale reale e positiva».

Una matrice razionale reale positiva è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- 1) ogni termine è una funzione razionale a coefficienti reali della variabile s ;
- 2) i poli di tutti i termini si trovano nel semipiano sinistro della variabile s oppure, al limite, sull'asse immaginario. In quest'ultimo caso i poli sono semplici;

3) calcoliamo il residuo dello sviluppo in frazioni parziali di ciascun termine della matrice in corrispondenza ad un polo sull'asse immaginario⁽¹⁾ e formiamo la matrice di questi residui. Tale matrice deve essere semidefinita positiva (ricordiamo che una matrice semidefinita positiva è caratterizzata dalla non-negatività dei determinanti di tutti i minori principali di qualsiasi ordine);

4) calcoliamo la parte reale di ciascun termine per $s = j\omega$ e formiamo la matrice delle parti reali. Tale matrice deve essere semidefinita positiva per qualsiasi valore di ω .

Un caso particolare è costituito dalle reti N-porte contenenti solo capacità, induttanze e trasformatori ideali⁽²⁾; allora la proprietà VI.B.1 si modifica nel seguente modo:

Proprietà VI.B.2 - «Una rete N-porte reattiva ha come rappresentazione $[Z]$ oppure $[Y]$ una matrice razionale reale positiva dispari».

Una matrice razionale reale positiva dispari è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- 1) ogni termine è una funzione razionale reale della variabile s ;
- 2) i poli di tutti i termini si trovano sull'asse immaginario e sono semplici;
- 3) le matrici dei residui dei poli (sull'asse immaginario) sono semidefinite positive;
- 4) la matrice delle parti reali per $s = j\omega$ è nulla per qualsiasi valore di ω .

A titolo di esempio, verifichiamo che la rete 2-porte considerata nell'esempio VI.5.3 gode della proprietà VI.B.2, essendo costituita da induttori e condensatori. La matrice $[Z]$ ottenuta nel suddetto esempio è la seguente:

$$(VI.B.1) \quad [Z] = \begin{bmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & sL_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix}$$

I poli dei termini di $[Z]$ sono semplici e coincidono con $s=0$ e con $s=\infty$; perciò soddisfano la condizione 2) della proprietà VI.B.2. Le matrici dei residui nei due poli valgono:

(1) - È ovvio che se un termine non ha quel particolare polo che si sta considerando, manca nel suo sviluppo in frazioni parziali la parte relativa a tale polo e perciò il residuo è nullo.

(2) - Tale tipo di rete viene indicata come «rete N-porte reattiva» o «rete N-porte senza perdite».

$$(VI.B.2) \quad [K_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}; \quad [K_\infty] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

I determinanti dei minori principali di queste matrici valgono: $1/C$, $1/C$, 0 , L_1 , L_2 , $L_1 L_2$. Si vede che sono tutti non-negativi; quindi la condizione 3) della proprietà VI.B.2 è soddisfatta.

Le parti reali dei termini di $[Z]$ sono tutte nulle, poiché tali termini sono dispari; quindi è soddisfatta anche la condizione 4).

Vediamo ora le proprietà relative alla rappresentazione matrice di diffusione $[S]$.

Proprietà VI.B.3 - «Una rete N-porte RLCT ha come rappresentazione $[S]$ una matrice che gode delle seguenti proprietà:

- 1) ogni termine è una funzione razionale reale della variabile s ;
- 2) i poli di tutti i suoi termini sono nel semipiano sinistro aperto della variabile s ; ciò implica in particolare che per $s = j\omega$ tali termini sono limitati in modulo;
- 3) la seguente matrice:

$$(VI.B.3) \quad [E] - [S(j\omega)][S(-j\omega)]$$

con $[E]$ coincidente con la matrice unità, è hermitiana semidefinita positiva. Ricordiamo che una matrice hermitiana semidefinita positiva è caratterizzata dall'aver non-negativi i determinanti di tutti i suoi minori principali».

Nel caso delle reti N-porte reattive, la rappresentazione S gode di proprietà più semplici, cioè:

Proprietà VI.B.4 - «Una rete N-porte reattiva ha come rappresentazione $[S]$ una matrice che gode delle seguenti proprietà:

- 1) ogni termine è una funzione razionale reale della variabile s ;
- 2) i poli di tutti i suoi termini sono nel semipiano sinistro aperto della variabile s ;
- 3) la matrice è tale che:

$$(VI.B.4) \quad [S(j\omega)][S(-j\omega)] = [E]$$

In particolare, se la rete è anche senza memoria la matrice $[S]$ deve soddisfare solo la condizione (VI.B.4), cioè deve essere una *matrice unitaria*.

A titolo di esempio, facciamo vedere che la rete considerata nell'es. VI.A.2 soddisfa alla proprietà VI.B.4 nella forma semplificata precedente, cioè che la matrice $[S]$ è una matrice unitaria. A questo scopo occorre calcolare il prodotto di $[S]$ per se stessa, in quanto è simmetrica, e verificare che il risultato sia la matrice unità. Si ottiene:

riga 1 $\times$ riga 1

$$\frac{1}{\left[R_3 + R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right)\right]^2} \left\{ \left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) \right]^2 + 4 \frac{n_2}{n_3} R_2 R_3 + 4 R_2 R_3 \right\} = 1$$

riga 1 $\times$ riga 2

$$4 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 - 4 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 = 0$$

riga 1 $\times$ riga 3

$$2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 \left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) \right] + 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) - R_3 \right] = 0$$

riga 1 $\times$ riga 4

$$-2 \sqrt{R_2 R_3} \left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) \right] - 2 \sqrt{R_2 R_3} \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) - R_3 \right] = 0$$

riga 2 $\times$ riga 2

$$\frac{1}{\left[R_3 + R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right)\right]^2} \left\{ \left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) \right]^2 + 4 R_2 R_3 + 4 \frac{n_2}{n_3} R_2 R_3 \right\} = 1$$

riga 2 $\times$ riga 3

$$\left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) \right] 2 \sqrt{R_2 R_3} + 2 \sqrt{R_2 R_3} \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3}\right) - R_3 \right] = 0$$

riga 2 $\times$ riga 4

$$\left[R_3 - R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) \right] 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 + 2 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) - R_3 \right] = 0$$

riga 3 $\times$ riga 3

$$\frac{1}{\left[R_3 + R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) \right]^2} \left\{ 4 \frac{n_2}{n_3} R_2 R_3 + 4 R_2 R_3 + \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) - R_3 \right]^2 \right\} = 1$$

riga 3 $\times$ riga 4

$$-4 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 + 4 \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} R_2 R_3 = 0$$

riga 4 $\times$ riga 4

$$\frac{1}{\left[R_3 + R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) \right]^2} \left\{ 4 R_2 R_3 + 4 \frac{n_2}{n_3} R_2 R_3 + \left[R_2 \left(1 + \frac{n_2}{n_3} \right) - R_3 \right]^2 \right\} = 1$$

Osservazione VI.B.1

Nel caso dei bipoli le proprietà delle rappresentazioni sono analoghe, salvo che si devono considerare funzioni invece che matrici. Ad esempio, nel caso dei bipoli RLCT, la proprietà VI.B.1 diviene:

Proprietà VI.B.5 - «L'impedenza o l'ammettenza di ingresso di un bipolo RLCT è una funzione razionale reale e positiva, in cui per funzione reale e positiva s'intende una funzione $F(s)$ che soddisfi la seguente condizione:

$$(VI.B.5) \quad \operatorname{Re} [F(s)] \geq 0 \quad \text{per} \quad \operatorname{Re} [s] \geq 0$$

oppure, ciò che è equivalente, tale che:

1) i suoi poli sono nel semipiano sinistro della variabile s od eventualmente semplici sull'asse immaginario;

2) i residui negli eventuali poli sull'asse immaginario sono reali e positivi;

3) la sua parte reale per $s = j\omega$ è non negativa».

Altre proprietà relative ad alcune rappresentazioni dei bipoli in vari casi particolari sono già state presentate nel § IV.A; si veda ad esempio la tabella IV.A.1.

VI.B.2 - Reti N-porte costituite da resistori, condensatori ed elementi attivi.

Nell'ambito della microelettronica rivestono grande importanza i circuiti costituiti da resistori, condensatori e transistori. Tali circuiti possono essere schematizzati mediante connessioni di resistori, condensatori ed elementi ideali attivi del tipo visto nel Cap. I, come generatori controllati, nullori, ecc. Riportiamo di seguito alcune proprietà di questi circuiti.

Proprietà VI.B.6 - «Una rete N-porte costituita da resistori e condensatori ed $N+1$ nullori sbilanciati ha come matrice ammettenze di corto-circuito una qualsiasi matrice razionale reale di ordine N ».

Proprietà VI.B.7 - «Una rete N-porte costituita da resistori, condensatori ed N nullori bilanciati ha come matrice ammettenze di corto-circuito una qualsiasi matrice razionale reale di ordine N ».

Proprietà VI.B.8 - «Una rete N-porte costituita da resistori, condensatori ed N generatori controllati ha come matrice ammettenze di corto-circuito una qualsiasi matrice razionale reale di ordine N ».

APPENDICE VI.C - Stabilità dei circuiti.

Un circuito è stabile quando l'effetto di un'eccitazione di breve durata si smorza al tendere del tempo all'infinito (stabilità asintotica). Tale comportamento è tipico dei circuiti costituiti da resistenze positive, capacità positive, induttanze positive, trasformatori ideali, che rappresentano la schematizzazione dei circuiti costituiti dagli usuali resistori, condensatori, induttori e trasformatori. Nel caso di questi circuiti, che indicheremo genericamente come circuiti passivi, accanto a questo comportamento se ne ha un altro non richiesto in generale per la stabilità, cioè l'incapacità di fornire potenza attiva.

La stabilità di un circuito accessibile da una o più porte interessa quando esso è chiuso in corrispondenza alle porte nel modo previsto nella sua utilizzazione pratica. Tale utilizzazione prevede la chiusura su bipoli passivi o su generatori indipendenti con impedenza interna di tipo passivo. Per questa ragione conviene prendere in esame il comportamento del circuito dal punto di vista della stabilità, quando è chiuso su bipoli passivi. Si possono avere tre tipi di comportamento:

- 1) il circuito è *incondizionatamente stabile*, quando è stabile in ogni condizione di chiusura passiva;
- 2) il circuito è *intrinsecamente instabile*, quando è instabile in ogni condizione di chiusura passiva;
- 3) il circuito è *condizionatamente stabile*, quando è stabile oppure instabile a seconda della chiusura passiva.

Esaminiamo in dettaglio il legame tra questi comportamenti e la rappresentazione, nel caso dei circuiti accessibili da una e due porte e limitando l'indagine alla parte accessibile del circuito.

VI.C.1 - Stabilità dei bipoli.

Se eccitiamo un bipolo mediante un generatore di tensione, come mostrato in fig. VI.C.1 a), l'effetto è la corrente entrante, data da:

$$(VI.C.1) \quad I = Y V_g$$

L'ammettenza del bipolo, antitrasformata nel tempo, è la risposta impulsiva del particolare circuito in esame. Per quanto detto nel Cap. IV, perché essa corrisponda ad un circuito stabile, cioè tale che l'effetto di eccitazioni di breve durata si smorzi nel tempo, è necessario che i suoi poli siano nel semipiano sinistro aperto della variabile s .

È opportuno ricordare, a questo punto, che nel caso dei circuiti costituiti da resistenze, induttanze, capacità, trasformatori ideali, sono presenti anche poli semplici sull'asse immaginario. In questo caso tali

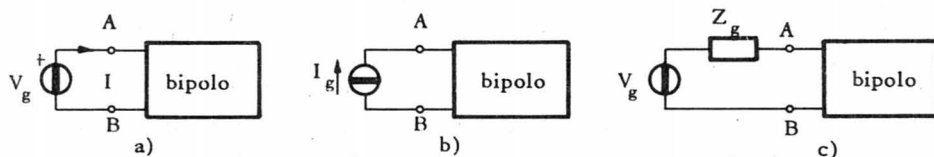


Fig. VI.C.1 - Stabilità di un bipolo in corto-circuito, a circuito aperto ed in condizioni di chiusura qualsiasi.

poli si manifestano per il fatto che, per ragioni di semplicità di calcolo, si trascurano alcune perdite di poco conto ai fini dell'individuazione delle prestazioni del circuito stesso. *Perciò tali poli sull'asse immaginario sono fittizi* ed è opportuno tenere presente che la loro presenza è solo conseguenza di un artificio analitico.

Nel caso di altri circuiti i poli sull'asse immaginario indicano *sempre* instabilità. Per questa ragione, nel seguito, escluderemo la presenza di tali poli sull'asse immaginario in ogni caso e quando parleremo di bipoli passivi sarà sottinteso che la loro impedenza od ammettenza è priva di tali poli.

Riprendiamo l'esame del circuito mostrato in fig. VI.C.1 a). Da un punto di vista topologico il bipolo è come se fosse in corto-circuito; perciò l'esame della stabilità in queste condizioni equivale all'esame «in corto-circuito». Di conseguenza si ha:

Proprietà VI.C.1 - *«Un bipolo è stabile in corto-circuito, se i poli della sua ammettenza sono nel semipiano sinistro della variabile s ».*

Analogamente, esaminando il circuito mostrato in fig. VI.C.1 b), si ha:

Proprietà VI.C.2 - *«Un bipolo è stabile a circuito aperto, se i poli della sua impedenza sono nel semipiano sinistro della variabile s ».*

La connessione in serie ed in parallelo di bipoli stabili in corto-circuito o circuito aperto porta a bipoli che possono essere essi stessi stabili in corto-circuito, a circuito aperto oppure instabili; per dettagli su questo punto si rimanda al § IX.8 di H.W. Bode, «Network analysis and feedback amplifier design», D. Van Nostrand Co., New York, 1959. Nel caso presente ci interessa sviluppare un aspetto più importante dal punto di vista delle applicazioni, cioè quello della stabilità quando il bipolo è chiuso su un generico bipolo passivo, come indicato in figura VI.C.1 c). Facciamo vedere che, perchè il bipolo sia incondizionatamente stabile è necessario che esso stesso sia passivo, cioè:

Teorema VI.C.1 - *«Condizione necessaria e sufficiente affinché un bipolo sia incondizionatamente stabile è che sia passivo».*

Occorre far vedere la necessità della condizione, in quanto la sufficienza è ovvia. A questo scopo ricordiamo che un bipolo passivo va inteso, nel presente paragrafo, nel senso restrittivo detto in precedenza, cioè tale che l'impedenza o l'ammettenza abbiano i poli nel semipiano sinistro aperto della variabile s e la parte reale sull'asse im-

maginario sia non negativa. Senza perdita di generalità, riferiamoci alla rappresentazione impedenza del bipolo e facciamo vedere che, se essa non soddisfa le due condizioni precedenti, allora il bipolo è instabile in almeno una situazione di chiusura passiva. Esaminiamo in dettaglio le due violazioni possibili:

1) Qualche polo dell'impedenza si trova nel semipiano destro chiuso. In questo caso il bipolo è instabile a circuito aperto in base alla proprietà VI.C.2.

2) La parte reale dell'impedenza per $s = j\omega$ è negativa per qualche valore di $j\omega$. Sia $j\omega_0$ tale valore; ciò implica che, per ragioni di continuità, la parte reale di $Z(s)$ sia negativa anche nell'intorno di tale punto nel semipiano destro. Sia $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ un punto di questo intorno, caratterizzato quindi da σ_0 positivo, piccolo a piacere. In s_0 si ha:

$$(VI.C.2) \quad Z(s_0) = -R_0 + jX_0$$

con R_0 positivo ed X_0 di segno qualsiasi.

Facciamo vedere che il bipolo risulta instabile almeno in una situazione di chiusura passiva. Si ha instabilità se la somma dell'impedenza Z del bipolo e dell'impedenza Z_g del bipolo di chiusura ha zeri nel semipiano destro (fig. VI.C.1c). Scegliamo il bipolo di chiusura costituito dalla serie di una resistenza ed una capacità o induttanza, a seconda che X_0 sia positivo o negativo. I valori di questi elementi debbono essere tali da avere un bipolo risultante con impedenza nulla per $s = s_0$. Perciò deve essere:

$$(VI.C.3) \quad Z(s_0) \cdot R + 1/s_0 C = 0 \quad \text{per } X_0 > 0 \quad ; \quad Z(s_0) + R + s_0 L = 0 \quad \text{per } X_0 < 0$$

Quindi deve essere:

$$(VI.C.4) \quad C = \frac{\omega_0}{X_0 (\sigma_0^2 + \omega_0^2)} \quad ; \quad R = R_0 - \frac{\sigma_0}{C (\sigma_0^2 + \omega_0^2)} \quad \text{per } X_0 > 0$$

$$L = \frac{|X_0|}{\omega_0} \quad ; \quad R = R_0 - \sigma_0 L \quad \text{per } X_0 < 0$$

Tali formule si possono sempre soddisfare con valori positivi degli elementi di Z_g purché σ_0 sia scelto opportunamente piccolo, come si può fare. Ciò dimostra il teorema.

VI.C.2 - Stabilità delle reti 2-porte.

Individuiamo, in funzione della rappresentazione, quali sono le condizioni che deve soddisfare una rete 2-porte perchè sia incondizio-

natamente stabile. A questo scopo occorre esaminare il suo comportamento nella situazione di chiusura di fig. VI.C.2, in cui i due bipoli B_1 e B_2 sono passivi di tipo qualsiasi. Dalla figura si vede chiaramente che tale problema equivale a quello della determinazione delle condizioni per cui sono passivi i bipoli a cui si riduce la rete 2-porte quando è chiusa in uscita su B_2 oppure in ingresso su B_1 . Poichè i due casi si ottengono uno dall'altro scambiando le porte 1 e 2, è sufficiente considerare una situazione e poi derivare le condizioni relative all'altra in base a tale osservazione. Utilizziamo la rappresentazione $[Z]$ per la rete 2-porte e Z_1 e Z_2 per i bipoli. L'impedenza di ingresso della rete 2-porte, quando l'uscita è chiusa su B_2 , vale:

$$(VI.C.5) \quad Z_{ing} = z_{11} - \frac{z_{12} \cdot z_{21}}{z_{22} + Z_2}$$

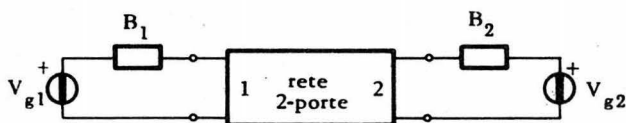


Fig. VI.C.2 - Situazione in cui si considera la stabilità di una rete 2-porte.

Indicando con:

$$z_{ik} = r_{ik} + j x_{ik}$$

$$(VI.C.6) \quad Z_2 = R + j X$$

$$z_{12} z_{21} = \alpha + j \beta$$

si ha per la parte reale di Z_{ing} :

$$(VI.C.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} [Z_{ing}] &= r_{11} - \frac{\alpha(r_{22} + R) + \beta(x_{22} + X)}{(r_{22} + R)^2 + (x_{22} + X)^2} = \\ &= \frac{r_{11}(r_{22} + R)^2 + r_{11}(x_{22} + X)^2 - \alpha(r_{22} + R) - \beta(x_{22} + X)}{(r_{22} + R)^2 + (x_{22} + X)^2} \end{aligned}$$

Affinchè l'impedenza Z_{ing} sia passiva, nel senso indicato in precedenza, per qualsiasi impedenza Z_2 di bipolo passivo, deve avere i poli solo nel semipiano sinistro aperto e la parte reale non-negativa per $s = j\omega$. Per quanto riguarda la condizione sui poli, osserviamo che, essendo i

termini z_{ij} della matrice $[Z]$ delle funzioni di rete, necessariamente per la definizione di stabilità debbono avere i poli solo nel semipiano sinistro aperto. Inoltre l'impedenza $z_{22} + Z_2$ deve essere quella di un bipolo passivo per il teorema VI.C.1. Quindi, poichè i poli di Z_{ing} nella (VI.C.5) sono i poli di z_{11} o quelli di z_{12} e z_{21} oppure gli zeri di $Z_2 + z_{22}$, risulta che i poli di Z_{ing} si trovano nel semipiano sinistro aperto se:

- 1) i poli dei termini della matrice $[Z]$ sono nel semipiano sinistro aperto;
- 2) z_{11} e z_{22} sono impedenze di bipolo passivo.

Per quanto riguarda la condizione di non-negatività della parte reale sull'asse immaginario di Z_{ing} per qualsiasi Z_2 , esprimiamo opportunamente la (VI.C.7) come segue:

$$(VI.C.8) \quad \operatorname{Re} [Z_{ing}]_{s=j\omega} = \frac{r_{11}}{(r_{22}+R)^2 + (x_{22}+X)^2} \left[\left(R + r_{22} - \frac{\alpha}{2r_{11}} \right)^2 + \left(X + x_{22} - \frac{\beta}{2r_{11}} \right)^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4r_{11}^2} \right]$$

Poichè r_{11} è non-negativo, occorre individuare le condizioni per cui la parte entro parentesi quadra della (VI.C.8) è non-negativa. A questo scopo osserviamo che tale espressione, che indichiamo con $E(R, X)$, equivale ad una famiglia di cerchi concentrici nel piano R, X , come mostrato in fig. VI.C.3. In corrispondenza al valore zero, l'equazione $E(R, X) = 0$ è un cerchio di raggio ρ_0 ; per valori positivi di E si hanno cerchi concentrici di raggio maggiore di ρ_0 e per E negativo di raggio inferiore. È evidente che, essendo R non-negativo, si ottiene la voluta non-negatività di E se risulta contemporaneamente $R_0 < 0$ e $\rho_0 \leq |R_0|$, cioè:

$$(VI.C.9) \quad r_{22} > \frac{\alpha}{2r_{11}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2r_{11}} \leq r_{22} - \frac{\alpha}{2r_{11}}$$

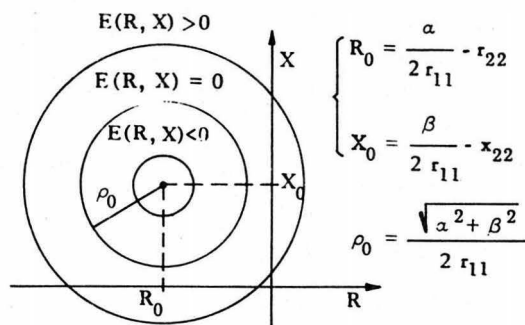
Le (VI.C.9) equivalgono all'unica disequaglianza seguente:

$$(VI.C.10) \quad r_{22} - \frac{\alpha}{2r_{11}} \geq \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2r_{11}}$$

Per esprimere la (VI.C.10), è usuale utilizzare una quantità opportuna, definita come segue:

$$(VI.C.11) \quad \eta = \frac{2 \operatorname{Re} [z_{11}] \operatorname{Re} [z_{22}] - \operatorname{Re} [z_{12} z_{21}]}{|z_{12} z_{21}|}$$

Fig. VI.C.3 - Interpretazione geometrica dell'espressione entro parentesi quadra nella formula (VI.C.8).



che prende il nome di *fattore invariante di stabilità*, per il fatto che assume la stessa espressione qualunque sia la rappresentazione usata del tipo $[Z]$, $[Y]$, $[H]$, $[G]$, cioè:

$$(VI.C.12) \quad \eta = \frac{2 \operatorname{Re} [\alpha_{11}] \operatorname{Re} [\alpha_{22}] - \operatorname{Re} [\alpha_{12} \cdot \alpha_{21}]}{|\alpha_{12} \cdot \alpha_{21}|}$$

in cui $[\alpha] = [Z]$, $[Y]$, $[H]$, $[G]$.

In funzione del fattore invariante di stabilità la (VI.C.10) diviene:

$$(VI.C.13) \quad \eta \geq 1$$

La trattazione precedente è stata basata sull'uso della rappresentazione $[Z]$. Tuttavia è facile dedurre in base alla (VI.C.5) che si ottengono risultati del tutto simili utilizzando anche le rappresentazioni $[Y]$, $[H]$, $[G]$. Di conseguenza possiamo concludere in generale con il seguente teorema:

Teorema VI.C.2 - «Una rete 2-porte, rappresentata tramite una qualsiasi delle matrici $[Z]$, $[Y]$, $[H]$, $[G]$, è incondizionatamente stabile se e soltanto se:

- 1) i poli dei termini della matrice propria della rappresentazione sono nel semipiano sinistro aperto della variabile s ;
- 2) le parti reali per $s = j\omega$ dei termini disposti sulla diagonale principale della matrice propria della rappresentazione sono non-negative;
- 3) il fattore invariante di stabilità è maggiore od uguale ad uno».

APPENDICE VI.D - Caratterizzazione del rumore nelle reti 2-porte.

In un sistema di trasmissione, prende il nome di rumore ogni segnale non voluto. Nel caso dei circuiti lineari, la causa primaria di rumore è la natura discontinua della carica elettrica che fluisce nei componenti del circuito ed è legata alla temperatura. Una trattazione esauriente dal punto di vista analitico su questo argomento può essere trovata nell'articolo fondamentale di S.O. Rice, « Mathematical analysis of random noise », Bell Syst. Tech. J., vol. 24, 1945, pp. 46-108. Nel caso presente ci è sufficiente ricordare che le grandezze elettriche associate a questo fenomeno sono definibili solo per via statistica (si tratta usualmente di fenomeni stocastici stazionari ergodici con distribuzione di probabilità di primo e secondo ordine gaussiane); in particolare si fa riferimento al loro valore medio. Nel caso di un bipolo rumoroso, di impedenza Z , ciò comporta il circuito equivalente di fig. VI.D.1 b), in cui $e(t)$ può essere definita in un intervallo limitato di frequenza e tramite il valore medio, cioè:

$$(VI.D.1) \quad \widetilde{e^2(t)} = 4KT \int_{f_1}^{f_2} \operatorname{Re} [Z(j\omega)] df$$

essendo: K la costante di Boltzmann = $1,374 \cdot 10^{-23}$ joule per $^{\circ}K$;

T la temperatura assoluta;

f_1 ed f_2 gli estremi dell'intervallo di frequenza d'interesse;

il segno $\sim$ indica il valore medio.

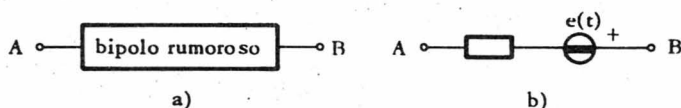


Fig.VI.D.1 - Circuito equivalente di un bipolo rumoroso.

Nel caso di una rete 2-porte risulta di fondamentale importanza poterla caratterizzare dal punto di vista del rumore. Vedremo successivamente che ciò è possibile *frequenza per frequenza*, facendo riferimento a quattro parametri, deducibili tramite misure opportune oppure tramite calcoli. Nel § VI.D.1 esamineremo tali parametri in dettaglio.

Per quanto riguarda la caratterizzazione complessiva della rete 2-porte relativamente alle sue prestazioni, verranno introdotte nel paragrafo VI.D.2 le quantità più usate in pratica per questo scopo, cioè la cifra di rumore e la misura di rumore. In particolare verrà messa in rilievo

la dipendenza della cifra di rumore, e quindi delle prestazioni di questo tipo della rete 2-porte, dalla parte reale dell'impedenza del generatore.

VI.D.1 - Circuito equivalente di una rete 2-porte rumorosa.

Il circuito equivalente di una rete 2-porte rumorosa si ottiene estraendo da essa le sorgenti di rumore sotto forma di due generatori indipendenti di rumore disposti in corrispondenza alle porte, parzialmente correlati dal punto di vista statistico in quanto provenienti dagli stessi generatori interni. Il tipo dei generatori indipendenti è legato alla rappresentazione usata nel modo seguente. Siano y_1 ed y_2 le due grandezze dipendenti dalla rappresentazione ed x_1 e x_2 quelle indipendenti, cioè nel caso di assenza di rumore:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \quad \text{(VI.D.2)}$$

Se la rete 2-porte è rumorosa, le equazioni caratteristiche della rappresentazione non sono più omogenee, cioè divengono:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + y_{10} \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + y_{20} \end{aligned} \quad \text{(VI.D.3)}$$

Le due quantità y_{10} e y_{20} rappresentano i contributi di rumore riportati all'esterno e sono quindi interpretabili come dovuti a due generatori indipendenti di tensione o di corrente, a seconda della natura di y_1 e y_2 . Per le varie rappresentazioni si ha perciò la situazione illustrata in tab.VI.D.1.

Le due grandezze impresse, come detto, sono correlate da un punto di vista statistico. È usuale considerarne una indipendente e l'altra costituita dalla somma di due parti, di cui una correlata alla prima grandezza e l'altra indipendente. Di conseguenza i parametri necessari per definire o misurare il comportamento rumoroso della rete sono: 1) i valori quadratici medi della prima grandezza e della parte non correlata della seconda grandezza; si tratta quindi di due valori reali; 2) il fattore di correlazione per la parte correlata della seconda grandezza; tale fattore è una quantità complessa. Perciò, in totale, i parametri relativi al rumore sono quattro. Consideriamoli in dettaglio nel caso della rappresentazione [T].

Tabella VI.D.1 - Circuiti equivalenti di reti 2-porte rumorose (i blocchi 2-porte di figura sono privi di rumore).

Rappresentazione	Circuito equivalente
$[Z]$	
$[Y]$	
$[H]$	
$[G]$	
$[T]$	

I parametri, nel caso della rappresentazione $[T]$, sono necessari per definire v_F ed i_F di tab. VI.D.1. Si utilizzano usualmente le seguenti espressioni:

$$(VI.D.4) \quad \widetilde{v_F^2} = 4 K T \int_{f_1}^{f_2} R_F df$$

$$(VI.D.5) \quad \widetilde{(i_F^2)_{\text{non-corr}}} = 4 K T \int_{f_1}^{f_2} G_n df$$

$$(VI.D.6) \quad I_F = (I_F)_{\text{non-corr}} + Y_{\text{corr}} V_F$$

$$(VI.D.7) \quad Y_{\text{corr}} = \frac{\widetilde{I_F V_F^*}}{4KT R_F}$$

in cui I_F e V_F sono i fasori di i_F e v_F . Perciò i parametri che si utilizzano nel caso della rappresentazione $[T]$ sono, per una frequenza assegnata: R_F , G_n , $\text{Re}[Y_{\text{corr}}]$, $\text{Im}[Y_{\text{corr}}]$. Tali parametri possono misurarsi o calcolarsi⁽¹⁾.

VI.D.2 - Cifra di rumore e misura di rumore.

Nella caratterizzazione pratica delle reti 2-porte rumorose si ricorre molto spesso a quantità globali che forniscono direttamente quello che interessa. Tali quantità sono la cifra di rumore e la misura di rumore.

Si definisce come cifra di rumore la quantità:

$$(VI.D.8) \quad F = \left(\frac{S_{\text{in}}/N_{\text{in}}}{S_{\text{us}}/N_{\text{us}}} \right)_{T=290^\circ \text{K}}$$

in cui: S_{in} e S_{us} sono le potenze in ingresso ed in uscita alla rete 2-porte del segnale alla frequenza d'interesse; N_{in} e N_{us} sono le corrispondenti potenze di rumore; T è la temperatura assoluta. È facile rendersi conto che la cifra di rumore non dipende dal carico e dipende invece, oltre che dalle caratteristiche intrinseche di rumore della rete 2-porte, dalla parte reale dell'impedenza del generatore. Per vedere ciò, ricaviamo l'espressione della cifra di rumore, nel caso in cui la rete 2-porte sia rappresentata dalla matrice di trasmissione $[T]$ e dai quattro parametri di rumore visti nel par. VI.D.1, R_F , G_n , $\text{Re}[Y_{\text{corr}}]$, $\text{Im}[Y_{\text{corr}}]$, mentre il contributo di rumore dell'impedenza del generatore è rappresentato secondo lo schema equivalente di fig. VI.D.1. Con riferimento alla fig. VI.D.3, si ha⁽¹⁾:

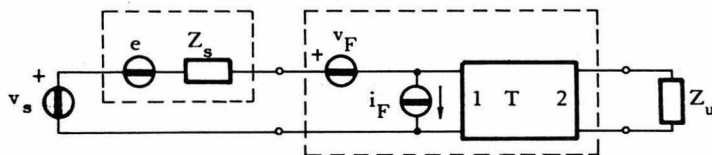


Fig. VI.D.3 - Circuito utilizzato per il calcolo della cifra di rumore.

(1) - Si veda per dettagli: K. Hatmann, «Noise characterization of linear circuits», IEEE Trans. on Circuits and Systems, ottobre 1976, Vol. 23, n.10, pp. 581-590.

(2) - Si noti che la potenza di rumore entrante nella rete 2-porte deriva solo dall'impedenza del generatore, cioè $\mathcal{E}^2 = 4KTR_g$.

$$N_{in} = \frac{4KTR_s R_i}{|Z_s + Z_i|^2} ; \quad S_{in} = \frac{|V_s|^2 R_i}{2 |Z_s + Z_i|^2} ;$$

$$(VI.D.9) \quad N_{us} = \frac{4KTR_s + 4KTR_F |Z_s|^2 |Y_s + Y_{corr}|^2 + 4KT |Z_s|^2 G_n}{|A + B/Z_u|^2 R_u} \left| \frac{Z_i}{Z_i + Z_s} \right|^2$$

$$S_{us} = \frac{|V_s|^2}{2 |A + B/Z_u|^2} \left| \frac{Z_i}{Z_i + Z_s} \right|^2 \frac{1}{R_u}$$

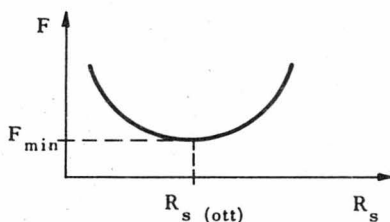
in cui: V_s è il fasore di v_s ; R_s è la parte reale di Z_s ; Z_i è l'impedenza d'ingresso della rete 2-porte chiusa sul carico Z_u ; R_u è la parte reale di Z_u ; R_i è la parte reale di Z_i .

Introducendo le (VI.D.9) nelle (VI.D.8), si ha:

$$(VI.D.10) \quad F = 1 + \frac{R_F |Z_s|^2 |Y_s + Y_{corr}|^2 + G_n |Z_s|^2}{R_s} = 1 + \frac{R_F |Y_s + Y_{corr}|^2 + G_n}{\text{Re}[Y_s]}$$

che dimostra quanto asserito. L'andamento tipico di F con la parte reale dell'impedenza del generatore è quindi quello mostrato in fig. VI.D.4. Esiste perciò un valore minimo di F che si raggiunge per un opportuno valore di R_s .

Fig. VI.D.4 - Andamento tipico della cifra di rumore in funzione della parte reale dell'impedenza del generatore.



La cifra di rumore per una rete 2-porte dipende, in base a quanto detto, dalla parte reale dell'impedenza del generatore e dalla frequenza. Per questa ragione nelle specifiche dei componenti reali a due porte, come ad esempio per i transistori, vengono forniti dalla casa costruttrice dei grafici che danno la cifra di rumore in funzione di questi parametri. In fig. VI.D.5 viene mostrato uno di questi grafici, relativo ad un transistor bipolare. Nel caso dei transistori, tuttavia, intervengono anche altri fattori a variare la cifra di rumore. Il più importante di questi è la corrente di polarizzazione di collettore. Inoltre, come si nota da figura VI.D.5, l'andamento della cifra di rumore con la frequenza in condizioni

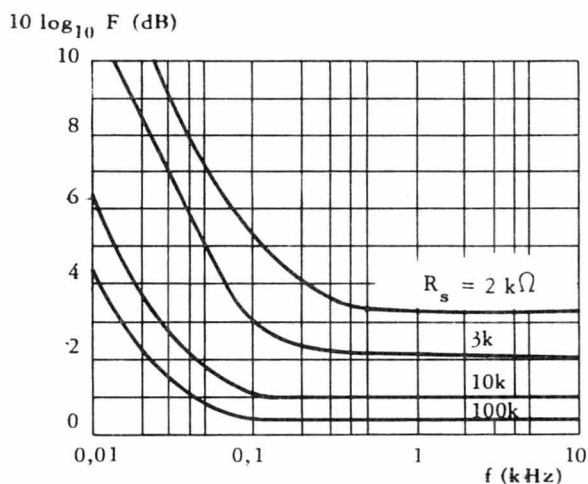


Fig. VI.D.5 - Andamento della cifra di rumore con la frequenza, per vari valori della parte reale dell'impedenza del generatore (transistore bipolare).

fisse di polarizzazione, è caratterizzato da una zona iniziale in cui l'andamento è del tipo $1/f$ (Flicker noise) e successivamente costante con la frequenza (Shot noise). La parte più importante dell'andamento è proprio quest'ultima, che è, come detto, indipendente dalla frequenza. Per questa ragione, perciò, è sufficiente fornire nelle specifiche i dati che riguardano solo lo «shot noise», relativamente alla corrente di polarizzazione ed alla parte reale dell'impedenza del generatore. I dati reperibili nelle specifiche del costruttore sono quindi del tipo mostrato in figura VI.D.6.

La cifra di rumore, definita nella (VI.D.8), può essere messa anche in funzione del guadagno di trasduzione e della potenza disponibile di rumore in ingresso. Infatti, come messo in evidenza nella derivazione dell'espressione (VI.D.10), il valore di F rimane inalterato se S_{in} e N_{in} sono le potenze disponibili del segnale e del rumore in ingresso. Ricordando la definizione di guadagno di trasduzione della rete 2-porte, data dalla (VI.7.6), la cifra di rumore risulta espressa nel modo seguente:

$$(VI.D.11) \quad F = \frac{1}{G_d} \frac{N_{us}}{N_d}$$

in cui G_d è il guadagno di trasduzione della rete 2-porte e N_d è la potenza disponibile di rumore in ingresso per ogni frequenza d'interesse,

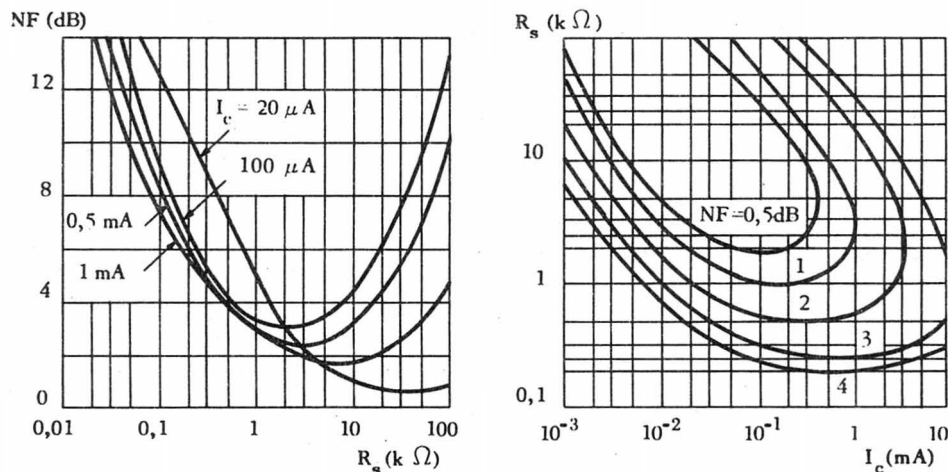


Fig. VI.D.6 - Andamenti della cifra di rumore. NF indica la cifra di rumore in decibel, cioè $NF = 10 \log_{10} F$; I_c è la corrente di polarizzazione di collettore; R_s è la parte reale dell'impedenza del generatore.

cioè $N_d = KT$. La (VI.D.11) mette in evidenza il fatto che la cifra di rumore è il rapporto tra la potenza di rumore in uscita globale e quella, sempre in uscita, dovuta solo al rumore associato all'impedenza del generatore.

L'espressione (VI.D.11) vale solo nell'ipotesi che la parte reale dell'impedenza del generatore sia positiva. Nel caso che sia negativa⁽¹⁾, come può accadere quando la rete 2-porte che si sta considerando è connessa in cascata con altre reti 2-porte, l'espressione (VI.D.11) continua a valere, purchè: 1) alla potenza disponibile di rumore si sostituisca la potenza scambiabile di rumore, essendo la potenza scambiabile definita dalla (VI.3.10); 2) al guadagno di trasduzione si sostituisca il guadagno scambiabile, definito in modo analogo a quello di trasduzione, con la sola variante di riferirlo alla potenza scambiabile del generatore, invece che alla sua potenza disponibile.

Un'altra grandezza usata per caratterizzare globalmente il comportamento della rete 2-porte dal punto di vista del rumore è la misura di rumore. Si definisce come «misura di rumore» la seguente quantità:

$$(VI.D.12) \quad M = \frac{F - 1}{1 - \frac{1}{G_d}}$$

(1) - Si veda per dettagli su questo punto H.A. Haus, R.B. Adler, «Circuit theory of linear noisy networks», J. Wiley, 1959.

che vale quando la parte reale dell'impedenza del generatore è positiva. Nel caso di impedenza negativa occorre fare riferimento al guadagno scambiabile⁽¹⁾.

La misura di rumore è utile per valutare in una cascata di reti 2-porte l'ordine che occorre scegliere al fine di ottenere la migliore prestazione di rumore della rete 2-porte risultante. Precisamente, nel caso in cui la cifra di rumore ed il guadagno di trasduzione di ciascuna rete 2-porte siano indipendenti dall'ordine della cascata, allora la migliore prestazione della rete 2-porte risultante si ottiene ordinando le reti 2-porte, dall'ingresso all'uscita, in base a valori crescenti della loro misura di rumore. Per vedere ciò, limitiamoci al caso di una rete 2-porte costituita dalla cascata di due. Si possono avere due casi, a seconda dell'ordine della cascata, come mostrato in fig. VI.D.7. Calcoliamo la cifra di rumore nei due casi:

$$\text{caso a)} \quad F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} \quad (\text{VI.D.13})$$

$$\text{caso b)} \quad F_{21} = F_2 + \frac{F_1 - 1}{G_{d2}}$$

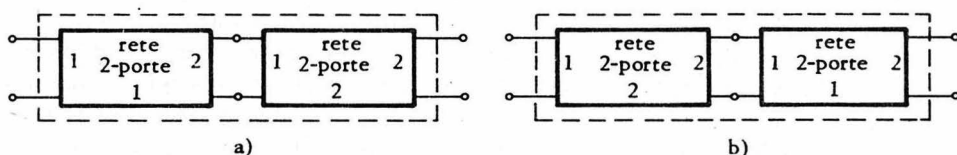


Fig.VI.D.7 - Le due reti risultanti dalla cascata di due reti 2-porte.

L'ordine migliore nella cascata è quello che minimizza la cifra di rumore risultante. La condizione che F_{12} sia minore di F_{21} comporta che:

$$F_1 - F_2 < \frac{F_1 - 1}{G_{d2}} - \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} \quad (\text{VI.D.14})$$

che, nel caso in cui $G_{d1} > 1$, $G_{d2} > 1$, equivale a:

(1) - Si veda per dettagli H.A. Haus, R.B. Adler, op. cit.

$$(VI.D.15) \quad \frac{F_1 - 1}{1 - \frac{1}{G_{d1}}} < \frac{F_2 - 1}{1 - \frac{1}{G_{d2}}}$$

Pertanto l'ordine della cascata, ottimale dal punto di vista del rumore, è stabilito dalla misura di rumore.

La dimostrazione precedente si basa sull'ipotesi che la cifra di rumore ed il guadagno di trasduzione non dipendano dall'ordine della cascata per ciascuna rete 2-porte. *Ciò usualmente non è vero, per cui il criterio precedente di scelta dell'ordine della cascata può essere seguito solo in senso orientativo.* Per la scelta finale occorre effettuare i calcoli diretti della cifra di rumore della rete risultante. Tali calcoli si possono effettuare in modo molto semplice, utilizzando il concetto di inter-reciprocità, derivato dal teorema di Tellegen⁽¹⁾.

APPENDICE VI.E - Bibliografia

Gli argomenti svolti nelle appendici costituiscono il completamento necessario all'utilizzazione pratica del presente capitolo. Essi sono stati trattati in modo limitato per ragioni di spazio ed in quanto costituiscono l'oggetto di altri testi. Precisamente, le proprietà dei circuiti passivi possono essere trovate nella maggior parte dei testi riguardanti i circuiti. In particolare, le proprietà relative alle rappresentazioni utilizzanti le grandezze elettriche tensione e corrente sono trattate a livello accessibile in E.A. Guillemin, «Synthesis of passive networks», Wiley 1957 ed in modo più completo ed orientato verso le applicazioni in L. Weinberg, «Network analysis and synthesis», Mc. Graw-Hill, 1962. Le proprietà relative alle rappresentazioni basate sulle grandezze onda incidente e riflessa sono trattate in H.J. Carlin, A.B. Giordano, «Network theory», Prentice-Hall, 1964. Testi riguardanti le rappresentazioni basate sui due tipi di grandezze sono: G.C. Corazza, «Fondamenti di campi elettromagnetici e circuiti, Vol. II», ed. Pàtron, 1974 e G. Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche. Vol. I e Vol. II», ed. Siderea, 1970. Il primo di questi testi fa uso intensivo del formalismo matriciale, mentre il secondo è basato più su considerazioni fisiche.

(1) - Per dettagli su questo punto, si veda: S.W. Director, R.A. Rohrer, «Inter-reciprocity and its implications», Proc. Int. Symp. Network Theory, Belgrado (Jugoslavia), pp. 11-30 sett. 1968 e R.A. Rohrer, L. Nagel, R. Meyer, H. Weber, «Computationally efficient electronic circuit noise calculation», IEEE J. Solid State Circuits, pp. 204-213, agosto 1971.

Per quanto riguarda le proprietà dei circuiti attivi, tra gli innumerevoli testi apparsi nella letteratura tecnica, citiamo S.K. Mitra, «Analysis and synthesis of linear active networks», Wiley 1969 per la trattazione chiara e semplice e W. Heinlein, H. Holmes, «Active filters for integrated circuits», Prentice-Hall, 1974 per la sua completezza.

La stabilità dei circuiti, caratterizzata attraverso la rappresentazione esterna del circuito, è trattata in dettaglio in J.M. Rollett, «Stability and power gain invariants of linear two-ports», IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. 9, pp. 29-32, marzo 1962. A questo riguardo un approccio interessante, basato sulla rappresentazione coefficiente di riflessione e matrice di diffusione, è quello sviluppato in G.C. Corazza, op. cit. Sono disponibili anche metodi grafici per verificare la stabilità di una rete 2-porte, basati sull'uso della rappresentazione matrice ammettenze di corto-circuito; si veda a questo proposito T. Fjällbrant, «Linear network activity and stability», IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. 12, n. 1, pp. 12-17, marzo 1965.

Infine, per quanto riguarda le reti rumorose, una bibliografia recente completa può essere trovata in K. Hartmann, «Noise characterization of linear circuits», IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. 23, n. 10, pp. 581-590, ott. 1976.

*

CAPITOLO VII

TRASFORMAZIONI DEI CIRCUITI ED EQUIVALENZE

VII.1 - Equivalenze di reti 2-porte simmetriche tipiche.

Quando si considera una rete 2-porte, il punto di vista che interessa è il comportamento elettrico esterno alle porte. Se i componenti del circuito fossero ideali, sarebbe sufficiente tenere presente solo questo punto di vista. Tuttavia, poiché i componenti differiscono da quelli ideali, sia come circuito equivalente, sia come valore del parametro o dei parametri che li caratterizzano, è necessario inevitabilmente interessarsi anche dell'interno della rete 2-porte. In tal modo potremo tenere presenti vari aspetti pratici connessi alla suddetta non-idealità, come: l'effetto delle variazioni dei valori dei componenti, che vedremo in dettaglio nel Cap.VIII; la dissipazione di potenza elettrica per la polarizzazione dei dispositivi attivi; la distorsione di non-linearità; il rumore e così via.

È chiaro quindi che è molto utile da un punto di vista pratico poter modificare un'assegnata rete 2-porte, lasciando inalterato il suo comportamento esterno. Nel caso degli schemi tipici, visti nel § VI.11 e nell'ipotesi di reti simmetriche, è possibile passare dall'uno all'altro in modo molto semplice, anche se tale passaggio può spesso portare a componenti aventi valori negativi e quindi a schemi non utili da un punto di vista pratico.

Nel presente paragrafo limiteremo l'attenzione a questi casi semplici. Successivamente, nel § VII.2, descriveremo un metodo adatto ad una vasta categoria di reti simmetriche (quelle bisezionabili) ed infine, nel § VII.3, considereremo il problema della trasformazione in generale. In ogni caso le reti considerate sono lineari, permanenti e prive di eccitazioni nel loro interno.

$$[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad 650$$

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\det[M]} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

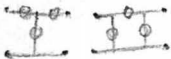
VII.1.1 - Reti simmetriche a T, π , traliccio e T-parallelo.

Nei casi più semplici dei circuiti a T, π , traliccio e T-parallelo, è semplice ottenere i valori che debbono avere le impedenze dei componenti perché un circuito sia equivalente all'altro dal punto di vista esterno. Infatti, è sufficiente considerare o la matrice impedenze a vuoto o la matrice ammettenze di corto-circuito di una delle due reti in funzione delle impedenze dei componenti e quindi ricavare le impedenze dei componenti dell'altra rete in funzione di questi. Si tratta evidentemente di esercizi di analisi, di cui presenteremo di seguito due esempi, riportando in tab. VII.1.1 la casistica completa.

Il primo esempio che consideriamo è quello della trasformazione di una rete a T in una a π . Facendo riferimento alla fig. VII.1.1, ricaviamo la matrice ammettenze di corto-circuito dello schema a T. Tale determinazione è immediata, se calcoliamo prima la matrice impedenze a vuoto che vale:

(VII.1.1)

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$



Quindi, per inversione, abbiamo:

(VII.1.2)

$$[Y] = [Z]^{-1} = \frac{1}{Z_a^2 + 2Z_a Z_b} \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & -Z_b \\ -Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

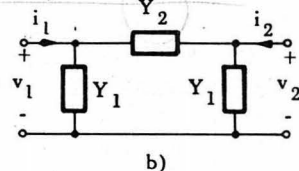
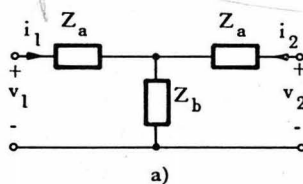


Fig. VII.1.1 - Schemi di reti 2-porte simmetriche a T e a π .

D'altra parte in una rete a π la matrice ammettenze di corto circuito vale, con riferimento alla fig. VII.1.1;

(VII.1.3)

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix}$$

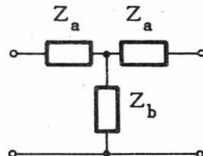
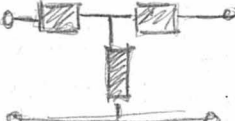
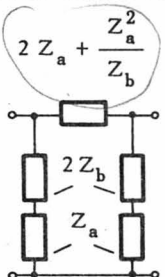
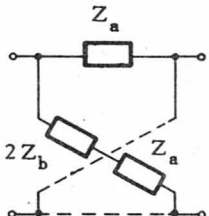
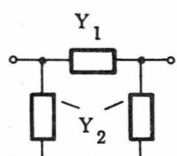
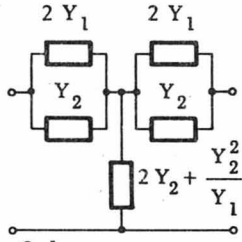
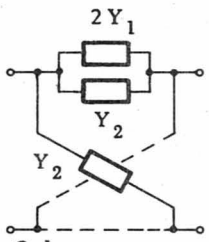
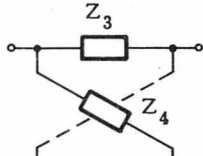
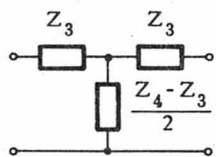
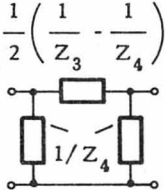
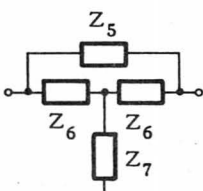
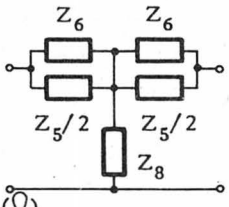
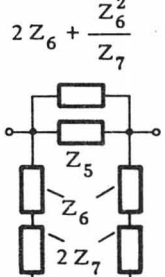
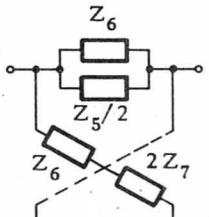
$$\frac{Z_a + Z_b}{\Delta} = Y_1 + Y_2 =$$

$$+ \frac{Z_b}{\Delta} = + Y_2$$

$$Z_2 = \frac{Z_a^2 + 2Z_a Z_b}{Z_b} = 2Z_a + \frac{Z_a^2}{Z_b}$$

$$\frac{Z_a + Z_b}{\Delta} = Y_1 + Y_2$$

Tab.VII.1.1 - Equivalenza esterna di reti 2-porte simmetriche tipiche.

Rete assegnata	Rete equivalente a T	Rete equivalente a π	Rete equivalente a traliccio
 (Ω)		$2 Z_a + \frac{Z_a^2}{Z_b}$  (Ω)	 (Ω)
 (Ω^{-1})	 (Ω^{-1})	 (Ω^{-1})	 (Ω^{-1})
 (Ω)	 (Ω)	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_4} \right)$  (Ω^{-1})	 (Ω)
 (Ω)	 (Ω)	$2 Z_6 + \frac{Z_6^2}{Z_7}$  (Ω)	 (Ω)
	$Z_8 = \frac{Z_6^2 + Z_5 Z_7 + 2 Z_6 Z_7}{Z_5 + 2 Z_6}$		

Dal confronto delle (VII.1.2) e (VII.1.3), si ha:

$$(VII.1.4) \quad Y_1 = \frac{Z_a}{Z_a^2 + 2Z_a Z_b}; \quad Y_2 = \frac{Z_b}{Z_a^2 + 2Z_a Z_b}$$

che giustifica l'equisvalenza riportata in tab. VII.1.1 tra la rete a π e la rete a T.

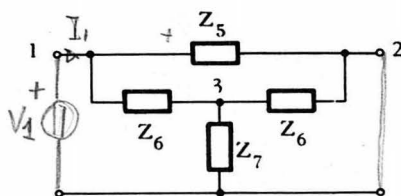
Un altro esempio che consideriamo è quello della trasformazione della rete a T-parallelo in una rete a π . Con riferimento alla fig. VII.1.2, calcoliamo la matrice ammettenze di corto-circuito della rete a T-parallelo. A questo scopo, analizziamo lo schema di fig. VII.1.2, ponendo un generatore di tensione V_1 in corrispondenza alla prima porta ed un corto circuito alla seconda porta. Analizzando il circuito risultante su base nodi, con nodo di riferimento coincidente con quello comune alle due porte, si ha:

$$(VII.1.5) \quad \begin{aligned} V_1 \left(\frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \right) - V_3 \frac{1}{Z_6} &= I_1 \\ -V_1 \frac{1}{Z_6} + V_3 \left(\frac{1}{Z_7} + \frac{2}{Z_6} \right) &= 0 \end{aligned}$$

che fornisce:

$$(VII.1.6) \quad I_1 = V_1 \left\{ \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} - \frac{\left(\frac{1}{Z_6} \right)^2}{\frac{1}{Z_7} + \frac{2}{Z_6}} \right\}$$

Fig. VII.1.2 - Schema di rete 2-porte simmetrica a T-parallelo.



Inoltre la corrente che fluisce dal nodo 2, attraverso il collegamento di corto-circuito, vale:

$$(VII.1.7) \quad I_2 = -\frac{1}{Z_5} V_1 - \frac{1}{Z_6} V_3$$

Quindi risulta per la matrice ammettenze di corto-circuito:

$$(VII.1.8) \quad \begin{aligned} \boxed{y_{11}} = \boxed{y_{22}} &= \left[\frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} - \frac{Z_7}{Z_6^2 + 2Z_6Z_7} \right] \\ \boxed{y_{12}} = \boxed{y_{21}} &= - \frac{1}{Z_5} - \frac{Z_7}{Z_6^2 + 2Z_6Z_7} \end{aligned}$$

Confrontando le (VII.1.8) con la (VII.1.3), si ottengono i valori delle ammettenze dei componenti della rete a π riportati nell'ultima riga della tabella VII.1.1.

VII.1.2 - [Equivalenza tra traliccio simmetrico e rete a scala.]

La trasformazione di una qualsiasi rete 2-porte simmetrica in una rete a traliccio è possibile in generale⁽¹⁾. La trasformazione inversa, invece, non è sempre possibile. Sono di grande utilità pratica le seguenti proprietà, che permettono di effettuare la trasformazione, nei casi possibili, di un traliccio simmetrico in una rete sbilanciata, parzialmente a scala.

Proprietà VII.1.1 - «Un bipolo disposto in parallelo ai rami longitudinali e trasversali di un traliccio simmetrico può essere riportato in parallelo al suo ingresso ed alla sua uscita, senza alterarne il comportamento esterno. L'equivalenza è mostrata in fig.VII.1.3».

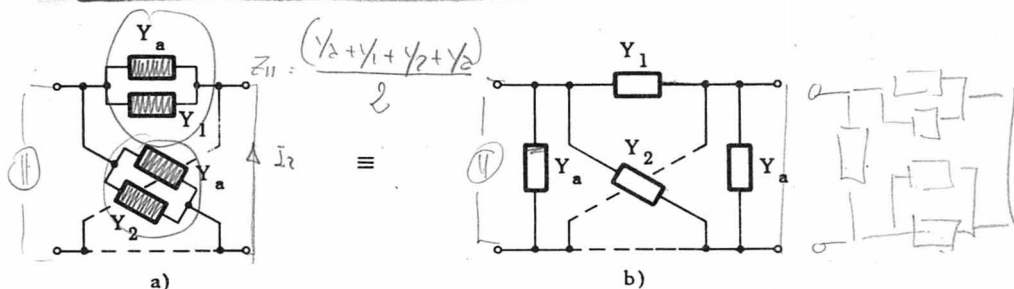


Fig.VII.1.3 - Estrazione di un ramo parallelo da un traliccio simmetrico.

(1) - Si veda ad esempio: G.Martinelli, «Sintesi delle reti elettriche», Vol.II, op. cit., § V.11, in cui viene dimostrato che qualsiasi rete 2-porte passiva e simmetrica si può mettere sotto la forma del traliccio simmetrico, con l'impedenza del ramo longitudinale pari a $z_{11} - z_{12}$ e quella del ramo trasversale pari a $z_{11} + z_{12}$.

La proprietà precedente si dimostra in modo immediato, ricordando il legame tra i termini della matrice ammettenze di corto-circuito e le ammettenze dei rami trasversali, visto nel Cap. VI. Infatti, per il traliccio di fig. VII.1.3a, si ha:

$$(VII.1.9) \quad y_{11} = y_{22} = \frac{1}{2} [2Y_a + Y_1 + Y_2]$$

$$y_{12} = y_{21} = \frac{1}{2} [Y_2 - Y_1]$$

Il traliccio riportato in b) ha invece:

$$(VII.1.10) \quad y_{11} = y_{22} = \frac{1}{2} [Y_1 + Y_2]$$

$$y_{12} = y_{21} = \frac{1}{2} [Y_2 - Y_1]$$

Sommando ad y_{11} e ad y_{22} l'ammettenza Y_a si ottengono i termini della matrice ammettenze di corto circuito dello schema b); si vede che essi coincidono con quelli dello schema a). In modo simile si dimostra la seguente proprietà.

Proprietà VII.1.2 - «Un bipolo disposto in serie ai rami longitudinali e trasversali di un traliccio simmetrico può essere riportato in serie al suo ingresso ed alla sua uscita, senza alterarne il comportamento esterno. L'equivalenza è mostrata in fig. VII.1.4».

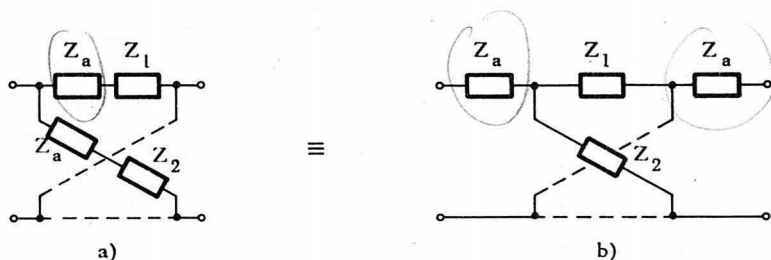


Fig. VII.1.4 - Estrazione di un ramo serie da un traliccio simmetrico.

Le due proprietà precedenti permettono di effettuare la trasformazione di un traliccio simmetrico in una rete parzialmente a scala, nel-

la maggior parte dei casi in cui tale trasformazione è possibile. Il modo di effettuare la trasformazione è intuitivo ed è illustrato, su un esempio in fig. VII.1.5.

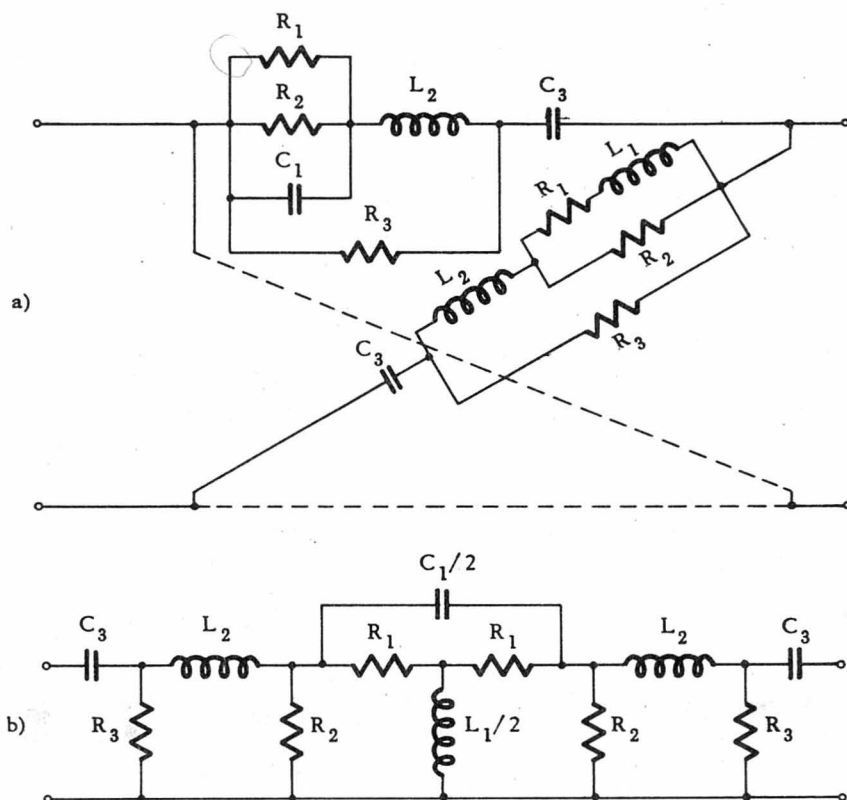


Fig. VII.1.5 - Trasformazione di un traliccio simmetrico (a), in una rete parzialmente a scala (b).

Precisamente, l'equivalenza fra il traliccio simmetrico di figura VII.1.5 a) e la rete parzialmente a scala di fig. VII.1.5 b) può essere ottenuta rimuovendo nell'ordine il condensatore serie C_3 , il resistore parallelo R_3 , l'induttore serie L_2 , il resistore parallelo R_2 e, successivamente, trasformando in un T-parallelo il traliccio residuo, costituito dai componenti R_1 , C_1 , L_1 , secondo l'equivalenza riportata nell'ultima riga della tab. VII.1.1.

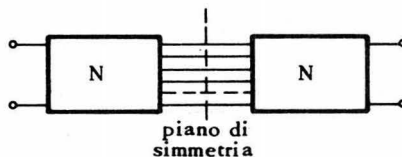
VII.2 - Trasformazione di una rete simmetrica bisezionabile in un traliccio simmetrico: il teorema di Bartlett.

Una categoria di reti 2-porte di notevole interesse pratico è quella delle reti bisezionabili, cioè delle reti 2-porte per le quali esiste un piano di simmetria nel loro interno che le suddivide in due parti speculari connesse tra di loro mediante conduttori; questi conduttori possono essere intrecciati oppure no. Corrispondentemente si hanno due tipi di reti bisezionabili: quelle intrecciate e quelle non intrecciate. In ambedue i casi è possibile individuare facilmente il traliccio equivalente.

SI VII.2.1 - Caso delle reti bisezionabili non intrecciate.

Una rete bisezionabile non intrecciata può sempre essere rappresentata come indicato in fig. VII.2.1. Per essa vale il seguente teorema.

Fig. VII.2.1 - Rete due-porte bisezionabile non intrecciata, con in evidenza il piano di simmetria.



NB

Teorema di Bartlett: «Una rete bisezionabile non intrecciata è equivalente ad un traliccio simmetrico avente come bipolo longitudinale quello mostrato in fig. VII.2.2 a) e come bipolo trasversale quello indicato in fig. VII.2.2 b)».

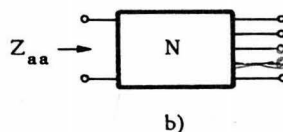
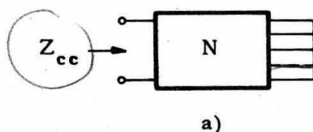
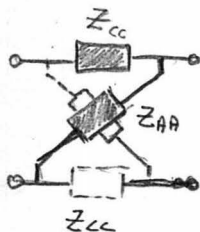


Fig. VII.2.2 - Bipoli che si considerano nell'enunciato del teorema di Bartlett.

Per dimostrare questo teorema occorre far vedere che, nella situazione più generale di chiusura della rete bisezionabile, essa è sempre sostituibile con un traliccio avente la struttura indicata nell'enunciato del teorema. A questo scopo osserviamo che la situazione più generale di chiusura è sempre equivalente, in base al teorema di sostitu-

$$\begin{aligned} Z_{11} = Z_{22} &= \frac{Z_{cc} + Z_{aa}}{2} \\ Z_{12} = Z_{21} &= \frac{Z_{aa} - Z_{cc}}{2} \end{aligned}$$

zione (che vale per ogni tipo di chiusura nel caso di reti lineari e permanenti quali interessano nel caso presente), alla chiusura su due generatori di tensione V_{g1} e V_{g2} . Quindi possiamo limitare la nostra attenzione alla situazione di fig. VII.2.3. Tale situazione, d'altra parte, può essere considerata a sua volta come la sovrapposizione di due, scelte in modo da sfruttare opportunamente le proprietà delle reti bisezionabili. Tali due eccitazioni sono indicate in fig. VII.2.4, in cui V_a e V_b devono avere i seguenti valori:

$$(VII.2.1) \quad V_a = \frac{1}{2} (V_{g1} + V_{g2}) ; \quad V_b = \frac{1}{2} (V_{g1} - V_{g2})$$

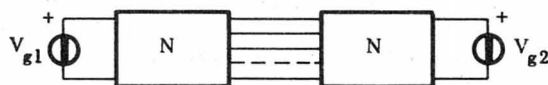


Fig. VII.2.3 - Chiusura equivalente ad una di tipo generico per la rete bisezionabile.

In tal modo la sovrapposizione delle due eccitazioni equivale a quella di fig. VII.2.3 e pertanto la situazione elettrica, che si ha nella rete, si ottiene come sovrapposizione degli effetti dovuti alle due eccitazioni agenti separatamente, in quanto la rete è lineare.

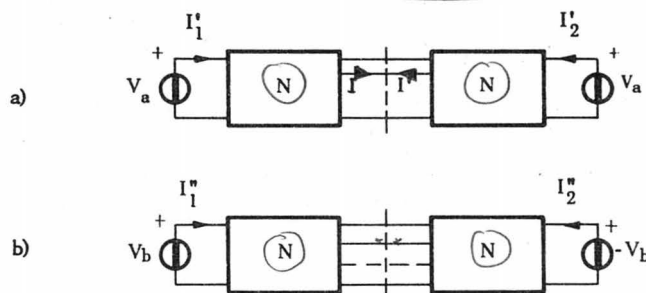


Fig. VII.2.4 - Situazioni di eccitazioni che, sovrapposte, equivalgono all'eccitazione di fig. VII.2.3, quando V_a e V_b hanno i valori di formula (VII.2.1).

L'effetto della prima eccitazione, di tipo simmetrico, è caratterizzato dal fatto che nei conduttori centrali della rete non circola corrente. Ciò si può vedere considerando il generico di questi conduttori e le correnti che percorrono le relative porzioni a destra e a sinistra del piano di simmetria, cioè I ed I' di fig. VII.2.4a). Per la simmetria delle eccitazioni e della rete deve essere $I = I'$; d'altra parte, per ragioni di continuità,

essendo unico il conduttore, deve essere contemporaneamente $I = -I'$. Pertanto risulta $I = 0$. In conseguenza di questa proprietà è chiaro che non si altera il comportamento della rete, tagliando i conduttori centrali in corrispondenza al piano di simmetria. Le correnti di porta, in questa prima situazione di eccitazione, valgono:

$$(VII.2.2) \quad I'_1 = V_a / Z_{aa} ; \quad I'_2 = V_a / Z_{aa}$$

$$Z_{aa} = Z_{11}$$

in cui Z_{aa} è l'impedenza del bipolo mostrato in fig. VII.2.2 b).

Nella seconda situazione di eccitazione, mostrata in fig. VII.2.4b, risulta invece nulla la tensione tra ogni coppia di conduttori centrali. Ciò si può vedere applicando separatamente i due generatori V_b e $-V_b$ ed osservando che ciascuno di essi provoca una tensione tra due qualsiasi dei suddetti conduttori uguale e contraria a quella provocata dall'altro. L'effetto simultaneo rende perciò nulle tutte queste tensioni. In queste condizioni non si altera il comportamento alle due porte corto-circuitando tra di loro tutti i suddetti conduttori e separando le due metà speculari, quindi si ha:

$$(VII.2.3) \quad I''_1 = V_b / Z_{cc} ; \quad I''_2 = -V_b / Z_{cc}$$

in cui Z_{cc} è l'impedenza del bipolo mostrato in fig. VII.2.2 a).

Le (VII.2.2) e (VII.2.3) ci permettono di calcolare i termini della matrice ammettenze di corto-circuito. Infatti, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha che le correnti di porta, nella situazione di eccitazione di fig. VII.2.3, valgono:

$$(VII.2.4) \quad \begin{aligned} I_1 &= I'_1 + I''_1 \\ I_2 &= I'_2 + I''_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \frac{V_a}{Z_{aa}} \pm \frac{V_b}{Z_{cc}} = \frac{V_{g1} + V_{g2}}{2Z_{aa}} \pm \frac{V_{g1} - V_{g2}}{2Z_{cc}} = \\ &= V_{g1} \left(\frac{1}{2Z_{aa}} \pm \frac{1}{2Z_{cc}} \right) + V_{g2} \left(\frac{1}{2Z_{aa}} \mp \frac{1}{2Z_{cc}} \right) \end{aligned}$$

Di conseguenza si ha:

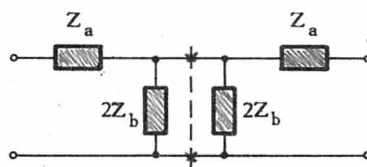
$$(VII.2.5) \quad y_{11} = y_{22} = \frac{1}{2Z_{aa}} + \frac{1}{2Z_{cc}} ; \quad y_{12} = y_{21} = \frac{1}{2Z_{aa}} - \frac{1}{2Z_{cc}}$$

Tali espressioni dimostrano il teorema, quando si confrontino con le espressioni dei termini della matrice ammettenze di corto circuito in funzione delle ammettenze dei rami di un traliccio simmetrico, ricavate nel § 11 del Cap. VI.

Esempio VII.2.1

Applicare il teorema di Bartlett per ricavare il traliccio equivalente delle reti a T ed a T-parallelo. Confrontare il risultato con quello riportato in tab. VII.1.1.

Fig. VII.2.5 - Rete a T con il piano di simmetria in evidenza.



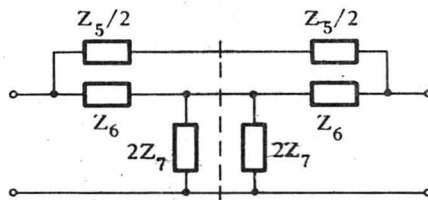
La rete a T disegnata secondo lo schema di fig. VII.2.1, può essere rappresentata in forma bisezionabile come indicato in fig. VII.2.5. Da tale figura è evidente che $Z_{cc} = Z_a$ e che $Z_{aa} = Z_a + 2Z_b$. In base al teorema di Bartlett, si ottiene il risultato indicato nella prima riga della tabella VII.1.1.

La rete a T-parallelo, disegnata secondo lo schema di fig. VII.2.1, si presenta come in fig. VII.2.6. Da tale figura è evidente che:

$$Z_{cc} = \frac{\frac{Z_5}{2} \cdot Z_6}{\frac{Z_5}{2} + Z_6} \quad \text{e} \quad Z_{aa} = Z_6 + 2Z_7$$

In base al teorema di Bartlett si ottiene il risultato indicato nell'ultima riga della tab. VII.1.1.

Fig. VII.2.6 - Rete a T-parallelo con il piano di simmetria in evidenza.



NO

VII.2.2 - Caso delle reti bisezionabili intrecciate.

Una rete bisezionabile intrecciata può sempre rappresentarsi come indicato in fig. VII.2.7. Per essa continua a valere il teorema di Bartlett, purchè al posto dei bipoli di fig. VII.2.2 si pongano quelli di figura VII.2.8. È opportuno notare che i conduttori non intrecciati continuano ad essere trattati come nel caso non intrecciato, mentre quelli intrecciati, per ciascuna coppia, vanno corto-circuitati nel bipolo di figura VII.2.8 b) e vanno collegati ad un trasformatore ideale di rapporto unitario e di polarità invertita, collegato al nodo comune a cui sono collegati i conduttori non intrecciati, nel bipolo di fig. VII.2.8 a).

Fig. VII.2.7 - Rete bisezionabile intrecciata, con i conduttori centrali in evidenza, insieme al piano di simmetria.

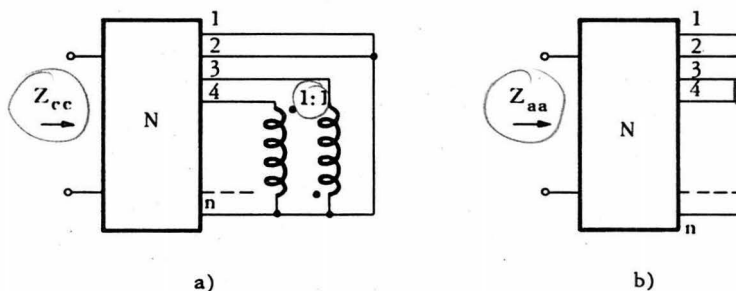
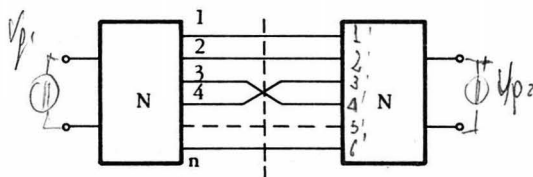


Fig. VII.2.8 - Bipoli da considerare nell'enunciato del teorema di Bartlett nel caso delle reti intrecciate.

Per dimostrare il teorema di Bartlett, nel caso delle reti bisezionabili intrecciate, si procede come nel caso precedente, considerando l'eccitazione generale del tipo di fig. VII.2.3 come sovrapposizione delle due particolari di fig. VII.2.4.

Nel caso della prima eccitazione, la situazione è quella mostrata in fig. VII.2.9. Per la simmetria della rete e dell'eccitazione, risulta:

$$\begin{aligned}
 (VII.2.6) \quad & V_A = V'_A ; \quad V_B = V'_B ; \quad V_C = V'_C ; \quad V_D = V'_D ; \quad \dots ; \quad V_Q = V'_Q \\
 & I_A = I'_A ; \quad I_B = I'_B ; \quad I_C = I'_C ; \quad I_D = I'_D ; \quad \dots ; \quad I_Q = I'_Q
 \end{aligned}$$

D'altra parte, per l'esistenza delle connessioni tra le due parti, deve essere:

$$(VII.2.7) \quad \begin{aligned} V_A = V'_A; \quad V_B = V'_B; \quad V_C = V'_D; \quad V_D = V'_C; \quad \dots; \quad V_Q = V'_Q \\ I_A = -I'_A; \quad I_B = -I'_B; \quad I_C = -I'_D; \quad I_D = -I'_C; \quad \dots; \quad I_Q = -I'_Q \end{aligned}$$

Dalle (VII.2.6) e (VII.2.7), risulta:

$$(VII.2.8) \quad \begin{aligned} I_A = I'_A = 0; \quad I_B = I'_B = 0; \quad I_Q = I'_Q = 0; \\ I_C = -I_D = I'_C = -I'_D \\ V_C = V_D = V'_C = V'_D \end{aligned}$$

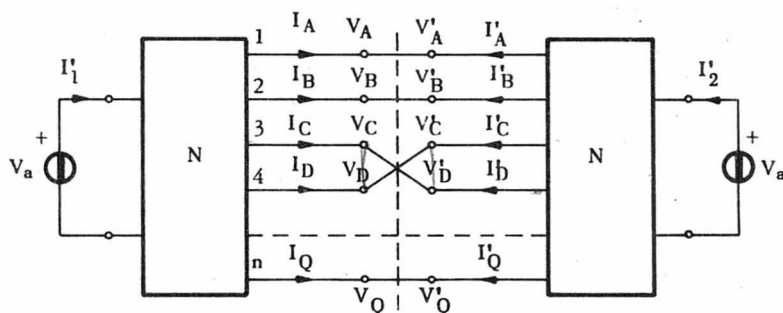


Fig. VII.2.9 - Situazione elettrica della rete intrecciata con il primo tipo di eccitazione.

Le (VII.2.8) mettono in evidenza la possibilità di effettuare le seguenti operazioni, senza alterare la situazione elettrica del circuito di fig. VII.2.9:

- 1) tagliare tutti i conduttori di collegamento in corrispondenza al piano di simmetria;
- 2) collegare tra di loro i conduttori corrispondenti a ciascuna coppia intrecciata.

Dopo aver effettuato queste operazioni, la rete bisezionabile risulta costituita da due parti separate del tipo di fig. VII.2.8 b); quindi valgono per I'_1 e per I'_2 le relazioni (VII.2.2), con Z_{aa} corrispondente al bipolo di fig. VII.2.8 b).

Nel caso della seconda eccitazione, facendo sempre riferimento alla fig. VII.2.9, con l'ipotesi però che le due porte siano chiuse su V_b e $-V_b$, si ha, per il fatto che la rete è speculare rispetto al piano di simmetria e le eccitazioni alle due porte sono speculari ma invertite, che tutte le grandezze elettriche sono speculari invertite rispetto a questo piano. Di conseguenza, risulta:

$$(VII.2.9) \quad \begin{aligned} V_A &= -V'_A; & V_B &= -V'_B; & V_C &= -V'_C; & V_D &= -V'_D; \dots; & V_Q &= -V'_Q \\ I_A &= -I'_A; & I_B &= -I'_B; & I_C &= -I'_C; & I_D &= -I'_D; \dots; & I_Q &= -I'_Q \end{aligned}$$

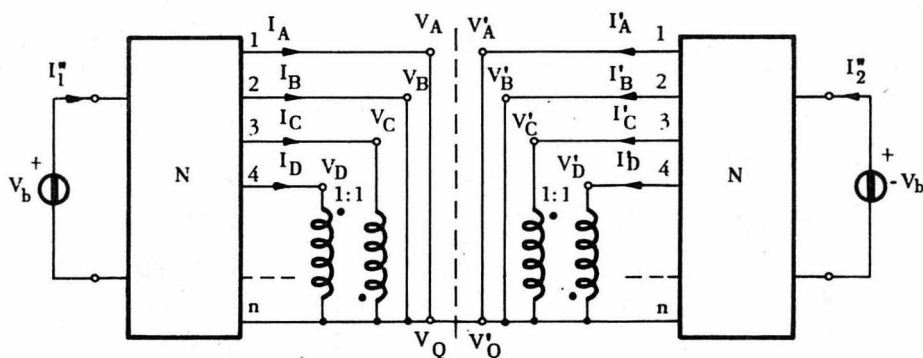


Fig. VII.2.10 - Modifica della rete bisezionabile che non altera la situazione elettrica, nel caso del secondo tipo di eccitazione.

Tenendo conto delle (VII.2.9) e delle relazioni (VII.2.7), derivanti dalle connessioni, si ha:

$$(VII.2.10) \quad \begin{aligned} & V_A = V_B = V_Q = 0; & V'_A = V'_B = V'_Q = 0 \\ & V_C = -V_D = V'_C = -V'_D \\ & I_C = I_D = -I'_C = -I'_D \end{aligned}$$

Le (VII.2.10) suggeriscono la possibilità di introdurre nella rete le modifiche indicate in fig. VII.2.10, senza alterarne la situazione elettrica. Tali modifiche riducono la rete bisezionabile a due parti separate del tipo di fig. VII.2.8a); quindi, per I_1^* e per I_2^* , valgono le (VII.2.3), con Z_{cc} corrispondente al bipolo di fig. VII.2.8a).

Poiché valgono relazioni identiche alle (VII.2.2) e (VII.2.3), la dimostrazione del teorema si completa come fatto nel paragrafo precedente per le reti non intrecciate.

Osservazione VII.2.1

Molto spesso nel piano di simmetria di una rete bisezionabile, si trova un trasformatore ideale di rapporto unitario e di polarità qualunque. A tale trasformatore è sempre possibile sostituire una connessione tramite conduttori intrecciati oppure non intrecciati. Consideriamo in dettaglio i due casi.

Supponiamo dapprima il caso in cui sia presente un trasformatore a polarità diretta, come mostrato in fig.VII.2.11 a). Introducendo un altro trasformatore ideale di rapporto unitario a polarità diretta, è possibile eliminare il trasformatore iniziale dal piano di simmetria. L'operazione da eseguire, evidente di per se stessa, è mostrata in figura VII.2.11 b).

Consideriamo successivamente il caso in cui sia presente, nel piano di simmetria, un trasformatore unitario a polarità inversa, come mostrato in fig.VII.2.12 a). In questo caso è possibile rimuovere tale trasformatore dal piano di simmetria, introducendo due trasformatori a polarità diretta ed un collegamento intrecciato. L'operazione da eseguire, evidente anche in questo caso, è mostrata in fig.VII.2.12 b).

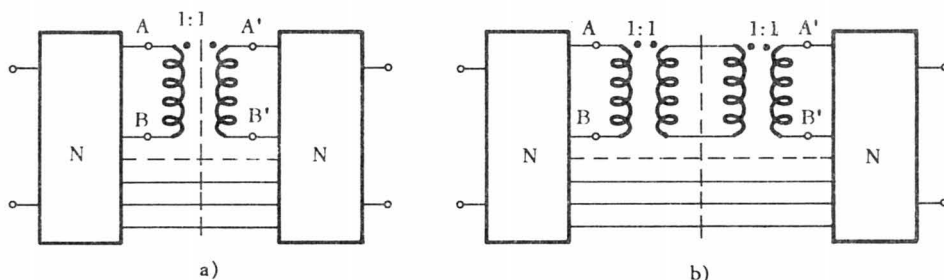


Fig.VII.2.11 - Eliminazione di un trasformatore ideale a polarità diretta dal piano di simmetria di una rete bisezionabile.

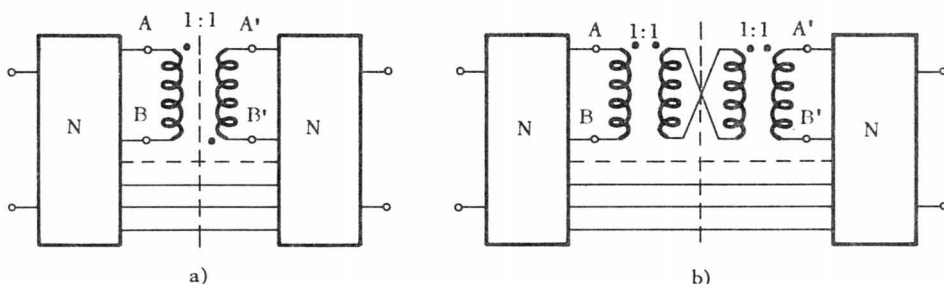


Fig.VII.2.12 - Eliminazione di un trasformatore ideale a polarità inversa dal piano di simmetria di una rete bisezionabile.

Esempio VII.2.2

Applicare il teorema di Bartlett per dimostrare l'equivalenza tra le due reti di fig.VII.2.13.

Poiché la rete mostrata nella parte (a) della figura possiede un trasformatore ideale di rapporto unitario e polarità inversa nel piano di simmetria, occorre preventiva-

mente trasformarla, eliminando tale trasformatore dal piano di simmetria. A questo scopo si può utilizzare l'osservazione precedente ed in particolare la tecnica illustrata in fig.VII.2.12. Si ottiene in questo modo la rete di fig.VII.2.14. Applichiamo a questa il

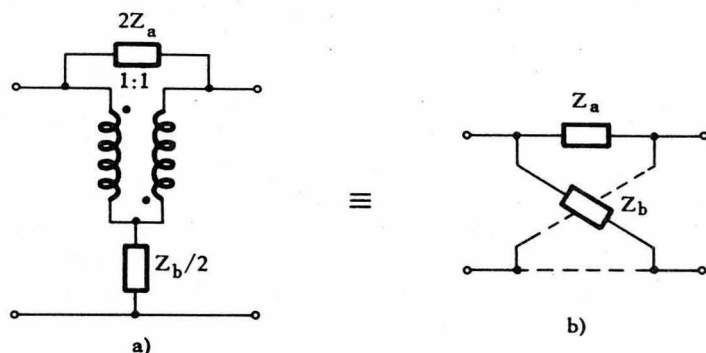


Fig.VII.2.13 - Reti equivalenti dal punto di vista esterno.

Fig.VII.2.14 - Rete equivalente a quella di fig.VII.2.13 a).

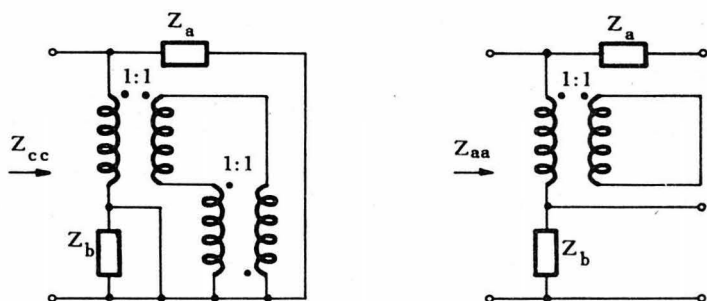
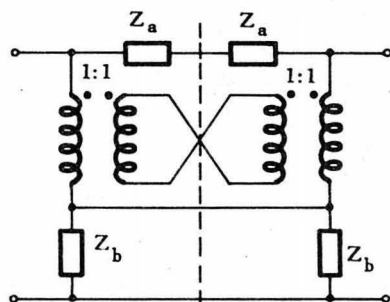


Fig.VII.2.15 - Bipoli da considerare nell'applicazione del teorema di Bartlett alla rete di fig.VII.2.13 a).

teorema di Bartlett. I bipoli da considerare, cioè quelli mostrati in fig.VII.2.8, sono nel caso presente quelli di fig.VII.2.15. Da questa figura si vede chiaramente che risulta $Z_{cc} = Z_a$ e $Z_{aa} = Z_b$. Ciò dimostra l'equivalenza di fig.VII.2.13, in base all'enunciato del teorema di Bartlett.

VII.3 - Trasformazioni stella-triangolo e stella-poligono.

Una trasformazione molto utile nella derivazione di circuiti equivalenti riguarda la possibilità di eliminare un nodo interno di un circuito senza alterarne il comportamento esterno.

Il caso più semplice è quello in cui solo tre bipoli sono connessi al nodo da eliminare, come indicato in fig. VII.3.1 a); in tal caso lo scopo della trasformazione è quello di determinare una nuova rete nella quale non sia più presente il nodo P. Tale nuova rete ha la forma indicata in fig. VII.3.1 b); in base agli schemi iniziale e finale, tale trasformazione

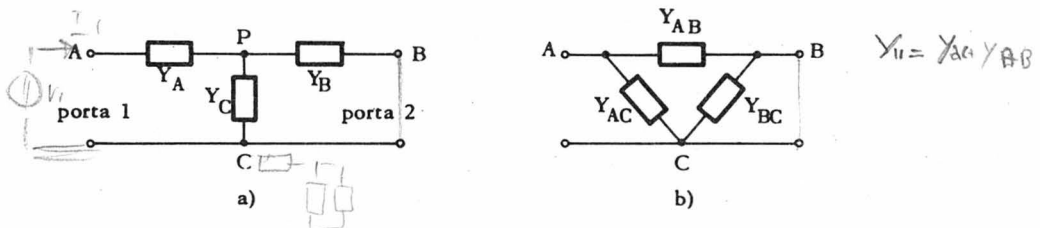


Fig. VII.3.1 - Trasformazione stella-triangolo.

ne prende il nome di «trasformazione stella-triangolo». Allo scopo di determinare le condizioni di equivalenza, calcoliamo la matrice ammettenze di corto-circuito della rete a stella, assimilabile ad una rete 2-porte a T. Si ha:

$$y_{11} = \frac{Y_A (Y_B + Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C} ; \quad y_{22} = \frac{Y_B (Y_A + Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

(VII.3.1)

$$y_{12} = y_{21} = - \frac{Y_A Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

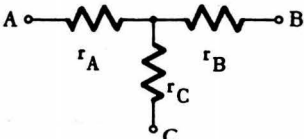
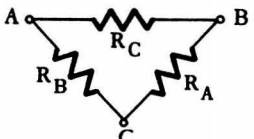
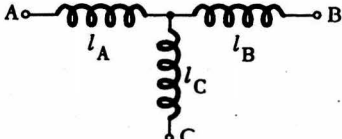
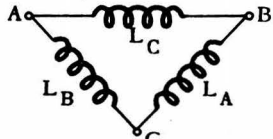
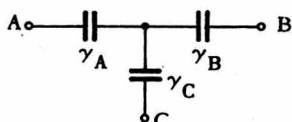
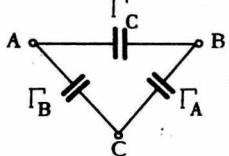
È facile verificare che la matrice ammettenze di corto-circuito precedente coincide con quella della rete a π relativa allo schema a triangolo di fig. VII.3.1 b), purché risulti:

$$(VII.3.2) \quad Y_{AB} = \frac{Y_A Y_B}{\Sigma Y} ; \quad Y_{BC} = \frac{Y_B Y_C}{\Sigma Y} ; \quad Y_{AC} = \frac{Y_A Y_C}{\Sigma Y}$$

ove $\Sigma Y = Y_A + Y_B + Y_C$.

La rete a triangolo ottenuta per mezzo della trasformazione non è sempre valida, nel senso che i bipoli componenti possono corrispondere a componenti di tipo non usuale, anche se la rete a stella di partenza

Tab.VII.3.1 - Trasformazione stella-triangolo.

 $r_C = \frac{R_A R_B}{R} ; \quad r_A = \frac{R_B R_C}{R} ;$ $r_B = \frac{R_A R_C}{R} \quad \text{con } R = R_A + R_B + R_C$	 $R_A = \frac{r_B r_C}{r} ; \quad R_B = \frac{r_A r_C}{r} ;$ $R_C = \frac{r_A r_B}{r} \quad \text{con } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$
 $l_C = \frac{L_A L_B}{L} ; \quad l_A = \frac{L_B L_C}{L} ; \quad l_B = \frac{L_A L_C}{L}$ $\text{con } L = L_A + L_B + L_C$	 $L_A = \frac{l_B l_C}{l} ; \quad L_B = \frac{l_A l_C}{l} ; \quad L_C = \frac{l_A l_B}{l}$ $\text{con } \frac{1}{l} = \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C}$
 $\gamma_C = \frac{\Gamma_A \Gamma_B}{\Gamma} ; \quad \gamma_A = \frac{\Gamma_B \Gamma_C}{\Gamma} ; \quad \gamma_B = \frac{\Gamma_A \Gamma_C}{\Gamma} ;$ $\text{con } \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_A} + \frac{1}{\Gamma_B} + \frac{1}{\Gamma_C}$	 $\Gamma_A = \frac{\gamma_B \gamma_C}{\gamma} ; \quad \Gamma_B = \frac{\gamma_A \gamma_C}{\gamma} ; \quad \Gamma_C = \frac{\gamma_A \gamma_B}{\gamma}$ $\text{con } \gamma = \gamma_A + \gamma_B + \gamma_C$

conteneva componenti di tipo usuale. Risulta invece sempre valida nel caso in cui i tre bipoli contengano un solo componente dello stesso tipo (resistori, condensatori, induttori). In questo caso la rete a triangolo contiene anch'essa componenti dello stesso tipo. In tab.VII.3.1 sono riportate per comodità le tre situazioni corrispondenti ai tre tipi possibili di bipoli passivi]

La trasformazione inversa, che corrisponde alla generazione di un nodo interno a partire da un triangolo di bipoli, è anch'essa possibile. La dimostrazione della possibilità di un tale tipo di trasformazione, detta «trasformazione triangolo-stella», si effettua in modo analogo al precedente; i risultati sono riassunti in tab.VII.3.1, nel caso di componenti tutti uguali.

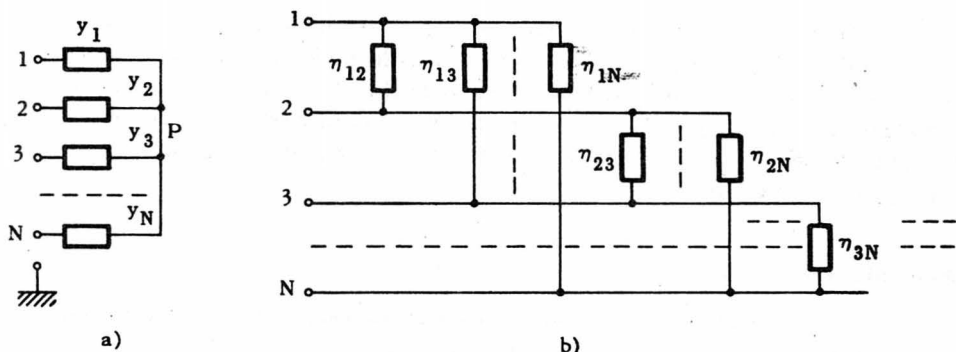


Fig.VII.3.2 - Trasformazione stella-poligono; accanto ad ogni componente è indicata la rispettiva ammettenza.

Consideriamo ora il caso in cui ad un nodo interno di una rete siano connessi N bipoli; anche in tal caso è possibile introdurre una trasformazione che elimini tale nodo, sostituendo un opportuno circuito alla stella di N bipoli connessi al nodo considerato. Precisamente in tal caso il nuovo circuito è costituito da un poligono stellato a maglia completa, contenente $N(N-1)/2$ bipoli; la trasformazione prende il nome di «trasformazione stella-poligono». Per dimostrare l'equivalenza, si consideri il circuito iniziale con il nodo P da eliminare, mostrato in figura VII.3.2a). Procedendo in modo analogo al caso di $N=3$, ricaviamo la matrice ammettenze di corto-circuito della rete ottenuta prendendo una porta tra ciascun nodo $k=1, 2, \dots, N$ ed un punto preso come nodo di riferimento. Risulta:

$$y_{kk} = \frac{y_k \left(\sum_{i \neq k} y_i \right)}{\sum_i y_i} ; \quad y_{kj} = - \frac{y_k y_j}{\sum_i y_i}$$

$$(VII.3.3) \quad k = 1, 2, \dots, N ; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

È facile verificare che la matrice ammettenze di corto-circuito precedente coincide con quella della rete a poligono di fig. VII.3.2 b), purché risulti:

$$(VII.3.4) \quad \eta_{kj} = \frac{y_k y_j}{\sum_i y_i}$$

con $k=1, 2, \dots, N$; $j=2, 3, \dots, N$ e $k \neq j$.

La fig. VII.3.2 rappresenta la trasformazione stella-poligono, che si può riassumere pertanto nei seguenti passi:

- 1) eliminare il nodo P nel circuito assegnato e tutti i bipoli ad esso connessi;
- 2) inserire tra ogni coppia di nodi k, j un bipolo di ammettenza η_{kj} .

Come nel caso della trasformazione stella-triangolo, anche in questo caso il circuito a cui si arriva è valido se i componenti sono tutti dello stesso tipo. Inoltre, a differenza della trasformazione stella-triangolo, in questo caso non è possibile la trasformazione inversa, avente lo scopo di trasformare il generico poligono di bipoli in una configurazione a stella.

Esempio VII.3.1

Nel circuito di fig. VII.3.3 a), eliminare un condensatore allo scopo di ottenere un circuito equivalente con un numero minore di componenti.

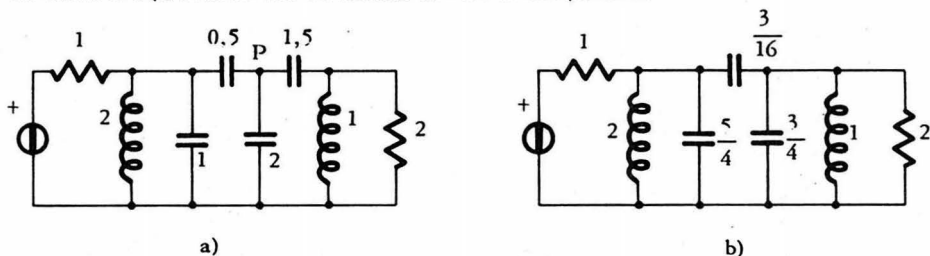


Fig. VII.3.3 - Schema iniziale a) e finale b) del circuito considerato nell'esempio VII.3.1.

Utilizziamo la trasformazione stella-triangolo per eliminare il nodo P dello schema di figura. Mediante le formule di tab. VII.3.1, otteniamo per la rete a triangolo equivalente alla stella con nodo centrale in P, i seguenti valori:

$$\gamma_A = 0,5 ; \quad \gamma_B = 1,5 ; \quad \gamma_C = 2 ; \quad \gamma = 4$$

$$\Gamma_A = \frac{3}{4} ; \quad \Gamma_B = \frac{1}{4} ; \quad \Gamma_C = \frac{3}{16}$$

Di conseguenza, effettuando anche il parallelo indicato in figura, si ottiene il nuovo schema di fig.VII.3.3 b).

Osservazione VII.3.1

Le trasformazioni stella-triangolo e stella-poligono vengono spesso utilizzate allo scopo di facilitare l'analisi di circuiti formati da bipoli passivi; vantaggi rilevanti si ottengono nel caso dell'analisi nel dominio della frequenza. In tal caso, infatti, i circuiti trasformati sono sempre validi, in quanto le trasformazioni suddette forniscono semplicemente i valori delle immettenze alla frequenza considerata. In particolare, in quest'ambito, le trasformazioni stella-triangolo diretta e inversa sono comunemente applicate per analizzare i circuiti di carico dei sistemi trifase, i quali possono assumere ambedue le configurazioni.

Più in generale, ogni circuito contenente solo bipoli può essere facilmente analizzato, in regime permanente, per mezzo delle trasformazioni qui considerate; il procedimento generale consiste nell'eliminazione successiva di tutti i nodi interni alla rete e nella semplificazione di tutte le serie e i paralleli presenti. Un metodo di analisi siffatto è quindi valido solo quando interessa il comportamento esterno del circuito, poiché l'uso successivo delle trasformazioni impedisce di avere qualsiasi informazione sul comportamento interno.

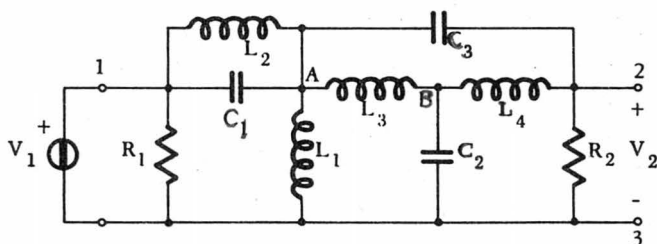


Fig.VII.3.4 - Circuito analizzato con il metodo di eliminazione dei nodi interni.

Si consideri, a titolo di esempio, il circuito di fig.VII.3.4, per il quale interessa calcolare il rapporto di trasferimento in tensione V_2/V_1 . L'analisi può essere effettuata a passi successivi, come è indicato nelle righe a), b), ..., e) di tab.VII.3.2; la configurazione finale, nella quale sono ancora presenti i tre nodi connessi alle porte, permette di effettuare il calcolo del rapporto V_2/V_1 mediante la formula di partizione seguente:

$$V_2/V_1 = Z_S / (Z_L + Z_S)$$

Il procedimento suddetto può essere facilmente generalizzato e si presta ad essere implementato come metodo di analisi automatica sul calcolatore. Il metodo risulta molto rapido, in quanto, se vengono effettuate per prime tutte le possibili opera-

Tab.VII.3.2 - Passi successivi effettuati per analizzare il circuito di fig.VII.3.4.

a		Paralelo fra L_2 e C_1 $Z_A = \frac{j\omega L_2}{-\omega^2 L_2 C_1 + 1}$
b		Eliminazione del nodo B $Z_B = \frac{L_3}{Z C_2} ; \quad Z_D = \frac{L_4}{Z C_2} ;$ $Z_C = -\omega^2 L_3 L_4 / Z$ $\text{con } \frac{1}{Z} = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \right)$
c		Eliminazione paralleli $Z_E = \frac{Z_B \cdot j\omega L_1}{Z_B + j\omega L_1} ; \quad Z_G = \frac{Z_D R_2}{Z_D + R_2}$ $Z_F = \frac{Z_C}{j\omega C_3 Z_C + 1}$
d		Eliminazione del nodo A $Z_H = \frac{Z_A \cdot Z_E}{Z} ; \quad Z_L = \frac{Z_A Z_F}{Z} ;$ $Z_M = \frac{Z_E Z_F}{Z}$ $\text{con } \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_E} + \frac{1}{Z_F}$
e		Eliminazione paralleli $Z_R = \frac{R_1 \cdot Z_H}{R_1 + Z_H} ;$ $Z_S = \frac{Z_M \cdot Z_G}{Z_M + Z_G}$

zioni di serie e di parallelo di bipoli e tutte le eliminazioni di quei nodi a cui concorrono meno rami, molto raramente e per reti molto complesse risultano necessarie trasformazioni stella-polinomio di ordine elevato.

VII.4 Impiego delle trasformazioni lineari nella generazione di circuiti equivalenti.

Un modo molto semplice per generare circuiti equivalenti ad un circuito assegnato consiste nell'utilizzare opportune trasformazioni lineari. Supponiamo che il circuito che si vuole trasformare sia descritto su base nodi dal seguente sistema di N equazioni:

$$(VII.4.1) \quad [I] = [Y][V]$$

ove $[V]$ è il vettore delle tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento e $[I]$ è il vettore delle correnti, mentre $[Y]$ è la matrice dei coefficienti. Si può subito osservare che la (VII.4.1) si può anche interpretare come la rappresentazione $[Y]$ di una rete N porte; ciò consiste nel connettere N conduttori a ciascun nodo interno e considerare ciascuna porta tra il suddetto conduttore e il nodo di riferimento, come indicato in fig. VII.4.1.

Introduciamo ora due matrici non singolari di ordine N , $[T]$ e $[T_1]$ allo scopo di ottenere due nuovi vettori tensione e corrente, nel modo seguente:

$$(VII.4.2) \quad \begin{aligned} [i] &= [T][I] \\ [v] &= [T_1][V] \end{aligned}$$

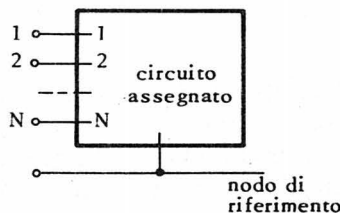


Fig. VII.4.1 - Circuito assegnato nel quale sono stati evidenziati tutti i nodi interni.

Le trasformazioni (VII.4.2) permettono di considerare un nuovo sistema di equazioni, simile al sistema (VII.4.1), nelle nuove variabili $[v]$ e $[i]$; sostituendo le (VII.4.2) nelle (VII.4.1), si ottiene facilmente:

$$(VII.4.3) \quad [i] = [Y'] [v] \quad \text{con} \quad [Y'] = [T][Y][T_1]^{-1}$$

Il sistema (VII.4.3) può essere considerato come la descrizione su base nodi di un nuovo circuito, derivato dal precedente.

La trattazione sin qui svolta è del tutto generale; tuttavia, dal punto di vista applicativo è opportuno introdurre delle limitazioni, che portano a considerare dei casi particolari nell'ambito della classe di trasformazioni introdotte.

La prima limitazione consiste nel supporre passivi e reciproci i circuiti considerati; in questo caso sia la matrice $[Y]$, sia la matrice $[Y']$ devono essere simmetriche. Ciò conduce alla condizione seguente:

$$(VII.4.4) \quad [Y']^t = \{[T_1]^{-1}\}^t Y^t [T]^t = [T] [Y] [T_1]^{-1} = [Y']$$

Essendo per ipotesi $[Y] = [Y]^t$, le matrici $[T]$ e $[T_1]$ devono soddisfare alla condizione seguente:

$$(VII.4.5) \quad [T_1]^{-1} = [T]^t$$

Nel caso dei circuiti reciproci, pertanto, la classe di trasformazioni da considerare è più limitata, poiché dipende da una sola matrice $[T]$. In questo caso si ha ovviamente:

$$(VII.4.6) \quad [i] = [T] [I] ; \quad [V] = [T]^t [v]$$

mentre:

$$(VII.4.7) \quad [Y'] = [T] [Y] [T]^t$$

È facile verificare che la trasformazione (VII.4.7) conserva anche il carattere passivo delle reti considerate. Ciò si può dimostrare facilmente confrontando le (VII.4.6) con le equazioni di definizione del trasformatore multiporta, introdotto nel Cap.I (equazioni I.8.13). Tale confronto permette di riconoscere che la rete trasformata corrisponde allo schema di fig. VII.4.2, ottenuto chiudendo il trasformatore multiporta T sul circuito assegnato; le porte del trasformatore sono $2N$ ed hanno tutte un morsetto comune, coincidente con il nodo di riferimento. Il circuito risultante è chiaramente passivo, in quanto tale è il trasformatore multiporta. Si deduce quindi che la trasformazione (VII.4.7) conserva il carattere passivo del circuito trasformato.

La seconda limitazione consiste nel cercare quelle trasformazioni che diano luogo a circuiti aventi lo stesso comportamento esterno. A questo scopo supporremo che non tutti gli N nodi interni interessino dal punto di vista esterno, ma solo alcuni di essi; tali nodi siano i primi M . Si può osservare che si ottiene l'equivalenza dal punto di vista esterno, quando la trasformazione lascia inalterate le prime M componenti del vettore delle correnti e le prime M componenti del vettore delle

tensioni. Tale condizione si può esprimere facilmente in termini di matrice $[T]$. Esplicitando tale matrice nella forma seguente:

$$(VII.4.8) \quad T = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1N} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{N1} & n_{N2} & \dots & n_{NN} \end{bmatrix}$$

Si ottengono facilmente le seguenti condizioni:

$$(VII.4.9) \quad \begin{aligned} n_{kk} &= 1 & k &= 1, 2, \dots, M \\ n_{kh} &= n_{hk} = 0 & h &\neq k \end{aligned}$$

In molti casi il circuito trasformato, corrispondente alla matrice $[Y']$ ha una struttura molto vicina a quella del circuito assegnato; pertanto lo schema di fig. VII.4.2 ha più valore teorico che pratico, per la

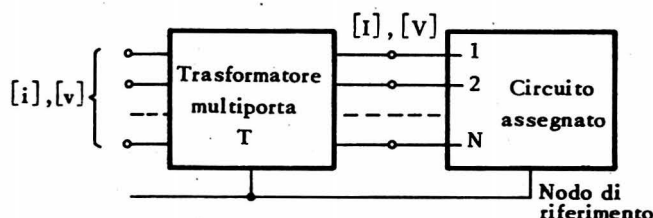


Fig. VII.4.2 - Generazione di circuiti equivalenti con un trasformatore multiporta.

presenza del trasformatore multiporta. Quello che interessa ordinariamente è poter apportare delle modifiche al circuito, facendolo rimanere dello stesso tipo. Ad esempio, il caso più utile nelle applicazioni è quello in cui il circuito assegnato è costituito solo da resistori, induttori e condensatori e si vogliono modificare i valori di alcuni elementi reattivi in modo da renderli più adatti alla realizzazione, senza alterare il comportamento esterno del circuito.

Pertanto, ulteriori limitazioni nella scelta della trasformazione adatta consistono nella scelta di opportune e particolari matrici $[T]$. L'analisi della scelta più opportuna può essere effettuata considerando separatamente l'effetto relativo ad alcune matrici elementari in cui può essere suddivisa la matrice $[T]$. È noto infatti dalla teoria delle matrici che ogni matrice non singolare può essere suddivisa nel prodotto

di un numero opportuno di matrici più semplici dei seguenti tre tipi:

$$(VII.4.10a) \quad [T_a] = i \dots \begin{matrix} & & i & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{ii} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$(VII.4.10b) \quad [T_b] = j \dots \begin{matrix} & & & k & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & c_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$(VII.4.10c) \quad [T_c] = \begin{matrix} i & j \\ i \dots & j \dots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

in cui: $[T_a]$ è una matrice diagonale con i termini tutti uguali ad uno con l'esclusione di uno (nella VII.3.10a, tale termine è l' i -esimo, scelto pari alla quantità reale k_{ii}); $[T_b]$ è una matrice avente termini uguali ad uno sulla diagonale principale, tutti gli altri zero con l'esclusione di uno (nella VII.4.10b, tale termine è quello all'incrocio fra la riga j e la colonna k e vale c_{jk}); $[T_c]$ è una matrice avente i termini della diagonale principale uguali ad uno con l'esclusione di due (nella formula VII.4.10c, l' i -esimo e lo j -esimo) e gli altri termini tutti uguali a zero con l'esclusione di due, di valore uguale ad uno, posti all'incrocio delle righe e delle colonne corrispondenti ai due termini nulli sulla diagonale principale (nel caso considerato i termini all'incrocio fra la riga i -esima e la colonna j -esima e all'incrocio fra la riga j -esima e la colonna i -esima).

L'effetto della matrice $[T]$ sulla $[Y]$ nella generazione dell'ammettenza $[Y']$ del circuito equivalente si può ridurre all'esame dell'effetto di una matrice $[T]$ dei tre tipi precedenti; ciò evidentemente semplifica notevolmente l'esame delle possibilità offerte dalle trasformazioni lineari di variabile nella derivazione di circuiti equivalenti. Con riferimento ai simboli utilizzati nella (VII.4.10), l'effetto delle tre matrici è il seguente:

1) la matrice $[T_a]$ determina la moltiplicazione dei termini della riga e della colonna i -esima di $[Y]$ per k_{ii} ; di conseguenza il termine y_{ii} all'incrocio della riga i -esima con la colonna i -esima risulta moltiplicato per k_{ii}^2 ;

2) la matrice $[T_b]$ equivale ad aggiungere alla riga j -esima la riga k -esima moltiplicata per c_{jk} e successivamente alla colonna j -esima la colonna k -esima moltiplicata per c_{jk} . Di conseguenza il termine y_{jj} all'incrocio della riga j -esima con la colonna j -esima diviene:

$$(VII.4.11) \quad y_{jj} + c_{jk}(y_{jk} + y_{kj}) + c_{jk}^2 y_{kk}$$

3) la matrice $[T_c]$ scambia la riga i -esima con la riga j -esima e successivamente la colonna i -esima con la colonna j -esima; l'effetto di questa matrice perciò equivale a scambiare la numerazione tra il nodo i e il nodo j .

Tenendo conto dell'effetto di queste tre matrici e dell'obiettivo di mantenere il circuito equivalente risultante di struttura molto simile a quello assegnato, si comprende che l'unica matrice delle tre che può essere usata è la $[T_a]$; infatti la matrice $[T_c]$ non raggiunge alcun effetto utile, mentre la matrice $[T_b]$ non è facilmente interpretabile nei riguardi del circuito risultante. Perciò, in conclusione, la matrice $[T]$ che verrà considerata è una matrice diagonale avente termini uguali ad uno per i nodi che debbono rimanere invariati nell'equivalenza; tale matrice si può considerare come il prodotto di matrici del tipo $[T_a]$. L'effetto di una singola matrice di questo tipo è equivalente ad una *variazione di livello di impedenza interna al circuito*. Come vedremo successivamente nel § VII.5, tale variazione è estremamente utile da un punto di vista pratico.

Vogliamo concludere il presente paragrafo con una osservazione. La matrice $[T]$ deve avere un ordine uguale ad N , cioè al numero dei nodi indipendenti del circuito assegnato. Tuttavia è possibile ovviare a tale vincolo in modo molto semplice, creando nel circuito iniziale dei nodi fittizi. Chiariamo l'osservazione con un esempio molto semplice. Supponiamo che il circuito assegnato sia il resistore di fig. VII.4.3 a) e che interessi la resistenza di ingresso. Un modo molto semplice per aumentare il numero dei nodi è quello di suddividere il resistore nella serie di due, come mostrato in fig. VII.4.3 b). La matrice ammettenze su base nodi di questo circuito è:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

In base al vincolo (VII.4.9), la matrice $[T]$ è del tipo seguente:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

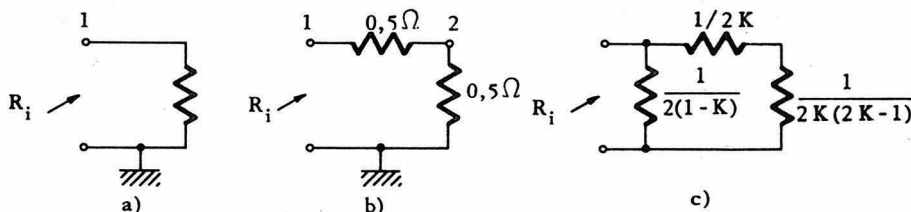


Fig.VII.4.3 - Inserzione di un nodo fittizio nella generazione di circuiti equivalenti con la tecnica delle trasformazioni lineari.

Quindi la matrice $[Y']$ risulta:

$$[Y'] = \begin{bmatrix} 2 & -2K \\ -2K & 4K^2 \end{bmatrix}$$

A tale matrice corrisponde lo schema di fig.VII.4.3c). Vediamo che questo schema è dello stesso tipo di quello di partenza, se $0,5 < K < 1$; infatti solo in questo caso le resistenze hanno valore positivo. È possibile continuare in questo modo, ad esempio suddividendo ancora uno dei resistori in due.

In conclusione la generazione di circuiti equivalenti con matrici del tipo $[T_a]$ può essere notevolmente generalizzata, se preventivamente si introducono nel circuito assegnato dei nodi fittizi. Ovviamente, tali nodi verranno inseriti in base allo schema del circuito finale a cui si spera di arrivare.

VII.5 - Generazione di reti a scala equivalenti con la tecnica della variazione interna di livello di impedenza.

Il metodo di generazione di circuiti equivalenti, basato sulle trasformazioni lineari delle variabili, limitatamente al caso di matrici del tipo $[T_a]$, è particolarmente utile e semplice da applicare quando il circuito assegnato è del tipo a scala reattivo. La ragione dell'utilità è in-

sita in questo tipo di rete, che costituisce la struttura fondamentale della maggior parte dei circuiti passivi usati in pratica.

La situazione usuale che si incontra nel caso della rete a scala, è quella di un nodo a cui sono connessi due rami longitudinali ed uno trasversale, come mostrato in fig. VII.5.1 a). Applichiamo la trasformazione suddetta a tale rete. Le correnti e le tensioni del circuito iniziale sono:

$$(VII.5.1) \quad [I] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [V] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

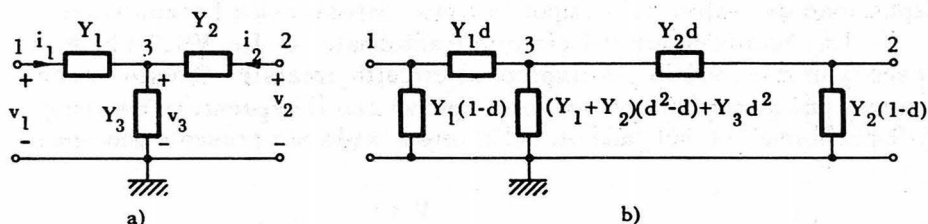


Fig. VII.5.1 - Trasformazione di uno spezzone di rete a scala. I valori dei componenti sono in mho.

La matrice da usare è la seguente:

$$(VII.5.2) \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

In conseguenza della trasformazione, la matrice ammettenze su base nodi diviene:

$$(VII.5.3) \quad [Y'] = [T] \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 \\ 0 & Y_2 & -Y_2 \\ -Y_1 & -Y_2 & Y_1+Y_2+Y_3 \end{bmatrix} [T]^t =$$

$$= \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 d \\ 0 & Y_2 & -Y_2 d \\ -Y_1 d & -Y_2 d & (Y_1+Y_2+Y_3)d^2 \end{bmatrix}$$

A questa matrice corrisponde il circuito equivalente, dal punto di vista dei nodi 1 e 2, di fig. VII.5.1 b). Dall'esame di questa figura si vede che, affinché i valori dei componenti siano positivi, è necessario che:

- 1) il valore di d sia scelto opportunamente;
- 2) i rami longitudinali e quello trasversale debbono contenere componenti di tipo opportuno. In particolare, quello trasversale deve essere tale che $(Y_1 + Y_2)(d^2 - d) + Y_3 d^2$ corrisponda ad un bipolo reattivo con valori dei componenti positivi.

Malgrado le limitazioni precedenti, molto spesso si riesce ad effettuare la trasformazione del circuito in modo da raggiungere gli obiettivi voluti. Tali obiettivi sono vari; il più tipico è quello di ridurre la dispersione dei valori dei componenti più costosi, come le induttanze.

Un inconveniente del circuito trasformato di fig. VII.5.1 b) è la presenza di due rami in più rispetto al circuito iniziale. Questo inconveniente può essere eliminato molto spesso con il seguente accorgimento. Supponiamo che nell'ambito della rete a scala sia presente uno spez-

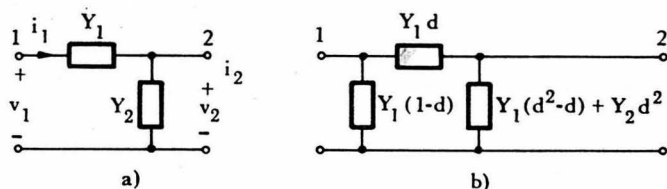


Fig. VII.5.2 - Trasformazione di una rete ad «L» con variazione del livello d'impedenza al nodo 2.

zone ad «L», costituito da due bipoli dello stesso tipo, come mostrato in fig. VII.5.2 a). Applicando la trasformazione precedente, nell'ipotesi di lasciare inalterato il comportamento al nodo 1, si ha:

$$[I] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix};$$

$$(VII.5.4) \quad [Y'] = [T] \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} [T]^t = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 d \\ -Y_1 d & (Y_1 + Y_2) d^2 \end{bmatrix}$$

Il circuito risultante è mostrato nella parte b) della figura ed è caratterizzato dal fatto che il livello di impedenza al nodo 2 è stato au-

mentato di $1/d^2$. In particolare è possibile scegliere il parametro d in modo tale che il ramo che congiunge il nodo 2 con il nodo di riferimento abbia ammettenza nulla e quindi sparisca; il valore di d per cui ciò accade si ottiene ponendo:

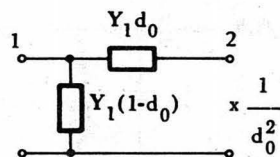
$$(VII.5.5) \quad Y_1(d^2 - d) + Y_2 d^2 = 0$$

Quindi si ha:

$$(VII.5.6) \quad d_0 = Y_1 / (Y_1 + Y_2)$$

In questo caso il circuito si riduce a quello mostrato in figura VII.5.3, in cui è messa in evidenza anche la variazione di livello di impedenza al nodo 2.

Fig.VII.5.3 - Circuito equivalente a quello di fig.VII.5.2a), con $d_0 = Y_1 / (Y_1 + Y_2)$.



La trasformazione precedente è sempre possibile; l'unica condizione richiesta è la presenza di spezzoni ad «L» con componenti dello stesso tipo; tale presenza è usuale nei circuiti reattivi con cui si ha a che fare nelle applicazioni.

Esempio VII.5.1

Applicare il metodo precedente al circuito di fig.VII.5.4a) per rendere, se possibile, i valori delle induttanze uguali fra di loro.

Allo scopo di usare la trasformazione di fig.VII.5.3, ridisegniamo il circuito assegnato come mostrato in fig.VII.5.4b), lasciando incognite le capacità $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, salvo il vincolo imposto dal circuito e cioè:

$$C_1 + C_2 = 10 ; \quad C_5 + C_6 = 1000 ; \quad \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2}$$

Le reti ad «L» da considerare sono costituite da condensatori. Le induttanze che si possono variare facilmente sono le prime due, in quanto la terza, posta in parallelo al carico, potrebbe essere alterata modificando il carico, ciò che è opportuno evitare. Perciò occorre variare il livello di impedenza in corrispondenza alla prima induttanza di $1/4$ ed alla seconda di 25 . Ciò è indicato esplicitamente nella figura VII.5.4b).

Iniziamo con l'induttanza di valore 0,1. Per portare il suo valore a 0,025, dovremmo applicare ai due spezzoni ad «L» ai suoi lati una trasformazione del tipo di fig.VII.5.3 oppure, più in generale, del tipo VII.5.2, con $d = 2$. Tale valore di d , tuttavia, determina l'insorgere di un valore negativo di capacità fra il nodo 1 e il nodo di riferimento; di conseguenza, in questo caso, non è possibile applicare la trasformazione interna di livello.

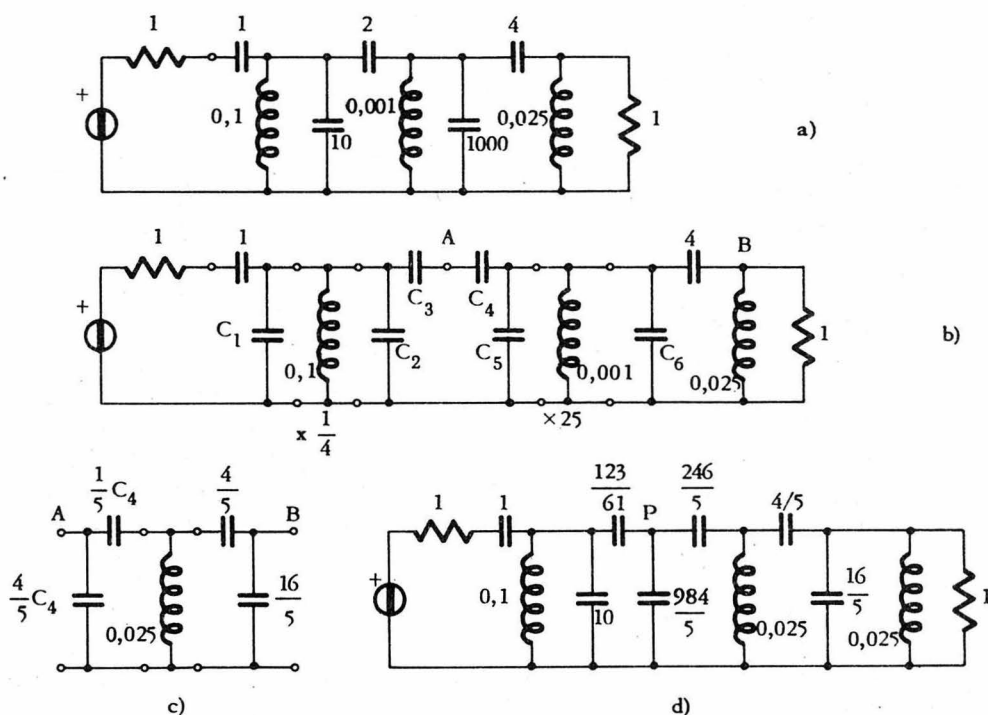


Fig.VII.5.4 - Trasformazione di un circuito per ridurre la dispersione del valore delle induttanze.

Consideriamo successivamente l'induttanza di valore 0,001. In questo caso occorre un valore di d pari a $1/5$. Utilizzando per i due spezzoni ad «L» ai suoi lati la trasformazione di fig.VII.5.3, si ha per la parte del circuito compresa tra i nodi A e B (fig.VII.5.4b) la situazione di fig.VII.5.4c), se è soddisfatta la condizione seguente, derivante dalla (VII.5.6):

$$\frac{1}{5} = \frac{C_4}{C_4 + C_5} = \frac{4}{4 + C_6}$$

Dalla condizione precedente si ottiene:

$$C_6 = 16 \quad ; \quad C_4 = \frac{1}{4} C_5$$

Vediamo se tali condizioni sono compatibili con i vincoli sui condensatori espressi precedentemente. Risulta, dai vincoli precedenti:

$$C_5 = 1000 - C_6 = 984 \quad ; \quad C_4 = 984/4 = 246 \quad ;$$

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{246} = \frac{61}{123} \quad ; \quad C_3 = \frac{123}{61}$$

Essendo tutti i valori dei condensatori positivi, la trasformazione imposta è compatibile con i vincoli e quindi può essere applicata. Il circuito risultante è mostrato in fig.VII.5.4d).

Rispetto al circuito iniziale, siamo riusciti a ridurre la dispersione del valore delle induttanze dal valore $0,1/0,001 = 100$ al valore $0,1/0,025 = 4$. La trasformazione utilizzata a tale scopo ha comportato l'aumento dei condensatori di due unità. Tuttavia applicando ancora al circuito ottenuto una trasformazione stella-triangolo per i tre condensatori connessi al nodo P ed effettuando successivamente il parallelo che ne consegue, si vede che l'aumento complessivo dei condensatori è limitato ad uno soltanto.

*

APPENDICI AL CAPITOLO VII

APPENDICE VII.A - *Circuiti equivalenti in modo continuo.*

Abbiamo visto nel § VII.4 come sia possibile derivare circuiti equivalenti ad uno assegnato, utilizzando trasformazioni lineari delle variabili tensione e corrente e considerando il circuito descritto su base nodi invariante rispetto a M nodi. La matrice dei coefficienti su base nodi si altera in conseguenza della trasformazione, come indicato nella formula (VII.4.7). Nel presente paragrafo supponiamo che la matrice $[T]$, che si utilizza per la trasformazione, sia una funzione di una variabile ausiliaria v , nel modo seguente:

$$(VII.A.1) \quad [T] = [U] + [B] \Delta v$$

in cui $[U]$ è la matrice unità, $[B]$ è una matrice reale che deve soddisfare la condizione (VII.4.9) di avere nulli i termini delle prime M colonne e righe; Δv è l'incremento della variabile introdotta. In conseguenza della (VII.A.1), la (VII.4.7) diviene:

$$(VII.A.2) \quad [Y(v + \Delta v)] = \{[U] + [B] \Delta v\} [Y(v)] \{[U] + [B]^t \Delta v\} = \\ = [Y(v)] + \{[B] [Y(v)] + [Y(v)] [B]^t\} \Delta v + [B] [Y(v)] [B]^t (\Delta v)^2$$

Passando al limite per $\Delta v \rightarrow 0$, la (VII.A.2) diviene:

$$(VII.A.3) \quad \frac{d[Y]}{dv} = [B] [Y] + [Y] [B]^t$$

La soluzione dell'equazione differenziale (VII.A.3) definisce una famiglia di circuiti, tutti equivalenti a quello assegnato, quando si pren-

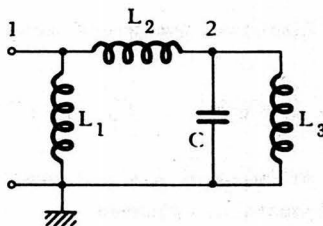
da come condizione iniziale per $v=0$ proprio la matrice ammettenza dei nodi del circuito di cui si vogliono ottenere degli schemi equivalenti.

Illustriamo con un esempio il procedimento di generazione descritto, rimandando per dettagli alla letteratura tecnica⁽¹⁾.

Esempio VII.A.1

Generare la famiglia dei bipoli equivalenti a quello di fig. VII.A.1, prendendo come valori iniziali $L_1 = \infty$, $L_2 = L_3 = C = 1$.

Fig. VII.A.1 - Bipolo di cui si vogliono generare schemi equivalenti.



I nodi del circuito di fig. VII.A.1 sono tre. Prendiamo come riferimento uno dei morsetti della porta di ingresso al bipolo e numeriamo con 1 l'altro morsetto. La matrice $[Y]$ del circuito vale:

$$[Y(s)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

La matrice $[B]$ deve essere del seguente tipo, essendo $M=1$:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

La (VII.A.3) risulta quindi, indicando con $\Gamma_k = 1/L_k$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{dC}{dv} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \frac{d(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{dv} & -\frac{d\Gamma_2}{dv} \\ -\frac{d\Gamma_2}{dv} & \frac{d(\Gamma_2 + \Gamma_3)}{dv} \end{bmatrix} \frac{1}{s} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & bC \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & -b\Gamma_2 \\ -b\Gamma_2 & 2b(\Gamma_2 + \Gamma_3) \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

(1) - Si veda ad esempio: J.D. Schoeffler, «The synthesis of minimum sensitivity networks», IEEE Trans. on Circuit Theory, giugno 1964, pp. 271-276.

da cui:

$$\frac{dC}{dv} = 2bC; \quad \frac{d\Gamma_2}{dv} = b\Gamma_2; \quad \frac{d(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{dv} = 0; \quad \frac{d(\Gamma_2 + \Gamma_3)}{dv} = 2b(\Gamma_2 + \Gamma_3)$$

Separando le variabili, si ha:

$$\frac{dC}{dv} = 2bC; \quad \frac{d\Gamma_1}{dv} = -b\Gamma_1; \quad \frac{d\Gamma_2}{dv} = b\Gamma_2; \quad \frac{d\Gamma_3}{dv} = b\Gamma_2 + 2b\Gamma_3$$

Risolvendo queste equazioni, con i valori iniziali precisati precedentemente, si ha:

$$C = e^{2bv}; \quad \Gamma_1 = 1 - e^{bv}; \quad \Gamma_2 = e^{bv}; \quad \Gamma_3 = 2e^{2bv} - e^{bv}$$

Al variare di v , si ottengono bipoli equivalenti. Ad esempio possiamo far sparire l'induttanza L_3 , ponendo:

$$e^{bv} = 0,5$$

I valori dei componenti valgono in questo caso:

$$C = 0,25; \quad L_1 = 2; \quad L_2 = 2; \quad L_3 = \infty.$$

Osservazione VII.A.1

Le matrici $[Y(v)]$ al variare di v possono corrispondere ad un circuito completamente diverso da quello di partenza. Infatti possono comparire valori negativi dei componenti, anche se tali valori non erano presenti inizialmente. Ciò implica che il procedimento di generazione precedente non garantisce che i circuiti equivalenti ottenuti siano dello stesso tipo di quello di partenza.

APPENDICE VII.B - Riferimenti bibliografici.

La base della teoria dei circuiti equivalenti sono gli articoli di W. Cauer, «Vierpole», *Elek. Nachr. Tech.*, Vol.6, n. 7, 1929 pp. 272-282 e di N. Howitt, «Group Theory and Electric Circuit», *Phys. Rev.*, Vol. 37, n. 12, 1931, pp. 1583-1595. Una discussione sui limiti di validità e sull'utilità di questa teoria può essere trovata nel Cap.5 di E.A. Guillemin, «Synthesis of passive networks», J. Wiley, 1957. Particolarmente abbondante è la letteratura tecnica sulla successiva tecnica dei circuiti equi-

valenti in modo continuo, introdotta da J.D. Schoeffler in «The synthesis of minimum sensitivity networks», IEEE Trans. on Circuit Theory, vol.11 giugno 1964, pp. 271-276. Si veda a questo proposito l'articolo di B.M.G. Chertham, «A new theory of continuously equivalent networks», IEEE Trans. on Circuit and Systems», Vol. 21, gennaio 1974, pp.17-20; la teoria è stata estesa successivamente al caso dei circuiti attivi. Si veda ad esempio L.G.Grant, J.I. Sewell, «A theory of equivalent active networks», Proc. ISCAS, 1976, Monaco (Rep. Fed. Tedesca), pp.497-500.

*

CAPITOLO VIII

ANALISI DEGLI EFFETTI DELLE VARIAZIONI DEI COMPONENTI E OTTIMIZZAZIONE DEI CIRCUITI

NO

VIII.1 - Effetto della variazione dei componenti e relativa misura.

Il problema dell'analisi di un circuito non esaurisce ciò che in pratica si vuole conoscere dello stesso in fase di progettazione e di utilizzazione. Infatti, da una parte i singoli componenti sono rappresentati solo approssimativamente dai loro modelli e dall'altra i valori che commercialmente assumono i parametri caratteristici dei componenti sono noti entro tolleranze assegnate. Inoltre è da tenere presente che per effetto della variazione delle condizioni ambientali e dell'invecchiamento, il valore iniziale dei componenti stessi è soggetto a cambiare. Ciò significa che il circuito da analizzare ha solo *nominalmente* la struttura assegnata. Di conseguenza la sua risposta è solo nominalmente quella che viene fornita dall'analisi. Da un punto di vista pratico è importante però sapere anche come la risposta si discosta al variare del valore dei componenti entro i campi prevedibili per le tolleranze e per altre cause. Ciò richiede di definire una grandezza atta a valutare quantitativamente l'effetto della variazione di un componente e successivamente di utilizzare le grandezze di questo tipo, definite per tutti i componenti, per valutare l'effetto globale.

La grandezza più usata a questo scopo è la sensibilità, definita come segue:

$$(VIII.1.1) \quad S_{(F)}^{(H)} = \frac{\frac{\partial H}{H}}{\frac{\partial F}{F}} = \frac{\partial \ln H}{\partial \ln F}$$

essendo H la funzione di rete d'interesse (funzione di trasferimento in tensione e corrente o immettenza) e F il valore del componente le cui variazioni si stanno considerando. È evidente che la sensibilità richiede, per essere definita, di precisare la funzione di rete d'interesse ed il componente con il relativo parametro di cui si considerano le variazioni. La sensibilità, inoltre, è legata direttamente alla derivata della funzione rispetto al parametro; infatti dalla (VIII.1.1) risulta:

$$(VIII.1.2) \quad \frac{\partial H}{\partial F} = S_{(F)}^{(H)} \cdot \frac{H}{F}$$

VIII.1.1 - Il teorema «bilineare».

Una formula assai utile per il calcolo della sensibilità si ottiene utilizzando il teorema seguente, noto come *teorema «bilineare»*.

Teorema VIII.1.1 - «Una qualsiasi funzione di rete H di un circuito lineare e permanente è esprimibile, in funzione dell'impedenza di un suo componente bipolare, mediante la seguente espressione bilineare:

$$(VIII.1.3) \quad H = \frac{Z_{th} H(0) + Z H(\infty)}{Z_{th} + Z}$$

in cui Z è l'impedenza del componente d'interesse; Z_{th} è l'impedenza che si ottiene applicando il teorema di Thevenin ai capi del componente d'interesse; $H(0)$ ed $H(\infty)$ rappresentano i valori che assume H quando il componente è sostituito rispettivamente da un corto-circuito e da un circuito aperto (ciò equivale a porre $Z = 0$ ovvero $Z = \infty$).

Per ragioni di spazio, limiteremo la dimostrazione al caso in cui la funzione di rete H sia una ammettenza (di ingresso o di trasferimento). Per gli altri tipi di funzione di rete si procede in modo del tutto simile, per cui si omette la relativa dimostrazione. Nel caso considerato si ha un'unica eccitazione coincidente con un generatore di tensione avente tensione impressa Q_e ed interessa come effetto una corrente Q_c . Utilizziamo il metodo di analisi su base maglie per determinare la funzione di rete d'interesse:

$$(VIII.1.4) \quad H = \frac{Q_e}{Q_c}$$

Senza perdita di generalità, scegliamo l'albero in modo che il generatore di tensione ed il bipolo d'impedenza Z siano rami del co-albero. Ciò implica che essi sono

componente di impedenza Z , dopo aver disattivato Q_c . Procedendo come nel caso della (VIII.1.5), si ottiene lo stesso sistema di equazioni, salvo che per il vettore dei termini noti, che ha uno zero al posto di Q_c ed ha V_g al posto dello zero nella r -esima componente. Perciò risulta:

$$(VIII.1.9) \quad I = V_g \frac{\Delta_{rr}}{\Delta(Z)} = \frac{\Delta_{rr} V_g}{\Delta_{rr} \cdot Z + \Delta(0)} = \frac{V_g}{Z + \frac{\Delta(0)}{\Delta_{rr}}}$$

L'esame della (VIII.1.9) ed il suo confronto con l'espressione della corrente che fluisce nel componente in base al teorema di Thevenin, permette di identificare Z_{th} con il termine $\Delta(0)/\Delta_{rr}$.

Osservazione VIII.1.1

Il teorema «bilineare» vale anche nel caso in cui, invece dell'impedenza di un bipolo, si consideri il parametro di controllo di un generatore controllato. In questo caso però risulta:

$$(VIII.1.10) \quad H = \frac{a + x b}{c + x d}$$

essendo x il parametro di controllo⁽¹⁾.

L'utilizzazione del teorema «bilineare» fornisce un metodo semplice per calcolare la sensibilità. Dalla (VIII.1.3), mediante calcolo diretto, si ha:

$$(VIII.1.11) \quad S_{(Z)}^{(H)} = Z_{th} \cdot Z \frac{H(\infty) - H(0)}{[Z_{th} + Z] [Z_{th} \cdot H(0) + Z \cdot H(\infty)]}$$

La formula (VIII.1.11) mette in evidenza una proprietà importante dei circuiti lineari e permanenti, cioè *la possibilità di calcolare la sensibilità senza bisogno di effettuare derivazioni, ma semplicemente tramite la determinazione di opportune funzioni di rete*. Tale punto verrà ulteriormente sviluppato nel § VIII.2, dove verrà descritto un metodo per il calcolo contemporaneo delle sensibilità di una funzione di rete rispetto a tutti i componenti.

(1) - Per la dimostrazione della (VIII.1.10) e per ulteriori dettagli riguardanti la dipendenza di H dal rapporto di trasformazione di un trasformatore ideale, dalla resistenza di girazione di un giratore, ecc., si veda K.Geher, «Theory of network tolerances», Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, pp. 25, 26, 27.

Esempio VIII.1.1

Determinare l'espressione delle sensibilità della funzione di trasferimento V_u/V_g di una rete a scala, rispetto alle impedenze dei rami longitudinali e trasversali.

La rete a scala è riportata in fig.VIII.1.1; essa costituisce una delle strutture più importanti dal punto di vista delle applicazioni.

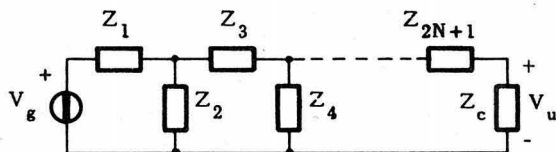


Fig.VIII.1.1 - Rete a scala.

Applichiamo la formula (VIII.1.11), considerando per primo il caso di una impedenza longitudinale Z_{2k+1} . Osserviamo che, quando $Z_{2k+1} = \infty$, risulta $V_u = 0$ e quindi $H(\infty) = 0$. Perciò si ha:

$$(VIII.1.12) \quad S_{(Z_{2k+1})}^{(H)} = - \frac{Z_{2k+1}}{Z_{th} + Z_{2k+1}}$$

Il valore di Z_{th} in questa formula va determinato come indicato in fig.VIII.1.2.

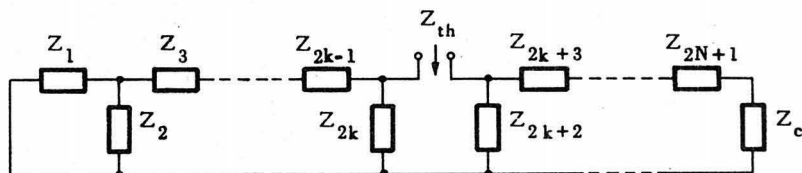


Fig.VIII.1.2 - Calcolo di Z_{th} per la determinazione della sensibilità rispetto alle impedenze longitudinali.

Nel caso dell'impedenza Z_{2k} di un ramo trasversale, osserviamo che, per $Z_{2k} = 0$, risulta $V_u = 0$ e quindi $H(0) = 0$. Perciò si ha:

$$(VIII.1.13) \quad S_{(Z_{2k})}^{(H)} = \frac{Z_{th}}{Z_{th} + Z_{2k}}$$

Il valore di Z_{th} in questo caso si calcola come indicato in fig.VIII.1.3.

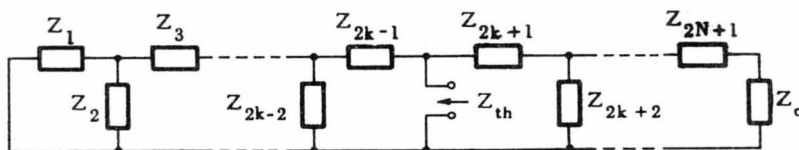


Fig. VIII.1.3 - Calcolo di Z_{th} per la determinazione della sensibilità rispetto alle impedenze trasversali.

VIII.2 - Sensibilità rispetto a tutti i componenti.

Quando occorre calcolare l'effetto delle variazioni dei componenti sulla risposta del circuito, è necessario determinare contemporaneamente le sensibilità rispetto a tutti i componenti. Sorge allora il problema di effettuare questa determinazione nel modo più accurato ed economico possibile. Per raggiungere questo scopo, occorre:

- 1) utilizzare formule che evitino il calcolo esplicito delle derivate presenti nella definizione di sensibilità;
- 2) evitare di dover analizzare il circuito tante volte quanti sono i componenti presenti.

Si può osservare che il metodo descritto precedentemente, ottenuto applicando il teorema « bilineare », soddisfa il primo obiettivo, evitando il calcolo esplicito delle derivate; tuttavia esso richiede l'analisi di molteplici circuiti che si ottengono in base alla formula (VIII.1.11). Tale metodo si presenta pertanto molto oneroso nei riguardi del secondo obiettivo.

I due obiettivi precedenti ^{pag. 63} si raggiungono contemporaneamente utilizzando il teorema di Tellegen; il metodo che ne deriva è estremamente vantaggioso, richiedendo, per il calcolo di tutte le sensibilità, l'analisi del circuito dato e inoltre l'analisi di un altro circuito, che prende il nome di « rete aggiunta ». Per tale motivo il metodo suddetto è conosciuto con il nome di metodo della rete aggiunta.

VIII.2.1 - Calcolo delle derivate con il metodo della rete aggiunta.

Per ragioni di spazio, sviluppiamo un solo caso, cioè quello di una funzione di trasferimento in tensione di un circuito contenente bipoli, generatori di corrente controllati in tensione e nullori; i bipoli consi-

derati sono generici, riservandoci di considerare, nel prossimo paragrafo, i casi particolari più importanti e cioè i casi del resistore, dell'induttore e del condensatore. Dal punto di vista applicativo, il caso considerato è il più importante, in quanto la funzione di trasferimento in tensione è quella che viene usualmente considerata ed il circuito contenente i suddetti componenti può rappresentare qualsiasi circuito reale, come messo in evidenza nel Cap.I.

Il circuito che consideriamo è del tipo schematicamente mostrato in fig.VIII.2.1, dove è presente la sola eccitazione (v_i) ed interessa la sola tensione v_u come risposta. Il bipolo generico in esso contenuto è rappresentato per mezzo della sua impedenza Z_k (con $k=1,2,\dots,N_z$, essendo N_z il numero dei bipoli); il generico generatore controllato è rappresentato tramite i due rami che lo costituiscono ed il parametro g_{mk} (con $k=1,2,\dots,N_g$, essendo N_g il numero dei generatori controllati); detto N_n il numero dei nullori, il generico di essi è rappresentato mediante i bipoli nullatore e noratore.

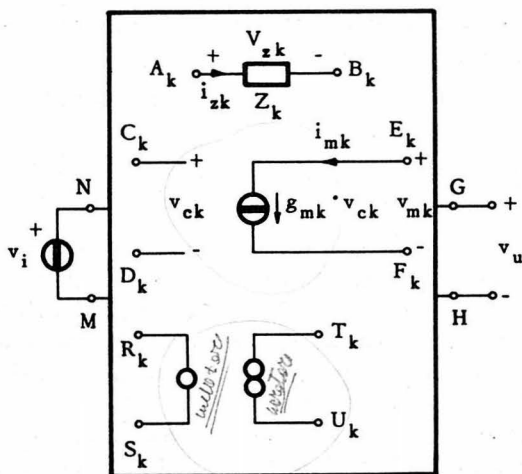


Fig.VIII.2.1 - Il circuito in esame per il calcolo delle sensibilità.

È stato detto in precedenza che utilizzeremo il teorema di Tellegen per determinare le sensibilità. Tale teorema stabilisce che, per due circuiti aventi lo stesso grafo orientato, il prodotto scalare del vettore correnti dell'uno per il vettore tensioni dell'altro risulta nullo. Nel paragrafo I.10.3, il teorema è stato enunciato nel caso di grandezze elettriche istantanee. Tenendo conto, però, della sua derivazione topologica, risulta evidente che esso *vale anche nel caso in cui le grandezze elettriche siano rappresentate mediante i fasori oppure le trasformate di La-*

place. È inoltre necessario osservare che sono rami del circuito anche eventuali circuiti aperti, ai capi dei quali interessa la tensione. Nel caso del circuito di fig. VIII.2.1, questa situazione si presenta per l'uscita e per i rami di controllo fra i nodi (C_k) e (D_k). Allo scopo di evitare il pericolo di dimenticare tali rami, conviene introdurre dei generatori di corrente fittizi al posto di essi, aventi correnti impresse uguali a zero, come mostrato in fig. VIII.2.2a). In fig. VIII.2.2b) viene quindi riportato un nuovo circuito avente uguale grafo e che deve essere considerato contemporaneamente a quello di fig. VIII.2.2a) per poter applicare il teore-

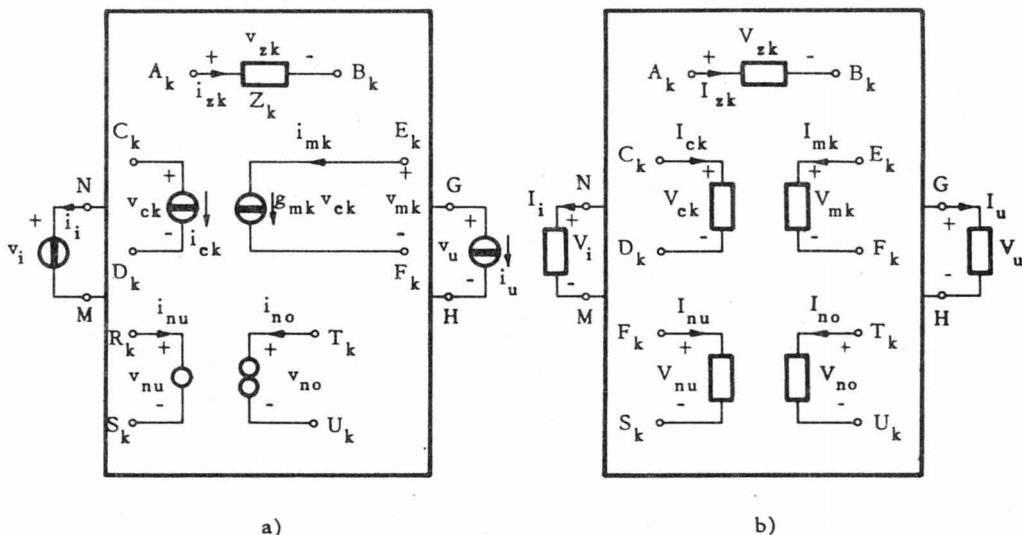


Fig. VIII.2.2 - Il circuito a) è quello in esame, con $i_{ck} = i_u = 0$; il circuito b) è un circuito avente grafo orientato uguale a quello in esame.

ma di Tellegen; tale nuovo circuito verrà inizialmente considerato del tutto generico, ponendo dei bipoli di natura imprecisata su ogni suo ramo. Per semplicità di notazione, indicheremo con lettere minuscole le grandezze elettriche del circuito a) e con le maiuscole quelle dello stesso ramo del circuito b); le grandezze corrispondenti hanno inoltre la stessa orientazione.

Detto N_r il numero dei rami, applicando il teorema di Tellegen ai due circuiti di fig. VIII.2.2, si ottengono le due seguenti relazioni:

$$(VIII.2.1) \quad \sum_{k=1}^{N_r} v_k i_k = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{N_r} V_k i_k = 0$$

(a) (b) (b) (a)

Supponiamo ora che il circuito a) subisca una perturbazione di tutti i suoi elementi; di conseguenza v_k risulterà cambiato in $v_k + \Delta v_k$ ed i_k in $i_k + \Delta i_k$. Applicando nuovamente il teorema di Tellegen a questo circuito ed al circuito b) si ha⁽¹⁾:

$$(VIII.2.2) \quad \sum_{k=1}^{N_r} (v_k + \Delta v_k) I_k = 0 ; \quad \sum_{k=1}^{N_r} V_k (i_k + \Delta i_k) = 0$$

da cui, per differenza e tenendo conto delle (VIII.2.1), si ha:

$$(VIII.2.3) \quad \sum_{k=1}^{N_r} (I_k \Delta v_k - V_k \Delta i_k) = 0$$

Sviluppiamo ora separatamente i vari termini che compaiono nella (VIII.2.3), tenendo presente l'obiettivo di far comparire in essa soltanto la variazione della grandezza elettrica d'interesse, cioè Δv_u e le variazioni dei valori dei componenti del circuito. Ciò richiederà la caratterizzazione opportuna della «rete aggiunta».

1) Termini relativi ai morsetti di ingresso e di uscita.

Tali termini sono i seguenti:

$$(VIII.2.4) \quad \boxed{I_i \Delta v_i} - \boxed{V_i \Delta i_i} + \boxed{I_u \Delta v_u} - \boxed{V_u \Delta i_u}$$

Tenendo conto che $\Delta v_i = 0$, essendo costante la tensione del generatore v_i , e che $\Delta i_u = 0$, essendo sempre nulla la corrente i_u , la (VIII.2.4) si semplifica nel modo seguente:

(VIII.2.5)

$$\boxed{-V_i \Delta i_i + I_u \Delta v_u}$$

L'obiettivo precisato inizialmente richiede che la (VIII.2.5) contenga Δv_u e che non sia presente Δi_i . Vediamo che otteniamo addirittura la coincidenza della (VIII.2.5) con:

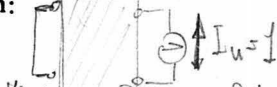
(VIII.2.6)

se scegliamo:

(VIII.2.7)

$$V_i = 0 ;$$

$$I_u = 1$$

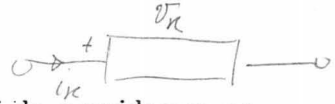


Rete aggiunta

(1) - Nel seguito supporremo gli incrementi Δv_k e Δi_k sufficientemente piccoli per poter trascurare i contributi del secondo ordine.

La (VIII.2.7) implica, per la rete aggiunta, il corto circuito tra i nodi N ed M e la presenza di un generatore di corrente impressa unitaria tra i nodi G ed H.

2) Termini relativi ai componenti bipolari.



Per il k-esimo componente bipolare i termini da considerare sono i seguenti:

$$(VIII.2.8) \quad I_{zk} \Delta v_{zk} - V_{zk} \Delta i_{zk}$$

Tenendo conto della relazione costitutiva del componente, si ha:

$$(VIII.2.9) \quad v_{zk} = Z_k i_{zk}$$

da cui, differenziando, si ha:

$$(VIII.2.10) \quad \Delta v_{zk} = i_{zk} \Delta Z_k + Z_k \Delta i_{zk}$$

Sostituendo la (VIII.2.10) nella (VIII.2.8) si ottiene:

$$(VIII.2.11) \quad i_{zk} I_{zk} \Delta Z_k + (Z_k I_{zk} - V_{zk}) \Delta i_{zk}$$

L'obiettivo preliminare che ci siamo proposti richiede l'eliminazione di Δi_{zk} e quindi la riduzione della (VIII.2.11) alla:

$$(VIII.2.12) \quad i_{zk} I_{zk} \Delta Z_k$$

Si perviene alla (VIII.2.12) imponendo:

$$(VIII.2.13) \quad Z_k I_{zk} = V_{zk}$$

ciò che implica che il bipolo k-esimo della rete aggiunta abbia impedenza Z_k come quello della rete di partenza.

3) Termini relativi ai generatori controllati.

Per il k-esimo generatore controllato i termini da considerare sono i seguenti:

$$(VIII.2.14) \quad I_{ck} \Delta v_{ck} - V_{ck} \Delta i_{ck} + I_{mk} \Delta v_{mk} - V_{mk} \Delta i_{mk}$$

Tenendo conto del legame imposto dal generatore controllato si ha:

(VIII.2.15)

$$i_{mk} = g_{mk} v_{ck}$$

da cui, differenziando, si ha:

(VIII.2.16)

$$\Delta i_{mk} = v_{ck} \Delta g_{mk} + g_{mk} \Delta v_{ck}$$

Sostituendo la (VIII.2.16) nella (VIII.2.14), tenendo conto che si ha anche $\Delta i_{ck} = 0$, si ottiene:

(VIII.2.17)

$$(I_{ck} - g_{mk} V_{mk}) \Delta v_{ck} + I_{mk} \Delta v_{mk} - v_{ck} V_{mk} \Delta g_{mk}$$

L'obiettivo preliminare che ci siamo proposti richiede l'eliminazione di Δv_{ck} e Δv_{mk} e quindi la riduzione della (VIII.2.17) alla:

(VIII.2.18)

$$-v_{ck} V_{mk} \Delta g_{mk}$$

Si perviene alla (VIII.2.18) imponendo:

(VIII.2.19)

$$I_{ck} = g_{mk} V_{mk} ; \quad I_{mk} = 0$$

ciò che implica che tra i nodi C_k, D_k, E_k, F_k della rete aggiunta sia posto un generatore di corrente controllato in tensione, con parametro di controllo uguale a quello del generatore controllato posto fra gli stessi nodi della rete di partenza, e con rami di controllo e controllato scambiati tra loro.

4) Termini relativi ai nullori.

Per il k-esimo nullore, i termini da considerare sono i seguenti:

(VIII.2.20)

$$I_{nu} \Delta v_{nu} - V_{nu} \Delta i_{nu} + I_{no} \Delta v_{no} - V_{no} \Delta i_{no}$$

Tenendo conto che il nullatore impone tensione e corrente nulla si ha $\Delta v_{nu} = 0$ e $\Delta i_{nu} = 0$; pertanto la (VIII.2.20) si riduce alla seguente espressione:

(VIII.2.21)

$$I_{no} \Delta v_{no} - V_{no} \Delta i_{no}$$

L'obiettivo preliminare che ci siamo proposti richiede l'eliminazione delle variazioni delle grandezze elettriche dalla (VIII.2.21) e quindi il suo annullamento. Si perviene a questo risultato, imponendo:

$$(VIII.2.22) \quad \boxed{I_{no} = 0}; \quad \boxed{V_{no} = 0}$$

ciò che implica un nullo tra i nodi R_k, S_k, T_k, U_k della rete aggiunta, disposto con il nullatore ed il noratore scambiati rispetto al modo in cui erano connessi nella rete di partenza.]

La discussione precedente mette in evidenza come una scelta opportuna dei componenti della rete di fig. VIII.2.2 b) permetta di raggiungere l'obiettivo di ottenere una relazione tra la variazione (Δv_u) della grandezza d'interesse e le variazioni dei valori di tutti i componenti presenti, cioè:

$$(VIII.2.23) \quad \Delta v_u = - \sum_{k=1}^{N_z} i_{zk} I_{zk} \Delta Z_k + \sum_{k=1}^{N_g} v_{ck} V_{mk} \Delta g_{mk}$$

La rete di fig. VIII.2.2 b) che ne risulta, prende il nome di «rete aggiunta» ed è così costituita (fig. VIII.2.3):

- 1) il bipolo d'ingresso è un corto-circuito;
- 2) il bipolo di uscita è un generatore di corrente avente corrente impressa unitaria, con verso positivo entrante nel nodo H;
- 3) il bipolo tra i nodi A_k e B_k coincide con quello corrispondente della rete di partenza, cioè ha impedenza Z_k ;
- 4) il bipolo tra E_k ed F_k è un circuito aperto; il bipolo tra C_k e D_k è un generatore di corrente, controllato dalla tensione del nodo E_k rispetto a quella del nodo F_k , con parametro di controllo uguale a quello del generatore corrispondente disposto tra gli stessi nodi della rete di partenza e con verso della corrente impressa positivo verso D_k ;
- 5) il bipolo tra i nodi T_k ed U_k è un nullatore;
- 6) il bipolo tra i nodi R_k ed S_k è un noratore.

L'espressione (VIII.2.23) rappresenta il differenziale totale della funzione $v_u(Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_z}, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{mN_g})$; pertanto, supponendo gli incrementi sufficientemente piccoli, è possibile ottenere le espressioni esplicite delle derivate parziali della tensione di uscita v_u in funzione di tutti gli elementi presenti nella rete. Si ottiene:

$$(VIII.2.24) \quad \frac{\partial v_u}{\partial Z_k} = -i_{zk} I_{zk}, \quad \text{con } k=1, 2, \dots, N_z$$

$$\frac{\partial v_u}{\partial g_{mk}} = v_{ck} V_{mk}, \quad \text{con } k=1, 2, \dots, N_g$$

È facile riconoscere i grandi vantaggi derivanti dall'uso del metodo descritto; infatti le espressioni (VIII.2.24) mostrano che tutte le derivate in questione possono essere ottenute in funzione delle grandezze elettriche di due soli circuiti: il circuito assegnato e la rete aggiunta.

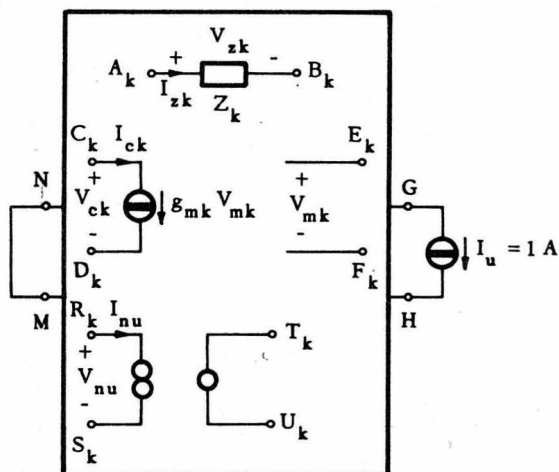


Fig. VIII.2.3 - Rete aggiunta relativa al circuito di fig. VIII.2.1.

Pertanto l'analisi completa degli effetti delle variazioni dei componenti può essere effettuata mediante l'analisi di due soli circuiti; tale analisi, d'altra parte, comporta un onere di calcoli pari a due volte quello relativo all'analisi del circuito assegnato. Infatti la rete aggiunta ha una complessità del tutto equivalente a quella del circuito che si sta considerando.

Le espressioni (VIII.2.24) possono essere facilmente utilizzate per la determinazione esplicita delle sensibilità, come verrà mostrato nel prossimo paragrafo.

VIII.2.2 - Determinazione delle sensibilità rispetto ai componenti con il metodo della rete aggiunta.

Nel presente paragrafo, utilizzando le espressioni esplicite delle derivate, date dalle (VIII.2.24), ricaveremo le formule per il calcolo delle sensibilità di una rete rispetto ai suoi componenti. Verrà considerato il caso dei resistori, degli induttori, dei condensatori e dei generatori controllati.

Detta H la funzione di trasferimento considerata, che nel nostro caso è pari a:

$$(VIII.2.25) \quad H = \frac{v_u}{v_i} \quad \text{è costante per ipotesi}$$

consideriamo il caso di un resistore di valore R_k . Si ha:

$$(VIII.2.26) \quad S_{(R_k)}^{(H)} = \frac{R_k}{H} \frac{\partial H}{\partial R_k} = \frac{R_k}{v_u} \left(\frac{\partial v_u}{\partial R_k} \right) \quad \begin{matrix} V_{Rk} / I_{Rk} \\ v_i \text{ è costante} \end{matrix} = - \frac{R_k I_{Rk} I_{Rk}}{v_u} = - \frac{R_k I_{Rk}^2}{v_u}$$

In base alla (VIII.2.24) si ottiene quindi l'espressione:

$$(VIII.2.27) \quad S_{(R_k)}^{(H)} = - \frac{v_{Rk} V_{Rk}}{R_k v_u} = - \frac{v_{Rk} I_{Rk}}{v_u} = - \frac{v_{Rk} \cdot V_{Rk}}{R_k v_u}$$

avendo indicato con v_{Rk} e con V_{Rk} le tensioni ai capi del resistore R_k nel circuito assegnato e nella rete aggiunta rispettivamente, come indicato nelle figg. VIII.2.4 a) e b).

Consideriamo ora il caso di una induttanza di valore L_k . Detta $Z_{Lk} = sL_k$ l'impedenza corrispondente, si ha:

$$(VIII.2.28) \quad S_{(L_k)}^{(H)} = \frac{L_k}{H} \frac{\partial H}{\partial L_k} = \frac{sL_k}{v_u} \frac{\partial v_u}{\partial (sL_k)} = \frac{sL_k}{v_u} \frac{\partial v_u}{\partial Z_{Lk}} = \frac{sL_k}{v_u} (-i I_{Lk} I_{Lk}) = - \frac{sL_k I_{Lk}^2}{v_u}$$

Pertanto, in base alla (VIII.2.24), si ottiene:

$$(VIII.2.29) \quad S_{(L_k)}^{(H)} = - \frac{v_{Lk} V_{Lk}}{sL_k v_u} = - \frac{v_{Lk} I_{Lk}}{sL_k v_u}$$

ove i simboli indicati hanno il significato illustrato nelle figg. VIII.2.4 a) e b).

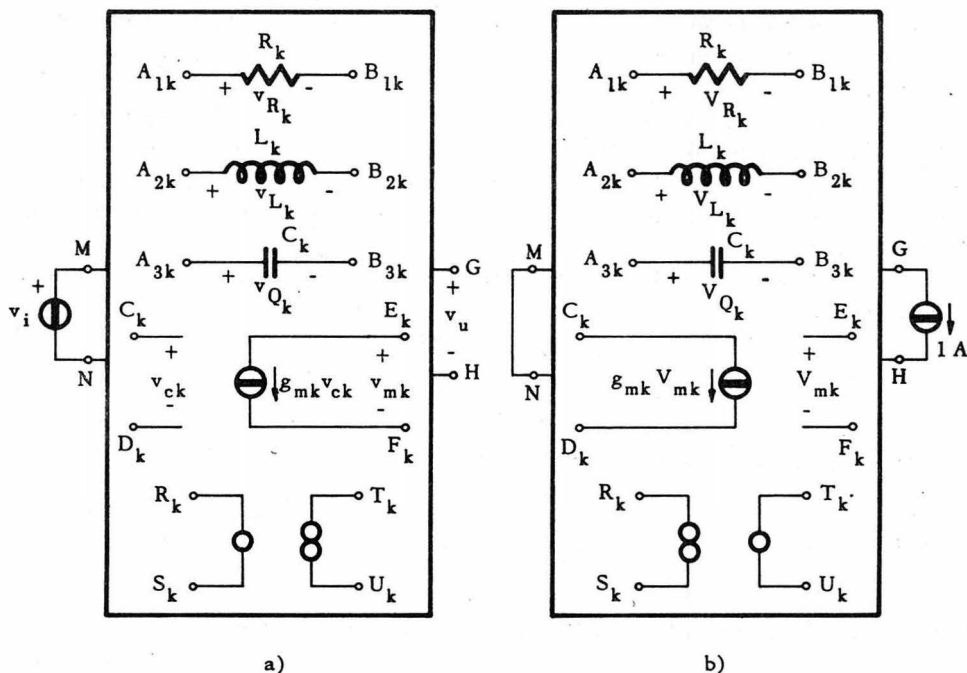


Fig. VIII.2.4 - Reti considerate per il calcolo della sensibilità rispetto ai componenti: a) rete assegnata; b) rete aggiunta.

La sensibilità rispetto alla capacità di un condensatore C_k , la cui impedenza Z_{C_k} è pari a $1/sC_k$, si ottiene osservando che:

$$(VIII.2.30) \quad S_{(C_k)}^{(H)} = \frac{C_k}{H} \frac{\partial H}{\partial C_k} = \frac{C_k}{v_u} \left[\frac{1}{C_k^2} \frac{\partial v_u}{\partial \frac{1}{C_k}} \right] = \frac{1}{sC_k} \frac{\partial v_u}{\partial Z_{C_k}}$$

Pertanto, in base alla (VIII.2.24), si ottiene:

$$(VIII.2.31) \quad S_{(C_k)}^{(H)} = \frac{v_{Q_k} V_{Q_k} s C_k}{v_u}$$

ove i simboli sono quelli riportati nelle figg. VIII.2.4a) e b).

Infine, nel caso dei generatori controllati, in base alla definizione di sensibilità e alla (VIII.2.24), si ottiene:

$$(VIII.2.32) \quad S_{(g_{mk})}^{(H)} = \frac{g_{mk}}{H} \frac{\partial H}{\partial g_{mk}} = \frac{v_{ck} V_{mk} g_{mk}}{v_u}$$

In conclusione il procedimento per la determinazione delle sensibilità della funzione di trasferimento in tensione rispetto al valore dei componenti di un circuito costituito da resistori, induttori, condensatori, generatori di corrente controllati in tensione e nullori consiste nei seguenti passi:

1) determinare, per il circuito assegnato, mostrato in fig.VIII.2.4a), le tensioni in uscita, ai capi dei resistori, condensatori, induttori e dei rami di controllo dei generatori controllati;

2) considerare un nuovo circuito (*la rete aggiunta*), ottenuto da quello assegnato alimentando l'uscita con un generatore di corrente da 1A, cortocircuitando l'ingresso, sostituendo ad ogni generatore controllato un altro generatore controllato dello stesso tipo e di uguale parametro di controllo, ma avente scambiati i rami di controllo e controllato ed infine, sostituendo ad ogni nullore un altro nullore avente scambiati i rami relativi al nullatore ed al noratore; nella rete aggiunta occorre mantenere, per le tensioni, le stesse convenzioni adottate per il circuito assegnato, come mostrato in fig.VIII.2.4b);

3) calcolare le sensibilità con le formule (VIII.2.27), (VIII.2.29), (VIII.2.31) e (VIII.2.32).

Il metodo precedente per calcolare le sensibilità ha i requisiti, richiesti all'inizio, di accuratezza e semplicità. Infatti non richiede calcoli di derivate e fornisce le sensibilità rispetto a tutti i componenti, mediante l'analisi di due soli circuiti.

Esempio VIII.2.1

Calcolare le sensibilità della funzione di trasferimento in tensione rispetto alle variazioni dei componenti, nel circuito di fig.VIII.2.5.

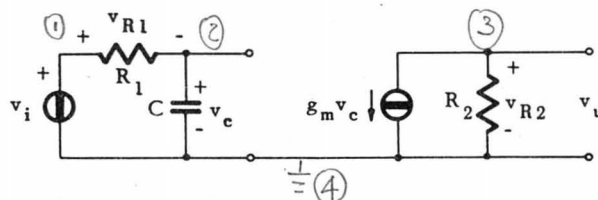


Fig.VIII.2.5 - Circuito considerato nell'esempio VIII.2.1.

$$\begin{aligned} V_i &= 1 \\ R_1 &= 10 \text{ k}\Omega \\ C &= 5 \mu\text{F} \\ g_m &= 3 \text{ mA/V} \\ R_2 &= 1 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Applichiamo il procedimento descritto passo per passo.

- 1) Calcolo della tensione di uscita e delle tensioni interne della rete.
Si ottiene:

$$v_{R_1} = \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} v_i ; \quad v_C = \frac{1}{sCR_1 + 1} v_i$$

$$v_u = v_{R_2} = - \frac{g_m R_2}{sCR_1 + 1} v_i$$

Si noti che la tensione sul condensatore, v_C , coincide con la tensione di controllo del generatore controllato.

2) La rete aggiunta è indicata in fig. VIII.2.6. Per tale rete si ottiene:

$$v_{R_1} = - \frac{g_m R_1 R_2}{sCR_1 + 1} ; \quad v_C = \frac{g_m R_1 R_2}{sCR_1 + 1}$$

$$v_{R_2} = v_m = - R_2$$

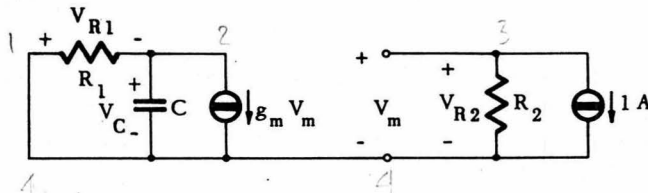


Fig. VIII.2.6 - Rete aggiunta relativa a quella di fig. VIII.2.5.

3) Applicando le formule (VIII.2.27), (VIII.2.31) e (VIII.2.32), si ottiene:

$$S_{(R_1)}^{(H)} = - \frac{-g_m \frac{R_1 R_2}{sCR_1 + 1} \cdot \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} v_i}{R_1 \cdot \left(- \frac{g_m R_2}{sCR_1 + 1} \right) v_i} = - \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1}$$

$$S_{(C)}^{(H)} = \frac{\frac{1}{sCR_1 + 1} v_i \cdot \frac{g_m R_1 R_2}{sCR_1 + 1} sC}{- \frac{g_m R_2}{sCR_1 + 1} v_i} = - \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1}$$

$$S_{(R_2)}^{(H)} = - \frac{v_u \cdot (-R_2)}{R_2 \cdot v_u} = 1$$

$$S_{(g_m)}^{(H)} = \frac{\frac{1}{sCR_1 + 1} v_i \cdot (-R_2) \cdot g_m}{\frac{g_m R_2}{sCR_1 + 1} v_i} = 1$$

VIII.2.3 - Invarianti di sensibilità. SI

Le sensibilità di una funzione di rete rispetto a tutti i componenti del circuito sono legate tra di loro da relazioni di tipo molto generale, che risultano invarianti rispetto alla struttura del circuito stesso e dipendono solo dal tipo di funzione di rete che si considera e, in particolare, dal fatto che si tratti di una funzione di rete con dimensione oppure no.

Consideriamo per primo il caso di una funzione di rete del tipo impedenza (di ingresso o di trasferimento). Tale impedenza, che indichiamo con Z , è funzione di tutti i componenti presenti e della variabile s (ovvero della pulsazione). Supponendo di limitare l'attenzione ai circuiti costituiti da resistori, induttori, condensatori, generatori di corrente controllati in tensione e nullori, l'impedenza Z è quindi funzione di R_k, L_k, C_k, g_{mk} . Poiché è importante avere uniformità dal punto di vista dimensionale per i parametri circuitali, esplicitiamo Z come funzione di $R_k, L_k, D_k = 1/C_k$ e $G_k = 1/g_{mk}$. Supponiamo ora di moltiplicare i parametri precedenti per una quantità λ ; è evidente che risulta moltiplicata per λ anche l'impedenza Z . Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \text{(VIII.2.33)} \quad Z(s, \lambda R_1, \lambda R_2, \dots, \lambda R_{N_R}, \lambda L_1, \lambda L_2, \dots, \lambda L_{N_L}, \lambda D_1, \lambda D_2, \dots, \\ \dots, \lambda D_{N_D}, \lambda G_1, \lambda G_2, \dots, \lambda G_{N_C}) = \\ \lambda Z(s, R_1, R_2, \dots, R_{N_R}, L_1, L_2, \dots, L_{N_L}, D_1, D_2, \dots, \\ \dots, D_{N_D}, G_1, G_2, \dots, G_{N_C}) \end{aligned}$$

Deriviamo ambedue i membri della (VIII.2.33) rispetto a λ . Si ha:

(VIII.2.34)

$$\sum_{k=1}^{N_R} \frac{\partial Z}{\partial \lambda R_k} \frac{\partial \lambda R_k}{\partial \lambda} + \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\partial Z}{\partial \lambda L_k} \frac{\partial \lambda L_k}{\partial \lambda} + \sum_{k=1}^{N_D} \frac{\partial Z}{\partial \lambda D_k} \frac{\partial \lambda D_k}{\partial \lambda} + \sum_{k=1}^{N_C} \frac{\partial Z}{\partial \lambda G_k} \frac{\partial \lambda G_k}{\partial \lambda} = Z$$

Dalla (VIII.2.34) si ottiene:

$$(VIII.2.35) \quad \sum_{k=1}^{N_R} \frac{\partial Z}{\partial \lambda R_k} \frac{R_k}{Z} + \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\partial Z}{\partial \lambda L_k} \frac{L_k}{Z} + \sum_{k=1}^{N_D} \frac{\partial Z}{\partial \lambda D_k} \frac{D_k}{Z} + \sum_{k=1}^{N_C} \frac{\partial Z}{\partial \lambda G_k} \frac{G_k}{Z} = \lambda$$

Ponendo $\lambda = 1$, si ha quindi:

$$(VIII.2.36) \quad \sum_{k=1}^{N_R} S_{(R_k)}^{(Z)} + \sum_{k=1}^{N_L} S_{(L_k)}^{(Z)} - \sum_{k=1}^{N_D} S_{(C_k)}^{(Z)} - \sum_{k=1}^{N_C} S_{(g_{mk})}^{(Z)} = 1$$

La (VIII.2.36) è la prima relazione invariante delle sensibilità ed è relativa ad una funzione di rete del tipo impedenza. Procedendo nello stesso modo, si trova che, nel caso di una funzione di rete H di tipo qualsiasi, si ha:

$$(VIII.2.37) \quad \sum_{k=1}^{N_R} S_{(R_k)}^{(H)} + \sum_{k=1}^{N_L} S_{(L_k)}^{(H)} - \sum_{k=1}^{N_D} S_{(C_k)}^{(H)} - \sum_{k=1}^{N_C} S_{(g_{mk})}^{(H)} = \epsilon$$

in cui: $\epsilon = 1$ se H ha le dimensioni di un'impedenza; $\epsilon = -1$ se H ha le dimensioni di un'ammettenza; $\epsilon = 0$ se H è adimensionale.

Relazioni di grande importanza pratica nell'analisi dei circuiti possono essere ottenute mediante procedimenti del tipo precedente. In particolare, si ottengono relazioni che legano le sensibilità al tempo di transito, come è già stato messo in evidenza nel cap. VI (osservazione VI.7.4). Per ulteriori dettagli si veda K. Geher, op. cit., § III.2 e P. Penfield, R. Spence, S. Duinker, «Tellegen's theorem», monografia del Massachusetts Institute of Technology.

Esempio VIII.2.2

Verificare la validità della (VIII.2.37) sulle sensibilità calcolate nell'esempio VIII.2.1.

Poiché in questo esempio la funzione di rete considerata è una funzione di trasferimento in tensione, il valore di ϵ della formula (VIII.2.37) è zero. Pertanto deve essere:

$$S_{(R_1)}^{(H)} + S_{(R_2)}^{(H)} - S_{(C)}^{(H)} - S_{(g_m)}^{(H)} = 0$$

Infatti, dai valori ottenuti nell'esempio VIII.2.1, si ha:

$$-\frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} + 1 + \frac{sCR_1}{sCR_1 + 1} - 1 = 0$$

VIII.3 - Analisi dell'effetto complessivo della variazione dei componenti.

L'individuazione delle sensibilità della funzione di rete, rispetto alle variazioni dei valori dei componenti, ci fornisce il legame tra la variazione relativa della funzione e le variazioni relative dei valori dei componenti, sotto l'ipotesi che tali variazioni siano piccole. Questa ipotesi, d'altra parte, è sempre accettabile, in quanto lo scopo dell'analisi che facciamo è quello di verificare che la variazione della funzione di rete sia entro limiti accettabili.

Il legame in questione è il seguente:

$$(VIII.3.1) \quad \frac{\Delta H}{H} = \sum_{k=1}^N S_{(F_k)}^{(H)} \cdot \frac{\Delta F_k}{F_k}$$

Variazioni Relative

in cui H è la funzione di rete considerata, F_k è il valore del suo k -esimo componente ed N è il numero complessivo dei componenti.

I dati di partenza sono le leggi di variazione dei valori (F_k) e la conoscenza delle sensibilità ($S_{(F_k)}^{(H)}$) calcolate, ad esempio, con il metodo sviluppato nel paragrafo precedente. A partire da questi dati, si tratta di determinare la legge di variazione di (H) e stabilire, se possibile, dei limiti sulle tolleranze dei componenti in modo che $\Delta H/H$ rimanga entro limiti preassegnati con una certa probabilità.

Per stabilire questi limiti, occorre distinguere il caso in cui il circuito è senza memoria, e quindi la funzione di rete e le sensibilità sono quantità reali, da quello più comune in cui il circuito è con memoria ed è analizzato con il metodo dei fasori. In quest'ultimo caso interessano separatamente le variazioni del modulo e dell'argomento di H , per cui la (VIII.3.1) diviene:

$$(VIII.3.2) \quad \frac{\Delta |H|}{|H|} = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} [S_{(F_k)}^{(H)}] \cdot \frac{\Delta F_k}{F_k}$$

$$\Delta \{ \operatorname{Arg} [H] \} = \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} [S_{(F_k)}^{(H)}] \cdot \frac{\Delta F_k}{F_k}$$

In ambedue i casi si ottiene una quantità variabile, legata alla funzione di rete, che risulta una combinazione lineare delle variazioni relative dei componenti. Possiamo riunire in una sola espressione le precedenti, come segue:

$$(VIII.3.3) \quad \rho = \sum_{k=1}^N a_k \frac{\Delta F_k}{F_k}$$

La soluzione del problema di individuare i limiti da assegnare alle tolleranze dei componenti per mantenere entro variazioni accettabili la funzione di rete, può essere ottenuta in vari modi. Ne descriveremo brevemente di seguito i tre più usati, rimandando per ulteriori dettagli a testi specializzati⁽¹⁾.

VIII.3.1 Analisi statistica.

Le variazioni relative $\Delta F_k / F_k$ possono considerarsi variabili statistiche, caratterizzate da una propria legge di probabilità, dipendente dal processo di fabbricazione. Si ricorda che una variabile statistica reale x è caratterizzata dalla propria funzione densità di probabilità $p(x)$, che fornisce facilmente qual'è la probabilità che la variabile cada in un certo intervallo di valori; precisamente detto $[x_1, x_2]$ tale intervallo, si ha:

$$(VIII.3.4) \quad P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

In particolare deve essere:

$$(VIII.3.5) \quad P(-\infty, \infty) = 1$$

Quantità globali caratteristiche associate alla variabile statistica sono il suo valore medio x_0 e la sua varianza σ , definite da:

$$(VIII.3.6) \quad x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad \text{Valore medio}$$

$$(VIII.3.7) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 p(x) dx \quad \text{varianza}$$

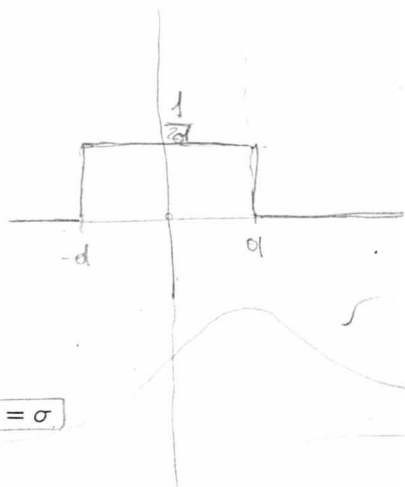
Le funzioni densità di probabilità che è sufficiente considerare nel caso presente sono quella uniforme e quella gaussiana; tali funzioni sono definite nel modo seguente:

(1) - Si veda ad esempio: K. Geher, op. cit. pp. 78-82.

densità di probabilità uniforme:

$$(VIII.3.8) \quad \begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2d} & |x| &\leq d \\ p(x) &= 0 & |x| &> d \end{aligned}$$

con $x_0 = 0$ e $\sigma^2 = \frac{d^2}{3}$



densità di probabilità gaussiana a valor medio nullo:

$$(VIII.3.9) \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{varianza} = \sigma^2$$

Nella maggior parte dei casi, le variazioni relative dei valori dei componenti $\Delta F_k / F_k$ possono considerarsi delle variabili statistiche aventi densità di probabilità uniforme; ciascuna di esse è caratterizzata da una propria varianza pari a σ_k^2 .

La quantità ρ , invece, può essere considerata come una variabile gaussiana, in quanto è una combinazione lineare di più variabili statistiche; l'approssimazione è tanto maggiore quanto maggiore è il numero N dei componenti⁽¹⁾. Il valor medio di ρ è nullo, in quanto sono nulli i valori medi delle variazioni relative dei componenti; la sua varianza vale, con riferimento alla (VIII.3.3):

$$(VIII.3.10) \quad \sigma_\rho^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2 \sigma_k^2$$

Tenendo conto della (VIII.3.9) si può calcolare la probabilità che ρ sia superiore, in valore assoluto, ad un valore prefissato ϵ ; tale probabilità vale:

$$(VIII.3.11) \quad \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\epsilon/\sigma_\rho} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] \quad u = \frac{x}{\sigma}$$

La funzione (VIII.3.11) è disponibile nella letteratura tecnica⁽¹⁾. In particolare si ha una probabilità dell'un per cento per $\epsilon \approx 2,5\sigma_\rho$ e dell'uno permille per $\epsilon \approx 3,3\sigma_\rho$.

(1) - Si veda un qualsiasi testo di probabilità e statistica.

Le espressioni (VIII.3.10) e (VIII.3.11) permettono di risolvere il problema dell'analisi dell'effetto delle tolleranze dei componenti sulla funzione di rete di un circuito. Infatti, con il metodo descritto nel paragrafo precedente, siamo in grado di calcolare le sensibilità della funzione di rete rispetto a tutti i componenti e quindi le quantità a_k della formula (VIII.3.3). Dalla conoscenza del processo di fabbricazione, conosciamo i valori d_k delle (VIII.3.8) e quindi delle varianze σ_k^2 . Pertanto, tramite la (VIII.3.10) possiamo determinare σ_ρ ed infine dalla formula (VIII.3.11) possiamo valutare, per ogni valore ϵ , qual'è la probabilità che ρ superi ϵ .

Un caso particolare importante è quello in cui le tolleranze sono uguali per tutti i componenti, cioè $d_k = d$; dalla (VIII.3.8) e (VIII.3.10), risulta:

$$(VIII.3.12) \quad \sigma_\rho^2 = \frac{d^2}{3} \sum_{k=1}^N a_k^2$$

In tale caso, accettando uno scarto dell'uno per cento:

$$(VIII.3.13) \quad \epsilon = \frac{2,5}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{k=1}^N a_k^2 \cdot d}$$

La (VIII.3.13) fornisce quindi il valore di ρ non superato per più dell'uno per cento dei casi, per un circuito costituito da componenti aventi una tolleranza d .

È interessante analizzare, nella (VIII.3.13), come cresce il valore ϵ con il numero dei componenti. Se le quantità a_k , dipendenti dalle sensibilità, sono all'incirca di uguale valore, allora ϵ cresce con la radice quadrata di N . Se invece c'è un valore di a_k dominante, il valore di ϵ tende a dipendere solo da questo ed a dipendere poco da N . In ogni caso è da tenere presente che la formula precedente vale se N è sufficientemente grande (maggiore di 5). Nel caso di N piccolo si può utilizzare il metodo del caso peggiore, che tratteremo nel § VIII.3.3.

Osservazione VIII.3.1

Il metodo dell'analisi statistica è particolarmente utile nel caso che i componenti siano numerosi. Un caso tipico di applicazione è quello dei circuiti integrati. In questo caso però è lontana dalla realtà l'ipotesi di variazioni dei componenti statisticamente indipendenti. Infatti è insita nel processo di fabbricazione una correlazione fra i vari componenti. Di tale correlazione si può tenere conto, complicando la trattazione precedente. Si rimanda per dettagli su questo punto a testi specializzati⁽¹⁾.

(1) - Si veda ad esempio K. Geher, op. cit., pp. 77-82.

VIII.3.2 - Analisi con il metodo Monte Carlo. NO

La determinazione delle proprietà statistiche della funzione di rete a partire dalla conoscenza del circuito e dalle proprietà statistiche dei componenti, può essere effettuata con precisione con il metodo Monte Carlo. Questo metodo consiste nell'effettuare l'analisi del circuito in un numero considerevole di casi, facendo assumere ai componenti valori opportuni, entro i loro limiti di variazione stabiliti dalle tolleranze. È evidente che il vantaggio principale del metodo è l'esattezza delle informazioni che si possono ottenere sul legame tra la variazione della funzione di rete e le variazioni dei componenti. Lo svantaggio principale è l'impegno di calcoli richiesto. Il problema principale che bisogna risolvere è quello della scelta dei valori da assegnare ai componenti e del numero dei casi da considerare. L'impegno di calcoli può essere ridotto drasticamente utilizzando il fatto che i vari circuiti da analizzare differiscono di poco, come viene fatto ad esempio nell'ambito dell'algoritmo di Branin-Wang⁽¹⁾.

VIII.3.3 - Analisi con il metodo del caso peggiore. SI

Il metodo più semplice per trattare il problema della determinazione dell'effetto delle tolleranze dei componenti è quello di individuare le variazioni massime e minime della funzione di rete. Tali variazioni corrispondono evidentemente alla situazione peggiore che si può verificare per il circuito in esame.

Con riferimento alla (VIII.3.3) ed indicando con $(\Delta F_k / F_k)_{\min}$ e $(\Delta F_k / F_k)_{\max}$ la minima e massima variazione relativa del componente k-esimo, si ha:

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \sum_{k=1}^{N_p} a_k^{(p)} \left(\frac{\Delta F_k^{(p)}}{F_k^{(p)}} \right)_{\max} + \sum_{k=1}^{N_n} a_k^{(n)} \left(\frac{\Delta F_k^{(n)}}{F_k^{(n)}} \right)_{\min} \\ \rho_{\min} &= \sum_{k=1}^{N_n} a_k^{(n)} \left(\frac{\Delta F_k^{(n)}}{F_k^{(n)}} \right)_{\max} + \sum_{k=1}^{N_p} a_k^{(p)} \left(\frac{\Delta F_k^{(p)}}{F_k^{(p)}} \right)_{\min} \end{aligned} \quad \text{(VIII.3.14)}$$

in cui con gli indici p ed n si indicano rispettivamente i componenti aventi la quantità a_k positiva ovvero negativa e con N_p ed N_n si indica il loro numero.

(1) - Si veda ad esempio F.K.Kuo, W.G. Magnuson, «Computed oriented circuit design», Prentice-Hall, 1969, pp. 99-101.

Nel caso particolare in cui la variazione minima del valore dei componenti sia uguale in ampiezza e di segno contrario alla variazione massima, cioè quando $(\Delta F_k / F_k)_{\max} = -(\Delta F_k / F_k)_{\min} = d_k$, le (VIII.3.14) si riducono a:

(VIII.3.15)

$$\rho_{\max} = -\rho_{\min} = \sum_{k=1}^N |a_k| d_k$$

Una ulteriore semplificazione si ha nel caso importante in cui le tolleranze sono le stesse per tutti i componenti; precisamente la formula (VIII.3.15) diviene:

(VIII.3.16)

$$\rho_{\max} = -\rho_{\min} = d \sum_{k=1}^N |a_k|$$

È interessante analizzare, nella (VIII.3.16), la dipendenza di $\rho_{\max}$ e $\rho_{\min}$ da N . Vediamo che se le quantità a_k sono all'incirca di uguale ampiezza, $\rho_{\max}$ e $\rho_{\min}$ crescono proporzionalmente ad N . Inoltre, se una quantità a_k è dominante, la sua influenza è molto meno marcata che nel caso del metodo statistico. Da queste considerazioni si deduce che il metodo del caso peggiore è conveniente nel caso di N piccolo, quando del resto non è usabile il metodo statistico.

Esempio VIII.3.1

Per il circuito considerato nell'esempio VIII.2.1 calcolare le variazioni massima e minima del modulo della funzione di trasferimento in tensione nelle seguenti ipotesi:

- 1) I valori dei componenti sono: $R_1 = R_2 = 100$, $C = 10^{-6}$ (Ω , F);
- 2) La frequenza è pari a: $f = 1000$ Hz;
- 3) Le tolleranze dei componenti sono tutte pari all'un per cento.

Nel caso presente occorre utilizzare la prima delle (VIII.3.2). Pertanto si ha:

$$H = \frac{v_u}{v_i} ; \quad \rho = \frac{\Delta |H|}{|H|} ; \quad a_k = \operatorname{Re} [S_{(F_k)}^{(H)}] ; \quad d = 0,01$$

Effettuando i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [S_{(R_1)}^{(H)}] &= \operatorname{Re} [S_{(C)}^{(H)}] = \operatorname{Re} \left[-\frac{s C R_1}{s C R_1 + 1} \right] \bigg|_{s=j\omega} = \operatorname{Re} \left[-\frac{j \omega C R_1}{j \omega C R_1 + 1} \right] = \\ &= -\frac{\omega^2 C^2 R_1^2}{\omega^2 C^2 R_1^2 + 1} = -\frac{(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \cdot 100)^2}{(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \cdot 100)^2 + 1} = -\frac{(0,628)^2}{(0,628)^2 + 1} = -0,28 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Re} [S_{R_2}^{(H)}] = \operatorname{Re} [S_{g_m}^{(H)}] = 1}$$

Pertanto i valori di a_k sono i seguenti:

$$a_1 = -0,28 \quad ; \quad a_2 = -0,28 \quad ; \quad a_3 = 1 \quad ; \quad a_4 = 1$$

Utilizzando la (VIII.3.16) si ha:

$$\left(\frac{\Delta |H|}{|H|} \right)_{\max} = - \left(\frac{\Delta |H|}{|H|} \right)_{\min} = 0,01 (0,28 + 0,28 + 1 + 1) = 0,0256.$$

Quindi la variazione massima e minima del modulo della funzione di trasferimento è uguale al 2,56 percento. L'uso del metodo del caso peggiore è giustificato dalla presenza di solo quattro componenti.

W0 Fmo L34

VIII.3.4 - Analisi automatica: programma VAR.

Nella grande maggioranza dei casi, per la mole dei calcoli richiesti, la determinazione dell'effetto delle variazioni dei componenti sulla funzione di rete può essere effettuata esclusivamente per mezzo del calcolatore numerico. Per questo motivo, nel seguito, verrà dato un esempio di programma di calcolo adatto a tale scopo, del quale verrà fornito lo schema a blocchi. Il metodo seguito consiste nella determinazione delle sensibilità rispetto ai componenti, utilizzando il metodo della rete aggiunta, che, come è stato detto nel § VIII.2.2, presenta particolari requisiti di accuratezza e semplicità; successivamente verrà determinato l'effetto complessivo sulla funzione di rete, utilizzando il metodo statistico (descritto nel § VIII.3.1) e il metodo del caso peggiore (descritto nel § VIII.3.3).

Per ragioni di semplicità e poiché lo scopo è solo quello di dare un'idea del modo di procedere, la trattazione verrà limitata a:

- 1) *Circuiti senza memoria*; in base a tale limitazione i componenti presenti nel circuito sono solo resistori, generatori di corrente controllati in tensione e nullori. Tale limitazione permette di escludere ogni dipendenza dalla frequenza, sia per le grandezze elettriche sia per le sensibilità.
- 2) *Funzioni di trasferimento in tensione*; in base a tale limitazione è presente nella rete un solo generatore indipendente di tensione ed inoltre devono essere indicati i nodi relativi ai morsetti di uscita.

3) *Variazioni dei componenti a distribuzione statistica di tipo uniforme e caratterizzate dai valori d_k delle tolleranze.* Pertanto le formule utilizzate per valutare l'effetto complessivo delle tolleranze dei componenti sulla funzione di rete sono le seguenti (derivanti dalla VIII.3.13 e e VIII.3.15):

$$\epsilon = \epsilon_0 \sqrt{\sum_{k=1}^N a_k^2 d_k^2} \quad \text{nel metodo statistico} \quad (\text{VIII.3.17})$$

$$\rho = \sum_{k=1}^N |a_k| d_k \quad \text{nel metodo del caso peggiore}$$

ove:

$$a_k = S_{(F_k)}^{(H)} ;$$

$$H = \frac{v_u}{v_i} ;$$

$$F_k = \begin{matrix} R_k \\ g_{mk} \end{matrix} ;$$

$$\epsilon = \Delta H / H ;$$

$$\rho = (\Delta H / H)_{\max} = - (\Delta H / H)_{\min} .$$

ϵ_0 è una quantità che dipende da qual'è la probabilità che la variazione relativa di H per il circuito realizzato superi in valore assoluto il valore di ϵ (ad esempio nel caso che tale probabilità sia dell'1% si ha $\epsilon_0 = 2,5/3$).

Trattandosi di una rete senza memoria, l'analisi verrà effettuata per mezzo del programma NODI, descritto nel § 7 del Cap. II. Tale programma verrà utilizzato due volte, la prima per analizzare la rete assegnata, la seconda per analizzare la rete aggiunta.

Lo schema a blocchi a grandi linee del programma VAR è

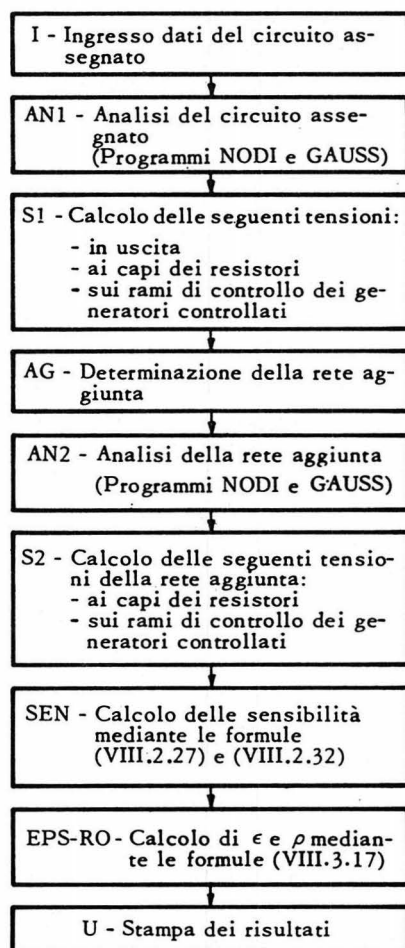


Fig. VIII.3.1 - Schema a blocchi a grandi linee del programma VAR.

riportato in fig.VIII.3.1. Di seguito viene fornita una descrizione dettagliata di ciascun blocco, utilizzando, ove necessario, degli schemi a blocchi più dettagliati.

Blocco I.

In tale blocco vengono assegnati i dati di ingresso del programma. Tali dati sono in gran parte gli stessi previsti dal programma NODI, con le seguenti modifiche:

- 1) per ogni componente, deve essere assegnata la relativa tolleranza; pertanto, detto NR il numero dei resistori, occorre assegnare un vettore $DR(K)$, $K = 1, 2, \dots, NR$ delle relative tolleranze ed inoltre, detto NCT il numero dei generatori di corrente controllati in tensione, occorre assegnare un vettore $DCT(K)$, $K = 1, 2, \dots, NCT$ delle relative tolleranze;
- 2) il numero dei generatori indipendenti di tensione deve essere solo uno; pertanto, detto NT tale numero, deve essere $NT = 1$; il valore di tale generatore $T(1)$ è arbitrario;
- 3) deve essere nullo il numero NC dei generatori indipendenti di corrente;
- 4) devono essere assegnati i nodi corrispondenti ai morsetti di uscita, relativi alla tensione VU; tali nodi devono inoltre essere distinti in quello positivo (NUPOS) e in quello negativo (NUNEG).

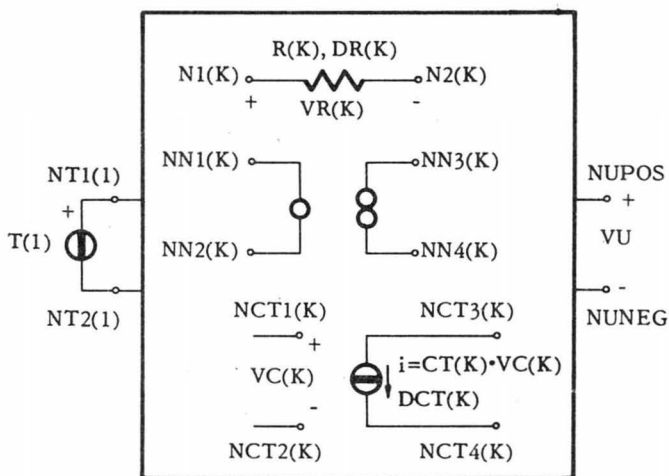


Fig.VIII.3.2 - Circuito considerato nel programma VAR; accanto ad ogni componente è indicato il relativo valore e la relativa tolleranza.

In fig. VIII.3.2 viene indicata schematicamente la rete generica considerata nel programma VAR, con l'indicazione dei simboli usati.

Blocco AN1.

Tale blocco, utilizzando i programmi NODI e GAUSS, descritti nel Cap. II, effettua l'analisi su base nodi del circuito assegnato. Detto N il numero dei nodi, escluso il nodo di riferimento, tali programmi effettuano il calcolo di un vettore $B(K)$, $K = 1, 2, \dots, N$ i cui elementi rappresentano le tensioni di ciascun nodo della rete rispetto al nodo di riferimento. Viene inoltre calcolato un ulteriore elemento di tale vettore e precisamente $B(ND)$, ove $ND = N + 1$; tale elemento è pari alla corrente nel generatore di tensione; esso non verrà utilizzato nel seguito.

Blocco S1.

Tale blocco effettua il calcolo della tensione di uscita VU , delle tensioni ai capi dei resistori, $VR(K)$, $K = 1, 2, \dots, NR$, e delle tensioni sui rami di controllo dei generatori controllati, $VC(K)$, $K = 1, 2, \dots, NCT$. Con riferimento ai simboli indicati in fig. VIII.3.2, lo schema dettagliato di tale blocco è indicato in fig. VIII.3.3.

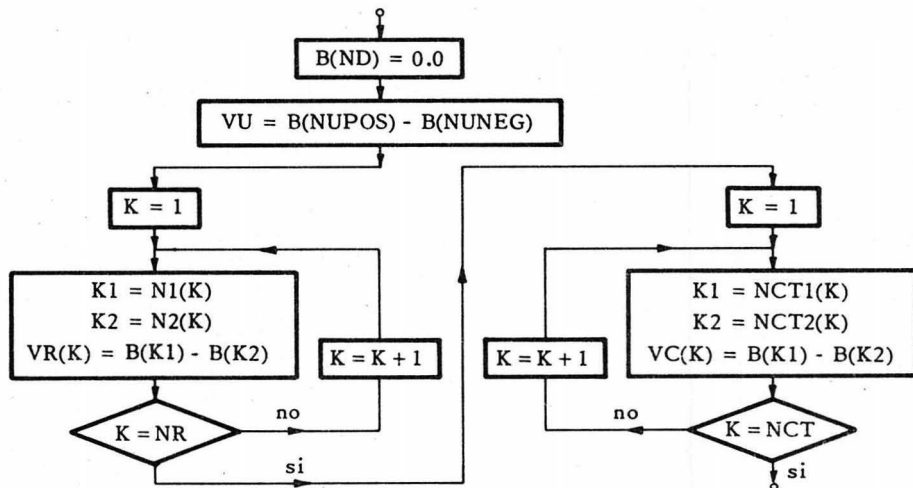


Fig. VIII.3.3 - Schema dettagliato del blocco S1 di fig. VIII.3.1.

Blocco AG.

Tale blocco effettua la determinazione della rete aggiunta a partire dai dati del circuito assegnato. Le operazioni necessarie a tale scopo sono le seguenti:

- 1) Disattivazione del generatore di tensione; ciò equivale a porre in corto-circuito i morsetti di ingresso della rete. Ciò si può ottenere ponendo $T(1) = 0$;
- 2) Attivazione di un generatore di corrente di valore unitario connesso fra i morsetti di uscita; ciò si può ottenere ponendo il numero dei generatori indipendenti di corrente NC uguale ad uno, assegnando a tale generatore un valore $C(1) = 1$ e infine ponendo $NC1(1) = NUNEG$ e $NC2(1) = NUPOS$;
- 3) Scambio dei morsetti di controllo con quelli controllati nei generatori dipendenti; ciò si può ottenere scambiando tra di loro i vettori $NCT1(K)$ e $NCT3(K)$ ed i vettori $NCT2(K)$ e $NCT4(K)$, con $K = 1, 2, \dots, NCT$;
- 4) Scambio dei morsetti corrispondenti ai nullatori con quelli corrispondenti ai noratori; ciò si ottiene scambiando tra di loro i vettori $NN1(K)$ e $NN3(K)$ ed i vettori $NN2(K)$ e $NN4(K)$, con $K = 1, 2, \dots, NN$.

Lo schema dettagliato del blocco AG è riportato in fig. VIII.3.4.

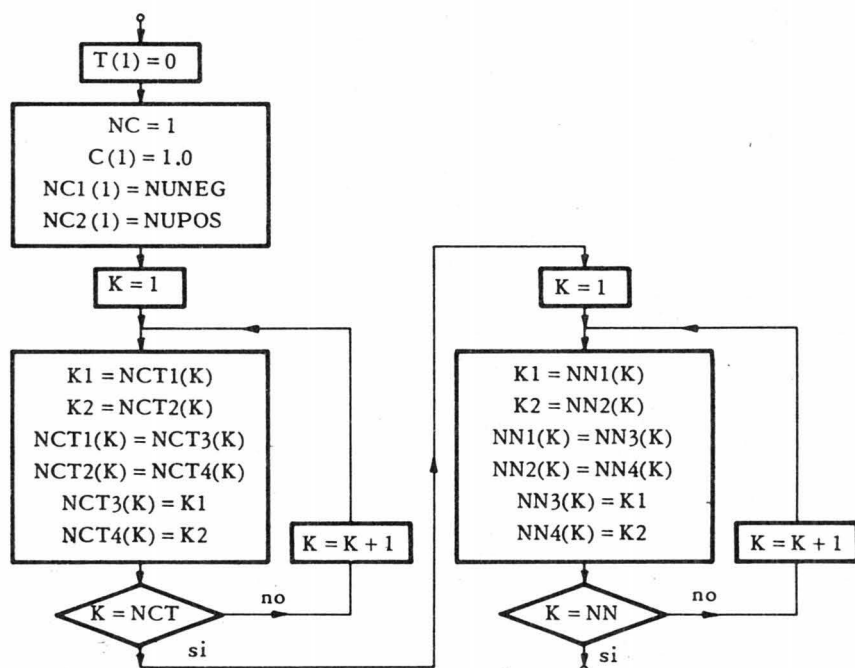


Fig. VIII.3.4 - Schema dettagliato del blocco AG di fig. VIII.3.1.

Blocchi AN2 e S2.

Tali blocchi sono del tutto analoghi ai blocchi AN1 e S1, salvo che si riferiscono alla rete aggiunta. Il primo di essi utilizzando nuovamente i programmi NODI e GAUSS analizza la rete aggiunta su base nodi; il secondo, utilizzando uno schema simile a quello di fig. VIII.3.3, effettua il calcolo delle tensioni sui resistori e sui rami di controllo dei generatori controllati, per la rete aggiunta. Tali quantità verranno indicate mediante i vettori $VRA(K)$, $K = 1, 2, \dots, NR$ e $VM(K)$, $K = 1, 2, \dots, NCT$, rispettivamente.

Blocco SEN.

Tale blocco effettua il calcolo delle sensibilità della funzione di rete H rispetto ai componenti; esso non presenta alcuna difficoltà, poiché le quantità necessarie sono state tutte determinate nei blocchi precedenti. Dette perciò $SR(K)$, $K = 1, 2, \dots, NR$ le sensibilità rispetto ai resistori e $SCT(K)$, $K = 1, 2, \dots, NCT$ le sensibilità rispetto ai generatori controllati, lo schema dettagliato del presente blocco, ottenuto sulla base delle formule (VIII.2.27) e (VIII.2.32), è riportato in figura VIII.3.5.

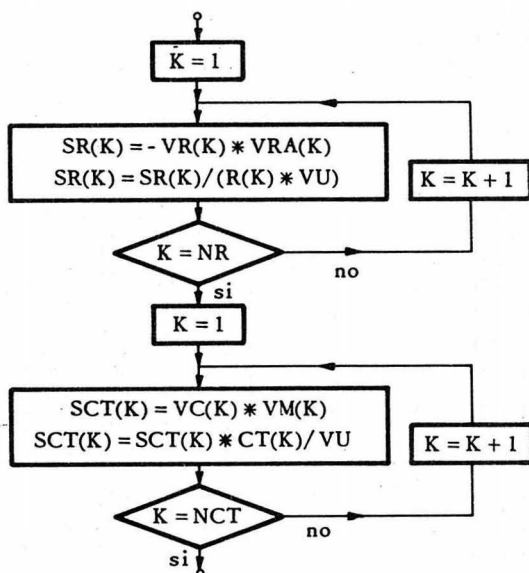


Fig. VIII.3.5 - Schema dettagliato del blocco SEN di fig. VIII.3.1.

Blocco EPS-RO.

Tale blocco effettua il calcolo dei parametri ϵ e ρ , in base alle formule (VIII.3.17); il valore ϵ_0 che compare in tale formula è scelto in base alla probabilità di scarto del circuito realizzato, cioè alla probabilità che la variazione in valore assoluto della funzione di rete di tale circuito rispetto al valore nominale superi la tolleranza massima accettabile. Il diagramma dettagliato, che non presenta alcuna difficoltà, è riportato in fig. VIII.3.6.

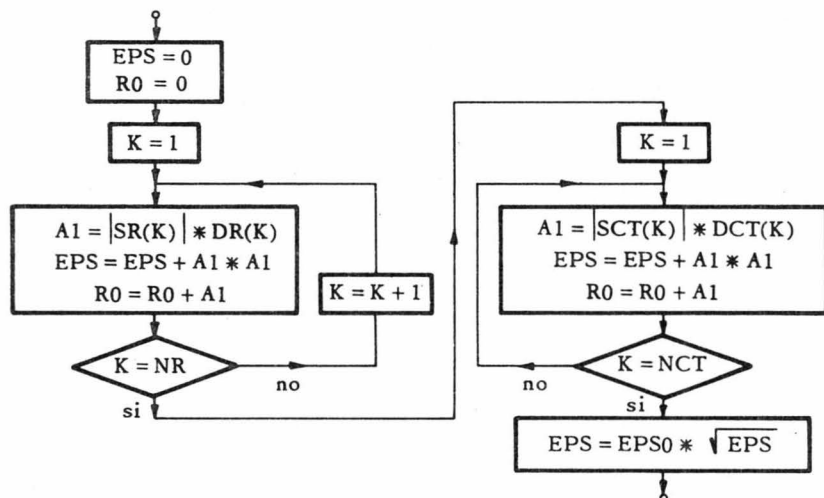


Fig. VIII.3.6 - Schema dettagliato del blocco EPS-RO di fig. VIII.3.1.

Blocco U.

Tale blocco effettua la stampa dei dati d'interesse della rete. Tali dati, oltre alle tensioni sui vari componenti, sono le sensibilità e le grandezze ϵ e ρ .

VIII.4 - Ottimizzazione delle prestazioni di un circuito.

Lo schema finale di un circuito, che soddisfi le specifiche assegnate, si ottiene mediante un procedimento logico di progetto del tipo di quello mostrato schematicamente nella figura 1 della premessa al presente testo. Da questa figura vediamo che il primo passo del progetto è quello di ottenere uno schema iniziale del circuito, utilizzando un op-

portuno procedimento di sintesi, basato su modelli semplificati dei componenti. Tale schema iniziale, tuttavia, non soddisfa nella maggior parte dei casi le specifiche assegnate. Di conseguenza occorre intervenire ulteriormente per migliorare le prestazioni del circuito con un procedimento iterativo che consiste, in linea generale, nei seguenti passi:

- 1) nell'analizzare il circuito ottenuto;
- 2) nel valutare le prestazioni di tale circuito mediante il calcolo di una opportuna quantità positiva (*funzione obiettivo*);
- 3) nel variare i suoi parametri liberi, cioè i valori dei suoi componenti, in modo sistematico, ottenendo un nuovo circuito, avente prestazioni migliori.

La prima operazione può essere effettuata utilizzando i metodi sviluppati nei capitoli precedenti. Per le altre due operazioni, si tratta di precisare il modo con cui ottenere la funzione obiettivo ed i metodi per variare in modo sistematico i valori dei componenti in modo da migliorare le prestazioni.

Per quanto riguarda la funzione obiettivo, occorre tenere presente che con essa si devono valutare in modo quantitativo le prestazioni del circuito; più precisamente essa permette di esprimere numericamente di quanto il circuito si discosta dalle specifiche assegnate. In generale, le prestazioni che interessano sono:

- 1) *la realizzazione di una funzione di rete secondo un andamento assegnato*. Usualmente le specifiche di tale funzione riguardano il dominio dei fasori e quindi il comportamento della funzione in un intervallo di frequenze assegnato;
- 2) *la complessità del circuito*, con particolare riferimento al numero di componenti costosi, alla sua integrabilità, ecc.;
- 3) *la dispersione del valore dei componenti*;
- 4) *le tolleranze richieste ai componenti*, misurate attraverso le sensibilità della funzione di rete rispetto ai componenti stessi;
- 5) *il consumo di potenza*, se nel circuito vi sono componenti attivi, che richiedono di essere polarizzati;
- 6) *il rumore introdotto*;
- 7) *la distorsione non-lineare della risposta*.

Per ragioni di spazio, limitiamo la trattazione solo alla prima prestazione. In questo caso, detta $H(\omega)$ la funzione di rete realizzata

dal circuito ed $H_0(\omega)$ la funzione assegnata dalle specifiche, le funzioni obiettivo più usate sono le seguenti due⁽¹⁾:

errore quadratico medio:

$$(VIII.4.1) \quad EQM = \int_{\omega_1}^{\omega_2} W(\omega) |H_0(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega$$

in cui ω_1 ed ω_2 sono gli estremi dell'intervallo delle pulsazioni d'interesse e $W(\omega)$ è la funzione peso; tale funzione peso, sempre positiva, ha lo scopo di variare l'importanza della risposta lungo l'intervallo di frequenze d'interesse. In molti casi, l'errore quadratico medio viene valutato su un numero discreto di pulsazioni, cioè:

$$(VIII.4.2) \quad EQM = \sum_{i=1}^M W_i |H_0(\omega_i) - H(\omega_i)|^2$$

deviazione massima:

$$(VIII.4.3) \quad DM = \max_{\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2} \{W(\omega) \cdot |H_0(\omega) - H(\omega)|\}$$

Per quanto riguarda il modo sistematico di variare i componenti al fine di migliorare le prestazioni del circuito, osserviamo che esso consiste nel ricercare il minimo della funzione obiettivo, considerata come funzione del valore dei componenti stesi. Detta pertanto E la funzione obiettivo ed F_k il valore del k -esimo componente (con $k = 1, 2, \dots, N$), occorre considerare la funzione di più variabili $E(F_1, F_2, \dots, F_N)$; introducendo il vettore $\mathbf{F}$ avente come componente k -esima il valore F_k , tale funzione può essere indicata in modo più compatto con la notazione $E(\mathbf{F})$. Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione E nell'intorno di un suo punto $\mathbf{F}_0$. Si ha:

$$(VIII.4.4) \quad E(\mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F}) = E(\mathbf{F}_0) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial E}{\partial F_k} \right)_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_0} \cdot \Delta F_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 E}{\partial F_k \partial F_j} \right)_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_0} \cdot \Delta F_k \cdot \Delta F_j + \dots = E(\mathbf{F}_0) + \nabla E^t \cdot \Delta\mathbf{F} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{F}^t [\mathbf{S}] \Delta\mathbf{F} + \dots$$

(1) - La funzione di rete è, nel dominio dei fasori, una quantità complessa; può essere perciò considerata sia parzialmente (parte reale, parte immaginaria, modulo, argomento), sia complessivamente.

in cui: ∇E è il gradiente della funzione obiettivo rispetto al valore dei componenti, calcolato in corrispondenza a F_0 , cioè:

$$(VIII.4.5) \quad \nabla E(K) = \left(\frac{\partial E}{\partial F_K} \right)_{F=F_0}$$

ed $[S]$ è la matrice Hessiana della funzione obiettivo rispetto al valore dei componenti, in corrispondenza al punto F_0 , cioè:

$$(VIII.4.6) \quad S(K, J) = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial F_K \cdot \partial F_J} \right)_{F=F_0}$$

È evidente che, se F_0 corrisponde ad un punto di minimo, si ha:

$$(VIII.4.7) \quad E(F_0 + \Delta F) > E(F_0)$$

qualunque sia ΔF . Pertanto, in base alla (VIII.4.4), si ottiene la seguente proprietà:

Proprietà VIII.4.1 - «In corrispondenza ad un punto di minimo, il gradiente della funzione obiettivo è nullo e la matrice Hessiana $[S]$ è una matrice definita positiva⁽¹⁾».

Questa proprietà è la base della maggior parte dei metodi di ottimizzazione, cioè dei procedimenti sistematici per variare i valori dei componenti fino a raggiungere il minimo della funzione obiettivo.

Nel seguito descriveremo uno dei più semplici di tali metodi, con lo scopo soprattutto di mettere in evidenza la natura dei procedimenti di ottimizzazione, rimandando per gli altri alla letteratura tecnica, come precisato nei riferimenti bibliografici.

VIII.4.1 - Il metodo del gradiente.

Il metodo del gradiente si basa sull'osservazione che la massima variazione della funzione obiettivo, nello spazio dei valori dei componenti, si ottiene lungo la direzione del gradiente ∇E . In particolare, si ha una diminuzione della funzione obiettivo se ci spostiamo nel ver-

(1) - Si ricorda che una matrice $[S]$ è definita positiva se, qualunque sia il vettore x , risulta:

$$x^t [S] x > 0$$

so di $-\nabla E$. Tenendo conto di questa proprietà, risulta immediato organizzare un procedimento di ottimizzazione a partire da un valore $\mathbf{F}_1$ del vettore dei componenti, nel modo seguente:

- 1) Calcolare il gradiente ∇E nel punto $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$; tale gradiente sia ∇E_1 ,
- 2) Variare il valore dei componenti nel seguente modo:

$$(VIII.4.8) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \alpha \nabla E_1$$

individuando il valore del parametro positivo α , in modo da rendere massima la riduzione della funzione obiettivo. Sia α_1 tale valore. Quindi il nuovo valore di $\mathbf{F}$ è il seguente:

$$(VIII.4.9) \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \alpha_1 \nabla E_1$$

- 3) Applicare ripetutamente i passi 1) e 2), individuando nuovi valori del vettore $\mathbf{F}$ in corrispondenza ai quali la funzione obiettivo è via via minore.

Dall'esame del procedimento suddetto, risulta chiaro che l'applicazione del metodo del gradiente richiede l'uso dei seguenti due algoritmi:

- 1) un algoritmo per il calcolo del gradiente della funzione obiettivo;
- 2) un algoritmo per la minimizzazione della funzione $E(\mathbf{F})$ quando $\mathbf{F}$ varia secondo la legge (VIII.4.8); in tal caso la funzione obiettivo dipende dall'unico parametro α e pertanto quest'ultimo problema consiste nella minimizzazione di una funzione di una sola variabile.

Esaminiamo in dettaglio i due algoritmi nei prossimi paragrafi, tenendo presente che, per la mole dei calcoli richiesti e per la natura iterativa del procedimento, la loro applicazione è possibile esclusivamente mediante l'uso di mezzi automatici di calcolo.

VIII.4.2 - Calcolo del gradiente della funzione obiettivo nel caso della funzione di trasferimento in tensione.

Il calcolo del gradiente della funzione obiettivo rispetto ai componenti di una rete dipende, ovviamente, sia dal tipo di funzione di rete considerata, sia dal tipo di funzione obiettivo. Nel caso presente considereremo il caso in cui la funzione di rete è rappresentata dal modulo della funzione di trasferimento in tensione, mentre la funzione obiettivo coincide con la EQM, definita nella (VIII.4.2). Tale caso particolare è

tra i più importanti dal punto di vista delle applicazioni ed inoltre costituisce un esempio da seguire nel caso di situazioni diverse.

Con riferimento alla fig. VIII.4.1, sia:

$$(VIII.4.10) \quad H(j\omega) = |v_u(j\omega)|_{v_i=1}$$

mentre la funzione obiettivo sia la seguente:

$$(VIII.4.11) \quad E = \sum_{k=1}^M W_k [|v_u(j\omega_k)| - T_k]^2$$

ove T_k rappresenta il valore richiesto per il modulo della funzione di trasferimento alla pulsazione ω_k .

La componente j -esima del gradiente è pari alla derivata della funzione E rispetto al valore F_j del componente j -esimo. Quindi, derivando la (VIII.4.11) rispetto a F_j , si ha:

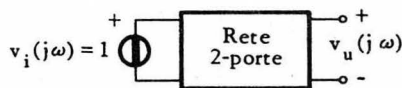
$$(VIII.4.12) \quad \frac{\partial E}{\partial F_j} = \sum_{k=1}^M W_k \frac{\partial}{\partial F_j} \{ [v_u(j\omega_k) \cdot v_u^*(j\omega_k)]^{1/2} - T_k \}^2 =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^M \left\{ W_k \frac{|v_u(j\omega_k)| - T_k}{|v_u(j\omega_k)|} \cdot \operatorname{Re} \left[v_u^*(j\omega_k) \frac{\partial v_u(j\omega_k)}{\partial F_j} \right] \right\}$$

in cui l'asterisco indica il complesso coniugato della quantità a cui è applicato.

Fig. VIII.4.1 - La funzione di rete d'interesse è:

$$\frac{v_u(j\omega)}{v_i(j\omega)}$$



Dalla (VIII.4.12) si deduce l'importante proprietà, secondo la quale il gradiente della funzione obiettivo può essere calcolato direttamente a partire dalle derivate della funzione di rete rispetto al valore dei componenti. D'altra parte le suddette derivate possono essere calcolate in modo esplicito, utilizzando il metodo della rete aggiunta, descritto nel § VIII.2.1. In particolare, con riferimento ad un circuito del tipo indicato in fig. VIII.2.4a), la cui rete aggiunta è mostrata in fig. VIII.2.4b), si ottengono le seguenti espressioni esplicite per le derivate rispetto ai valori dei componenti (ricavate dalle formule VIII.2.24):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_u}{\partial R} &= - \frac{v_R V_R}{R^2} \\
 \frac{\partial v_u}{\partial L} &= j \frac{v_L V_L}{\omega L^2} \\
 \text{(VIII.4.13)} \quad \frac{\partial v_u}{\partial C} &= j \omega v_Q V_Q \\
 \frac{\partial v_u}{\partial g_m} &= v_c V_m
 \end{aligned}$$

Le formule (VIII.4.13), insieme alle (VIII.4.12), permettono di risolvere il problema della determinazione del gradiente della funzione obiettivo; il metodo che ne deriva è adatto ad essere applicato su calcolatore numerico. Nella figura (VIII.4.2) è riportato il diagramma a blocchi a grandi linee di un possibile programma adatto a tale scopo. Esso consiste in due successive analisi in regime permanente, per tutte le frequenze d'interesse, della rete assegnata; tali analisi sono seguite dall'applicazione delle formule ricavate nel presente paragrafo.

VIII.4.3 - Minimizzazione della funzione obiettivo nella direzione del gradiente.

La minimizzazione della funzione obiettivo E viene effettuata lungo la direzione in

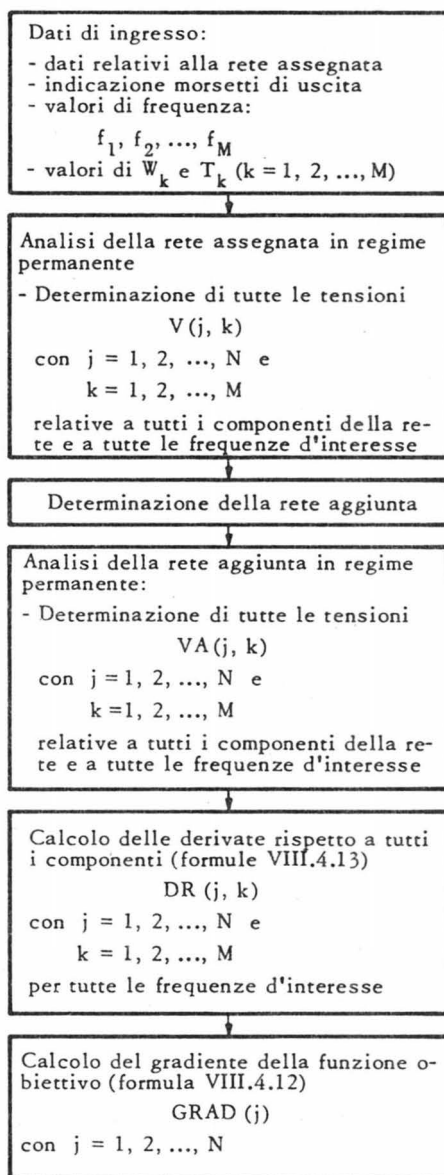


Fig. VIII.4.2 - Schema a blocchi a grandi linee di un programma di calcolo del gradiente con il metodo della rete aggiunta, per una rete contenente N componenti ed effettuando i calcoli per M valori di frequenza.

cui essa varia più rapidamente, cioè lungo il suo gradiente nello spazio dei valori dei componenti. Perciò detto F_0 il punto iniziale da cui procedere per la minimizzazione e detto G il gradiente della funzione obiettivo E in questo punto, il problema è quello di determinare il valore positivo di α per il quale la funzione $E(F_0 - \alpha G)$ è minima. Tale problema è classificato fra i problemi di ottimizzazione in una sola variabile e risulta molto più semplice del problema iniziale, nel quale è richiesta l'ottimizzazione in N variabili, nello spazio dei valori dei componenti.

L'idea di base per minimizzare la funzione obiettivo E al variare di α consiste nel calcolare tale funzione per diversi valori del parametro, in modo da ottenere le informazioni utili per determinarne il minimo. È necessario tenere presente che, ogni volta in cui si calcola la funzione E in un punto α_0 , ciò corrisponde ad effettuare una analisi completa della rete, con i valori dei componenti corrispondenti al valore α_0 , al fine di determinarne la funzione obiettivo. È pertanto evidente che i metodi di ottimizzazione più efficaci sono quelli che necessitano il calcolo della funzione E in un numero piccolo di punti; da tale punto di vista i metodi migliori sono quelli di *Fibonacci*⁽¹⁾ e quello della *sezione aurea*⁽²⁾, per i quali si rimanda alla letteratura tecnica.

Nel caso presente, tuttavia, descriveremo un altro metodo, più semplice concettualmente, che consiste nello scegliere un valore α_0 iniziale, positivo e sufficientemente piccolo e nel calcolare successivamente il valore della funzione E nei punti $\alpha = \alpha_0, \alpha = 2\alpha_0, \alpha = 4\alpha_0, \dots, \alpha = 2^K \alpha_0$, fino ad individuare l'indice K tale per cui:

$$(VIII.4.14) \quad E(F_0 - 2^{K-1} \alpha_0 G) < E(F_0 - 2^K \alpha_0 G)$$

Poichè, per le proprietà del gradiente la funzione E risulta decrescente per piccoli valori di α , il minimo cercato si trova nel seguente intervallo:

$$(VIII.4.15) \quad 2^{K-2} \alpha_0 \leq \alpha \leq 2^K \alpha_0$$

come messo in evidenza nella fig. VIII.4.3, ove sono evidenziati i due possibili andamenti della funzione $E(\alpha)$.

Detti $\alpha_1 = 2^{K-2} \alpha_0$, $\alpha_2 = 2^{K-1} \alpha_0$, $\alpha_3 = 2^K \alpha_0$ i tre valori della variabile α considerati nell'intorno del minimo e E_1, E_2, E_3 i tre valori della funzione negli stessi punti, la posizione del minimo può esse-

(1) - Si veda ad esempio: D.J. Wilde, «Optimum seeking methods», Prentice-Hall, 1964.

(2) - Si veda ad esempio: F.K. Kuo, W. Magnuson, op.cit., pp. 226-228.

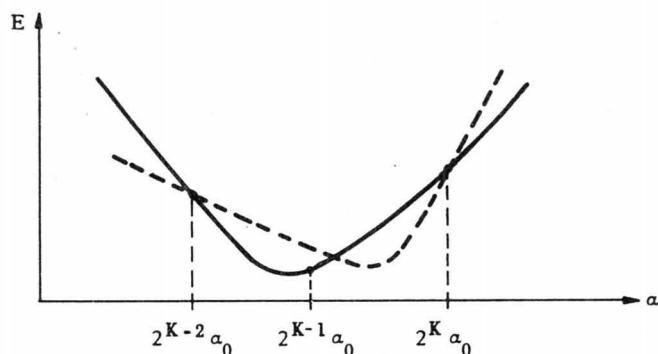


Fig. VIII.4.3 - Possibili andamenti della funzione $E(a)$ nell'intorno del minimo.

re ottenuta interpolando la funzione $E(a)$ per mezzo di una parabola. Ciò si ottiene ponendo:

$$(VIII.5.16) \quad E(a) = a^2 + b a + c$$

e risolvendo il seguente sistema lineare:

$$(VIII.5.17) \quad \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Il valore minimo si ha quindi per $a = a_m$, con:

$$(VIII.5.18) \quad a_m = -b/(2a)$$

Il metodo descritto può essere adoperato esclusivamente per mezzo dell'elaboratore numerico; il programma di calcolo provvede a calcolare più volte la funzione obiettivo E effettuando ciascuna volta l'analisi della rete. Per effettuare i calcoli, tale programma deve possedere il vettore gradiente nel punto iniziale, per cui deve essere preceduto dal programma descritto nel paragrafo precedente. Inoltre è necessario assegnare anche il valore a_0 ; tale valore deve essere considerato come un dato di ingresso, poichè non è indicata alcuna procedura per calcolarlo. In effetti la scelta di a_0 rappresenta il punto critico di tutto il metodo qui descritto; infatti, se viene scelto troppo piccolo, risulta necessario ripetere un numero eccessivo di volte il calcolo della funzione obiettivo per ottenere l'intervallo di minimo; se troppo grande, otterremo subito, alla prima determinazione, un valore della funzione obietti-

vo maggiore di quello di partenza, rendendo impossibile l'applicazione del procedimento. Naturalmente le due eventualità possono essere previste nel programma, sia limitando il numero massimo dei valori di α previsti, sia verificando che la prima determinazione dia luogo ad un valore di E minore di E_0 .

Osservazione VIII.4.1

Il metodo precedentemente indicato, per la determinazione del minimo della funzione obiettivo lungo la direzione del gradiente, è stato semplificato al massimo evitando di descrivere i numerosi accorgimenti e miglioramenti proposti nella letteratura tecnica, al fine di migliorarne la convergenza e di evitare difficoltà di tipo numerico.

Un aspetto importante riguarda i valori dei componenti, che possono differire anche di molti ordini di grandezza fra di loro; tali differenze possono rendere non efficace il programma, in quanto sarebbe necessario agire con variazioni diverse a seconda del valore di ciascun parametro. Un modo per ovviare a ciò è quello di usare i logaritmi naturali dei valori dei componenti invece dei valori stessi; un altro accorgimento è quello di normalizzare preventivamente i valori della frequenza e dei componenti, in modo da avere valori dello stesso ordine di grandezza. Ciò risulta necessario per eliminare le inevitabili differenze di valori che si hanno in ogni circuito reale, ad esempio, fra i valori dei resistori e quelli dei condensatori.

VIII.4.4 - Aspetto locale dell'ottimizzazione.

La funzione obiettivo ha un andamento estremamente complesso, anche nel caso di circuiti relativamente semplici, per cui usualmente sono presenti numerosi punti di minimo. I metodi di ottimizzazione permettono solo di raggiungere il punto di minimo che si trova più vicino al punto iniziale. In ciò consiste «l'aspetto locale dell'ottimizzazione». Tale comportamento dei metodi di ottimizzazione ne costituisce la limitazione più grave, in quanto non sussiste alcuna garanzia che il minimo locale sia quello assoluto ed il progetto corrispondente può risultare del tutto insoddisfacente. L'unico modo che abbiamo a disposizione per raggiungere il minimo assoluto è quello di scegliere il punto iniziale vicino ad esso. Ciò richiede di avere a disposizione valori per i componenti vicini a quelli ottimali, ciò che può essere ottenuto solo mediante procedimenti accurati di sintesi. È quindi chiaro che *il successo dei metodi di ottimizzazione è sempre vincolato alla disponibilità di procedimenti di sintesi accurati e completi.*

L'esistenza di numerosi minimi locali nei problemi di ottimizzazione circuitale può essere illustrata mediante un esempio tratto dal testo F.F.Kuo e G.Magnuson,

op. cit., che riguarda il semplice equalizzatore di fig. VIII.4.4. Con tale circuito si vuole ottenere il seguente guadagno in tensione in funzione della frequenza:

$$G_0(\omega) = 5 + 5 \cdot 10^{-6} f$$

Supponendo che interessi l'intervallo di frequenza:

$$10^6 \leq f \leq 2 \cdot 10^6 \quad (\text{Hz})$$

si considera come funzione obiettivo:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{21} [G(\omega_i) - G_0(\omega_i)]^2$$

in cui:

$$\omega_i = 2 \pi f_i \quad ;$$

$$f_i = 5 \cdot 10^4 (19 + i) \quad ;$$

$$G(\omega) = 10 \log_{10} \left| \frac{v_u}{v_i}(j\omega) \right|^2 =$$

$$= 10 \log_{10} \left[\frac{R^2}{R_1^2} \frac{(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)^2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2} \right]$$

Applicando un opportuno metodo di ottimizzazione, essendo variabili R_1, R_2, C_1, C_2 e supponendo di normalizzare le resistenze rispetto ad R e le frequenze rispetto a 10^6 Hz, si ottengono i risultati riportati in tab. VIII.4.1 al variare del valore iniziale dei componenti.

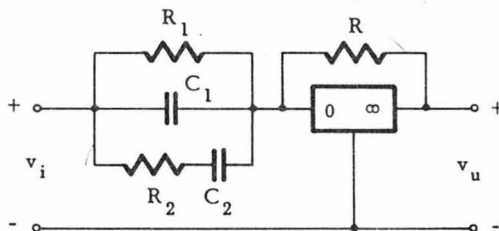


Fig. VIII.4.4 - Circuito considerato per illustrare l'aspetto locale dei procedimenti di ottimizzazione circuitale.

L'esame della tabella mette in evidenza in modo molto chiaro come piccole variazioni del punto iniziale si ripercuotono in notevoli variazioni del valore finale della funzione obiettivo e quindi in definitiva sulla bontà del progetto del circuito d'interesse.

Tabella VIII.4.1 - Applicazione di un procedimento di ottimizzazione al circuito di fig.VIII.4.1 con vari punti iniziali.

	Valore iniziale dei componenti				Valore finale dei componenti				Valore finale di ϵ
	C_1	C_2	R_1	R_2	C_1	C_2	R_1	R_2	ϵ
1°	$\frac{0,5}{2\pi}$	$\frac{0,5}{2\pi}$	0,5	0,5	0,16016	0,15969	0,3282	0,25006	5,06
2°	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	1	1	0,30155	0,15590	0,81785	0,31239	$1,5 \cdot 10^{-4}$
3°	$\frac{1,5}{2\pi}$	$\frac{1,5}{2\pi}$	1,5	1,5	0,42766	0,34110	1,1844	1,5541	$2,08 \cdot 10^{-2}$

*

APPENDICI AL CAPITOLO VIII

APPENDICE VIII.A - *Uso della tecnica dei circuiti equivalenti in modo continuo per l'ottimizzazione della sensibilità⁽¹⁾.*

Nel Cap.VII è stata esaminata in dettaglio la possibilità di ottenere circuiti equivalenti dal punto di vista esterno. È evidente che i vari circuiti, anche se equivalenti nel senso detto, differiscono da altri punti di vista. In particolare, nel presente paragrafo, vogliamo applicare questa osservazione alla determinazione del circuito che ha la migliore prestazione dal punto di vista della sensibilità alla variazione del valore dei componenti in una famiglia di circuiti equivalenti. A questo scopo si presta particolarmente bene la tecnica dei circuiti equivalenti in modo continuo, sviluppata nel § VII.A. Limitiamo la trattazione solo ai circuiti costituiti da induttori, condensatori e resistori, rimandando per dettagli su altri circuiti, in particolare quelli contenenti componenti attivi, alla letteratura tecnica.

Nel caso di un circuito contenente induttori, condensatori e resistori, la formula (VII.A.3), che fornisce il modo per generare i circuiti equivalenti in funzione di una variabile ausiliaria v , diviene:

$$(VIII.A.1) \quad \frac{d}{dv} \left\{ [G] + s[C] + \frac{1}{s} [\Gamma] \right\} = [B]^t \left\{ [G] + s[C] + \frac{1}{s} [\Gamma] \right\} + \left\{ [G] + s[C] + \frac{1}{s} [\Gamma] \right\} [B]$$

in cui $[G]$ è la matrice delle conduttanze su base nodi del circuito, $s[C]$ è l'analoga delle ammettenze dei condensatori e $1/s [\Gamma]$ quella

(1) - Il presente paragrafo è basato sul § IV.3.2 di K. Geher, op. cit.

delle ammettenze degli induttori. Separando i termini costanti in s da quelli dipendenti da s e da $1/s$, si ha:

$$(VIII.A.2) \quad \frac{d}{dv} [G] = [B]^t [G] + [G] [B]$$

$$\frac{d[C]}{dv} = [B]^t [C] + [C] [B]$$

$$\frac{d[\Gamma]}{dv} = [B]^t [\Gamma] + [\Gamma] [B]$$

Le (VIII.A.2) si possono mettere in funzione esplicita dei valori dei componenti. Precisamente, detti $[FG]$, $[FC]$, $[F\Gamma]$ i vettori aventi come componenti i valori rispettivamente delle conduttanze dei resistori, delle capacità dei condensatori e degli inversi delle induttanze degli induttori, risulta, dopo aver sviluppato le (VIII.A.2):

$$(VIII.A.3) \quad \frac{d[FG]}{dv} = [M_1] [FG] \quad ; \quad \frac{d[FC]}{dv} = [M_2] [FC]$$

$$\frac{d[F\Gamma]}{dv} = [M_3] [F\Gamma]$$

in cui le matrici $[M_k]$, $k = 1, 2, 3$ dipendono solo dalla matrice B introdotta nel § VII.A.

I circuiti equivalenti che hanno per componenti quelli che si deducono dalle (VIII.A.3), risultano equivalenti dal punto di vista esterno; nel caso presente osserviamo che questo punto di vista implica una particolare funzione di rete H . Pertanto tutti i circuiti della famiglia realizzano la stessa H . Ci proponiamo di determinare quello che ha minima la seguente funzione obiettivo (per una assegnata frequenza):

$$(VIII.A.4) \quad \phi = \sum_{i=1}^{n_1} |S_{\epsilon_i}^{(H)}|^2 + \sum_{i=1}^{n_2} |S_{C_i}^{(H)}|^2 + \sum_{i=1}^{n_3} |S_{\lambda_i}^{(H)}|^2$$

in cui $\lambda_i = 1/L_i$.

La costanza delle funzione di rete H implica che:

$$(VIII.A.5) \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial H}{\partial g_i} \frac{dg_i}{dv} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial H}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dv} + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dv} = 0$$

che, riscritta in forma matriciale e tenendo conto delle (VIII.A.3), equivale a:

$$(VIII.A.6) \quad [Q_g]^t [M_1] [FG] + [Q_c]^t [M_2] [FC] + [Q_\lambda]^t [M_3] [F\Gamma] = 0$$

in cui le matrici $[Q]$ hanno come componenti le derivate di H rispetto ai valori delle conduttanze, capacità ed inverse delle induttanze.

Dalla (VIII.A.6) si deduce, derivando rispetto al valore di ciascun componente:

$$(VIII.A.7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} [Q]^t \right) [M] [F] + [Q]^t [M] [E_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

in cui $[E_i]$ è un vettore avente come componenti tutti zeri, con l'esclusione dell' i -esimo che vale 1. Le (VIII.A.7) si riferiscono indifferentemente ai tre tipi di componenti, ponendo per n , $[M]$, $[Q]$, $[F]$ i valori corrispondenti ai tre casi.

Le (VIII.A.7) ci permettono di conoscere il modo in cui variano i vettori $[Q_g]$, $[Q_c]$ e $[Q_\lambda]$ con v . Precisamente si ha:

$$(VIII.A.8) \quad \frac{d [Q]^t}{dv} [M] [F] = \sum_i \frac{\partial [Q]^t}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dv} [M] [F] =$$

$$= - \sum_i [Q]^t [M] [E_i] \frac{dx_i}{dv} = - [Q]^t [M]^2 [F]$$

Dalla (VIII.A.8) si deduce:

$$(VIII.A.9) \quad \frac{d [Q_g]}{dv} = - [M_1]^t [Q_g] \quad ; \quad \frac{d [Q_c]}{dv} = - [M_2]^t [Q_c] \quad ;$$

$$\frac{d [Q_\lambda]}{dv} = - [M_3]^t [Q_\lambda]$$

Le (VIII.A.9), insieme alle (VIII.A.3), ci permettono di calcolare come varia la funzione obiettivo con v , cioè:

$$(VIII.A.10) \quad \frac{d\phi}{dv} = \frac{d}{dv} \left[\sum_{i=1}^{n_1} S_{(g_i)}^{(H)} \cdot S_{(g_i)}^{(H)*} + \sum_{i=1}^{n_2} S_{(c_i)}^{(H)} S_{(c_i)}^{(H)*} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n_3} S_{(\lambda_i)}^{(H)} S_{(\lambda_i)}^{(H)*} \right]$$

Sviluppiamo a questo scopo la derivata di una delle tre somme, tenendo conto che:

$$(VIII.A.11) \quad S_{(x_i)}^{(H)} = \frac{x_i}{H} Q_{x_i} \quad ; \quad \frac{d}{dv} [S_{(x_i)}^{(H)}] = \frac{1}{H} \left[Q_{x_i} \frac{dx_i}{dv} + x_i \frac{dQ_{x_i}}{dv} \right]$$

$$\begin{aligned} (VIII.A.12) \quad \frac{d}{dv} \sum_{i=1}^{n_1} S_{(g_i)}^{(H)} \cdot S_{(g_i)}^{(H)*} &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{n_1} S_{(g_i)}^{(H)*} \frac{d}{dv} S_{(g_i)}^{(H)} \right] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{g_i}{H^*} Q_{g_i}^* \frac{1}{H} \left[Q_{g_i} \frac{dg_i}{dv} + g_i \frac{dQ_{g_i}}{dv} \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{|H|^2} \operatorname{Re} \{ [FG]^t [DQG] [DQG]^* [M_1] [FG] - \\ &\quad - [FG]^t [DG] [DQG]^* [M_1]^t [Q_g] \} \end{aligned}$$

essendo: $[DQG]$ la matrice diagonale che ha per componenti i Q_{g_i} ; $[DG]$ la matrice diagonale che ha per componenti i valori g_i . Tenendo conto della (VIII.A.12) e delle relazioni simili per gli altri componenti, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dv} &= \frac{2}{|H|^2} \operatorname{Re} \left\{ [FX]^t [DQX] [DQX]^* \begin{bmatrix} [M_1] & 0 & 0 \\ 0 & [M_2] & 0 \\ 0 & 0 & [M_3] \end{bmatrix} [FX] - \right. \\ (VIII.A.13) \quad &\quad \left. - [FX]^t [DX] [DQX]^* \begin{bmatrix} [M_1]^t & 0 & 0 \\ 0 & [M_2]^t & 0 \\ 0 & 0 & [M_3]^t \end{bmatrix} [DQX] \right\} \end{aligned}$$

in cui:

$$[FX] = \begin{bmatrix} [FG] \\ [FC] \\ [F\Gamma] \end{bmatrix} \quad ; \quad [QX] = \begin{bmatrix} [Q_g] \\ [Q_c] \\ [Q_\lambda] \end{bmatrix}$$

$[DQX]$ è la matrice diagonale i cui termini sono i valori delle derivate di H rispetto a tutti i valori dei componenti; $[DX]$ è la matrice diagonale i cui termini sono tutti i valori dei componenti.

La (VIII.A.13) fornisce, per ogni particolare valore della variabile ausiliaria v , il valore della derivata di ϕ rispetto a v . Perciò tale formula rende immediata l'applicazione del metodo di minimizzazione ba-

sato sul gradiente. L'unica avvertenza da tenere presente, nella scelta iniziale di $[B]$ e nell'utilizzazione successiva del metodo del gradiente, è di fare attenzione che i valori dei componenti non divengano negativi⁽¹⁾.

APPENDICE VIII.B - *Riferimenti bibliografici.*

Nell'ambito del presente capitolo è stato accennato al problema dell'ottimizzazione ed è stato descritto un metodo molto semplice di ottimizzazione. È importante tenere presente che tale argomento è di fondamentale importanza ed è stato solo accennato, in quanto pertinente al progetto dei circuiti e solo marginalmente all'analisi, anche se esiste la possibilità di ridurre il problema dell'analisi ad un problema di minimizzazione di una funzione quadratica, come messo in evidenza in: G. Martinelli, F. Riciniello, M. Salerno: «Possibilità d'impiego dei metodi di ottimizzazione nell'analisi delle reti elettriche», *Alta Frequenza*, dicembre 1973, pp. 674-679. Una panoramica di alcuni dei metodi più usati: Partan, Fletcher-Reeves, Davidon, Fletcher-Powell, Powell, può essere trovata nel testo di F. K. Kuo, G. Magnuson, op. cit., Cap. V. Criteri ed algoritmi per guida alla scelta del metodo possono essere trovati in: M. Dècina, F. Riciniello, «Criteri di scelta degli algoritmi per la soluzione dei problemi di ottimizzazione», *Alta Frequenza*, gennaio 1976, pp. 46-52.

Sono inoltre da sottolineare alcuni metodi di ottimizzazione particolare: quello di funzioni obiettivo lineari e quadratiche in presenza di vincoli lineari e quello più generale di funzioni qualsiasi in presenza di vincoli qualsiasi. Nella prima categoria rientra il metodo della programmazione lineare e quadratica, di cui è disponibile una panoramica completa nei suoi vari aspetti in: F. Riciniello, «Panoramica dei metodi di programmazione lineare e quadratica», *N.R.N.*, marzo 1973, pp. 270-315. Per la seconda categoria, si rimanda a F. K. Kuo, G. Magnuson, op. cit.

*

(1) - Un controllo più semplice sui valori dei componenti può essere ottenuto con il metodo descritto in B.M.G. Cheetham, «A new theory of continuously equivalent networks», *IEEE Trans on Circuit and Systems*, Vol. CAS-21, n.1, gennaio 1974, pp. 17-20.

CAPITOLO IX

IL CIRCUITO COME UN PARTICOLARE SISTEMA

$$V_u = \sum_{i=1}^{N_g} H_i V_{gi}' + \sum_{i=1}^{N_c} H_i V_{ci}(0) + \sum_{i=1}^{N_L} K_i I_{Li}'(0)$$

IX.1 - Stato ed equazioni di stato di un circuito.

È stato visto nel Cap. III che una qualsiasi grandezza elettrica, in un circuito lineare permanente a costanti concentrate, è esprimibile come combinazione lineare di tre gruppi di termini. Il primo comprende termini proporzionali alle eccitazioni, cioè le tensioni dei generatori di tensione indipendenti e le correnti dei generatori di corrente indipendenti. Il secondo contiene termini proporzionali alle tensioni dei condensatori all'istante iniziale preso in considerazione ed il terzo contiene termini proporzionali alle correnti negli induttori all'istante iniziale suddetto. I coefficienti di proporzionalità, nel dominio della trasformata di Laplace, sono funzioni razionali reali della variabile s , che dipendono dalla struttura del circuito, dal valore dei componenti e dalla posizione della grandezza d'interesse. È importante osservare che tali formule per le grandezze elettriche possono essere messe in funzione di un numero minore di quantità del tipo detto, se esistono legami tra queste imposti dal circuito, come ad esempio accade se sono presenti maglie costituite solo da condensatori e generatori indipendenti di tensione oppure se sono presenti tagli costituiti solo da induttori e generatori indipendenti di corrente.

Quanto detto permette di affermare che lo stato di un circuito è completamente definito quando si conoscono le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori⁽¹⁾. Eventualmente, alcune di queste grandezze possono essere omesse se risulta presente nel circuito qualche configurazione particolare del tipo di quelle dette, che rendono tali gran-

(1) - Si veda ad esempio: A. Ruberti, A. Isidori: «Teoria dei sistemi», Ed. Boringhieri, 1979, formula (II.7.16), specializzandola al caso stazionario.

dezze non indipendenti tra loro e le eccitazioni. Di conseguenza, se raduniamo in un vettore $x(t)$ queste grandezze (vettore di stato), in un secondo vettore $u(t)$ le eccitazioni (vettore di ingresso) ed in un terzo vettore $y(t)$ le grandezze d'interesse (vettore di uscita), si ha:

$$(IX.1.1) \quad y(t) = \overset{\text{Vettore di uscita}}{C} \overset{\text{Vettore di stato}}{x}(t) + \overset{\text{Vettore di ingresso}}{D} u(t)$$

in cui C e D sono matrici reali opportune. L'individuazione del vettore di stato $x(t)$ è effettuata tramite una equazione del tipo (IX.1.1), scritta relativamente ad un vettore di uscita $y(t)$ opportuno. La scelta in questione richiede che $y(t)$ abbia come componenti le grandezze elettriche complementari a quelle di $x(t)$, nel senso che se la k -esima componente di $x(t)$ è la tensione di un condensatore, allora la k -esima componente di $y(t)$ deve essere scelta coincidente con la relativa corrente e se invece è la corrente di un induttore, allora la k -esima componente di $y(t)$ deve essere scelta coincidente con la relativa tensione. Infatti, con questa scelta, indicando con un punto l'operazione di derivazione rispetto al tempo, risulta:

$$(IX.1.2) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= M \dot{x}(t) \\ y_1(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{aligned}$$

Matrice diagonale. $i = C \frac{dv}{dt}$ $v = L \frac{di}{dt}$

delle rel. Cost. Tutore

in cui M è una matrice diagonale i cui elementi sono le capacità dei condensatori e le induttanze degli induttori. Dalle (IX.1.2), si ha:

$$(IX.1.3) \quad \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

in cui A e B sono matrici reali di ordine opportuno.

Le equazioni (IX.1.1) e (IX.1.3) costituiscono una rappresentazione lineare stazionaria, a dimensione finita, del circuito, considerato come un sistema⁽¹⁾; nel seguito esse verranno brevemente indicate come «equazioni di stato» del circuito.

IX.2 - Algoritmi per la determinazione delle equazioni di stato di un circuito.

L'analisi di un circuito mediante le equazioni di stato richiede la determinazione delle quattro matrici reali A , B , C , D a partire dalla conoscenza della struttura del circuito e del valore degli elementi. Nel presente paragrafo tale problema verrà risolto in due casi particolari, ri-

(1) - Si veda ad esempio A. Ruberti, A. Isidori, op. cit., Cap. III; § 1.

mandando per la trattazione generale alla letteratura tecnica⁽¹⁾. I casi considerati sono rispettivamente:

SI 1) circuiti costituiti da resistori, induttori e condensatori, nei quali non esistono maglie costituite solo da condensatori e generatori indipendenti di tensione e tagli costituiti solo da induttori e generatori indipendenti di corrente;

NO 2) circuiti che ammettono una opportuna rappresentazione ibrida, quando vengono considerati come circuiti a più porte, chiuse rispettivamente sui condensatori, induttori e generatori indipendenti presenti nel circuito stesso.

IX.2.1 - Circuiti del primo tipo.

La mancanza di maglie e tagli del tipo predetto permette di scegliere come variabili di stato cioè come componenti di $x(t)$, le tensioni di tutti i condensatori e le correnti di tutti gli induttori presenti nel circuito. Indicando con V_C il vettore delle tensioni dei condensatori, cioè il vettore che ha come k-esima componente la tensione del k-esimo condensatore, e con I_L il vettore delle correnti degli induttori, cioè il vettore che ha come k-esima componente la corrente che scorre nel k-esimo induttore, il vettore di stato risulta uguale a:

$$(IX.2.1) \quad \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix}$$

$$V_C = I_C \cdot C$$

$$y(t) = H \dot{x}(t)$$

La determinazione delle matrici A e B delle equazioni di stato richiede di individuare un legame tra $\dot{x}$, x ed u . D'altra parte, nel caso presente, osserviamo che:

$$\begin{bmatrix} I_C \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix}$$

(IX.2.2)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} C_d & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_C \\ V_L \end{bmatrix}$$

$$\text{Dove } A = C_d^{-1} \cdot L$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{A} y$$

dove: C_d è la matrice diagonale avente come k-esima componente la capacità del k-esimo condensatore, L è la matrice diagonale avente come k-esima componente l'induttanza del k-esimo induttore; I_C è il vettore delle correnti dei condensatori, avente come k-esima componente la corrente del k-esimo condensatore, con verso positivo coordinato alla re-

(1) - Si veda ad esempio: R.A. Rohrer, «Circuit theory. An introduction to the state variable approach», Mc Graw-Hill, 1970, Cap. 14.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C_d \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_C \\ V_L \end{bmatrix}$$

$$I_C \cdot \frac{\Delta}{\Delta C} = \dot{x} \quad x = V_C$$

$$V_L \cdot C = \dot{x} \quad x = I_L$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = C x(t) + D u(t) \\ \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \end{cases}$$

lativa tensione; V_L è il vettore delle tensioni degli induttori, avente come k-esima componente la tensione del k-esimo induttore, con verso positivo coordinato alla relativa corrente.

Inoltre, tenendo conto che l'eccitazione del circuito avviene tramite i generatori indipendenti presenti, risulta

(IX.2.3)

$$u = \begin{bmatrix} V_{gt} \\ I_{gc} \end{bmatrix}$$

Eccitazioni presenti nel circuito.
 $[A] = [C] \cdot [M]^{-1}$ $[B] = [D] \cdot [M]^{-1}$

dove con V_{gt} si intende il vettore delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione, avente come k-esima componente la tensione del k-esimo generatore indipendente di tensione e con I_{gc} si intende il vettore delle correnti dei generatori indipendenti di corrente, avente come k-esima componente la corrente del k-esimo generatore indipendente di corrente.

Il legame tra $\dot{x}$, x ed u equivale al legame tra I_C , V_C , I_L , V_L , I_{gc} con l'esclusione di V_L ed al legame tra V_L , V_C , I_L , V_{gt} , I_{gc} con l'esclusione di (I_C) . Tali opportuni legami possono essere facilmente individuati scegliendo un particolare albero sul grafo del circuito. Precisamente occorre un albero che contenga tutti i condensatori e tutti i generatori indipendenti di tensione presenti nel circuito e non contenga contemporaneamente gli induttori ed i generatori indipendenti di corrente. I resistori presenti potranno appartenere sia all'albero che al co-albero.

Un albero di questo tipo esiste sempre per i circuiti che stiamo considerando. Infatti la presenza contemporanea nell'albero di tutti i condensatori e di tutti i generatori indipendenti di tensione è possibile in quanto non esistono maglie costituite solo da questi elementi. L'assenza nell'albero di ogni induttore e di ogni generatore indipendente di corrente è possibile in quanto non vi sono tagli costituiti solo da questi elementi.

Le equazioni che occorrono per determinare le matrici A e B si ottengono scrivendo le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali relativi ai condensatori e le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali relative agli induttori. Poichè l'albero è costituito da condensatori, generatori indipendenti di tensione, resistori, mentre il co-albero è costituito da induttori, generatori indipendenti di corrente, resistori, risulta, scrivendo le suddette equazioni di equilibrio sotto forma matriciale:

$$\begin{aligned} I_C &= [b_1] I_L + [b_2] I_{gc} + [b_3] I_R^{(c)} \\ V_L &= [d_1] V_C + [d_2] V_{gt} + [d_3] V_R^{(a)} \end{aligned}$$

(IX.2.4)

Correnti di co-albero
 maglie fondamentali

Per tagli fondamentali
 Dalle maglie fondamentali

dove: $I_R^{(c)}$ è il vettore delle correnti che fluiscono nei resistori del co-albero, cioè il vettore la cui k -esima componente è la corrente che scorre nel k -esimo resistore del co-albero; $V_R^{(a)}$ è il vettore delle tensioni ai capi dei resistori dell'albero, cioè è il vettore la cui k -esima componente è la tensione ai capi del k -esimo resistore dell'albero; le matrici $[b_k]$, $[d_k]$, con $k = 1, 2, 3$, sono matrici le cui componenti valgono $\pm 1, 0$ e si ottengono in modo immediato dalle leggi di Kirchhoff applicate ai suddetti tagli e maglie fondamentali⁽¹⁾.

Le (IX.2.4), tuttavia, non sono sufficienti per ottenere le matrici A e B, in quanto contengono termini incogniti, quali $I_R^{(c)}$ e $V_R^{(a)}$. Tali termini si determinano utilizzando:

1) le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali relativi ai resistori appartenenti all'albero, cioè:

$$(IX.2.5) \quad I_R^{(a)} = [f_1] I_L + [f_2] I_{gc} + [f_3] I_R^{(c)}$$

in cui: $I_R^{(a)}$ è il vettore delle correnti che fluiscono nei resistori dell'albero, cioè il vettore la cui k -esima componente è la corrente che scorre nel k -esimo resistore dell'albero; le matrici $[f_k]$, con $k = 1, 2, 3$, sono matrici analoghe alle $[b_k]$ e $[d_k]$. Usando versi coordinati nel modo usuale, risulta:

$$(IX.2.6) \quad I_R^{(a)} = [G_a] V_R^{(a)}$$

in cui $[G_a]$ è la matrice diagonale in cui il termine k -esimo della diagonale coincide con la conduttanza del k -esimo resistore dell'albero. Se utilizziamo la matrice delle resistenze $[R_a]$, ordinata come la $[G_a]$, si ha analogamente:

$$(IX.2.7) \quad V_R^{(a)} = [R_a] I_R^{(a)}$$

essendo $[R_a] = [G_a]^{-1}$;

2) le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali relative ai resistori del co-albero, cioè:

$$(IX.2.8) \quad V_R^{(c)} = [h_1] V_C + [h_2] V_{gt} + [h_3] V_R^{(a)}$$

in cui: $V_R^{(c)}$ è il vettore delle tensioni ai capi dei resistori del co-albero, cioè è il vettore la cui k -esima componente è la tensione ai capi del k -esimo resistore del co-albero; le matrici $[h_k]$, con $k = 1, 2, 3$, sono

(1) - Si veda l'esempio successivo IX.2.1 per maggiori chiarimenti.

$$0_{VK} > \sum_{r=1}^N |a_{kr}|$$

analoghe alle matrici $[b_k]$ e $[d_k]$. Usando versi positivi coordinati nel modo usuale per le grandezze elettriche, risulta:

$$(IX.2.9) \quad \boxed{V_R^{(c)} = [R_c] I_R^{(c)}}$$

in cui $[R_c]$ è la matrice diagonale in cui il termine k -esimo della diagonale coincide con la resistenza del k -esimo resistore del co-albero. Se utilizziamo la matrice delle conduttanze, ordinata nel medesimo modo, si ha:

$$(IX.2.10) \quad \boxed{I_R^{(c)} = [G_c] V_R^{(c)}}$$

essendo $[G_c] = [R_c]^{-1}$.

Le equazioni scritte nell'ambito dei due punti precedenti permettono di calcolare i vettori $I_R^{(c)}$ e $V_R^{(a)}$ in funzione dei vettori I_L, I_{gc}, V_C, V_{gt} ; effettuando le opportune sostituzioni, si ottiene facilmente:

$$(IX.2.11) \quad \begin{aligned} I_R^{(c)} &= [Q] [h_3] [R_a] \{ [f_1] I_L + [f_2] I_{gc} \} + \\ &\quad + [Q] \{ [h_1] V_C + [h_2] V_{gt} \} \\ V_R^{(a)} &= [P] [f_3] [G_c] \{ [h_1] V_C + [h_2] V_{gt} \} + \\ &\quad + [P] \{ [f_1] I_L + [f_2] I_{gc} \} \end{aligned}$$

in cui:

$$(IX.2.12) \quad \begin{aligned} [P] &= \{ [G_a] - [f_3] [G_c] [h_3] \}^{-1} \\ [Q] &= \{ [R_c] - [h_3] [R_a] [f_3] \}^{-1} \end{aligned}$$

È importante notare che le matrici $[P]$ e $[Q]$ esistono sempre, in quanto sono le inverse di due matrici simmetriche dominanti⁽¹⁾, come si deduce in base alle proprietà topologiche dei circuiti, riportate nel § I.10.

Sostituendo le (IX.2.11) e (IX.2.12) nelle (IX.2.4) ed utilizzando la (IX.2.2), si ottengono facilmente le matrici A e B , cioè:

(1) - Una matrice simmetrica di ordine N è dominante se risulta:

$$a_{kk} > \sum_{r \neq k} |a_{kr}| \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Tale matrice ha sempre il determinante diverso da zero.

$$I_R^{(c)} = [G_c] V_R^{(a)} = [G_c] \cdot [h_1] V_C + [h_2] [G_c] V_{gt} + [h_3] [G_c] V_R^{(a)}$$

$$[G_c] [h_1] V_C + [h_2] [G_c] V_{gt} + [h_3] [G_c] [R_a] \{ [f_1] I_L + [f_2] I_{gc} \} + [h_3] [G_c] [R_a] [f_3] I_R^{(c)}$$

$$A = \begin{bmatrix} [C_d]^{-1} [b_3] [Q] [h_1] & [C_d]^{-1} \{ [b_1] + [b_3] [Q] [h_3] [R_a] [f_1] \} \\ [L]^{-1} \{ [d_1] + [d_3] [P] [f_3] [G_c] [h_1] \} & [L]^{-1} [d_3] [P] [f_1] \end{bmatrix}$$

(IX.2.13)

$$B = \begin{bmatrix} [C_d]^{-1} [b_3] [Q] [h_2] & [C_d]^{-1} \{ [b_2] + [b_3] [Q] [h_3] [R_a] [f_2] \} \\ [L]^{-1} \{ [d_2] + [d_3] [P] [f_3] [G_c] [h_2] \} & [L]^{-1} [d_3] [P] [f_2] \end{bmatrix}$$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$
 $\dot{x}(t) = Ax + Bu$
 $\begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} = x$
 $y = \begin{bmatrix} I_{gc} \\ V_L \end{bmatrix}$

Per quanto riguarda le matrici C e D, che completano l'individuazione delle equazioni di stato, possono determinarsi esprimendo le grandezze elettriche che costituiscono il vettore di uscita y in funzione delle componenti di V_C , I_L , V_{gt} e I_{gc} . È facile dimostrare che tale modo di scrivere le grandezze elettriche è possibile per ogni corrente e tensione del circuito. Infatti ciò è evidente per V_C , I_L , V_{gt} e I_{gc} ; risulta inoltre possibile anche per I_C e V_L in base alla conoscenza delle matrici A e B. In base alle (IX.2.11), (IX.2.9) e (IX.2.6) è possibile anche per $V_R^{(a)}$, $V_R^{(c)}$, $I_R^{(a)}$ e $I_R^{(c)}$. Rimane da far vedere che è possibile per V_{gc} e I_{gy} avendo indicato in tal modo i vettori delle tensioni ai capi dei generatori di corrente e delle correnti dei generatori di tensione. Utilizziamo a questo scopo le equazioni di equilibrio delle correnti per i tagli fondamentali relativi ai generatori indipendenti di tensione e le equazioni di equilibrio delle tensioni per le maglie fondamentali relative ai generatori indipendenti di corrente; precisamente si ha, con notazioni simili alle precedenti:

$$(IX.2.14) \quad \begin{aligned} I_{gt} &= [w_1] I_L + [w_2] I_{gc} + [w_3] I_R^{(c)} \\ V_{gc} &= [q_1] V_C + [q_2] V_{gt} + [q_3] V_R^{(a)} \end{aligned}$$

Le (IX.2.14), insieme alle (IX.2.11), forniscono le espressioni desiderate per I_{gt} e V_{gc} .

In base a quanto detto, fissato un qualsiasi vettore di uscita y, è immediato ricavare le matrici C e D della relativa equazione di stato, utilizzando le espressioni precedenti.

Esempio IX.2.1

Per il circuito di fig. IX.2.1, individuare le quattro matrici A, B, C, D delle equazioni di stato, nell'ipotesi che le grandezze d'interesse siano v_1 e v_2 .

Nella figura è riportato uno degli alberi che soddisfano le prescrizioni dello algoritmo precedente ed avente l'ulteriore vantaggio di avere le grandezze d'interesse

ambidue disposte su di esso. Con riferimento a quest'albero ed ai simboli introdotti precedentemente, si ha:

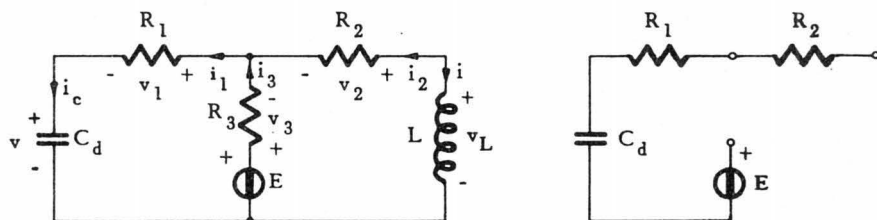


Fig.IX.2.1 - Circuito considerato nell'esempio IX.2.1 e relativo albero.

$$x = [v \ i]^t ; \quad I_C = i_c ; \quad V_L = v_L ; \quad V_C = v ; \quad I_L = i ;$$

$$y = [v_1 \ v_2]^t ; \quad u = E ; \quad V_{gt} = E ; \quad I_{gc} = 0 ;$$

$$I_R^{(c)} = i_3 ; \quad V_R^{(c)} = v_3 ; \quad [R_c] = R_3 ; \quad I_R^{(a)} = [i_1 \ i_2]^t ;$$

$$V_R^{(a)} = [v_1 \ v_2]^t ; \quad [C_d] = C_d ; \quad [L] = L ;$$

$$[R_a] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} ,$$

avendo indicato con l'apice t l'operazione di trasposizione.

Le equazioni di equilibrio analoghe alle (IX.2.4) sono:

$$i_c = i_3 - i$$

$$v_L = v_1 + v_2 + v$$

e quindi:

$$[b_1] = -1 ; \quad [b_2] = 0 ; \quad [b_3] = 1$$

$$[d_1] = 1 ; \quad [d_2] = 0 ; \quad [d_3] = [1 \ 1] .$$

Le equazioni di equilibrio analoghe alle (IX.2.5) sono:

$$i_1 = i_3 - i$$

$$i_2 = -i$$

e quindi:

$$[f_1] = [-1 \ -1]^t ; \quad [f_2] = [0 \ 0]^t ; \quad [f_3] = [1 \ 0]^t .$$

Le equazioni di equilibrio analoghe alle (IX.2.8) sono:

$$v_3 = -v_1 - v + E$$

e quindi:

$$[h_1] = -1 ; [h_2] = 1 ; [h_3] = [-1 \ 0] .$$

Le matrici P e Q si ottengono mediante le (IX.2.12), cioè:

$$[P] = \left\{ \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/R_3 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{R_2 R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$[Q] = \left\{ R_3 - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \frac{1}{R_1 + R_3}$$

I termini che compaiono nelle matrici A e B date dalle (IX.2.13) valgono:

$$[C_d]^{-1} [b_3] [Q] [h_1] = \frac{1}{C_d} \frac{1}{R_3 + R_1} (-1) = - \frac{1}{C_d (R_1 + R_3)} \quad Q11$$

$$[C_d]^{-1} \{ [b_1] + [b_3] [Q] [h_3] [R_a] [f_1] \} = \frac{1}{C_d} \left\{ -1 + \frac{1}{R_1 + R_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= - \frac{R_3}{C_d (R_1 + R_3)} \quad Q12$$

$$[L]^{-1} \{ [d_1] + [d_3] [P] [f_3] [G_c] [h_1] \} = \frac{1}{L} \left\{ 1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_3} (-1) \right\} =$$

$$= \frac{R_3}{L (R_1 + R_3)} \quad Q21$$

$$[L]^{-1}[d_3][P][f_1] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \end{bmatrix} \quad Q_{22}$$

$$[C_d]^{-1}[b_3][Q][h_2] = \frac{1}{C_d(R_1 + R_3)} \quad b_{11}$$

$$[L]^{-1}\{[d_2] + [d_3][P][f_3][G_c][h_2]\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_3} =$$

$$= \frac{R_1}{L(R_1 + R_3)} \quad b_{24}$$

Quindi si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_d(R_1 + R_3)} & -\frac{R_3}{C_d(R_1 + R_3)} \\ \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} & -\frac{1}{L} \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1/C_d \\ R_1/L \end{bmatrix}$$

Calcoliamo successivamente le rimanenti matrici della rappresentazione e cioè C e D. Per la scelta fatta dell'albero, il vettore di uscita coincide con $V_R^{(a)}$ e quindi è direttamente calcolabile con la (IX.2.11). Si ha:

$$y = V_R^{(a)} = [P][f_3][G_c]\{[h_1]V_c + [h_2]V_{gt}\} + [P]\{[f_1]I_L + [f_2]I_{gc}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_3} \{-v + E\} + \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} i =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E - v}{R_3} - i \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Perciò le matrici C e D valgono:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{R_1 + R_3} & -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1 + R_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

NO

IX.2.2 - Circuiti del secondo tipo.

Assegnato un qualsiasi circuito è sempre possibile considerarlo come un circuito N -porte, con N di valore opportuno, chiuso in corrispondenza alle porte sui propri condensatori, induttori e generatori indipendenti. È evidente che quello che rimane entro il circuito N -porte è la parte senza memoria, costituita dai resistori e dagli elementi ideali a più di due terminali (generatori controllati, trasformatori ideali, ecc.). Il circuito si presenta quindi nella forma di fig. IX.2.2, con le grandezze elettriche di porta coincidenti con le componenti dei vettori $V_C, V_L, V_{g^t}, V_{g^c}$ e con le componenti cambiate di segno di $I_C, I_L, I_{g^t}, I_{g^c}$, essendo questi vettori rispettivamente i vettori delle tensioni ai capi dei condensatori, induttori, generatori indipendenti di tensione e corrente e delle correnti relative agli stessi elementi, definiti come nel § IX.2.1. Delle molteplici rappresentazioni possibili per questo circuito N -porte, interessa nel caso presente quella che prevede come cause le componenti di $V_C, I_L, V_{g^t}, I_{g^c}$, cioè la rappresentazione seguente:

$$(IX.2.15) \quad \begin{bmatrix} I_C \\ V_L \\ I_{g^t} \\ V_{g^c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \\ V_{g^t} \\ I_{g^c} \end{bmatrix}$$

Evidentemente come effetti sono scelte le grandezze complementari e cioè I_C, V_L, I_{g^t} e V_{g^c} . È opportuno notare che in questo caso è conveniente scegliere le correnti di porta uscenti dal morsetto positivo delle tensioni (a differenza della convenzione generale introdotta nel Capitolo VI per le reti N -porte), come indicato nella fig. IX.2.2.

L'ipotesi che sta alla base del metodo qui esposto è che esista la rappresentazione (IX.2.15) per il circuito in esame. In tal caso il sistema che rappresenta il circuito per mezzo delle equazioni di stato è facilmente ottenibile, applicando il metodo di sovrapposizione degli effetti, considerando che le grandezze elettriche scelte come causa agi-

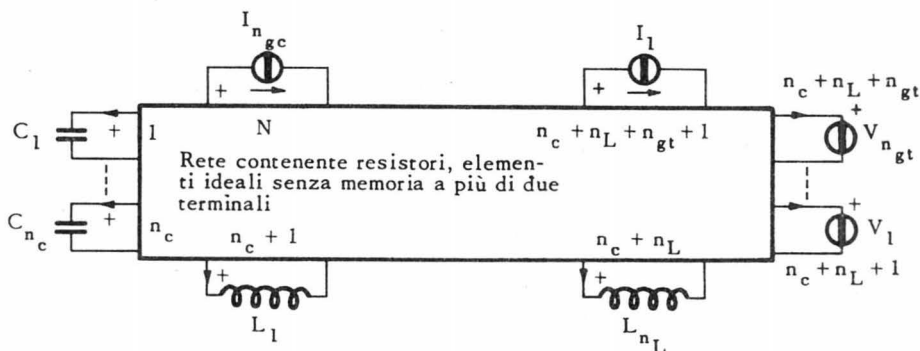


Fig. IX.2.2 - Forma sotto cui può essere messo il generico circuito. Il numero N delle porte è $n_c + n_L + n_{gt} + n_{gc}$, essendo n_c , n_L , n_{gt} , n_{gc} rispettivamente il numero dei condensatori, induttori, generatori indipendenti di tensione e corrente presenti nel circuito.

scano una per volta. Annullare tali grandezze comporta nei vari casi le seguenti operazioni:

- 1) per ogni condensatore porre a zero la tensione;
- 2) per ogni induttore porre a zero la corrente;
- 3) per ogni generatore di tensione porre a zero la tensione;
- 4) per ogni generatore di corrente porre a zero la corrente.

Pertanto la disattivazione delle cause si ottiene sostituendo un corto-circuito al posto di ogni condensatore e generatore di tensione ed un circuito aperto al posto di ogni induttore e generatore di corrente. Attivando ora una grandezza di tipo causa e risolvendo la rete risultante, è possibile determinare di volta in volta una colonna delle matrici A e C ovvero B e D . Precisamente si ottengono i seguenti quattro casi:

1) *Attivazione della causa relativa al k -esimo condensatore (con $k = 1, 2, \dots, n_c$).* Ciò si ottiene ponendo un generatore di tensione unitario sulla porta connessa al k -esimo condensatore. Risolvendo il circuito, si determinano le correnti $\bar{I}_C$ di tutti i rami corrispondenti ai condensatori, le tensioni $\bar{V}_L$ ai capi di tutte le porte a cui sono connessi gli induttori ed inoltre tutte le altre grandezze elettriche che fanno parte del vettore di uscita $\bar{y}$. È evidente che la colonna k -esima della matrice A è pari a:

$$(IX.2.16) \quad \begin{bmatrix} C_d & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{I}_C \\ \bar{V}_L \end{bmatrix}$$

ed inoltre la colonna k -esima della matrice C è pari al vettore $\bar{y}$.

2) *Attivazione della causa relativa al k-esimo induttore (con $k = 1, 2, \dots, n_L$).* Ciò si ottiene ponendo un generatore di corrente unitaria sulla porta connessa al k-esimo induttore. Risolvendo il circuito, si possono determinare i nuovi valori delle correnti $\bar{I}_C$, delle tensioni $\bar{V}_L$ e delle grandezze di uscita $\bar{y}$. Utilizzando ancora l'espressione (IX.2.16) si ottiene ora la colonna $(n_c + k)$ della matrice A, mentre il vettore $\bar{y}$ è pari alla colonna $(n_c + k)$ della matrice C;

3) *Attivazione del k-esimo generatore di tensione con una tensione impressa unitaria ($k = 1, 2, \dots, n_{g_t}$).* Risolvendo il circuito, si possono determinare i nuovi valori delle correnti $\bar{I}_C$, delle tensioni $\bar{V}_L$ e delle grandezze di uscita $\bar{y}$. In tal caso l'espressione (IX.2.16) fornisce la k-esima colonna della matrice B, mentre il vettore $\bar{y}$ fornisce la k-esima colonna della matrice D;

4) *Attivazione del k-esimo generatore di corrente, con una corrente impressa unitaria ($k = 1, 2, \dots, n_{g_c}$).* Risolvendo il circuito, si possono determinare i nuovi valori delle correnti $\bar{I}_C$, delle tensioni $\bar{V}_L$ e delle grandezze di uscita $\bar{y}$. In tal caso l'espressione (IX.2.16) fornisce la $(k + n_{g_t})$ -esima colonna della matrice B, mentre il vettore $\bar{y}$ fornisce la $(k + n_{g_t})$ -esima colonna della matrice D.

In questo modo tutti gli elementi delle matrici A, B, C, D possono essere calcolati. È opportuno osservare che le determinazioni suddette sono sempre possibili se esiste la rappresentazione (IX.2.15). Da altra parte la non esistenza della suddetta rappresentazione può essere messa in evidenza proprio dall'insuccesso del procedimento descritto; ciò accade quando non risulta possibile l'analisi di qualcuna delle configurazioni circuitali ottenute attivando una sola delle grandezze elettriche considerate come cause. Ad esempio è facile verificare che, in presenza di una maglia di condensatori e di generatori di tensione, applicando il punto 1) del procedimento precedente si ottiene un generatore di tensione chiuso in corto circuito. In tal caso il metodo non può essere più utilizzato ed inoltre si può stabilire la non esistenza della rappresentazione (IX.2.15).

Esempio IX.2.2

Determinare le matrici A, B, C, D delle equazioni di stato del circuito di figura IX.2.3, mediante il metodo descritto nel presente paragrafo, supponendo che le grandezze d'interesse siano la corrente che fluisce nel generatore di tensione, la tensione tra i nodi 1 e 3 e la corrente che fluisce nel generatore di corrente controllato in tensione, disposto tra i nodi 5 e 0.

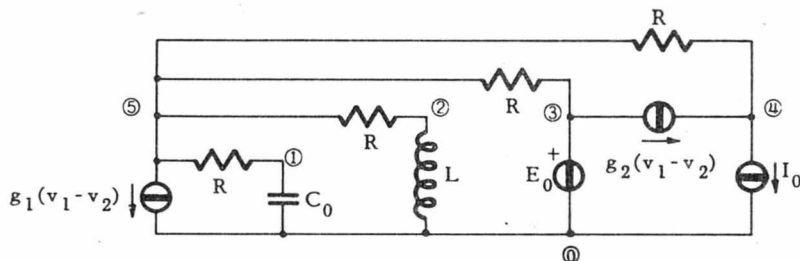


Fig. IX.2.3 - Circuito considerato nell'esempio IX.2.2. Le tensioni sono riferite al nodo comune, indicato con 0, ed inoltre $g_1 = 2$ $g_2 = 1/R = G$.

Applichiamo il procedimento descritto passo per passo, utilizzando il metodo di analisi su base nodi:

1) Attivazione della causa relativa al condensatore C_0 , dopo aver sostituito il generatore di tensione con un corto circuito e l'induttore e il generatore di corrente con un circuito aperto. Si ottiene il circuito di fig. IX.2.4. Esaminando il circuito, si vede subito che si ha:

$$v_1 = 1 \quad ; \quad v_2 = v_5 \quad ; \quad v_3 = 0$$

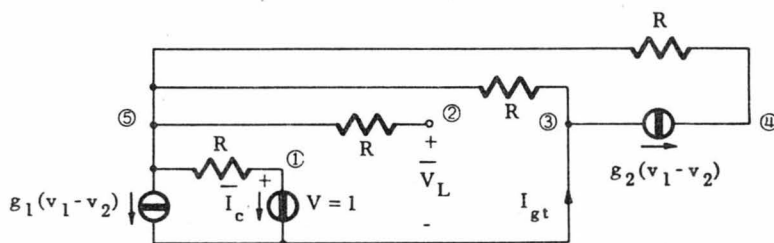


Fig. IX.2.4 - Circuito derivato da quello di fig. IX.2.3 disattivando tutti i generatori indipendenti e sostituendo l'induttore con un circuito aperto ed il condensatore con un generatore di tensione di valore unitario.

Le equazioni che occorre considerare sono quindi le seguenti:

nodo 1	$(1 - v_5) G = -\bar{I}_C$
nodo 3	$-v_5 G = -g_2(1 - v_5) + I_{gt}$
nodo 4	$(v_4 - v_5) G = g_2(1 - v_5)$
nodo 5	$3 G v_5 - G - G v_4 = -g_1(1 - v_5)$

Pertanto la seconda colonna della matrice A è pari a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_0} & -\frac{2R}{L} \end{bmatrix}^t$$

mentre la seconda colonna della matrice C è pari a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t$$

3) Disattivazione delle cause relative agli elementi reattivi e al generatore di corrente e attivazione del generatore di tensione con $E_0 = 1$. Si ottiene il circuito indicato in fig.IX.2.6. Esaminando il circuito, si vede subito che si ha:

$$v_1 = 0 \quad ; \quad v_2 = v_5 \quad ; \quad v_3 = 1$$

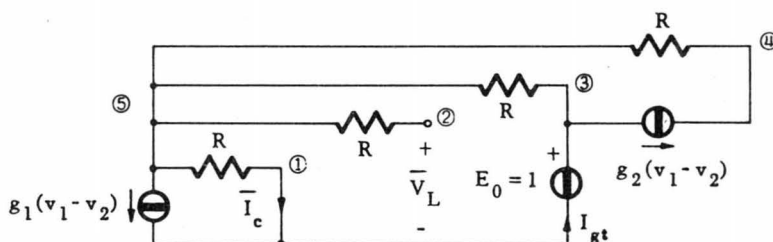


Fig.IX.2.6 - Circuito derivato da quello di fig.IX.2.3, sostituendo l'induttore e il generatore di corrente con circuiti aperti, il condensatore con un corto circuito e ponendo $E_0 = 1$.

Le equazioni ai nodi che occorre considerare sono le seguenti:

$$\text{nodo 3} \quad (1 - v_5) G = -g_2(-v_5) + I_{gt}$$

$$\text{nodo 4} \quad (v_4 - v_5) G = g_2(-v_5)$$

$$\text{nodo 5} \quad 3 G v_5 - G - G v_4 = -g_1(-v_5)$$

Risolvendo il sistema ed effettuando il calcolo delle grandezze d'interesse si ottiene:

$$\bar{I}_C = \frac{2}{3} G \quad \bar{V}_L = \frac{2}{3} \quad \bar{y}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{2}{3} G \end{bmatrix}$$

Pertanto la prima colonna della matrice B è pari a:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{RC_0} & \frac{2}{3L} \end{bmatrix}^t$$

mentre la prima colonna della matrice D è pari a:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{2}{3} G \end{bmatrix}^t$$

4) Disattivazione delle cause relative agli elementi reattivi e al generatore di tensione e attivazione del generatore di corrente con $I_0 = 1$. Si ottiene il circuito di fig.IX.2.7. Esaminando il circuito, si vede subito che si ha:

$$v_1 = 0 \quad ; \quad v_2 = v_5 \quad ; \quad v_3 = 0$$

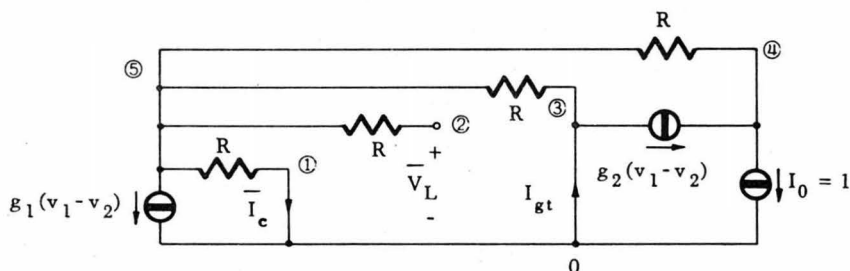


Fig.IX.2.7 - Circuito derivato da quello di fig.IX.2.3, sostituendo l'induttore con un circuito aperto, il condensatore e il generatore di tensione con corti circuiti e ponendo $I_0 = 1$.

Le equazioni ai nodi che occorre considerare sono le seguenti:

$$\text{nodo 3} \quad -G v_5 = -g_2 (-v_5) + I_{gt}$$

$$\text{nodo 4} \quad (v_4 - v_5) G = g_2 (-v_5) - 1$$

$$\text{nodo 5} \quad 3 G v_5 - G v_4 = -g_1 (-v_5)$$

Risolviendo il sistema e calcolando le grandezze d'interesse, si ottiene:

$$\bar{I}_C = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \bar{V}_L = -\frac{2}{3} R \quad ; \quad \bar{y}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Pertanto la seconda colonna della matrice B è pari a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3 C_0} & -\frac{2}{3} \frac{R}{L} \end{bmatrix}^t$$

mentre la seconda colonna della matrice D è pari a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^t$$

Raccogliendo i risultanti ottenuti, le matrici A, B, C, D relative alle equazioni di stato per il circuito di fig. IX.2.3, sono le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{R C_0} \\ \frac{1}{3 L} & -\frac{2 R}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{R C_0} \\ \frac{2}{3 L} & -\frac{2 R}{3 L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ \frac{2}{3 R} & 2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -\frac{2}{3 R} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

IX.3 - Modi naturali di un circuito.



Un circuito privo di eccitazioni, in cui sia immagazzinata energia nei condensatori e negli induttori in un istante di osservazione t_0 , evolve nel tempo per $t \geq t_0$ secondo andamenti caratteristici che dipendono solo dalla sua struttura e dal valore dei componenti. Tali andamenti prendono il nome di «*modi naturali*» del circuito; ciascuna grandezza elettrica (tensione o corrente) varia nel tempo per $t \geq t_0$ secondo una combinazione lineare dei modi naturali, i cui coefficienti dipendono, oltre che dal circuito, anche da come è distribuita l'energia nell'istante $t = t_0$. Ciò implica, in particolare, che per opportune distribuzioni è possibile far sparire in qualche grandezza elettrica uno o più modi naturali.

Le affermazioni precedenti possono essere provate in modo molto semplice mediante le equazioni di stato. A questo scopo riscriviamo tali equazioni nel dominio della trasformata di Laplace, in assenza di eccitazioni. Si ha:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$(IX.3.1) \quad s X(s) - x(0^-) = A X(s)$$

$$Y(s) = C X(s) \quad \leftarrow y(t) = C x(t) + D u(t)$$

avendo indicato con le lettere maiuscole le trasformate del vettore di stato e di uscita e con $x(0^-)$ il valore del vettore di stato all'istante iniziale.

Mediante semplici operazioni sulle matrici, dalle (IX.3.1) si ha:

$$(IX.3.2) \quad \begin{aligned} X(s) &= [sU - A]^{-1} x(0^-) \\ Y(s) &= C [sU - A]^{-1} x(0^-) \end{aligned}$$

matrice unita dello stesso ordine di A
trovare gli autovalori

diagonale

in cui U è la matrice unità di ordine uguale a quello di A

Dalle (IX.3.2) risulta che le funzioni che rappresentano tutte le grandezze elettriche del circuito sono funzioni razionali reali della variabile s , aventi le seguenti proprietà:

1) le funzioni sono proprie; infatti i termini della matrice inversa della matrice $sU - A$ sono funzioni razionali proprie, in quanto tutti i cofattori di tale matrice sono di grado inferiore al suo determinante, e ogni funzione rappresentante una grandezza elettrica del circuito è una combinazione lineare dei suddetti termini, come appare dalla seconda delle (IX.3.2);

2) le funzioni hanno gli stessi poli; tali poli coincidono con gli autovalori⁽¹⁾ della matrice A , come risulta evidente dalla prima delle (IX.3.2).

Dalle due proprietà precedenti deriva che ogni grandezza elettrica del circuito può essere rappresentata nel dominio della trasformata di Laplace nel seguente modo, facendo riferimento al suo sviluppo in frazioni parziali:

$$(IX.3.3) \quad Q(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{a_{km}}{(s-s_k)^m}$$

essendo: N_p il numero degli autovalori distinti della matrice A ; s_k il generico autovale; n_k la corrispondente molteplicità.)

Dalla seconda delle (IX.3.2) risulta chiaro che le quantità reali a_{km} dipendono, oltre che dal circuito, anche dal valore iniziale del vettore di stato. L'espressione nel tempo per $t \geq 0$ della (IX.3.3) è la seguente:

$$(IX.3.4) \quad q(t) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{a_{km}}{(m-1)!} t^{m-1} e^{s_k t} u_{-1}(t)$$

In base alla definizione data, le funzioni $t^{m-1} e^{s_k t} u_{-1}(t)$ rappresentano i modi naturali del circuito. È evidente dalle (IX.3.2) e (IX.3.3) che i

(1) - Ricordiamo che detta A una matrice reale $n \times n$, prende il nome di «matrice caratteristica» associata ad A , la matrice $sU - A$. Inoltre il determinante di quest'ultima viene indicato come «polinomio caratteristico» di A e le sue radici «autovalori» di A .

modi naturali non dipendono dalla distribuzione iniziale di energia nel circuito e che con distribuzioni particolari, cioè con valori particolari del vettore $x(0^-)$, è possibile eliminare uno o più modi naturali da qualche grandezza elettrica, rendendo nullo qualcuno dei coefficienti a_{km} . Rimangono quindi dimostrate le affermazioni fatte all'inizio del presente paragrafo. Per ulteriori dettagli sugli aspetti generali dei modi naturali si rimanda ai testi di Teoria dei Sistemi⁽¹⁾.

Esempio IX.3.1

Individuare i modi naturali del circuito considerato nell'esempio IX.2.1. Determinare inoltre l'andamento nel tempo della prima componente del vettore di uscita ivi considerato, nell'ipotesi che la tensione ai capi del condensatore all'istante iniziale sia 1 volt e che la corrente nell'induttore sia nulla. Effettuare i calcoli con i seguenti valori per i componenti:

$$R_1 = R_3 = 1 \Omega \quad ; \quad R_2 = 1/5 \Omega \quad ; \quad C = 1 F \quad ; \quad L = 1/5 H$$

Utilizzando la matrice A , ottenuta nell'esempio IX.2.1, determiniamo i modi naturali del circuito calcolando preventivamente gli autovalori di tale matrice. Si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{7}{2}\right) + \frac{5}{4} = 0$$

che fornisce con le sue radici gli autovalori, cioè:

$$-1 \quad , \quad -3$$

I modi naturali del circuito sono pertanto i seguenti:

$$e^{-t} u_{-1}(t) \quad ; \quad e^{-3t} u_{-1}(t)$$

(1) - Si veda ad esempio: A. Ruberti, A. Isidori: op. cit., Cap. IV, § 1, 2, 4, 5, 8.

La determinazione dell'andamento per $t \geq 0$ della prima componente del vettore di uscita può essere fatta mediante la seconda delle (IX.3.2); utilizzando i valori numerici, ottenuti nell'esempio IX.2.1, si ha:

$$Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & s + \frac{7}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto la prima componente di Y , cioè la tensione V_1 è pari a:

$$V_1(s) = -\frac{0,5s+3}{(s+1)(s+3)} = -\frac{1,25}{s+1} + \frac{0,75}{s+3}$$

L'andamento nel tempo richiesto è, per $t \geq 0$, il seguente:

$$v_1(t) = -1,25 e^{-t} + 0,75 e^{-3t}$$

IX.3.1 - Assenza di modi naturali in qualche grandezza elettrica.

È stato messo in evidenza che per particolari distribuzioni di energia nel circuito all'istante iniziale, può accadere che qualche grandezza elettrica sia priva di uno o più modi naturali. Ciò è evidente dalla (IX.3.2), in quanto si comprende che una scelta opportuna delle componenti di $x(0^+)$ potrebbe annullare qualcuno dei coefficienti a_{km} della (IX.3.3), scritta per la grandezza elettrica d'interesse.



Fig. IX.3.1 - Esempio di circuito costituito da due parti A e B tale che i modi naturali di una parte non compaiono nelle espressioni delle grandezze elettriche dell'altra: a) configurazione iniziale; b) configurazione dopo l'eliminazione delle eccitazioni.

È interessante, tuttavia, segnalare che a volte l'assenza dei modi naturali è legata a particolari configurazioni del circuito. Il caso più tipico da questo punto di vista è quello di un circuito costituito da due o più parti connesse in parallelo fra loro e ad un generatore indipendente di tensione, come mostrato in fig. IX.3.1 a). È evidente che i modi na-

turali di una parte non appaiono nelle espressioni delle grandezze elettriche dell'altra; infatti, poichè i modi naturali devono essere valutati in assenza di eccitazioni esterne, occorre corto-circuitare il generatore di tensione e quindi le reti assumono la configurazione di fig. IX.3.1 b), nella quale esse sono connesse solo per un nodo. E' quindi chiaro che fisicamente le due parti non si influenzano, qualunque sia la scelta della distribuzione di energia iniziale nel circuito.

IX.3.2 - Calcolo diretto del numero dei modi naturali per circuiti costituiti da resistori, condensatori e induttori.

Il numero dei modi naturali, che coincide con il numero delle variabili di stato e quindi con l'ordine del vettore di stato e della matrice A , fornisce una misura della complessità di un circuito; di conseguenza può risultare utile avere a disposizione un metodo rapido e semplice per calcolarlo. Un metodo di questo tipo esiste nel caso dei circuiti costituiti da resistori, induttori e condensatori, che indicheremo nel seguito con la sigla **RLC**. Il metodo si basa sull'osservazione che il numero delle variabili di stato di un circuito, che coincide appunto con l'ordine del vettore di stato, è strettamente legato al numero delle condizioni iniziali; ciò è d'altra parte evidente osservando che la prima delle equazioni di stato non è altro che un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, che richiede per la soluzione tante condizioni iniziali indipendenti quante sono le equazioni del sistema. Occorre quindi calcolare il numero delle condizioni iniziali che si possono imporre nel circuito indipendentemente l'una dall'altra e che riguardano solo il sistema di equazioni suddetto. Quest'ultima precisazione è necessaria per il comportamento anomalo del modo naturale che corrisponde al polo per $s = 0$, cioè al modo naturale che consiste in un andamento costante per $t \geq t_0$. Il comportamento anomalo in questione deriva dal fatto che in un circuito si possono avere per $t \geq t_0$ varie grandezze elettriche, tensioni o correnti, del tutto indipendenti tra loro ad andamento costante nel tempo. Ciò significa che, essendo indipendenti tra loro, esse aumentano il numero delle condizioni iniziali che si possono imporre nel circuito, contribuendo però, qualunque sia il loro numero, al solo modo naturale suddetto. Di conseguenza, le condizioni iniziali di questo tipo contano sempre per uno, qualunque sia il loro numero, ai fini del computo del numero dei modi naturali.

Per poter quindi calcolare il numero dei modi naturali di un circuito occorre determinare:

1) il numero N_i delle condizioni iniziali indipendenti che si possono imporre nel circuito;

2) il numero N_0 delle condizioni iniziali che riguardano il modo naturale corrispondente al polo per $s = 0$.

Per quanto detto, il numero dei modi naturali è:

(IX.3.5)

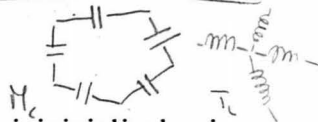
$$N_i = (N_0 - 1 + |N_0 - 1|)/2$$

$$N_i = \frac{[N_0 - 1 + |N_0 - 1|]}{2}$$

Nel caso di un circuito RLC, il calcolo di (N_i) ed (N_0) è molto semplice. Infatti le condizioni iniziali che si possono imporre indipendentemente l'una dall'altra coincidono con il numero n_L degli induttori più il numero n_C dei condensatori presenti nel circuito, diminuito delle relazioni conseguenti dalle leggi di Kirchhoff che sussistono, indipendentemente le une dalle altre, tra le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori. Le relazioni del primo tipo sussistono quando sono presenti nel circuito maglie costituite solo da condensatori e generatori indipendenti di tensione. Le relazioni del secondo tipo invece sussistono quando sono presenti tagli costituiti solo da induttori e generatori indipendenti di corrente. Il numero M_C di maglie del tipo suddetto si ottiene direttamente andando a considerare il sottografo del circuito, ottenuto aprendo tutti i rami con l'esclusione dei condensatori e dei generatori indipendenti di tensione. Il numero M_C coincide con il numero di rami del co-albero di questo sottografo. Analogamente, il numero T_L di tagli del tipo precedente si ottiene direttamente andando a considerare il sottografo del circuito, ottenuto corto-circuitando tutti i rami eccetto gli induttori ed i generatori indipendenti di corrente. Il numero T_L coincide con il numero di rami dell'albero di questo sottografo. In conclusione si ha:

(IX.3.6)

$$N_i = n_C + n_L - M_C - T_L$$



Per quanto riguarda il numero N_0 di condizioni iniziali che riguardano il modo naturale corrispondente al polo per $s = 0$, occorre calcolare il numero di grandezze elettriche che si possono stabilire nel circuito indipendentemente l'una dall'altra e che hanno un andamento costante nel tempo. Da un punto di vista fisico tali grandezze sono facilmente individuabili. Infatti, è intuitivo che si può avere un andamento costante nel tempo, di valore arbitrario, nei seguenti casi:

- 1) una corrente che percorre una maglia di soli induttori e generatori indipendenti di tensione;
- 2) una tensione ai capi dei rami di un taglio costituito da soli condensatori e generatori indipendenti di corrente.



Si tratta quindi di calcolare il numero delle maglie e dei tagli suddetti. Anche in questo caso la determinazione di tali numeri si può fare direttamente, andando a considerare:

1) il sottografo del circuito ottenuto aprendo tutti i rami con l'esclusione degli induttori e dei generatori indipendenti di tensione; il numero di correnti indipendenti ad andamento costante nel tempo coincide con il numero M_L di maglie indipendenti di questo sottografo, cioè con il numero dei rami di un suo co-albero;

2) il sottografo del circuito ottenuto corto-circuitando tutti i rami eccetto i condensatori ed i generatori indipendenti di corrente; il numero di tensioni indipendenti ad andamento costante nel tempo coincide con il numero T_C di tagli indipendenti di questo sottografo, cioè con il numero dei rami di un suo albero. In conclusione si ha:

$$(IX.3.7) \quad \boxed{N_0} = \boxed{M_L + T_C}$$

Quindi, tenendo conto delle (IX.3.5), (IX.3.6) e (IX.3.7), si ha che il numero dei modi naturali di un circuito RLC è pari a:

$$(IX.3.8) \quad n_C + n_L - M_C - T_L - (M_L + T_C - 1 + |M_L + T_C - 1|)/2$$

Esempio IX.3.2

Calcolare il numero dei modi naturali del circuito considerato nell'esempio IX.2.1.

Dall'esame di fig. IX.2.1 si rileva che $M_C = T_L = M_L = T_C = 0$, $n_C = n_L = 1$. Quindi il numero dei nodi naturali è pari a 2, come del resto era già insito nello sviluppo dell'esempio IX.2.1.

Esempio IX.3.3

Determinare il numero dei nodi naturali del circuito di fig. IX.3.2, mediante la (IX.3.8) e per via diretta.

Supponiamo di avere nel circuito di fig. IX.3.2 una distribuzione qualsiasi di energia all'istante iniziale e consideriamo quindi il suo circuito equivalente nel dominio della trasformata di Laplace, riportato sempre in fig. IX.3.2. L'esame di questo circuito equivalente mostra che:

$$n_C = n_L = 3 \quad ; \quad M_C = T_L = 0 \quad ; \quad M_L = T_C = 1$$

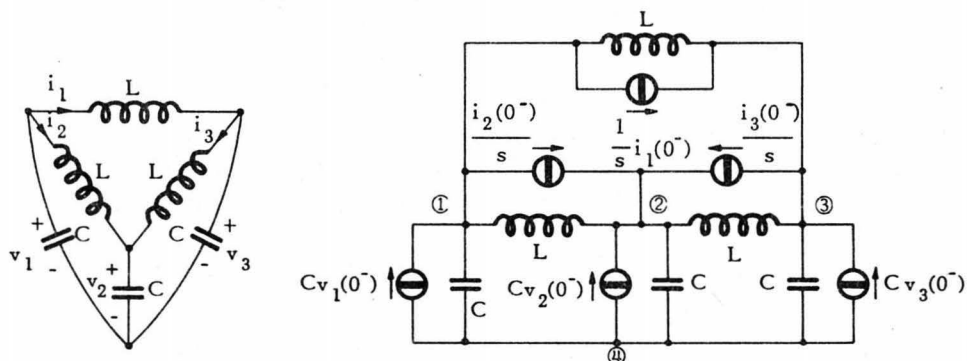


Fig. IX.3.2 - Circuito considerato nell'esempio IX.3.3 e suo circuito equivalente nel dominio della trasformata di Laplace.

Quindi il numero dei modi naturali, in base alla (IX.3.8), è pari a 5.

Procediamo ora per via diretta, usando uno dei metodi di analisi classici, ad esempio quello su base nodi. Prendendo il nodo 4 come riferimento, si ha:

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{2}{sL} & -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & sC + \frac{2}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} & sC + \frac{2}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv_1(0^-) - \frac{1}{s} \{i_1(0^-) + i_2(0^-)\} \\ Cv_2(0^-) + \frac{1}{s} \{i_2(0^-) + i_3(0^-)\} \\ Cv_3(0^-) + \frac{1}{s} \{i_1(0^-) - i_3(0^-)\} \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{a(s)} \begin{bmatrix} b(s) & c(s) & c(s) \\ c(s) & b(s) & c(s) \\ c(s) & c(s) & b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sCv_1(0^-) - i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ sCv_2(0^-) + i_2(0^-) + i_3(0^-) \\ sCv_3(0^-) + i_1(0^-) - i_3(0^-) \end{bmatrix}$$

ove:

$$a(s) = s^6 (LC)^3 + 6s^4 (LC)^2 + 9LCs^2$$

$$b(s) = s^4 C^2 + 4s^2 \frac{C}{L} + \frac{3}{L^2}$$

$$c(s) = \frac{C}{L} s^2 + \frac{3}{L^2}$$

Semplici calcoli mostrano che le tensioni dei nodi e_1, e_2, e_3 sono funzioni razionali proprie aventi il grado del denominatore uguale a 5. I poli comuni sono:

$$s = 0 \quad ; \quad s = \pm j \frac{\sqrt{3}}{LC} \text{ di molteplicità } 2$$

I poli precedenti sono quindi i poli anche delle tensioni ai capi degli elementi (condensatori ed induttori). Per quanto riguarda le correnti degli elementi, occorre ricordare che esse si ottengono tenendo conto anche del generatore di corrente corrispondente alla condizione iniziale. Tenendo conto della particolare configurazione del circuito è sufficiente calcolare la corrente di un solo induttore e di un solo condensatore; ad esempio consideriamo l'induttore tra i nodi 1 e 3. Si ha, per la corrente che lo attraversa:

$$\begin{aligned} \frac{e_1 - e_3}{sL} + \frac{1}{s} i_1(0^-) &= \frac{L^2}{sa(s)} [sCv_1(0^-) - i_1(0^-) - i_2(0^-) - sCv_3(0^-) - i_1(0^-) + \\ &+ i_3(0^-)] \cdot [b(s) - c(s)] + \frac{1}{s} i_1(0^-) \end{aligned}$$

È facile constatare che questa espressione è una funzione razionale propria con i poli coincidenti con quelli di e_1, e_2, e_3 . Per quanto riguarda i condensatori, calcoliamo la corrente del condensatore situato tra il nodo 1 e il nodo 4. Tale corrente è pari a:

$$sCe_1 - Cv_1(0^-)$$

Questa espressione è una frazione propria con poli coincidenti con quelli di e_1 , ad eccezione di $s = 0$, che è assente.

Quanto detto mette in evidenza che i poli delle grandezze elettriche del circuito considerato sono 5 e pertanto tale è anche il numero dei modi naturali, in accordo con il calcolo effettuato con la formula (IX.3.8).

*

APPENDICI AL CAPITOLO IX

APPENDICE IX.A - *Utilità della rappresentazione mediante le equazioni di stato nella sintesi dei micro-circuiti lineari.*

È noto dalla teoria dei sistemi che se si hanno a disposizione elementi ideali dei seguenti tipi:

- sommatore di funzioni del tempo,
- integratore di funzioni del tempo,
- moltiplicatore di una funzione del tempo per una costante reale, è immediato individuare uno schema di sistema che corrisponda ad equazioni di stato assegnate⁽¹⁾.

Tale disponibilità è tipica della micro-elettronica e quindi per questa particolare categoria di circuiti, siamo nella condizione di ottenere direttamente il circuito dalle equazioni di stato.

IX.A.1 - Elementi ideali tipici della microelettronica lineare e schemi dei sommatore, degli integratori e dei moltiplicatori.

I componenti usuali della microelettronica lineare sono i resistori, i condensatori, i transistori e gli amplificatori operazionali. Mancano gli induttori, in quanto al diminuire delle dimensioni dei circuiti le perdite associate a tali elementi divengono talmente elevate da rendere tali componenti inaccettabili. Rimanendo ad un livello di approssimazione

(1) - Si veda ad esempio: A. Ruberti, A. Isidori, op. cit., Cap. II, § 8.

grossolana, i componenti precedenti possono essere rappresentati semplicemente tramite i resistori, i condensatori ed i nullori. Mediante questi elementi ideali (in particolare considereremo il nullore a quattro terminali, corrispondente all'amplificatore operazionale) è possibile ottenere gli elementi fondamentali per la sintesi diretta a partire dalle equazioni di stato.

Il sommatore è mostrato in fig.IX.A.1; tale schema è caratterizzato dal fornire in uscita la somma delle tensioni di ingresso cambiata di segno. Esistono altri schemi che permettono di evitare tale cambiamento di segno, utilizzando o più di un nullore oppure un nullore senza ingresso a massa. Si rimanda per dettagli ai testi relativi ai circuiti attivi⁽¹⁾.

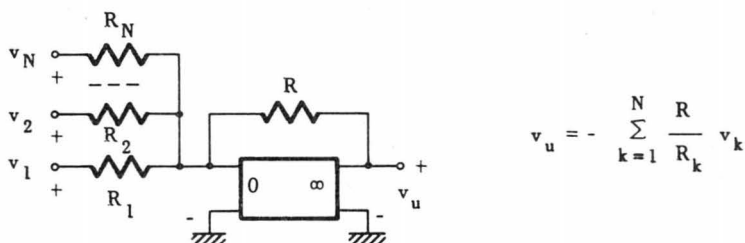


Fig.IX.A.1 - Schema del sommatore, costituito da resistori ed un nullore a 4 terminali.

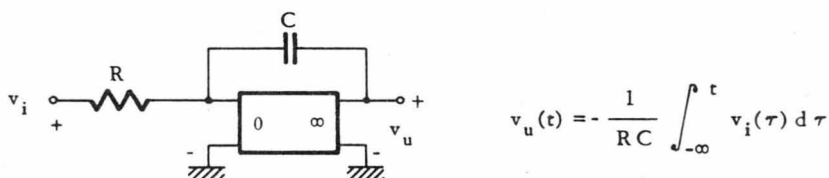


Fig.IX.A.2 - Schema dell'integratore costituito da un nullore, da un resistore e da un condensatore.

Lo schema dell'integratore è mostrato in fig.IX.A.2; tale schema, oltre ad operare l'integrazione della funzione d'ingresso, ha l'effetto di cambiare il segno. Anche in questo caso esistono schemi che permettono di evitare tale cambiamento di segno⁽¹⁾.

(1) - Si veda ad esempio: L.P. Huelsman, « Theory and design of active RC circuits », McGraw-Hill, 1968 e S.K. Mitra, « Analysis and synthesis of linear active networks », J. Wiley, 1969.

Per quanto riguarda infine il moltiplicatore per una costante, osserviamo che tale moltiplicazione viene già ottenuta con lo schema di figura IX.A.1, tramite rapporto di resistenze.)

È importante notare che gli schemi proposti sono approssimazioni notevolmente grossolane dei microcircuiti reali, dovute soprattutto all'aver usato il nullore a quattro terminali al posto dell'amplificatore operazionale. In particolare, gioca un ruolo fondamentale il prodotto guadagno-larghezza di banda dell'amplificatore sulle prestazioni di tali microcircuiti. Per dettagli su questi aspetti, fondamentali per la realizzazione, si rimanda ai testi relativi ai circuiti attivi.

IX.A.2 - Un problema tipico di sintesi nella microelettronica lineare.

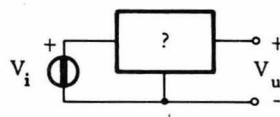
Nel presente paragrafo considereremo in dettaglio un problema di sintesi che è tipico della microelettronica lineare; si tratta della sintesi di una funzione di trasferimento in tensione assegnata tramite una funzione razionale di secondo grado nella variabile s . Tale problema è un passo fondamentale nella sintesi dei filtri e degli equalizzatori. La soluzione di tale problema è quella che prende il nome di «biquad»⁽¹⁾. Essa è un tipico esempio di utilizzazione delle equazioni di stato nella sintesi.

Il problema che si vuole risolvere è quello di individuare lo schema di un circuito costituito da integratori, sommatore e moltiplicatori che realizza, almeno da un punto di vista ideale, una funzione di trasferimento in tensione del tipo seguente:

$$(IX.A.1) \quad \frac{V_u}{V_i} = \frac{m s^2 + c s + d}{s^2 + a s + b}$$

in cui V_u e V_i sono indicate in fig. IX.A.3.

Fig. IX.A.3 - Sintesi di una funzione di trasferimento in tensione.



(1) - Si veda per ulteriori dettagli su questa soluzione: J. Tow, «A step-by-step active filter design», IEEE Spectrum, 1969, N. 12, pp. 64-68. Per ulteriori dettagli sull'inserimento della sintesi di ciascuna sezione nella cascata di sezioni che compongono un filtro, si veda: G. Martinelli, M. Salerno, «Sensitivity and noise comparison of RC active filters», Network and Signal Theory, P. Peregrinus, Londra, 1973, pp. 196-214.

Il primo passo nella soluzione di questo problema è quello di individuare una rappresentazione possibile mediante le equazioni di stato del circuito che deve realizzare la funzione (IX.A.1). Poichè nel circuito gli unici elementi con memoria sono i condensatori e poichè i modi naturali richiesti sono due nella (IX.A.1), si può immediatamente concludere che il minimo numero di condensatori richiesto per il circuito è due. Vedremo di seguito che questo numero è anche sufficiente per la sintesi.

L'osservazione precedente permette di dire che l'ordine del vettore di stato è due.

Per quanto riguarda il vettore di ingresso e quello di uscita, essi si deducono direttamente dalla fig. IX.A.3, in quanto V_i è l'unica eccitazione presente e V_u è l'unica grandezza elettrica richiesta. In conclusione, il circuito incognito è caratterizzato dalla seguente rappresentazione:

$$(IX.A.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad y = V_u; \quad u = V_i; \\ A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \quad C = [c_1 \quad c_2]; \quad D = f \end{aligned}$$

ove compaiono 9 quantità incognite. Queste quantità, tuttavia, sono in gran parte vincolate dalla richiesta iniziale che la rappresentazione (IX.A.2) sia di un circuito capace di realizzare la (IX.A.1). Per individuare i vincoli in questione, occorre ricavare la funzione di trasferimento in tensione tramite le 9 quantità precedenti. A questo scopo osserviamo che si ha:

$$(IX.A.3) \quad \frac{y}{u} = C(sU - A)^{-1} B + D =$$

$$= \frac{b_1 c_1 s + b_1 (c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) + b_2 c_2 s + b_2 (c_1 a_{12} - c_2 a_{11})}{s^2 + a_{11} a_{22} - s(a_{11} + a_{22}) - a_{12} a_{21}} + f$$

Dal confronto della (IX.A.3) con la (IX.A.1), si hanno i seguenti vincoli per le quantità incognite:

$$(IX.A.4) \quad \begin{aligned} f &= m \\ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} &= b \\ a_{11} + a_{22} &= -a \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 &= c - am \\ b_1 (c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) + b_2 (c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) &= d - bm \end{aligned}$$

Poichè le quantità incognite sono 9 e le equazioni di vincolo sono 5, sono possibili molte soluzioni. Nel caso presente ci limitiamo a descriverne una (Tow), che si basa sulla semplificazione preventiva delle suddette equazioni, che come si nota sono non lineari. Precisamente, si ottiene una notevole semplificazione, con le seguenti scelte arbitrarie:

$$(IX.A.5) \quad a_{22} = b_2 = 0$$

Ovviamente, si ha ancora sovrabbondanza di incognite rispetto ai vincoli; ciò comporta l'introduzione di due parametri liberi di grande aiuto in fase di realizzazione⁽¹⁾. Precisamente, si ha:

$$(IX.A.6) \quad \begin{aligned} a_{11} &= -a & c_2 &= \frac{d - bm}{b_1 a_{21}} \\ a_{12} &= h \sqrt{b} & b_1 &= k |c - am| \\ a_{21} &= -\frac{b}{a_{12}} & c_1 &= \frac{c - am}{b_1} \end{aligned}$$

nell'ipotesi che $b \neq 0$, $c \neq am$. I parametri liberi sono h e k , che possono assumere qualsiasi valore reale finito diverso da zero. In conclusione, nel caso generale, le equazioni di stato del circuito incognito sono, nel dominio della trasformata di Laplace:

$$x_1 = \frac{a_{12} x_2 + b_1 V_i}{s + a}$$

$$(IX.A.7) \quad x_2 = \frac{a_{21}}{s} x_1$$

$$V_u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + m V_i$$

in cui a_{12} , a_{21} , c_1 e c_2 sono dati dalla (IX.A.6).

Il secondo passo della sintesi consiste nell'individuazione dello schema a partire dalle (IX.A.7) o dalle equazioni analoghe ottenibili con altre scelte. Utilizzando gli integratori e sommatori di fig. IX.A.2 e IX.A.1, in cui non c'è libertà di scelta di segno, occorre scegliere op-

(1) - In G. Martinelli, M. Salerno, op. cit., viene fatto vedere come mediante opportuni procedimenti di ottimizzazione sia possibile scegliere questi parametri nel contesto generale di un filtro a più sezioni biquad in cascata. Variando di poco questi parametri, si possono avere grandissime variazioni di prestazioni del tipo rapporto segnale rumore in uscita, effetto delle tolleranze dei componenti, ecc.

portunamente il segno dei parametri liberi, in dipendenza dal segno dei coefficienti della (IX.A.1), se si vuole minimizzare la complessità dello schema finale del circuito. Poichè tali scelte dipendono, come detto, dal segno dei coefficienti della funzione, è opportuno limitare la trattazione a qualche caso particolare significativo, quale ad esempio quello di una funzione di trasferimento con zero sull'asse immaginario del piano della variabile s . La funzione da sintetizzare, in questo caso, è quindi caratterizzata da:

$$(IX.A.8) \quad c = 0$$

Supponiamo inoltre, senza perdita di generalità, che:

$$(IX.A.9) \quad m < 0$$

Per ridurre la complessità del circuito, scegliamo i segni di h e k in modo che a_{12} , b_1 , c_1 siano negative. Quindi:

$$(IX.A.10) \quad a_{12} = -\sqrt{b} k_1 ; \quad b_1 = a m k_2 ; \quad c_1 = -1/k_2$$

essendo k_1 e k_2 quantità arbitrarie positive. La quantità c_2 è uguale a:

$$(IX.A.11) \quad c_2 = \frac{(d - b m) k_1}{\sqrt{b} k_2 a m}$$

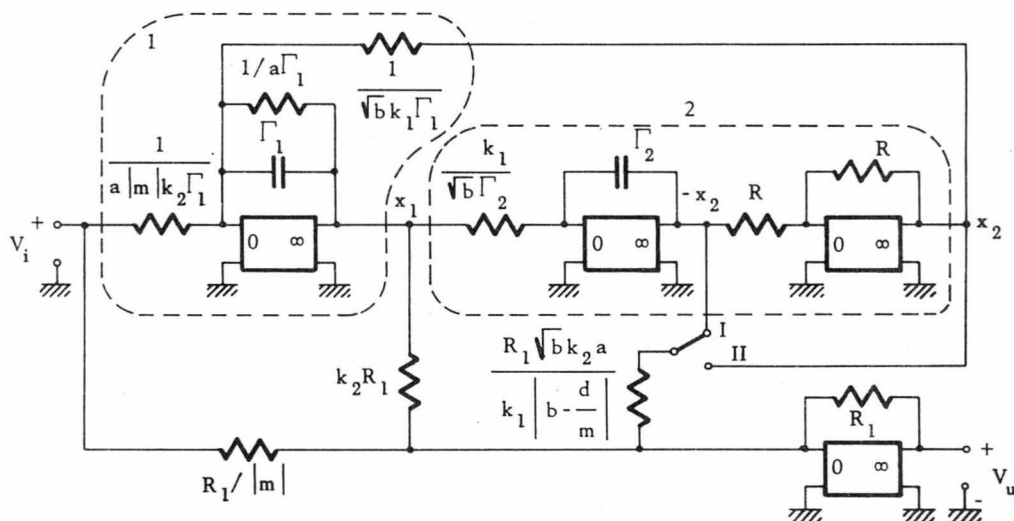


Fig. IX.A.4 - Schema del circuito che realizza zeri di trasmissione sull'asse immaginario. Il deviatore è nella posizione I quando $b < d/m$ e in quella II quando $b > d/m$. Per $b = d/m$ manca il collegamento tra I e II e l'ingresso del sommatore di uscita.

e quindi è positiva se $d < b m$ e negativa se $d > b m$. Per quanto riguarda a_{21} , risulta invece positiva, cioè:

$$(IX.A.12) \quad a_{21} = \frac{\sqrt{b}}{k_1}$$

Di conseguenza, la prima delle (IX.A.7) si può realizzare mediante un integratore sommatore (indicato entro la parte tratteggiata 1 di figura IX.A.4), la seconda mediante la cascata di un integratore ed un invertitore (parte tratteggiata 2 di fig. IX.A.4) ed infine la terza con un sommatore invertitore. Poichè il segno di c_2 può essere qualsiasi, occorre prevedere nello schema due connessioni diverse, a seconda di tale segno. È importante inoltre notare che lo schema di fig. IX.A.4 realizza « formalmente » la funzione (IX.A.1) qualsiasi sia il valore positivo di k_1 , k_2 , Γ_1 , Γ_2 , R_1 ed R . Tali quantità arbitrarie sono molto utili in sede di progettazione per migliorare il comportamento del circuito reale dai vari punti di vista che possono interessare nelle applicazioni.

APPENDICE IX.B - Riferimenti bibliografici.

La trattazione del circuito come un particolare sistema si è sviluppata negli ultimi anni parallelamente alla teoria dei sistemi. I vantaggi che scaturiscono dalla particolare prospettiva con cui si considera il circuito lineare e permanente sono tipici di questo approccio, cioè la possibilità di sviluppare dei procedimenti formali di sintesi di notevole importanza teorica. Si veda a proposito il testo di B.D.O. Anderson, S. Vongpanitlerd, «Network analysis and synthesis. A modern system approach», Englewood Cliffs 1973. Tipici di questo approccio sono anche gli svantaggi, cioè la difficoltà di individuare circuiti validi da un punto di vista pratico, salvo casi semplici come quello illustrato nel § IX.A.

I procedimenti di analisi descritti nel presente capitolo sono stati volutamente mantenuti su un livello elementare e particolare. La trattazione generale è disponibile, a livello accessibile, nel testo di R.A. Rohrer, «Circuit theory. An introduction to the state variable approach», Mc Graw-Hill, 1970.

*

APPENDICE AL TESTO

APPENDICE A

DERIVAZIONE DEL MODELLO DI CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE E SUOI LIMITI DI VALIDITÀ

A.1 - Introduzione.

La generica struttura elettrica è costituita da una regione di spazio, contenente corpi di diversa natura e che diviene sede di fenomeni elettromagnetici, quando in essa si verificano sollecitazioni esterne coincidenti usualmente con trasformazioni di energia non elettrica in elettrica. La caratterizzazione quantitativa del fenomeno elettromagnetico richiede l'uso di grandezze appropriate, la conoscenza delle leggi fisiche che vincolano tali grandezze e la definizione di opportune quantità atte a precisare il comportamento dei vari corpi presenti nella regione d'interesse. Le grandezze in questione sono:

$\vec{E}$ *campo elettrico*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in volt su metro ($\text{LMT}^{-2} \text{Q}^{-1}$) ⁽¹⁾;

$\vec{D}$ *induzione elettrica*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in coulomb su metro quadrato (QL^{-2});

$\vec{H}$ *campo magnetico*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in ampère-spire su metro ($\text{L}^{-1} \text{T}^{-1} \text{Q}$);

$\vec{B}$ *induzione magnetica*: è una grandezza vettoriale la cui ampiezza si misura in weber su metro quadrato ($\text{MT}^{-1} \text{Q}^{-1}$);

$\vec{J}$ *densità della corrente di conduzione*: è una grandezza vettoriale, la cui ampiezza si misura in ampère su metro quadrato ($\text{M}^{-2} \text{T}^{-1} \text{Q}$).

(1) - Le unità di misura sono quelle del sistema MKSQ, cioè metro, kilogrammo-massa, secondo e coulomb.

Le quantità che precisano il comportamento dei vari corpi presenti nella regione, sono:

γ *conducibilità*: grandezza scalare che si misura in mho su metro ($L^{-3} M^{-1} Q^2 T$);

ϵ *costante dielettrica*: grandezza scalare che si misura in farad su metro ($L^{-3} M^{-1} Q^2 T^2$);

μ *permeabilità magnetica*: grandezza che si misura in henry su metro ($L M Q^{-2}$);

ρ *densità volumetrica di carica*: grandezza scalare che si misura in coulomb su metro cubo ($L^{-3} Q$).

Le grandezze precedenti sono in generale funzioni del punto e del tempo e sono legate fra loro in base alle equazioni di Maxwell, cioè:

$$(A.1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(A.2) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(A.3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(A.4) \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

Esistono inoltre altre relazioni che legano le grandezze precedenti e che dipendono dalla natura dei corpi presenti nella regione d'interesse. Tali equazioni sono, nei vari casi possibili:

$$(A.5) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$(A.6) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(A.7) \quad \vec{J} = \gamma (\vec{E} - \vec{E}_0) + \vec{J}_0$$

in cui $\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$ sono le grandezze elettriche impresse, direttamente legate alle sollecitazioni. Occorre notare che, nello scrivere le equazioni (A.5), (A.6) e (A.7), è stata fatta l'ipotesi che i mezzi che occupano le regioni d'interesse siano isotropi (ciò comporta che le quantità ϵ , μ , γ siano coincidenti con grandezze scalari); nel seguito tale ipotesi verrà mantenuta, insieme alle ipotesi di linearità, permanenza e omogeneità

(ciò comporta che le quantità ϵ , μ , γ siano indipendenti dallo stato elettromagnetico presente, dal tempo e dal punto).

La conoscenza della forma e natura dei corpi contenuti nella regione d'interesse e delle sollecitazioni impresse rende possibile l'individuazione delle grandezze elettriche in ogni punto della regione. Tale individuazione è molto complessa e può essere notevolmente semplificata nel caso in cui la struttura elettrica in esame sia rappresentabile mediante il modello circuitale a costanti concentrate. L'ipotesi che sta alla base di questo modello è che *le dimensioni della regione d'interesse siano sufficientemente piccole da poter essere trascurate*. L'ipotesi di «*assenza di dimensioni*» è del tutto equivalente a quella di «*velocità di propagazione del fenomeno elettromagnetico infinita*» oppure a quella di «*tempo nullo di trasmissione del fenomeno elettromagnetico da un punto all'altro della regione d'interesse*».

Le tre formulazioni precedenti dell'ipotesi di costanti concentrate permettono di approfondire sia i limiti di validità dell'ipotesi stessa (§ A.2), sia la derivazione del modello di circuito a costanti concentrate nella sua forma globale e nelle sue componenti (§ A.3, A.4, A.5).

A.2 - Limiti di validità dell'ipotesi di «costanti concentrate».

La formulazione dell'ipotesi di «*costanti concentrate*» che più si presta ad una verifica di validità, è quella che riguarda il tempo impiegato dal campo elettromagnetico per spostarsi da un punto all'altro della regione d'interesse. Tale tempo deve potersi trascurare, nel senso che esso deve essere molto piccolo se confrontato con l'entità delle variazioni temporali delle grandezze elettriche tipiche dell'applicazione considerata. Sappiamo infatti che in ogni applicazione delle strutture elettriche è completamente fissata la larghezza dell'intervallo di frequenza in cui cadono gli spettri delle grandezze elettriche. Alla frequenza massima $f_{\max}$ di questo intervallo è legato in modo semplice il minimo intervallo di tempo che è possibile apprezzare, cioè:

$$(A.8) \quad t_{\min} = \frac{1}{2 f_{\max}}$$

Il tempo impiegato dal campo elettromagnetico per propagarsi da un punto all'altro del circuito risulta sempre:

$$(A.9) \quad t \leq L/c$$

dove L è la dimensione massima della regione d'interesse e c è la velocità di propagazione nello spazio libero.

Quindi la verifica da effettuare è che sia:

$$(A.10) \quad L/c \ll \frac{1}{2f_{\max}} \quad \text{ovvero} \quad 2 \frac{L}{c} f_{\max} \ll 1$$

Poichè in ogni applicazione, oltre a $f_{\max}$, è nota anche la massima dimensione che può avere la struttura elettrica d'interesse, la verifica suggerita dalla (A.10) è molto semplice da farsi, come messo in evidenza in tab.A.1, che si riferisce a due applicazioni tipiche ed al valore di c uguale a $3 \cdot 10^8$ m/sec.

Tabella A.1 - Controllo della validità dell'ipotesi di «costanti concentrate» in due applicazioni tipiche. Nel caso dell'applicazione relativa alle microonde, si è considerato per $f_{\max}$ il valore più basso delle frequenze utilizzate in tale campo; tale condizione è ovviamente la più favorevole all'accettabilità dell'ipotesi.

Applicazione	Intervallo frequenze	Dimensione massima L (metri)	$2 \frac{L}{c} f_{\max}$	Risultato del controllo
Riproduzione sonora (alta fedeltà)	< 20 kHz	1	$1,3 \cdot 10^{-4}$	Ipotesi accettabile
Microonde	> 1 GHz	0,1	0,66	Ipotesi non accettabile

A.3 - Conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: suddivisione in regioni tipiche della struttura elettrica.

Per effetto dell'ipotesi di «costanti concentrate» è possibile individuare a priori quali sono le caratteristiche salienti della regione di interesse. In particolare è facile vedere che si possono avere solo pochi tipi di regione, compatibili con l'ipotesi suddetta, caratterizzabili facilmente a partire dalla formulazione basata sulla velocità infinita di propagazione del campo elettromagnetico. Ciò implica, infatti, che sia nullo il prodotto $\epsilon \mu$, che, come è noto, è inversamente proporzionale al quadrato della suddetta velocità. Di conseguenza la regione d'interesse può essere costituita solo di parti aventi nulla o la costante die-

lettrica ϵ o la permeabilità magnetica μ oppure ambedue contemporaneamente. Ciascuna di queste parti ha caratteristiche ben determinate che vanno esaminate in dettaglio.

A.3.1 - Regione di tipo 1.

La regione di tipo 1 è caratterizzata dall'avere nulle sia ϵ che μ . Di conseguenza le grandezze $\vec{B}$ e $\vec{D}$ sono entrambe nulle e pertanto in tale regione *non c'è energia elettrica o magnetica immagazzinata*, ricordando che si ha:

$$\text{densità di energia elettrica} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{densità di energia magnetica} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Poichè $\vec{D}$ è nullo, dalla (A.4) si deduce che deve essere nulla la densità di carica elettrica; ciò implica che non si può avere accumulo di cariche elettriche nella regione e perciò *la corrente di conduzione entrante deve essere uguale a quella uscente*, ricordando che con corrente di conduzione si intende la quantità di carica che attraversa nell'unità di tempo la superficie che racchiude la regione. Questorisultato, d'altra parte, consegue immediatamente dalla (A.2), osservando che, se $\vec{D} = 0$, risulta:

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{H} \quad (\text{A.12})$$

e quindi:

$$\text{div } \vec{J} = \text{div rot } \vec{H} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Inoltre l'annullarsi di $\vec{B}$ comporta dalla (A.1) che:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (\text{A.14})$$

il che significa che il campo elettrico è conservativo e può quindi farsi derivare da una funzione potenziale. *È pertanto possibile parlare senza ambiguità di differenza di potenziale tra due punti.*

Le ulteriori proprietà della regione di tipo 1 sono legate alla forma che assume la sua relazione costitutiva e cioè la (A.7). In particolare ciò che influisce è il valore della conducibilità γ e l'eventuale presenza delle grandezze impresse $\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$. Si possono avere i seguenti casi:

– Regione di tipo 1A.

La caratteristica di questa regione è l'assenza di $\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$ nella (A.7) ed il valore nullo di γ . Di conseguenza non c'è corrente, cioè si ha:

$$(A.15) \quad \vec{J} = 0$$

La (A.15) implica l'assenza di fenomeni di trasformazione di energia misurati da:

$$(A.16) \quad \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Le proprietà messe in evidenza dimostrano che la regione di tipo 1A coincide con il « vuoto ».

– Regione di tipo 1B.

Si ottiene questa regione nel caso che siano assenti $\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$ nella (A.7) e che sia $\gamma = \infty$. Il valore infinito della conducibilità implica che sia:

$$(A.17) \quad \vec{E} = 0$$

Quindi il potenziale della regione di tipo 1B è costante in tutti i suoi punti.

La (A.17) implica l'assenza di fenomeni di trasformazione di energia, misurati dalla (A.16).

È evidente dalle proprietà messe in evidenza che la regione di tipo 1B coincide con un « conduttore perfetto ».

– Regione di tipo 1C.

Nel caso che siano assenti $\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$ dalla (A.7) e che γ abbia un valore finito diverso da zero, si ha la regione di tipo 1C o regione resistiva. Tale regione è caratterizzata da una trasformazione irreversibile di energia elettrica in un'altra forma di energia. Quantitativamente si ha una dissipazione di potenza per unità di volume data dalla (A.16), che nel caso presente diviene:

$$(A.18) \quad \gamma |\vec{E}|^2$$

La regione di questo tipo è il costituente fondamentale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *resistore*.

– Regione di tipo 1D.

In questo caso si ha $\gamma = 0$, $\vec{E}_0 = 0$, $\vec{J}_0 \neq 0$. La regione risultante è sede di una trasformazione reversibile di energia non elettrica

in elettrica, tramite un fenomeno che impone la distribuzione della densità di corrente $\vec{J}_0$. L'entità della potenza trasformata per unità di volume è, dalla (A.16), pari a:

$$(A.19) \quad \vec{J}_0 \cdot \vec{E}$$

La regione di questo tipo è il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate, che prende il nome di *generatore indipendente di corrente*.

– *Regione di tipo 1E.*

In questo caso si ha: $\gamma = \infty$, $E_0 \neq 0$, $J_0 = 0$. La regione risultante è del tutto simile alla 1D e coincide con il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *generatore indipendente di tensione*.

A.3.2 - Regione di tipo 2.

La regione di tipo 2 è caratterizzata da un valore nullo della costante dielettrica ϵ ed un valore diverso da zero della permeabilità magnetica μ . Di conseguenza risulta nulla sia l'induzione elettrica $\vec{D}$ sia l'energia elettrica immagazzinata, in base alla (A.5) e alla (A.11). Risulta perciò presente solo l'energia magnetica, misurata per unità di volume dalla seconda delle (A.11). Poichè $\vec{D}$ è nullo, dalla (A.4) si deduce che risulta nulla la densità di carica elettrica. Ciò implica che non si può avere accumulo di carica nella regione e perciò la *corrente entrante deve essere uguale a quella uscente*. D'altra parte ciò è anche evidente dal fatto che, in tale regione, la densità di corrente soddisfa la (A.12). Da tale relazione, dalla (A.6) e dalla (A.1), si deduce il seguente legame tra la densità di corrente e il campo elettrico:

$$(A.20) \quad \text{rot rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

È importante osservare che nella presente regione non può essere definito il potenziale, in quanto il campo elettrico non è irrotazionale.

La regione di tipo 2 è il costituente essenziale dei componenti del circuito a costanti concentrate che prendono il nome di *induttore, induttori accoppiati e trasformatore*.

A.3.3 - Regione di tipo 3.

La regione di tipo 3 è caratterizzata da un valore della permeabilità magnetica μ nullo ed un valore diverso da zero della costante dielettrica ϵ . Di conseguenza risulta nulla sia l'induzione magnetica $\vec{B}$ sia l'energia magnetica immagazzinata, in base alla (A.6) e alla seconda delle (A.11). Risulta perciò presente solo l'energia elettrica, la cui densità per unità di volume è data dalla prima delle (A.11). Poichè $\vec{B} = 0$, dalla (A.1) risulta che il campo elettrico è irrotazionale e quindi si può parlare senza ambiguità della differenza di potenziale tra due punti. Inoltre, dalla (A.2), osservando che la divergenza di un rotore è nulla, si ottiene:

$$(A.21) \quad \operatorname{div} \vec{J} = - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}$$

La (A.21) stabilisce il legame tra densità di corrente e campo elettrico nella regione in esame. È importante osservare che il vettore $\vec{J}$ nella presente regione non è solenoidale ($\operatorname{div} \vec{J} \neq 0$).

La regione di tipo 3 è il costituente essenziale del componente del circuito a costanti concentrate che prende il nome di *condensatore*.

A.4 - Ulteriori conseguenze dell'ipotesi di « costanti concentrate »: il modello circuitale della struttura elettrica.

Dall'ipotesi di « costanti concentrate » nella formulazione che impone una velocità infinita del campo elettromagnetico, consegue che la regione occupata dalla struttura elettrica può essere o del tipo 1, 2, 3 oppure coincidere con un aggregato di parti, a loro volta dei tipi suddetti. Occorre inoltre osservare che tali parti sono associate in modo opportuno, allo scopo di permettere una interazione reciproca. In particolare: 1) la regione del tipo 1A costituisce il mezzo in cui sono immerse tutte le altre; 2) regioni del tipo 1B funzionano come connessioni delle rimanenti altre. È chiaro quindi che, più che considerare le rimanenti regioni di per se stesse, conviene considerare sempre aggregati costituiti nel seguente modo: una regione qualunque delle precedenti, con l'esclusione delle 1A e 1B, compresa tra due regioni del tipo 1B non contigue e per il resto confinante con la regione 1A. Uno schema di principio di tale aggregato è mostrato in fig. A.1. I vari aggregati sono connessi tra di loro in corrispondenza alle regioni di tipo 1B.

Tenendo conto di quanto detto in precedenza e della formulazione alternativa dell'ipotesi di « costanti concentrate », che stabilisce la

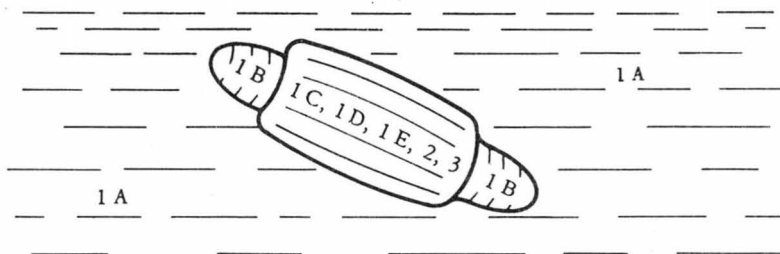


Fig.A.1 - Aggregato tipico di regioni in una struttura elettrica che soddisfa l'ipotesi di «costanti concentrate».

assenza di dimensioni delle regioni, si arriva automaticamente al modello circuitale della struttura elettrica, introdotto nel § I.1.2. Gli elementi ideali privi di dimensioni sono gli aggregati di fig.A.1; le connessioni filiformi sono le regioni del tipo 1B; la regione in cui sono immersi gli elementi e le connessioni è del tipo 1A. Rimane da far vedere:

- 1) la possibilità di caratterizzare ciascun elemento con tensione e corrente;
- 2) la derivazione delle leggi di Kirchhoff dalle equazioni di Maxwell;
- 3) il modo in cui derivare le relazioni costitutive degli elementi ideali tipici.

Punto 1

Per quanto riguarda il punto 1), è sufficiente tenere conto che, per quanto detto nel § A.3.1, le regioni del tipo 1B sono equipotenziali e non accumulano carica. Perciò esse chiaramente si comportano come i terminali ed i morsetti degli elementi ideali. Inoltre, per quanto detto nel § A.3.1, nella regione 1A può essere definita senza ambiguità la differenza di potenziale tra due punti e non si ha corrente o carica accumulata. Ciò significa che si può parlare senza ambiguità di tensione applicata all'elemento ideale: essa coincide con la differenza di potenziale tra le due regioni del tipo 1B di fig.A.1. Per quanto riguarda la corrente, consideriamo una superficie chiusa che intersechi le due regioni di tipo 1B e la regione di tipo 1A, racchiudendola nel suo interno la regione centrale dell'aggregato. Facciamo vedere che la corrente entrante in questa superficie è nulla, ciò che dimostra il fatto che la corrente che entra in un morsetto è di ampiezza uguale e verso contrario a quella entrante nell'altro morsetto. A questo scopo osserviamo che:

$$(A.22) \quad \int_V \rho \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS$$

in cui V è il volume della regione racchiusa dalla superficie S considerata ed $\vec{n}$ la normale all'elemento di superficie dS supposta positiva in senso entrante. Poichè si ha $\epsilon = 0$, sia nella regione 1A che 1B, risulta $\vec{D} = 0$ sulla superficie S e quindi l'integrale (A.22) è nullo. Tale integrale rappresenta la carica accumulata entro la regione racchiusa dalla superficie S e dimostra quanto asserito, in quanto la corrente entrante vale:

$$(A.23) \quad I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV$$

Poichè la corrente entrante in un morsetto è di ampiezza uguale e verso contrario a quella entrante nell'altro morsetto, si può parlare senza ambiguità della corrente che percorre l'aggregato.

Punto 2

Quanto detto in precedenza mette in evidenza che la struttura elettrica è costituita da elementi, cioè gli aggregati di fig. A.1, connessi tra di loro da regioni equipotenziali rappresentabili mediante fili, poichè la dimensione delle regioni non ha influenza, e immersi in un mezzo vuoto. Ciascun elemento è caratterizzabile tramite una tensione ed una corrente.

La prima legge di Kirchhoff si ottiene considerando una superficie chiusa che intersechi gli aggregati del tipo di fig. A.1 solo in corrispondenza alle regioni del tipo 1B ed 1A e seguendo una dimostrazione del tipo di quella basata sulle (A.22) e (A.23).

La seconda legge di Kirchhoff si ottiene considerando una curva chiusa che si svolga nelle regioni 1A e 1B ed intersechi gli aggregati solo in corrispondenza alle regioni 1B. Poichè il campo elettrico è irrotazionale nelle regioni 1A e 1B, il suo integrale lungo la suddetta curva chiusa è nullo. D'altra parte tale integrale coincide con la somma delle tensioni degli elementi via via toccati dalla curva, ciò che dimostra la seconda legge di Kirchhoff.

Punto 3

La derivazione delle relazioni costitutive degli elementi ideali bipolari, già introdotti nel Cap. I, può essere fatta considerando i vari

tipi possibili di aggregati aventi la struttura di fig. A.1. Nel § A.5 questi elementi verranno derivati in modo dettagliato.

A.5 - Derivazione delle relazioni costitutive degli elementi ideali bipolari.

A.5.1 - Resistore.

L'aggregato del tipo di fig. A.1 da considerare in questo caso prevede una regione centrale del tipo 1C. Il legame tra densità di corrente e campo elettrico in tale regione è, come messo in evidenza nel § A.3.1:

$$(A.24) \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

Poichè consideriamo regioni occupate da mezzi lineari è evidente che il campo elettrico in ogni punto è proporzionale alla differenza di potenziale che si ha tra le due regioni 1B dell'aggregato di fig. A.1, cioè:

$$(A.25) \quad \vec{E} = \vec{f}(P) V$$

essendo: $\vec{f}(P)$ una funzione vettoriale di punto avente dimensione L^{-1} ; P il generico punto della regione d'interesse; V la differenza di potenziale, in generale funzione del tempo e naturalmente indipendente dal punto.

Un discorso del tutto simile si può fare anche per la densità di corrente, cioè essa è proporzionale alla corrente che attraversa l'aggregato, definibile senza ambiguità, come messo in evidenza nel paragrafo precedente. Quindi risulta:

$$(A.26) \quad \vec{J} = \vec{g}(P) I$$

essendo: $\vec{g}(P)$ una funzione vettoriale di punto, avente dimensioni L^{-2} ; I la corrente che attraversa l'aggregato, in generale funzione del tempo e naturalmente indipendente dal punto.

Dalle (A.24), (A.25), (A.26), si ha:

$$(A.27) \quad |\vec{g}(P)| I = \gamma |\vec{f}(P)| V$$

che corrisponde a:

$$(A.28) \quad V = \frac{|\vec{g}(P)|}{|\vec{f}(P)|} \frac{1}{\gamma} I$$

Il rapporto:

$$(A.29) \quad \frac{|\vec{g}(P)|}{|\vec{f}(P)|} = h_R$$

deve essere necessariamente costante, di valore dipendente solo dalla forma geometrica dell'aggregato; le sue dimensioni sono L^{-1} .

La (A.28) è la relazione costitutiva del resistore ideale di resistenza:

$$(A.30) \quad R = \frac{h_R}{\gamma}$$

dove h_R è un fattore di forma dato dalla (A.29).

A.5.2 - Generatore indipendente di tensione.

Si ha un generatore indipendente di tensione quando la regione centrale dell'aggregato di fig. A.1 è del tipo 1E. In questo caso il campo elettrico interno alla regione centrale è quello impresso, indipendentemente dalla corrente che fluisce. Risulta perciò indipendente dalla corrente la tensione dell'elemento risultante ed uguale ad un valore impresso dall'esterno.

A.5.3 - Generatore indipendente di corrente.

Se la regione centrale dell'aggregato di fig. A.1 è del tipo 1D, lo elemento risultante è il generatore di corrente. In questo caso, infatti, la densità di corrente nell'interno della regione centrale è impressa dall'esterno e risulta indipendente dal campo elettrico. Ciò implica che la corrente dell'elemento è indipendente dalla tensione applicata ed uguale ad un valore impresso dall'esterno.

A.5.4 - Induttore.

Quando la regione centrale dell'aggregato di fig. A.1 è del tipo 2, si ha l'induttore. Il legame tra campo elettrico e densità di corrente nella regione centrale è quello espresso dalla (A.20), che, supponendo un comportamento lineare per l'aggregato, equivale a:

$$(A.31) \quad \nabla \text{rot} \text{rot} \vec{f}(P) = -\mu \vec{g}(P) \frac{\partial I}{\partial t}$$

avendo usato gli stessi simboli delle (A.25) e (A.26). Risulta quindi:

$$(A.32) \quad V = \mu h_{\lambda} \frac{\partial I}{\partial t}$$

essendo h_{λ} definita dalla:

$$(A.33) \quad -\vec{g}(P) = h_{\lambda} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{f}(P)$$

La quantità h_{λ} deve necessariamente coincidere con una costante, dipendente solo dalla forma dell'aggregato ed avente dimensione L. La (A.32) è la relazione costitutiva di un induttore di induttanza:

$$(A.34) \quad \lambda = \mu h_{\lambda}$$

in cui h_{λ} è un fattore di forma dato dalla (A.33).

A.5.5 - Condensatore.

Quando la regione centrale dell'aggregato di fig. A.1 è del tipo 3, si ha il condensatore. Il legame tra campo elettrico e densità di corrente nella regione centrale è quello espresso dalla (A.21), che, supponendo un comportamento lineare per l'aggregato, equivale a:

$$(A.35) \quad I \operatorname{div} \vec{g}(P) = -\epsilon \operatorname{div} \vec{f}(P) \frac{\partial V}{\partial t}$$

avendo usato gli stessi simboli delle (A.25) e (A.26). Risulta quindi:

$$(A.36) \quad I = -\epsilon \frac{\operatorname{div} \vec{f}(P)}{\operatorname{div} \vec{g}(P)} \frac{\partial V}{\partial t}$$

La quantità:

$$(A.37) \quad -\frac{\operatorname{div} \vec{f}(P)}{\operatorname{div} \vec{g}(P)} = h_e$$

deve necessariamente coincidere con una costante, dipendente solo dalla forma dell'aggregato ed avente dimensione L. La (A.36) è la relazione costitutiva di un condensatore di capacità:

$$(A.38) \quad C = \epsilon h_e$$

in cui h_e è un fattore di forma dato dalla (A.37).

*

APPENDICE B

CIRCUITI DI TIPO NON ELETTRICO

È possibile stabilire una rappresentazione circuitale per moltissime strutture fisiche, come messo in evidenza nei riferimenti bibliografici nel § B.3. Tale sorprendente versalità della nozione di circuito è legata al fatto che i principi topologico-algebrici che stanno alla sua base sono del tutto simili a quelli che stanno alla base del calcolo vettoriale. La trattazione dettagliata di questo legame e la spiegazione teorica dell'esistenza delle analogie circuitali esula dal presente testo e per questa ragione si rimanda all'articolo fondamentale di F.H. Branin, «The algebraic-topological basic for network analogies and the vector calculus», Proc. of the Symposium on Generalized Networks, Pol. Inst. of Brooklyn, 1966, Wiley.

Nella presente appendice vogliamo solo mettere in evidenza, nel caso particolare delle strutture meccaniche ed elettromeccaniche, le caratteristiche peculiari di queste analogie.

B.1 - Analogia della mobilità dei circuiti meccanici.

Consideriamo la struttura schematica di fig.B.1, costituita da due corpi rigidi di massa m_1 ed m_2 , scorrevoli su un piano orizzontale di appoggio fisso, due molle ed uno smorzatore. Le forze che agiscono su ogni elemento di questa struttura debbono obbedire alla legge di Newton. Ad esempio, per l'elemento rigido di massa m_1 , con i simboli di figura B.1, si ha:

$$(B.1) \quad F_1 - F_2 - F_3 = m_1 \frac{dv_1}{dt}$$

in cui le quantità F_1 , F_2 , F_3 sono forze e v_1 è la velocità dell'elemento di massa m_1 parallelamente al piano di appoggio.

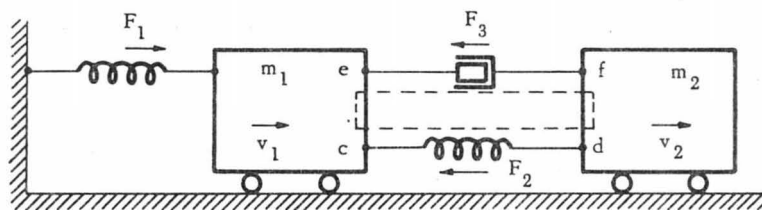


Fig. B.1 - Struttura meccanica schematica presa in considerazione.

Considerando anche la quantità $m \, dv/dt$ come una forza (forza d'inerzia), la (B.1) può considerarsi del tutto equivalente alla prima legge di Kirchhoff e pertanto *la forza risulta analoga alla corrente*; si tratta, cioè, per la forza e per la corrente di due variabili «attraverso» (vedi § I.1).

Consideriamo ora un percorso chiuso nella struttura di fig. B.1. Ogni punto della struttura ha una propria velocità. Per ragioni di continuità, la somma delle velocità relative degli elementi che si incontrano lungo il percorso è zero. Ad esempio, nel caso del percorso tratteggiato fig. B.1, si ha:

$$(B.2) \quad (v_d - v_c) + (v_e - v_f) = 0$$

in cui $(v_d - v_c)$ è la velocità relativa dell'estremo d della molla 2 rispetto all'altro suo estremo c. Analogamente $(v_e - v_f)$ è la velocità relativa dell'estremo e dello smorzatore rispetto all'altro estremo f. La (B.2) può considerarsi del tutto equivalente alla seconda legge di Kirchhoff e pertanto *la velocità risulta analoga alla tensione*; si tratta, cioè, per la velocità e la tensione di due variabili «agli estremi» (vedi § I.1). È interessante inoltre osservare che il prodotto delle variabili attraverso con quelle agli estremi è, in ambedue i casi, elettrico e meccanico, coincidente con una potenza.

I tre tipi di elementi presenti in fig. B.1 sono caratterizzati da due grandezze analoghe alla tensione e alla corrente. Nel caso ideale che stiamo trattando, si perviene ad elementi bipolari analoghi a quelli dei circuiti elettrici a costanti concentrate. Trattiamo in dettaglio i tre elementi.

1) Molla ideale.

La molla ideale si ottiene trascurando la massa del componente reale corrispondente e le perdite associate alla sua vibrazione. La for-

za che agisce in ciascun punto della molla deve essere complessivamente bilanciata; perciò la forza si trasmette «attraverso» la molla stessa. La forza sviluppata dalla molla dipende dallo spostamento relativo dei suoi estremi, a partire dalla condizione di equilibrio, cioè, detto con x tale spostamento relativo, si ha la relazione:

$$(B.3) \quad x = g(F)$$

Derivando la (B.3) rispetto al tempo ed introducendo l'ulteriore ipotesi di linearità per la relazione precedente, si ottiene:

$$(B.4) \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dF} \cdot \frac{dF}{dt} = L \frac{dF}{dt}$$

Ricordando che la velocità relativa è l'analogo della d.d.p. agli estremi e che F è l'analogo della corrente, la (B.4) coincide con la relazione costitutiva di un induttore ideale; per questo motivo è stato usato il simbolo L nella (B.4).

2) Smorzatore ideale.

Nel caso ideale si trascura sia la massa che l'elasticità dello smorzatore ideale. La relazione costitutiva esprime perciò semplicemente la dipendenza della velocità relativa di un estremo rispetto all'altro in funzione della forza applicata, cioè:

$$(B.5) \quad v = h(F) = R F$$

avendo effettuato l'ulteriore ipotesi di supporre lineare l'elemento. Dalla (B.5) si deduce che, nell'ambito dell'analogia che stiamo considerando, lo smorzatore ideale corrisponde ad un resistore. Questa è la ragione del simbolo R usato nella (B.5).

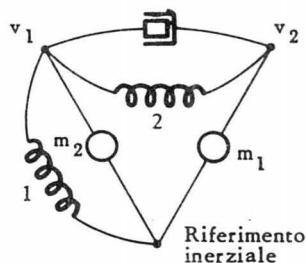
3) Massa ideale.

Il corpo rigido di massa m , perfettamente scorrevole sul piano di appoggio, corrisponde ad una «massa ideale». Per questo elemento è solo presente la legge di inerzia come legge costitutiva, in quanto, detta v la sua velocità assoluta, riferita cioè al riferimento fisso, ed F la forza applicata nella direzione del movimento (nel caso presente tale direzione è contenuta in un piano parallelo a quello di appoggio), si ha, nei limiti della meccanica classica:

$$(B.6) \quad F = m \frac{dv}{dt}$$

La massa ideale corrisponde, perciò, nell'analogia ad una capacità. È importante osservare che in questo caso la velocità da considerare è la velocità assoluta dell'elemento, cioè, in altri termini, *uno dei due estremi del componente è il riferimento fisso inerziale*.

Fig.B.2 - Schema circuitale meccanico corrispondente alla struttura di fig.B.1.



Ritorniamo ora a considerare la struttura di fig.B.1. Vediamo che ai fini della sua caratterizzazione dobbiamo considerare solo due velocità assolute, cioè quelle dei due corpi rigidi. Infatti la molla 1 è attaccata al primo di tali corpi ed al riferimento fisso; la seconda molla e lo smorzatore sono attaccati ai due corpi rigidi. Uno schema circuitale meccanico rappresentante la struttura di fig.B.1 è perciò quello mostrato in fig.B.2. Si vede chiaramente da questa figura che, nell'analogia che stiamo considerando, i «punti» di cui occorre considerare la velocità corrispondono ai nodi del circuito. In particolare è sempre presente il nodo che corrisponde al riferimento inerziale, che ha velocità assoluta nulla ed a cui sono collegate tutte le masse presenti. I tre elementi ideali introdotti costituiscono gli elementi a due terminali fondamentali per questi circuiti. Nelle strutture meccaniche più complesse essi verranno utilizzati per derivare circuiti equivalenti di tali strutture, così come accade per le strutture elettriche. In tab.B.1 riassumiamo i termini dell'analogia discussa punto per punto in precedenza; tale analogia è nota nella letteratura tecnica con il nome di «*analogia della mobilità*».

Osservazione B.1

Risulta comodo utilizzare nella trattazione dei circuiti meccanici i simboli ed i nomi degli elementi elettrici corrispondenti nell'analogia, conservando però le unità di misura proprie dei circuiti meccanici. Si ottengono circuiti del tipo di quello mostrato in fig.B.3, che si riferisce alla rappresentazione della struttura di fig.B.1. Ovviamente le tensioni risultanti sono in metri/sec e le correnti in newton.

Tabella B.1 - Analogia della mobilità

Struttura Parametri	Elettrica	Meccanica
Grandezza agli estremi	Tensione (volt)	Velocità (metro/sec)
Grandezza attraverso	Corrente (ampère)	Forza (newton)
Elementi ideali e loro parametri	Capacità (farad) Induttanza (henry) Conduttanza (mho)	Massa (kilogrammo) Elasticità (metro/newton) Resistenza meccanica (newton $\times$ sec/metro)
Rappresentazioni di bipoli	Impedenza (ohm) Ammettenza (mho)	Mobilità [metro/(newton $\times$ sec)] Immobilità (newton $\times$ sec/metro)
Bipoli particolari	Corto-circuito Circuito aperto	Punto bloccato (impossibilitato a muoversi) Punto libero (non soggetto a forze)
Topologia	Maglia Nodo Connessione serie Connessione parallelo	Maglia Nodo Connessione serie Connessione parallelo

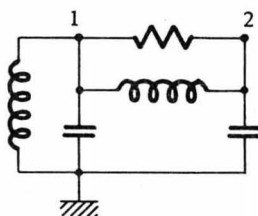


Fig.B.3 - Circuito equivalente alla struttura meccanica di fig.B.1, in cui le capacità sono espresse in kilogrammi, le induttanze in metri/newton e le conduttanze in newton sec/metro.

Osservazione B.2

L'analogia della mobilità che fa corrispondere alla forza una variabile «attraverso» è conseguenza dell'aver utilizzato un sistema di coordinate di tipo lagrangiano, cioè mobili con ciascun elemento, per rappresentare la struttura meccanica. Usando coordinate di tipo euleriano, cioè fisse rispetto al riferimento inerziale, si ottiene che la forza è una variabile «agli estremi». Tale possibilità è a volte utilizzata nella letteratura tecnica.

B.2 - Applicazione tipica dell'analogia della mobilità.

Come visto nel paragrafo precedente, si ottiene un circuito meccanico utilizzando i tre elementi ideali di Tab.B.1, cioè rispettivamente la massa ideale, lo smorzatore ideale e la molla ideale. Strutture meccaniche che corrispondono direttamente a circuiti meccanici contenenti questi elementi sono di scarso interesse applicativo. Sono invece usuali i casi in cui la struttura meccanica si rappresenta in modo indiretto con i suddetti elementi; ciò ovviamente comporta una validità limitata del modello ottenuto, che va tenuta in conto nel suo uso.

Allo scopo di dare una idea del modo indiretto con cui si derivano i circuiti meccanici in casi concreti, ci riferiamo alla struttura meccanica molto usata nelle applicazioni, che consiste di barrette cilindriche di acciaio, appoggiate in corrispondenza a due punti su un appoggio fisso, attaccate fra loro con un filo di diametro piccolo rispetto a quello delle barrette, come mostrato in fig.B.4. Le forze e le velocità sono ap-

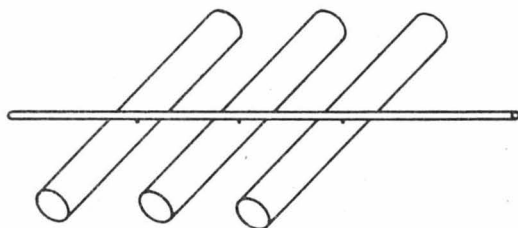


Fig.B.4 - Struttura meccanica considerata.

plicate nel piano degli assi delle barrette e tali assi sono tutti paralleli fra loro. In fig.B.4 non viene messo in evidenza il modo in cui tali strutture sono sollecitate ed il modo in cui vengono utilizzate. Ciò avviene tramite i trasduttori elettro-meccanici, in modo che il dispositivo, nel suo insieme, si presenta come una rete elettrica accessibile da due por-

te esterne e può pertanto trovare applicazione come filtro elettrico in apparati dalla banda acustica fino al centinaio di KHz. La descrizione dettagliata di tali dispositivi esula dallo scopo del presente testo, per cui si rimanda per questo argomento alla letteratura tecnica (si veda il paragrafo B.3 relativo ai riferimenti bibliografici).

Il circuito meccanico che corrisponde alla struttura di fig.B.4 viene derivato nell'ambito delle seguenti ipotesi di funzionamento:

- 1) si considera solo un particolare tipo di vibrazione della barretta, cioè quella di flessione, ed un unico modo, cioè il primo;
- 2) gli appoggi non hanno influenza sulla vibrazione; ciò è vero in quanto gli appoggi vengono messi in corrispondenza a quei punti che non si muovono nella particolare vibrazione che si sta considerando;
- 3) le barrette si suppongono «sottili» in modo da poter trascurare l'effetto dell'inerzia rotazionale;
- 4) i fili di accoppiamento si suppongono sottili e corti. Il loro funzionamento è del tipo ad estensione-compressione.

La derivazione del circuito meccanico richiede per ciascuna parte della struttura di fig.B.4, cioè barretta e filo di accoppiamento, di scrivere le equazioni che debbono soddisfare le forze e le velocità, di ricavare le relazioni esatte ed approssimate nei punti di ingresso e quindi di individuare gli elementi ideali equivalenti. Sviluppiamo questo procedimento separatamente per le barrette e per il filo di accoppiamento.

Barretta.

In fig.B.5 è rappresentato l'elemento generico infinitesimo della barretta. Scegliamo l'ascissa spaziale x sull'asse a riposo della barretta ed indichiamo con y lo spostamento, nel senso del movimento,

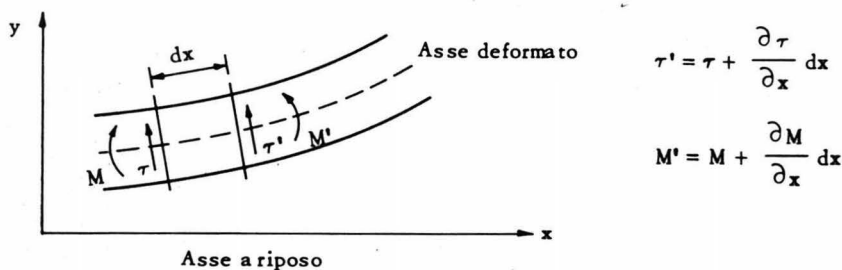


Fig.B.5 - Elemento generico della barretta.

dell'elemento infinitesimo di lunghezza dx della barretta; indichiamo inoltre con τ ed M il taglio ed il momento flettente in corrispondenza alla sezione x . Infine con β indichiamo la pendenza dell'asse deformato nella sezione x . Risulta perciò:

$$(B.7) \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad ; \quad M = -EJ \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

in cui E è il modulo di Young del materiale di cui è composta la barretta e J è il momento di inerzia rispetto all'asse neutro.

Facendo l'equilibrio dei momenti per l'elemento infinitesimo, nell'ipotesi che sia trascurabile l'inerzia rotazionale, si ha:

$$(B.8) \quad \tau = \frac{\partial M}{\partial x}$$

che, tenendo conto della (B.7), diviene:

$$(B.9) \quad \tau = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

Facendo l'equilibrio delle forze nella direzione y si ha, includendo l'inerzia in questa direzione:

$$(B.10) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

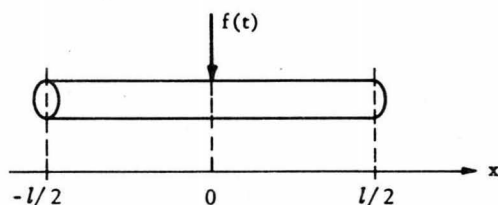
in cui ρ è la densità del materiale di cui è costituita la barretta ed A la sezione trasversale della barretta cilindrica.

Dalle (B.9) e (B.10), si ottiene l'equazione che deve soddisfare lo spostamento y , cioè:

$$(B.11) \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

La determinazione del circuito meccanico della barretta viene fatta tenendo conto che quello che interessa è il legame tra forza e velocità applicate nel punto di mezzo, dove è saldato il filo di accoppiamento. Perciò occorre individuare tale legame, con riferimento alla figura B.6, in cui la forza si suppone concentrata e variabile sinusoidalmente nel tempo con pulsazione ω . Poichè ci interessa il regime permanente sinusoidale rispetto alla variabile tempo, possiamo eliminare tale variabile utilizzando i fasori di tutte le grandezze in gioco. Indichiamo con lettere maiuscole tali fasori; la (B.11) diviene:

Fig. B.6 - Situazione di eccitazione che interessa per la determinazione del circuito meccanico corrispondente alla barretta.



$$(B.12) \quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \omega^2 \frac{\rho A}{E J} Y = 0$$

Risolviendo la (B.12) ed imponendo le condizioni al contorno⁽¹⁾, si ottiene per il rapporto tra F (fasore della forza) e V (fasore della velocità) nel punto di mezzo:

$$(B.13) \quad \frac{F}{V} = j \frac{E J}{\omega} \frac{\sin K \frac{l}{2} \cosh K \frac{l}{2} + \sinh K \frac{l}{2} \cos K \frac{l}{2}}{1 + \cos K \frac{l}{2} \cosh K \frac{l}{2}}$$

in cui:

$$(B.14) \quad K = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{E J}} \omega$$

Il primo modo di vibrazione a flessione della barretta si ha in corrispondenza alla prima pulsazione che rende nulla l'ammettenza meccanica data dalla (B.13). Tale pulsazione si ottiene quindi risolvendo la seguente equazione trascendente:

$$(B.15) \quad \sin K \frac{l}{2} \cosh K \frac{l}{2} + \sinh K \frac{l}{2} \cos K \frac{l}{2} = 0$$

Nel caso di barrette a sezione circolare di diametro d , tale pulsazione vale⁽²⁾:

$$(B.16) \quad \omega_0 = (2,36502)^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{d}{l^2}$$

(1) - Si veda ad esempio: F. Künemund, «Channel filter with longitudinally coupled flexural mode resonator», Siemens Forsch., n. 4/72, Springer Verlag, pp. 325-328.

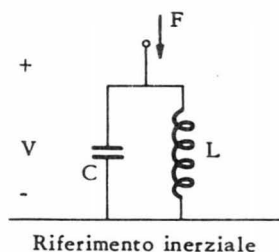
(2) - Si veda ad esempio: A.E. Gunther, «High-quality wide-band mechanical filters theory and design», IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU 20, n. 4, ott. 1973, pp. 294-301.

In corrispondenza a questa pulsazione, possiamo rappresentare in modo sufficientemente approssimato la barretta con un circuito meccanico risonante parallelo del tipo di fig. B.7. I valori di C ed L si ottengono imponendo le due condizioni seguenti:

1) la pulsazione di risonanza deve coincidere con la ω_0 dell'espressione (B.16), cioè:

$$(B.17) \quad LC = \frac{1}{(2,36502)^4} \frac{\rho l^4}{E d^2}$$

Fig. B.7 - Circuito meccanico approssimato della barretta. Il nodo di ingresso corrisponde al punto della barretta a cui è applicata la forza $f(t)$.



2) il valore della derivata, rispetto ad ω/ω_0 dell'ammettenza meccanica F/V della (B.13), calcolato per $\omega = \omega_0$, deve essere uguale a quello calcolato per il circuito di fig. B.7, cioè:

$$(B.18) \quad \left(\frac{dY}{d\eta} \right)_{\eta=1} = j 2 \omega_0 C, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Sviluppando le equazioni corrispondenti alle (B.17) e (B.18), si ottiene, per una barretta a sezione circolare e con riferimento alla fig. B.7:

$$(B.19) \quad C = 0,627 m = 0,492 \rho d^2 l \text{ (kilogrammi)}$$

$$L = \frac{\rho l^4}{(2,36502)^4 E d^2 0,627 \rho \frac{\pi d^2}{4} l} = 0,0649 \frac{l^3}{E d^4} \left(\frac{\text{metro}}{\text{newton}} \right)$$

in cui m è la massa della barretta.

Filo di accoppiamento.

Il filo di accoppiamento lavora a compressione-estensione. Considerando il generico elemento infinitesimo, come mostrato in fig. B.8,

chiamiamo con A_f la sua sezione trasversale, $u(x)$ lo spostamento nella direzione x dell'elemento infinitesimo situato in posizione x , corrispondente all'ascissa scelta sull'asse del filo cilindrico. In base alla legge di Hooke, trascurando la contrazione (Poisson), si ha:

$$(B.20) \quad F = E A_f \frac{\partial u}{\partial x}$$

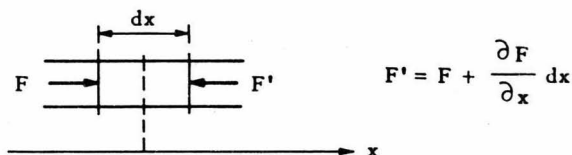


Fig.B.8 - Elemento infinitesimo del filo di accoppiamento.

L'equilibrio delle forze in direzione x , inclusa l'inerzia, fornisce:

$$(B.21) \quad \rho A_f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Eliminando F nelle (B.20) e (B.21), si ha:

$$(B.22) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Supponiamo che tutte le grandezze in gioco varino sinusoidalmente nel tempo; possiamo quindi eliminare la variabile tempo, usando i fasori. Indichiamo i fasori con le lettere maiuscole; la (B.22) diviene:

$$(B.23) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} U = 0$$

Risolvendo questa equazione con le condizioni al contorno, cioè che la velocità e la forza nella sezione terminale $x = l_f$ siano uguali a V_2 ed F_2 , si ottengono la velocità V_1 e la forza F_1 nella sezione iniziale. Ciò equivale a conoscere la seguente rappresentazione (matrice di trasmissione) del filo di accoppiamento⁽¹⁾:

(1) - Si veda ad esempio: G.C. Temes; S.K. Mitra, «Modern filter theory and design», Wiley, 1973, § V.3.

$$(B.24) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha l_f & j Z_0 \sin \alpha l_f \\ \frac{j}{Z_0} \sin \alpha l_f & \cos \alpha l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

in cui: $\alpha = \omega / C_0$; $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ è la velocità di propagazione delle vibrazioni del tipo considerato; $Z_0 = 1/(A_f \sqrt{E\rho})$

Dalla (B.24) si ricava immediatamente la rappresentazione ammettenze di corto-circuito, cioè:

$$(B.25) \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j Z_0 \sin \alpha l_f} \begin{bmatrix} \cos \alpha l_f & -1 \\ -1 & \cos \alpha l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde una rete a π simmetrica con ramo longitudinale di impedenza meccanica:

$$(B.26) \quad Z_l = j Z_0 \sin \alpha l_f$$

e rami trasversali di ammettenza meccanica:

$$(B.27) \quad Y_t = j \frac{1}{Z_0} \tan \frac{\alpha l_f}{2}$$

Nell'ipotesi di filo di accoppiamento corto, cioè tale che:

$$(B.28) \quad \frac{\alpha l_f}{2} \ll \pi/2$$

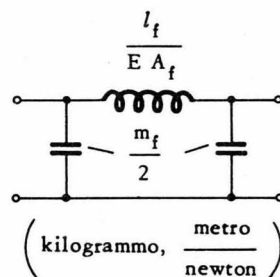
possiamo sostituire al seno e alla tangente il relativo argomento. Quindi si ha:

$$(B.29) \quad \begin{aligned} Z_l &\cong j Z_0 \alpha l_f = j \omega \frac{l_f}{E A_f} \\ Y_t &\cong j \frac{\alpha l_f}{2 Z_0} = j \omega \frac{m_f}{2} \end{aligned}$$

in cui m_f è la massa del filo di accoppiamento.

Dalle (B.29) si deduce che il circuito meccanico corrispondente al filo di accoppiamento, nei limiti di validità delle ipotesi fatte è quello di fig. B.9.

Fig.B.9 - Circuito meccanico corrispondente al filo di accoppiamento. A_f , l_f , m_f rappresentano rispettivamente l'area della sezione trasversale, la lunghezza e la massa del filo. E è il modulo di Young del materiale di cui è costituito il filo.



Osservazione B.3

Il circuito meccanico che corrisponde ad una struttura meccanica del tipo mostrato in fig.B.4, funzionante nel modo precisato in precedenza, assume la forma di figura B.10. I valori delle capacità ed induttanze dei fili di accoppiamento sono ricavabili in base alle formule riportate in fig.B.9; gli analoghi valori per le barrette sono ricavabili con le (B.19). È da notare che il modello equivalente di fig.B.10 rappresenta la struttura meccanica solo in prima approssimazione; in molti casi tale approssimazione non risulta sufficiente nelle applicazioni. In tal caso occorre ricorrere a modelli più accurati; si veda ad esempio A.E. Günther, op. cit.

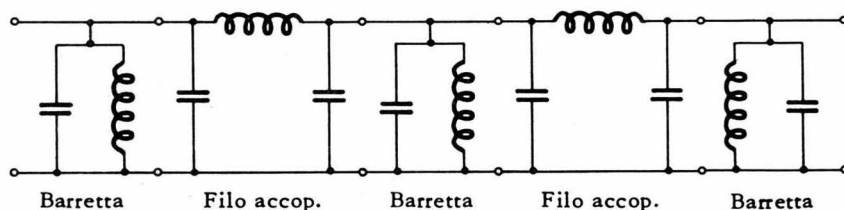


Fig.B.10 - Circuito meccanico corrispondente a quello di fig.B.4. Le capacità meccaniche sono in kilogrammi e le induttanze meccaniche in metri su newton.

B.3 - Riferimenti bibliografici.

La presente appendice costituisce solo una breve introduzione all'argomento dei circuiti non elettrici. Si riportano di seguito alcuni riferimenti bibliografici riguardanti l'applicazione dell'approccio circuitale a strutture diverse da quelle elettriche.

Strutture elastiche.

- G. Kron, «Equivalent circuit of the elastic field», *J. Appl. Mech.*, 1944, 11, pp. 149-161.
- G. Kron, «Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures», *J. Franklin Inst.*, 1944, 238, pp. 400-442.

Fluidodinamica.

- G. Kron, «Equivalent circuits of compressible and incompressible fluid flow fields», *J. Aeronaut. Soc.*, 1945, 12, pp. 221-231.

Strutture matematiche.

- G. Kron, «Electric circuit models of partial differential equations», *Elec. Engr.*, 1948, 67, pp. 289-299.
- G. Kron, «Numerical solution of ordinary and partial differential equations by means of equivalent circuits», *J. Appl. Phys.*, 1945, 16, pp. 172-186.

Strutture fisiche.

- G. Kron, «Electric circuit models of the Schroedinger equation», *Phys. Rev.*, 1945, 67, pp. 39-43.

Strutture chimiche.

- G. Oster, A. Perelson, «Chemical reaction networks», *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, 1974, n. 6, pp. 709-721.
- G. Kron, «Electric circuit models for the vibration spectrum of polyatomic molecules», *J. Chem. Phys.*, 1946, 14, pp. 19-31.
- D. Singer, «Network-thermodynamic approach to chemical kinetics», *Acta Chimica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Tomus 90(3), 1976, pp. 255-273.

Strutture biologiche e termodinamica.

- G. Oster, A. Perelson, A. Katchalsky, «Network thermodynamics: dynamic modelling of biophysical systems», *Quart. Rev. Biophys.*, vol. 6, 1973, pp. 1-134.

- G. Oster, A. Perelson, «Systems, circuits and thermodynamics», *Isr. J. Chemistry*, 1973, vol. 11, pp. 445-478.
- G. Martinelli, M. Salerno, «Circuit approach to steady-state kinetics of multireactant enzymes», 4^o Int. Symposium on Network Theory, Lubiana (Iugoslavia), 1979.
- J. Meixner, «Network theory in its relation to thermodynamics», *Proc. Symposium on generalized networks*, 1966, Pol. Inst. of Brooklyn, Wiley.
- H. J. Morowitz, W.A. Higinbotham, S.W. Matthysse, H. Quastler, «Passive stability in a metabolic network», *J. Theor. Biol.*, 1964, p. 98.
- S. Newman, S. Rice, «Model for constraint and control in biochemical networks», *Proc. Natn. Acad. Sci.*, (USA), 1971, p. 92.
- N.G. Othmer, L.E. Scriven, «Instability and dynamic pattern in cellular networks», *J. Theor. Biol.*, 1971, p. 507.

Contributi generali.

- W.A. Blackwell, «Mathematical modelling of physical networks», Macmillan (New York), 1968.
- L.J. Gutenmakher, «Modelli elettrici dei fenomeni fisici», (in russo), *Electrichestvo*, 1948, pp. 34-40.

Per quanto riguarda la parte sviluppata nella presente appendice, relativamente alle strutture meccaniche, esistono numerosi contributi riguardanti soprattutto l'applicazione al progetto dei filtri elettromeccanici. Un'idea approssimata di tale vasto campo può essere ricavata dal testo: G.C. Temes, S.K. Mitra, «Modern filter theory and design», Wiley, 1973, Cap. IV e V, in cui viene accennato sia ai trasduttori piezoelettrici e magnetostrittivi, sia al modellamento dei circuiti monolitici a quarzo, in cui i risonatori sono ottenuti mediante coppie di elettrodi e l'accoppiamento avviene per via acustica entro la barretta di materiale piezoelettrico su cui gli elettrodi sono depositati.

Infine applicazioni interessanti dei circuiti meccanici e di altri tipi di circuiti possono trovarsi nel testo C. Beccari, «La trasformazione di Laplace nell'analisi dei circuiti», Boringhieri 1977. Particolarmente interessanti sono in questo testo: 1) l'esempio a pag. 118-127 riguardante l'individuazione della dinamica di un veicolo a motore nel passaggio su una cunetta; 2) l'esempio a pag. 103-109 riguardante la dinamica di uno strumento elettrico a bobina mobile.



APPENDICE C

I CIRCUITI DIGITALI

Quando si impiega un metodo alle differenze finite per l'analisi nel dominio del tempo di un circuito lineare, si effettua implicitamente la trasformazione del circuito considerato in una nuova struttura analizzabile con la metodologia circuitale, appartenente alla classe dei *circuiti digitali*. Allo scopo di comprendere in modo più approfondito l'influenza della struttura del circuito sugli errori che tale trasformazione comporta, è necessario preliminarmente descrivere e caratterizzare i circuiti digitali. Ciò può essere ottenuto estendendo opportunamente la nozione di circuito, per introdurre una nuova categoria: i circuiti unidirezionali a ritardo costante (§ C.1). La soluzione del problema dell'analisi per tali circuiti, con particolare riferimento al legame tra risposta ed eccitazione verrà considerata nel § C.2.

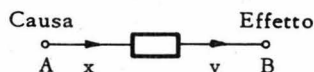
I circuiti digitali possono essere introdotti come una particolare categoria di circuiti unidirezionali a ritardo costante, come verrà messo in evidenza nel § C.3 e pertanto la soluzione del problema di analisi per essi verrà ricondotto a quello già visto nel § C.2. Nel paragrafo successivo C.4, verrà infine affrontato il problema dell'individuazione del circuito digitale che risulta associato a quello a costanti concentrate nell'analisi con il metodo alle differenze finite. Ciò permetterà di valutare, almeno orientativamente, l'effetto della struttura del circuito a costanti concentrate sugli errori introdotti dal metodo alle differenze finite (paragrafo C.5).

C.1 - I circuiti unidirezionali a ritardo costante.

La nozione di circuito costantemente usata in precedenza è stata quella di un aggregato di elementi ideali di pochi tipi, caratterizzati

ciascuno da una relazione caratteristica tra le grandezze che lo descrivono. Nel caso, a cui sempre ci possiamo ricondurre, di elementi bipolari, le grandezze sono due, una di tipo «attraverso» e l'altra di tipo «agli estremi». È importante sottolineare il fatto che le relazioni costitutive considerate non hanno *mai* implicato un ruolo di causa-effetto specifico nelle due grandezze. D'altra parte è facile rendersi conto che un tale ruolo è del tutto in contrasto con la nozione di bipolo così come è stata finora considerata. Sarebbe necessario infatti utilizzare un simbolo diverso che indicasse in modo univoco quale delle due grandezze è la causa e quale è l'effetto. Un simbolo di tale tipo è quello indicato in figura C.1, che rappresenta un bipolo connesso fra due nodi A e B ed operante su due grandezze, la prima x avente il ruolo di causa, la seconda y avente il ruolo di effetto. È opportuno notare che anche il modo di connettere i bipoli dovrebbe essere opportunamente limitato, in quanto si avrebbe un assurdo se più bipoli fossero connessi dal lato B, in quanto ciò implicherebbe la non unicità della grandezza al nodo risultante.

Fig.C.1 - Simbolo per un bipolo in cui le due grandezze che lo caratterizzano svolgono un ruolo di causa-effetto.



Tuttavia, in molte applicazioni esistono strutture fisiche o astratte nelle quali è necessario precisare il suddetto ruolo di causa-effetto delle grandezze presenti. In questo caso è ancora possibile utilizzare l'approccio circuitale, pur di estenderlo opportunamente. Per distinguere il tipo di circuito che ne risulta, useremo contraddistinguerlo con lo aggettivo «unidirezionale», che appunto ricorda il senso unico che esiste nella relazione costitutiva dei componenti.

Per quanto detto in precedenza i bipoli che compongono il circuito unidirezionale sono caratterizzati da due grandezze x e y di cui una è la causa dell'altra. Il legame che fornisce y in funzione di x è la relazione costitutiva dell'elemento. Nel caso lineare, che è quello che ci interessa, sono possibili:

1) una relazione costitutiva di tipo istantaneo, cioè:

$$(C.1) \quad y = A x$$

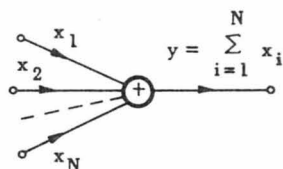
L'elemento che si ottiene prende il nome di «moltiplicatore» ed è caratterizzato dalla costante A ;

2) una relazione costitutiva con memoria, che implica un'operazione lineare nel tempo sulla grandezza x . Sono possibili vari tipi di relazioni costitutive, ad esempio:

$$(C.2) \quad y = \frac{dx}{dt} ; \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau ; \quad y(t) = x(t - T) ; \quad \text{ecc.}$$

La connessione tra gli elementi ideali può avvenire direttamente in corrispondenza ai nodi di tipo A di fig.C.1, ma non può avvenire in corrispondenza agli altri nodi, con più di un nodo di tipo B per volta. Tale inconveniente viene rimosso mediante l'introduzione di un altro elemento, il «sommatore», definito in fig.C.2.

Fig.C.2 - Simbolo e definizione del sommatore.



Nel seguito limiteremo la trattazione al caso dei *circuiti unidirezionali a ritardo costante* (indicati per brevità con la sigla URC), costituiti dalla interconnessione di un numero qualsiasi di moltiplicatori, sommatore ed elementi con memoria del tipo a ritardo costante, definiti dalla relazione costitutiva:

$$(C.3) \quad y(t) = x(t - T)$$

con T quantità fissa. In fig.C.3 riportiamo i simboli usati per i moltiplicatori e per gli elementi di ritardo.

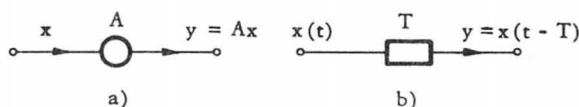


Fig.C.3 - Simboli per il moltiplicatore a) e per l'elemento di ritardo b).

Il problema dell'analisi dei circuiti URC consiste nel determinare le grandezze presenti nei vari nodi, a partire da quello di ingresso al circuito stesso, al quale è supposta applicata una grandezza impressa di origine esterna. Usualmente è richiesto il calcolo di una sola grandezza a cui si dà il nome di «uscita». La soluzione del problema di analisi è particolarmente semplice nel caso dei circuiti URC senza memoria, cioè nel caso dei circuiti costituiti solo da moltiplicatori e sommatore. In questo caso, infatti, prendendo come incognite le grandezze in uscita di ciascun sommatore, è immediato determinare il sistema di equazioni risolvibili. Ciascuna equazione è infatti determinata dalla relazione costitutiva del sommatore considerato, in cui le grandezze di ingres-

so vengono espresse direttamente in funzione delle incognite scelte, tramite ispezione visiva del circuito. Il metodo risultante consiste nei seguenti passi.

Metodo di analisi di un circuito URC senza memoria.

- 1) Scegliere come incognite le grandezze in uscita ai sommatore;
- 2) Scrivere le relazioni costitutive dei sommatore, esplicitando in esse le incognite scelte;
- 3) Risolvere il sistema di equazioni lineari ottenuto, determinando le grandezze volute.

Illustriamo con un esempio l'applicazione del metodo precedente.

Esempio C.1

Determinare nel circuito URC senza memoria di fig.C.4 la grandezza di uscita y in funzione di quella di ingresso x .

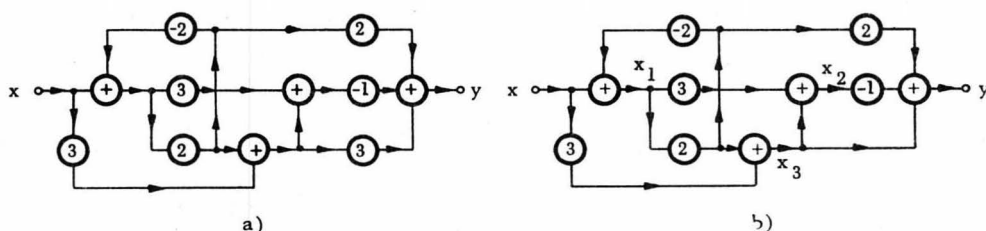


Fig.C.4 - a) Circuito URC considerato nell'esempio C.1; b) Scelta delle incognite.

In base a quanto detto, consideriamo come incognite le grandezze x_k , riportate nella parte b) della fig.C.4.

Scrivendo le equazioni di definizione dei sommatore, si ha:

$$x_1 = x - 2 \cdot 2 x_1$$

$$x_2 = 3 x_1 + x_3$$

$$x_3 = 3 x + 2 x_1$$

$$y = x_3 - x_2 + 2 \cdot 2 x_1$$

Risolvendo il sistema precedente si ricava:

$$y = \frac{1}{5} x$$

Nel caso più generale dei circuiti URC con memoria, in cui sono presenti anche gli elementi di ritardo, la soluzione del problema di analisi può essere notevolmente semplificata, se le varie grandezze presenti sono trasformabili secondo Laplace. In questo caso, infatti, la relazione costitutiva degli elementi di ritardo, cioè la (C.3), diviene:

$$(C.4) \quad \mathcal{L}[y(t)] = e^{-sT} \mathcal{L}[x(t)]$$

Indicando per brevità:

$$(C.5) \quad z = e^{sT}$$

e con le lettere maiuscole le $\mathcal{L}$ -trasformate delle varie grandezze, la relazione costitutiva dell'elemento di ritardo diviene:

$$(C.6) \quad Y(s) = z^{-1} X(s)$$

La (C.6) fa vedere che è possibile trattare l'elemento di ritardo, nel dominio di Laplace, alla stessa stregua di un moltiplicatore. La sola differenza sta nel fatto che la costante moltiplicativa z^{-1} risulta pari ad una funzione della variabile s .

L'analisi del circuito URC con memoria può essere perciò fatta nello stesso modo di quella del caso senza memoria; l'unica differenza è che si ottiene, al posto di una costante, una funzione della variabile z . Illustriamo quanto detto con un esempio.

Esempio C.2

Individuare la grandezza di uscita $Y(s)$, nel dominio della trasformata di Laplace, per il circuito di fig.C.5, supponendo che l'ingresso sia $x(t)$.

Scegliamo le incognite come indicato nella parte b) di fig.C.5, dopo essere passati nel dominio di Laplace. Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo le relazioni costitutive dei sommatori in funzione esplicita delle incognite scelte, cioè:

$$X_1(s) = X(s) - B_1 z^{-1} X_1(s) - B_2 z^{-2} X_1(s)$$

$$Y(s) = A_0 X_1(s) + A_1 z^{-1} X_1(s)$$

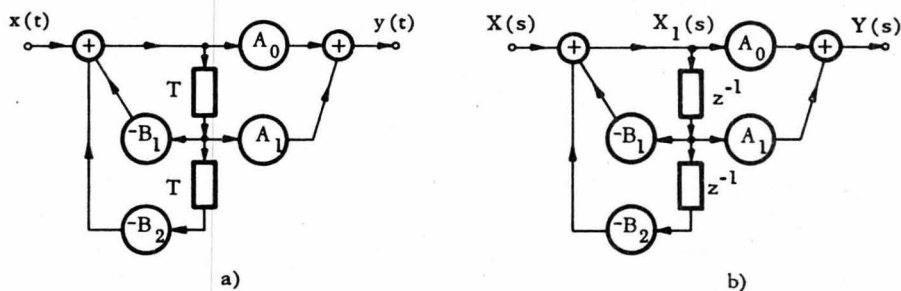


Fig.C.5 - a) Circuito URC considerato nell'esempio C.2. b) Circuito trasformato nel dominio di Laplace, con in evidenza le incognite scelte.

Quindi si ha, dalla prima relazione:

$$X_1(s) = \frac{X(s)}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}$$

Tenendo conto della espressione precedente di $X_1(s)$ e della seconda relazione, si deduce:

$$Y(s) = X(s) \frac{A_0 + A_1 z^{-1}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}$$

C.2 - Funzione di trasferimento ingresso-uscita di un circuito URC e risposta impulsiva.

Come messo in evidenza nel paragrafo precedente, qualsiasi grandezza presente in un circuito URC si ottiene risolvendo un sistema di equazioni lineari con coefficienti del tipo $A z^{-k}$, in cui A è una quantità reale e k è un numero intero non negativo. Di conseguenza, la grandezza di uscita è del tipo:

$$(C.7) \quad Y(s) = \sum_{k=1}^N F_k(z^{-1}) X_i^{(k)}(s)$$

in cui $X_i^{(k)}(s)$ è k -esima grandezza d'ingresso ($k = 1, 2, \dots, N$) e $F_k(z^{-1})$ è una funzione razionale reale della variabile z^{-1} . Vale pertanto la seguente proprietà:

Proprietà C.1 - «Ogni funzione di trasferimento di un circuito URC è una funzione razionale reale della variabile z^{-1} ».

Come nel caso dei circuiti a costanti concentrate, possiamo parlare di risposta impulsiva del circuito URC, quando l'ingresso coincide con l'impulso di Dirac. La forma che ha la risposta impulsiva nel caso presente si deduce facilmente in base alla proprietà C.1. Infatti, essendo la funzione di trasferimento d'interesse una funzione razionale reale della variabile z^{-1} , conviene effettuarne preventivamente lo sviluppo in frazioni parziali rispetto a questa variabile. Limitandoci, per semplicità, a considerare il caso che siano presenti solo poli semplici, lo sviluppo si presenta nella seguente forma:

$$(C.8) \quad Y(s) = \sum_{k=0}^r A_k z^{-k} + \sum_{k=0}^n \frac{H_k}{z^{-1} - B_k}$$

Tenendo conto della (C.5), si vede che la prima sommatoria della (C.8) corrisponde, nel dominio del tempo alla seguente espressione:

$$(C.9) \quad \sum_{k=0}^r A_k u_0(t - kT)$$

D'altra parte, ciascun termine della seconda sommatoria può essere scritto nel modo seguente:

$$(C.10) \quad \frac{H_k}{z^{-1} - B_k} = - \frac{H_k}{B_k} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{B_k}} = - \frac{H_k}{B_k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{-i}}{B_k^i}$$

Pertanto, nel dominio del tempo, tale termine corrisponde a:

$$(C.11) \quad - \frac{H_k}{B_k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{B_k^i} u_0(t - iT)$$

Di conseguenza la risposta impulsiva di un circuito URC, nel caso in cui la corrispondente funzione di trasferimento sia la (C.8) è:

$$(C.12) \quad h(t) = \sum_{k=0}^r A_k u_0(t - kT) - \sum_{k=0}^n \frac{H_k}{B_k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{B_k^i} u_0(t - iT)$$

Dall'esame della (C.12) si deduce la seguente proprietà:

Proprietà C.2 - «La risposta impulsiva di un circuito URC è costituita dalla somma di una serie di impulsi di ampiezza opportuna e posizionati nel tempo negli istanti successivi kT , con k intero non negativo».

A seconda che sia assente ovvero presente la seconda sommatoria nella espressione della funzione di trasferimento (C.8), dalla (C.12) si vede che la risposta impulsiva è formata solo da r impulsi ovvero da un numero infinito di impulsi. Nel primo caso si parla di circuiti URC a *risposta impulsiva finita*, nel secondo caso di circuiti URC a *risposta impulsiva infinita*.

L'esame della (C.12) mette inoltre in evidenza, nel caso di circuiti URC a risposta impulsiva infinita, che se qualche coefficiente B_k risulta in modulo minore di uno, gli impulsi tendono ad aumentare la propria ampiezza al crescere del tempo; ciò corrisponde ad un comportamento instabile del circuito URC. I coefficienti B_k rappresentano i poli della funzione di trasferimento $Y(s)$ nella variabile z^{-1} . Riferendosi ai poli di detta funzione nella variabile z (utilizzata nella maggior parte delle trattazioni in luogo di z^{-1}), si ottiene la seguente proprietà:

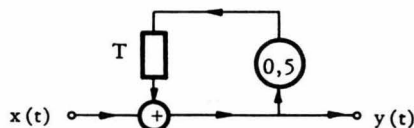
Proprietà C.3 - «La funzione di trasferimento di un circuito URC stabile è caratterizzata da poli nella variabile z , tutti disposti entro il cerchio di raggio unitario di tale variabile».

La proprietà C.3 è ricavabile anche osservando che, in base alla (C.5), ai valori di z disposti entro il cerchio di raggio unitario, corrispondono valori di s disposti nel semipiano sinistro; d'altra parte quest'ultimo semipiano è quello di stabilità per i circuiti a costanti concentrate, come messo in evidenza nel Cap.IV.

Esempio C.3

Determinare la risposta impulsiva del circuito URC di fig.C.6.

Fig.C.6 - Circuito URC considerato nell'esempio C.3.



La funzione di trasferimento nel dominio di Laplace del circuito in esame, si determina facilmente scrivendo la relazione costitutiva dell'unico sommatore presente, cioè:

$$Y(s) = X(s) + 0,5 z^{-1} Y(s)$$

da cui si ottiene:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1}} = \frac{-2}{z^{-1} - 2}$$

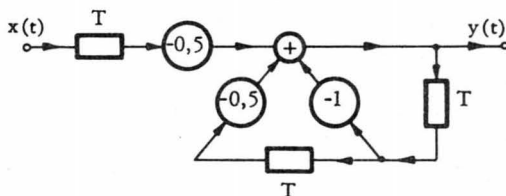
In base alla (C.12), la risposta impulsiva richiesta è:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (0,5)^i u_0(t - iT)$$

Esempio C.4

Determinare la risposta impulsiva del circuito URC di fig.C.7.

Fig.C.7 - Circuito URC considerato nell'esempio C.4.



L'analisi del circuito di fig.C.7, per la determinazione della funzione di trasferimento, è immediata, in quanto è presente un solo sommatore. La relazione costitutiva di questo elemento fornisce la grandezza di uscita, cioè nel dominio di Laplace:

$$Y(s) = -0,5 z^{-1} X(s) - Y(s) [z^{-1} + 0,5 z^{-2}]$$

Quindi la funzione di trasferimento vale:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-0,5 z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0,5 z^{-2}}$$

Sviluppando tale funzione in frazioni parziali, si ottiene:

$$F(s) = \frac{-0,5(1+j)}{z^{-1} + 1 - j} + \frac{0,5(-1+j)}{z^{-1} + 1 + j}$$

Dalla formula (C.12) deduciamo che la risposta impulsiva del circuito in esame vale:

$$\begin{aligned} & \frac{0,5(1+j)}{-1+j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(-1+j)^i} u_0(t - iT) + \frac{0,5(-1+j)}{-1-j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(-1-j)^i} u_0(t - iT) = \\ & = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^i} \sin\left(\frac{3\pi}{4} i\right) \cdot u_0(t - iT) \end{aligned}$$

Osservazione C.1

La funzione di trasferimento del circuito URC è razionale in z^{-1} ; quindi i suoi poli sono complessi coniugati ed i relativi residui sono anch'essi complessi coniugati. La risposta impulsiva risulta pertanto in ogni caso reale, come nel caso dei circuiti a costanti concentrate. Ciò è confermato dai calcoli dell'esempio precedente, in cui i poli della funzione di trasferimento sono $-1 \pm j$ ed i residui sono $0,5(-1 \pm j)$.

C.3 - I circuiti URC tempo-discreti e i circuiti digitali.

La proprietà C.2 mostra che quando un circuito URC viene eccitato per mezzo di un impulso unitario, la sua risposta risulta pari ad una sequenza di impulsi, del tipo seguente:

$$(C.13) \quad h(t) = \sum_{k=0}^n h_k u_0(t - kT)$$

ove la sommatoria è estesa ad un numero n finito ovvero infinito a seconda del tipo di circuito considerato. È immediato constatare che tale particolare forma della risposta è presente più in generale ogni volta che l'ingresso sia costituito anch'esso da una sequenza di impulsi, cioè:

$$(C.14) \quad x(t) = \sum_{k=0}^m x_k u_0(t - kT)$$

Infatti, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene facilmente per l'uscita $y(t)$ in questo caso:

$$(C.15) \quad y(t) = \sum_{k=0}^m y_k u_0(t - kT)$$

ove i coefficienti y_k sono dati dalla seguente espressione:

$$(C.16) \quad y_k = \sum_{i=0}^k x_i h_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Osservando inoltre che l'uscita $y(t)$ considerata è del tutto generica, potendo riferirsi a qualunque punto del circuito, si ottiene la seguente proprietà.

Proprietà C.4 - «Ogni grandezza presente in un circuito URC, eccitato con una sequenza di impulsi, localizzati negli istanti kT , coincide con una sequenza di impulsi dello stesso tipo».

La proprietà C.4 caratterizza notevolmente la particolare modalità di funzionamento che si verifica quando l'eccitazione è una sequenza di impulsi localizzati negli istanti kT . Infatti da essa consegue che tutte le grandezze del circuito vanno considerate solo in corrispondenza agli istanti kT e sono caratterizzabili dall'insieme numerabile delle ampiezze degli impulsi delle corrispondenti sequenze. Poichè tale modalità di funzionamento riveste grande importanza, è opportuno usare una denominazione particolare per riconoscere i circuiti che operano secondo essa. La denominazione usata è quella di «circuiti URC tempo-discreti».

Un esempio importante di circuiti URC tempo-discreti è quello dei circuiti elettronici basati sull'uso dei dispositivi CCD (Charge Coupled Devices), caratterizzati dal prelevare una tensione dal morsetto su cui sono inseriti, ad un ritmo costante e nel renderla disponibile dopo un intervallo di tempo multiplo di quello del prelevamento. Una struttura costituita da CCD e dispositivi per effettuare somme e moltiplicazioni, del tipo di quelle descritte nel Cap. IX, è rappresentabile idealmente con un circuito URC di tipo tempo-discreto.

L'analisi di un circuito URC tempo-discreto può essere effettuata in modo del tutto analogo a quello descritto precedentemente. L'unica proprietà caratteristica su cui è opportuno soffermarsi consiste nel fatto che ciascuna grandezza $y(t)$, essendo costituita da una sequenza di impulsi del tipo della (C.15), possiede una trasformata di Laplace che può essere sempre espressa in termini della variabile z ; infatti si ha:

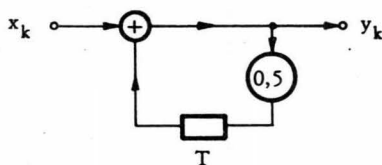
$$(C.17) \quad Y(s) = \sum_{k=1}^m y_k e^{-ksT} = \sum_{k=1}^m y_k z^{-k}$$

Tale espressione viene denominata come «trasformata z » della funzione $y(t)$.

Esempio C.4

Determinare la risposta $y(t)$ del circuito URC tempo-discreto di fig. C.8, nell'ipotesi che la sequenza di ingresso sia costituita da una serie di impulsi di ampiezza unitaria.

Fig.C.8 - Circuito URC tempo-discreto considerato nell'esempio C.4.



Per ipotesi l'eccitazione è:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_0(t - kT)$$

la cui trasformata z è quindi:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Analizzando il circuito si ottiene:

$$Y(z) = X(z) + z^{-1} Y(z) 0,5$$

da cui risulta:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} 0,5} X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} 0,5)(1 - z^{-1})}$$

Per ottenere la funzione $y(t)$ seguiamo lo stesso procedimento usato per derivare la (C.12). Effettuiamo quindi lo sviluppo in frazioni parziali di $Y(z)$:

$$Y(z) = - \frac{1}{1 - z^{-1} 0,5} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

a cui corrisponde, in base alla (C.12):

$$\begin{aligned} y(t) &= - \sum_{k=0}^{\infty} (0,5)^k u_0(t - kT) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} u_0(t - kT) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [2 - (0,5)^k] u_0(t - kT) \end{aligned}$$

La sequenza numerica di uscita y_k è quindi:

$$y_k = 2 - (0,5)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Malgrado l'esistenza di strutture fisiche rappresentabili con i circuiti URC tempo-discreti, l'applicazione più importante di essi si ha

nel modellamento delle strutture astratte che emergono nella elaborazione di sequenze numeriche. In alcuni casi infatti un circuito URC può rappresentare lo schema di un programma di calcolo che agisce su sequenze numeriche mediante le seguenti operazioni:

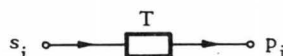
- 1) somma di due o più sequenze;
- 2) moltiplicazione di una sequenza per una costante;
- 3) traslazione nel tempo di una sequenza, che consiste nel memorizzare ogni dato per renderlo disponibile dopo un intervallo di tempo pari a T .

Un circuito URC tempo-discreto a cui è possibile far corrispondere un programma di calcolo che esegua in sequenza le varie operazioni indicate in modo da determinare ordinatamente i vari valori di uscita, viene denominato «circuiti digitali». È necessario osservare che non tutti i circuiti URC tempo-discreti possono essere considerati come circuiti digitali. Infatti si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema C.1 - «Condizione necessaria e sufficiente affinché un circuito URC tempo-discreto possa essere considerato come un circuito digitale è che non contenga cammini chiusi privi di elementi di ritardo».

Dimostriamo dapprima la sufficienza della condizione detta, facendo vedere che in tale caso è possibile determinare una sequenza di istruzioni corrispondenti al circuito dato. Per ogni elemento di ritardo presente nel circuito, indichiamo con s_i il nodo di ingresso e con p_i il nodo di uscita, ove l'indice i varia da uno al numero di tali elementi, come indicato in fig.C.9. Il circuito può essere pertanto schematizzato come in fig.C.10, ove sono stati evidenziati gli elementi di ritardo, mentre il blocco X indica la parte senza memoria del circuito dato. Le operazioni effettuate dal blocco X all'istante k -esimo consistono nella determinazione dei segnali nel nodo di uscita u e nei nodi tipo s_i , a partire dal valore dei segnali all'ingresso i e ai nodi di tipo p_i . Pertanto all'istante k -esimo tutte le grandezze indicate sul lato sinistro del blocco X si possono considerare come ingressi, mentre le altre come uscite. Poiché per ipotesi all'interno del blocco X non vi sono cammini chiusi, seguendo il percorso dello schema a partire da ciascun nodo di ingresso, si raggiungerà necessariamente un nodo di uscita. È quindi evidente che ciascuna uscita può essere calcolata sommando tutti i contributi che si ottengono eseguendo tutte le operazioni indicate in ciascun cammino che termina in detta uscita; in tal modo le operazioni aritmetiche svolte sono esattamente quelle indicate nello schema. Dopo aver effettuato tali operazioni, tutte le grandezze ottenute sui nodi di tipo s_i devono essere memorizzate per essere riutilizzate all'istante $(k+1)$ -esimo come nuovi ingressi sui nodi di tipo p_i .

Fig.C.9 - Elemento di ritardo i -esimo, con i nodi di ingresso e di uscita indicati.



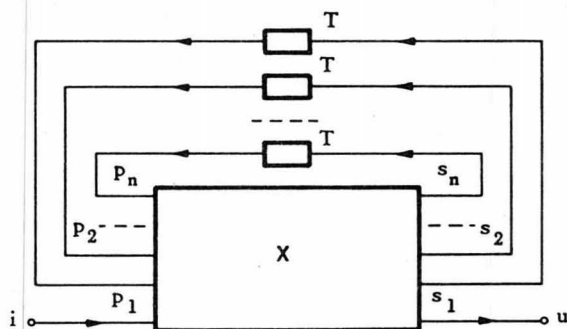
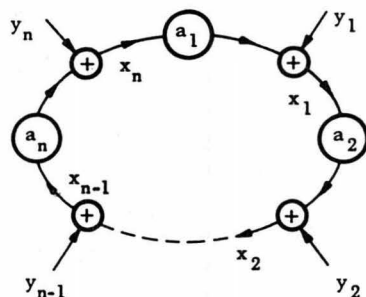


Fig.C.10 - Circuito digitale nel quale sono evidenziati tutti gli elementi di ritardo. La rete X è senza memoria.

Dimostriamo ora la necessità della condizione data. Supponiamo a questo scopo che nello schema sia presente un ciclo chiuso privo di elementi di ritardo, il quale nel caso più generale può essere schematizzato come in fig.C.11. Con riferimento alle notazioni indicate in tale figura, le equazioni corrispondenti allo schema dato sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_1 + a_1 x_n \\
 x_2 &= y_2 + a_2 x_1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= y_n + a_n x_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{C.18}$$

Fig.C.11 - Ciclo chiuso privo di elementi di ritardo considerato nella dimostrazione del teorema C.1.

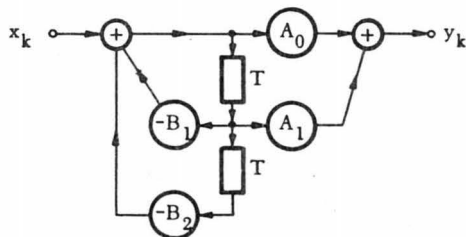


È evidente che assegnate le quantità $y_1, y_2, \dots, y_n$, non risulta possibile determinare le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$, eseguendo unicamente le operazioni indicate nello schema. Infatti tale calcolo necessita della inversione di una matrice e quindi di operazioni diverse da quelle previste. Il teorema risulta quindi dimostrato.

Esempio C.5

Assegnato il circuito URC di fig.C.12, verificare se esso può rappresentare un circuito digitale. Nel caso affermativo scrivere la sequenza di operazioni ad esso relativa.

Fig.C.12 - Circuito URC tempo-discreto considerato nell'esempio C.5.



Poichè nel circuito dato non vi sono cicli chiusi privi di elementi di ritardo, per il teorema C.1 esso può rappresentare un circuito digitale. Per determinare la sequenza di operazioni ad esso equivalente, ridisegniamo il circuito evidenziando gli elementi di ritardo (fig.C.13). Le operazioni da effettuare all'istante k-esimo sono le seguenti:

$$y_k = (x_k - B_1 p_{1k} - B_2 p_{2k}) A_0 + p_{1k} A_1$$

$$s_{1k} = x_k - B_1 p_{1k} - B_2 p_{2k}$$

$$s_{2k} = p_{1k}$$

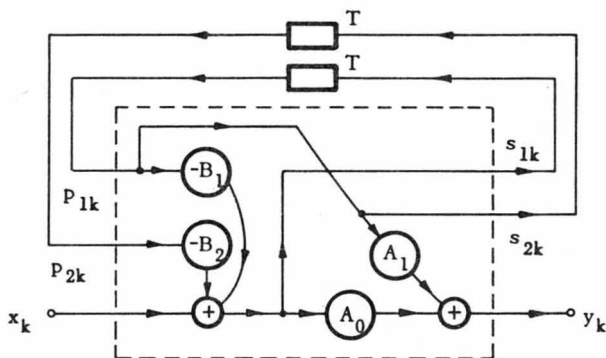


Fig.C.13 - Circuito digitale di fig.C.12 ridisegnato per ottenere la sequenza di istruzioni all'istante k-esimo.

Le grandezze s_{1k} e s_{2k} devono essere memorizzate nell'intervallo T intercorrente fra gli istanti k-esimo e $k + 1$ -esimo. Prima di iniziare le operazioni re-

lative al nuovo istante occorre calcolare le nuove grandezze $p_{1,k+1}$ e $p_{2,k+1}$; esse valgono:

$$p_{1,k+1} = s_{1k}$$

$$p_{2,k+1} = s_{2k}$$

Le operazioni suddette devono essere ripetute ciclicamente per tutti gli istanti d'interesse, ordinatamente a partire da $k = 0$. In tale istante ovviamente risulterà $p_{10} = p_{20} = 0$.

C.4 - Il metodo alle differenze finite ed i circuiti digitali.

L'analisi nel dominio del tempo di un circuito costituito da resistori, condensatori, induttori, generatori controllati e nullori può essere effettuata utilizzando il calcolatore mediante il metodo alle differenze finite, come messo in evidenza nel § III.5. Facciamo vedere nel seguito che tale metodo implica la sostituzione al circuito di partenza di un circuito digitale. Poichè tale sostituzione non è esatta, è importante valutare gli errori che ne conseguono. Ciò può essere fatto considerando in dettaglio il circuito digitale di arrivo e confrontando la sua risposta con quella del circuito a costanti concentrate di partenza.

Il metodo di analisi sviluppato nei § III.5 e III.6 implica la sostituzione del condensatore e dell'induttore con un circuito equivalente comprendente un resistore e un generatore, la cui grandezza impressa dipende dai valori delle grandezze elettriche applicate all'elemento in un istante che precede quello in esame di un intervallo di tempo T prefissato, come indicato nelle tab. III.5.1 e III.5.2. Il procedimento di analisi implementato sul calcolatore e descritto nel § III.6 consiste, dopo la suddetta sostituzione, nei seguenti passi, per ogni istante $t = kT$:

- 1) scrivere il sistema di equazioni risolvanti su base nodi della rete resistiva risultante;
- 2) risolvere il sistema precedente;
- 3) calcolare il valore delle grandezze elettriche implicate nei circuiti equivalenti dei condensatori e degli induttori, relativi all'algoritmo prescelto.

La procedura descritta permette di ottenere gli stessi risultati che si otterrebbero sostituendo il circuito a costanti concentrate d'interesse con uno digitale. Individuiamo tale circuito digitale. Allo scopo supponiamo che in corrispondenza all'istante kT , la risoluzione del si-

stema di equazioni su base nodi dia la seguente espressione per il vettore $[E]$ delle tensioni dei nodi:

$$(C.19) \quad [E(kT)] = [A][E_g(kT)] + [B][I_g(kT)] + [A_1][I_c(kT)] + [B_1][I_L(kT)]$$

essendo: $[E_g]$ e $[I_g]$ il vettore delle tensioni impresse dei generatori indipendenti di tensione ed il vettore delle correnti impresse dei generatori indipendenti di corrente; $[I_c]$ e $[I_L]$ i vettori aventi come componenti rispettivamente le correnti impresse dei generatori che compaiono nei circuiti equivalenti dei condensatori e degli induttori; $[A]$, $[B]$, $[A_1]$, $[B_1]$ le matrici determinate nell'ambito del metodo di analisi su base nodi.

È facile verificare che, in base alle relazioni riportate nel paragrafo III.6, è ora possibile determinare le quantità $[I_c]$ e $[I_L]$ relativamente all'istante successivo $(k+1)T$. Infatti il valore di $[I_c(\{k+1\}T)]$ è ricavabile come indicato nella spiegazione del sottoblocco M22 del § III.6 mediante la relazione:

$$(C.20) \quad [I_c(\{k+1\}T)] = [C_c(kT)] + \frac{2}{T} [C][V_c(kT)]$$

in cui il vettore $[C_c]$ è quello delle correnti che scorrono nei condensatori; il vettore $[V_c]$ è quello delle relative tensioni; $[C]$ è la matrice diagonale avente come componenti i valori delle capacità dei condensatori. È inoltre evidente che $[V_c]$ è immediatamente deducibile dal dal vettore $[E]$, cioè:

$$(C.21) \quad [V_c] = [H_c][E]$$

in cui $[H_c]$ è una matrice reale determinabile per semplice ispezione visiva del circuito in esame. Inoltre il vettore $[C_c]$ si può ottenere dalla (III.6.15), cioè:

$$(C.22) \quad [C_c(kT)] = \frac{2}{T} [C][V_c(kT)] - [I_c(kT)]$$

Analogamente il valore di $[I_L(\{k+1\}T)]$ è ricavabile come indicato nella spiegazione del sottoblocco M21 del § III.6 mediante la relazione:

$$(C.23) \quad [I_L(\{k+1\}T)] = [C_L(kT)] + \frac{T}{2} [L]^{-1} [V_L(kT)]$$

in cui il vettore $[C_L]$ è quello delle correnti che scorrono negli induttori; il vettore $[V_L]$ è quello delle relative tensioni; $[L]$ è la matrice diagonale avente come componenti i valori delle induttanze degli induttori. È inoltre evidente che $[V_L]$ è immediatamente deducibile dal vettore $[E]$ cioè:

$$(C.24) \quad [V_L] = [H_L][E]$$

in cui $[H_L]$ è una matrice reale determinabile per ispezione visiva del circuito. Per quanto riguarda il vettore $[C_L]$, esso si ottiene dalla (III.6.9), cioè:

$$(C.25) \quad [C_L(kT)] = \frac{T}{2} [L]^{-1} [V_L(kT)] + [I_L(kT)]$$

Utilizzando le equazioni (C.19) ÷ (C.25) si vede che a partire dalle grandezze impresse all'istante kT e dalle grandezze che rappresentano lo stato della rete nel medesimo istante, si possono ricavare le grandezze di stato all'istante successivo $(k+1)T$. Inoltre le operazioni considerate sono costituite esclusivamente da somme fra grandezze e moltiplicazioni di grandezze per quantità costanti. Pertanto le suddette equazioni rappresentano un circuito digitale, di cui uno schema possibile è riportato in fig.C.14, dove si indicano i vettori e le matrici, per ragioni di spazio, come se fossero quantità scalari. È ovvio che per avere lo schema completo del circuito digitale, occorre successivamente tenere conto delle dimensioni dei vettori e delle matrici implicate in tale schema.

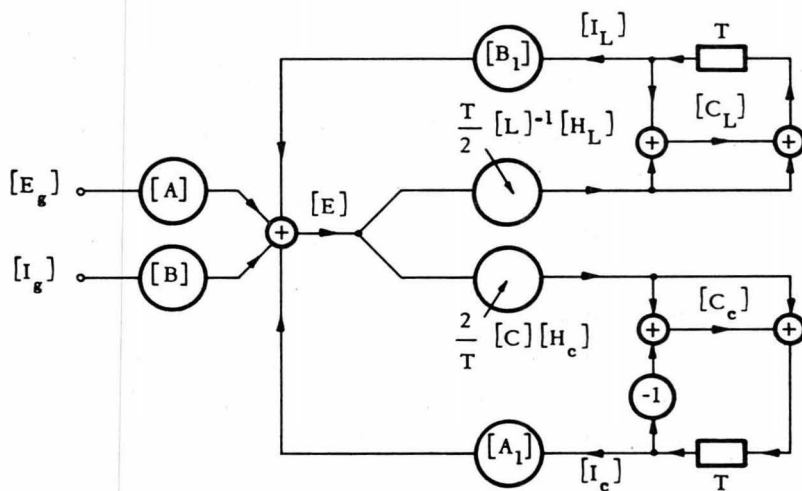


Fig.C.14 - Circuito digitale che corrisponde a quello analogico nell'analisi con il metodo alle differenze finite descritto nel § III.6.

Osservazione C.1

L'equazione (C.19) rappresenta l'espressione esplicita per ottenere le tensioni dei nodi a partire dai valori dei generatori presenti. È importante osservare che solo utilizzando tale espressione è possibile ricondurre l'analisi della rete ad un circuito digitale. Essa è già stata introdotta nella osservazione (III.6.1) (utilizzando una forma più compatta e simboli differenti) allo scopo di semplificare il metodo automatico ivi descritto; si rimanda a tale osservazione per quanto riguarda i vantaggi dell'uso di tale espressione esplicita e per la descrizione del metodo con il quale possono essere determinate le matrici $[A]$, $[B]$, $[A_1]$, $[B_1]$ che in essa compaiono.

In contrapposizione, l'analisi con il metodo alle differenze finite può essere anche effettuata risolvendo in ogni istante kT il circuito dato con il metodo dei nodi, come descritto nello schema a blocchi di fig.III.5.1. In tale caso il metodo di calcolo non corrisponde ad un circuito digitale, poichè in esso è presente una operazione non ammessa quale è quella relativa all'inversione di una matrice. Dal punto di vista dei risultati non ci sono differenze, se si trascurano gli errori introdotti dalle operazioni aritmetiche che sono differenti, poichè è differente la sequenza di operazioni da svolgere.

Esempio C.6

Determinare il circuito digitale che corrisponde al circuito di fig.C.15, supponendo di analizzarlo con il metodo alle differenze finite del § III.6.

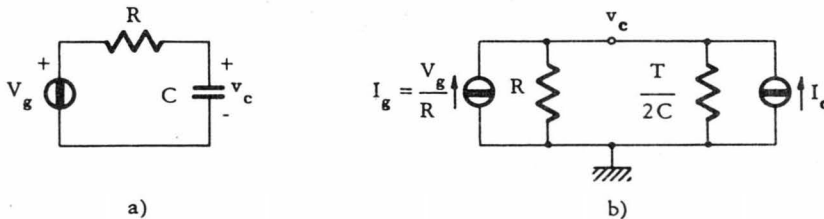


Fig.C.15 - a) Circuito considerato nell'esempio C.6; b) Circuito trasformato nell'analisi alle differenze finite.

Trasformiamo il circuito assegnato in modo da avere una sola coppia di nodi, sostituendo inoltre al condensatore il circuito equivalente costituito da un resistore e da un generatore di corrente. Si ottiene lo schema b) di fig.C.15. L'unica equazione su base nodi è la seguente:

$$v_c \left[\frac{1}{R} + \frac{2C}{T} \right] = I_c + I_g$$

Quindi le matrici di fig.C.14 si riducono a:

$$[A] = 0, \quad [B] = \left(\frac{1}{R} + \frac{2C}{T} \right)^{-1}, \quad [B_1] = 0, \quad [A_1] = [B],$$

$$[H_L] = 0, \quad [H_c] = 1, \quad [C] = C$$

Di conseguenza il circuito digitale risultante è quello mostrato in fig.C.16.

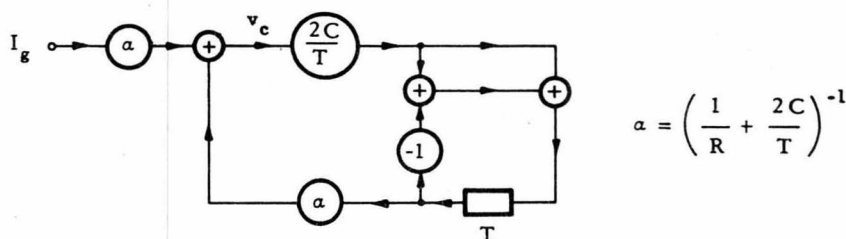


Fig.C.16 - Circuito digitale corrispondente a quello di fig.C.15.

La determinazione delle grandezze elettriche d'interesse nella analisi del circuito a costanti concentrate con il metodo alle differenze finite prevede la sostituzione delle grandezze impresse dai generatori indipendenti con sequenze le cui componenti sono i valori che tali grandezze assumono per kT , con $k = 0, 1, 2, \dots$. Il circuito digitale corrispondente fornisce delle grandezze d'interesse le corrispondenti sequenze. Illustriamo quanto detto con un esempio.

Esempio C.7

Determinare la tensione v_c ai capi del condensatore del circuito di figura C.15 a), nell'ipotesi che la grandezza impressa coincida con l'impulso unitario. Confrontare il risultato con quello esatto ottenuto con il metodo differenziale.

Il circuito digitale da considerare nel presente caso è quello di fig.C.16, in cui la sequenza d'ingresso corrispondente a I_g , vale:

$$I_g(0) = 1/R$$

$$I_g(k) = 0 \quad \text{per} \quad k \geq 1$$

Il circuito URC corrispondente, nel dominio della trasformata di Laplace, è indicato in fig.C.17. Scegliendo come incognite le grandezze X_1, X_2, V_c , scriviamo le relazioni costitutive dei sommatore; si ha:

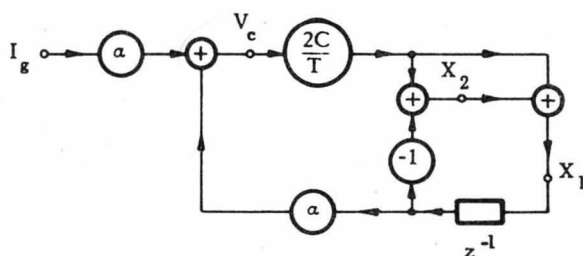


Fig.C.17 - Circuito URC corrispondente a quello di fig.C.16 nel dominio della trasformata di Laplace.

$$V_c = \alpha (I_g + X_1 z^{-1})$$

$$X_1 = X_2 + (2C/T) V_c$$

$$X_2 = (2C/T) V_c - X_1 z^{-1}$$

Risolvendo il sistema precedente, si ottiene per la funzione di trasferimento cercata:

$$\frac{V_c(s)}{I_g(s)} = RH \frac{1 + z^{-1}}{z^{-1} - B} = RH \left[1 + \frac{1 + B}{z^{-1} - B} \right]$$

in cui:

$$B = \frac{\frac{2C}{T} + \frac{1}{R}}{\frac{2C}{T} - \frac{1}{R}} ; \quad H = \frac{1/R}{\frac{1}{R} - \frac{2C}{T}}$$

La risposta impulsiva del circuito URC vale, in base alla (C.12):

$$h(0) = - \frac{RH}{B}$$

$$h(k) = - \frac{1 + B}{B^{k+1}} RH \quad k \geq 1$$

La sequenza relativa alla tensione v_c si ottiene moltiplicando la risposta impulsiva per $1/R$.

Gli esempi C.6 e C.7 hanno messo in evidenza che anche per circuiti a costanti concentrate molto semplici i calcoli che occorre effettuare sul circuito digitale corrispondente per determinarne la risposta so-

no notevolmente più onerosi che procedendo direttamente. Ciò è giustificato nel caso dell'utilizzazione del calcolatore per il modo di funzionare di quest'ultimo. Ai fini tuttavia dello scopo principale della presente appendice, che è quello di valutare l'influenza della struttura del circuito sull'errore che si commette nell'analisi con il metodo alle differenze finite, si può procedere in modo più semplice, determinando il legame diretto tra la risposta del circuito digitale e quella del circuito a costanti concentrate d'interesse. A questo proposito osserviamo che la risposta impulsiva del circuito digitale si ottiene semplicemente dalla risposta impulsiva del circuito URC corrispondente. Questa, a sua volta, si ottiene immediatamente con la (C.12) dalla corrispondente funzione di rete, che per la proprietà C.1 è una funzione razionale reale della variabile z^{-1} . È evidente che se potessimo ricavare tale funzione di rete in modo semplice a partire da quella corrispondente del circuito a costanti concentrate, avremmo raggiunto la semplificazione auspicata.

D'altra parte il circuito URC che è associato a quello a costanti concentrate nel dominio delle differenze finite è ottenuto per effetto della trasformazione delle relazioni costitutive degli elementi con memoria. Esaminiamo le trasformazioni di tali relazioni costitutive, quali emergono dalle tabelle III.5.1 e III.5.2. Si ha:

$$\text{induttore} \quad i(t+T) = i(t) + \frac{T}{2L} [v(t) + v(t+T)] \quad (\text{C.26})$$

$$\text{condensatore} \quad v(t+T) = v(t) + \frac{T}{2C} [i(t) + i(t+T)]$$

che, nel dominio delle trasformate di Laplace, equivalgono a:

$$\text{induttore} \quad I(s) = z^{-1} I(s) + \frac{T}{2L} [V(s) z^{-1} + V(s)] \quad (\text{C.27})$$

$$\text{condensatore} \quad V(s) = z^{-1} V(s) + \frac{T}{2C} [I(s) z^{-1} + I(s)]$$

e quindi a:

$$\text{induttore} \quad V(s) = \frac{2L}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} I(s) \quad (\text{C.28})$$

$$\text{condensatore} \quad I(s) = \frac{2C}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} V(s)$$

Le (C.28) mettono in evidenza che le trasformazioni delle relazioni costitutive degli elementi con memoria, implicite nel metodo alle differenze finite usato nel Cap. III, equivalgono alla semplice sostituzione della variabile s con la variabile:

$$(C.29) \quad w = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Ciò permette di affermare:

Proprietà C.5 - «La funzione di trasferimento necessaria per il calcolo della risposta impulsiva del circuito digitale che corrisponde nel metodo alle differenze finite (variante trapezoidale) ad un circuito a costanti concentrate, si ottiene sostituendo nella funzione di trasferimento ottenuta nel dominio di Laplace per questo circuito la variabile s con la variabile w data dalla (C.29)».

Tenendo conto di questa proprietà è possibile procedere ulteriormente, individuando l'espressione esplicita della risposta impulsiva del circuito digitale a partire dalla conoscenza della funzione di rete del circuito a costanti concentrate. Supponiamo che tale funzione di rete abbia la seguente forma, come avviene nella maggior parte dei casi d'interesse:

$$(C.30) \quad F(s) = R_0 + \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{s - s_i}$$

In base alla proprietà C.5, la funzione di rete del circuito URC corrispondente è:

$$(C.31) \quad G(z) = R_0 + \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{w - s_i} = \left(R_0 - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{1 + \frac{s_i T}{2}} \right) + \\ + \sum_{i=1}^N \frac{1}{z^{-1} - B_i} \frac{-T R_i}{\left(1 + \frac{s_i T}{2} \right)^2}$$

in cui:

$$B_i = \frac{1 - s_i T/2}{1 + s_i T/2}$$

Tenendo conto della (C.12), si ottiene per la risposta impulsiva del circuito digitale:

$$(C.32) \quad h(0) = \left\{ R_0 + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{1 - \frac{s_i T}{2}} \right\}$$

$$h(k) = T \sum_{i=1}^N R_i \frac{\left(1 + \frac{s_i T}{2}\right)^{k-1}}{\left(1 - \frac{s_i T}{2}\right)^{k+1}} \quad k \geq 1$$

Esempio C.8

Determinare con la (C.32) la risposta impulsiva del circuito digitale di figura C.16.

Osserviamo che la funzione di trasferimento del corrispondente circuito a costanti concentrate è:

$$\frac{1/C}{s + \frac{1}{RC}}$$

Perciò c'è un solo polo per $s_i = -1/RC$ con residuo pari a $1/C$. Dalla (C.32) abbiamo:

$$h(0) = \frac{T}{2} \frac{1/C}{1 + \frac{T}{2RC}}$$

$$h(k) = \frac{T}{C} \frac{\left(1 - \frac{T}{2RC}\right)^{k-1}}{\left(1 + \frac{T}{2RC}\right)^{k+1}} \quad k \geq 1$$

Tali espressioni sono esattamente quelle ottenute nell'esempio C.7.

C.5 - Valutazione dell'influenza della struttura del circuito sull'errore commesso con il metodo alle differenze finite.

La formula (C.32) fornisce almeno qualitativamente il modo di valutare l'effetto della struttura del circuito sull'errore che si commette, quando si analizza un circuito mediante il metodo alle differenze finite. A questo scopo notiamo che, facendo riferimento alla funzione di trasferimento (C.30), otteniamo una risposta impulsiva uguale a:

$$(C.33) \quad \sum_{i=1}^N R_i e^{s_i k T}$$

trascurando l'impulso centrato sull'origine.

Tale espressione viene determinata approssimativamente con la (C.32), quando usiamo il calcolatore per effettuare l'analisi. È importante ricordare che la risposta impulsiva permette di ricostruire ogni altra risposta e quindi costituisce un elemento valido di giudizio sull'errore che introduce il circuito digitale.

Al variare dell'intervallo di campionamento varia il discostamento tra la (C.32) e la (C.33); tuttavia tale discostamento sicuramente diminuisce al diminuire di T , come consegue dal seguente limite di facile verifica:

$$(C.34) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{s_i T}{2}\right)^{k-1}}{\left(1 - \frac{s_i T}{2}\right)^{k+1}} = e^{s_i t}$$

in cui $t = kT$ è l'istante di osservazione.

La rapidità con cui avviene l'avvicinamento della (C.32) alla (C.33), d'altra parte dipende dall'ampiezza dei termini $s_i T/2$, che compaiono nella (C.32). Quindi, almeno orientativamente, si può dire che lo intervallo T va scelto tanto più piccolo quanto maggiore è la distanza dall'origine dei poli del circuito da analizzare. Tale distanza, sempre orientativamente, è dello stesso ordine di grandezza della massima frequenza d'interesse per l'applicazione specifica del circuito stesso. È opportuno però tenere presente che la diminuzione di T comporta due inconvenienti:

1) l'aumento del numero delle iterazioni da effettuare a parità d'intervallo di tempo da esaminare;

2) l'aumento di accuratezza richiesta per eseguire i calcoli, ciò che implica la necessità di usare più cifre significative per rappresentare le varie quantità in gioco.

C.6 - Riferimenti bibliografici.

La trattazione dei circuiti digitali effettuata nella presente appendice è stata limitata all'obiettivo di approfondire il legame tra la struttura del circuito e l'errore introdotto dal metodo alle differenze finite, considerato nel Cap.III. L'argomento dei circuiti digitali è notevolmente vasto ed esula dagli scopi del testo. Si vuole solo accennare ad alcuni aspetti notevolmente interessanti, strettamente connessi con la materia trattata. Un primo aspetto fondamentale riguarda la rappresentazione delle grandezze in un circuito digitale, che necessariamente deve avvenire entro un numero di cifre limitato. L'effetto di tale lunghezza limitata è estremamente importante, soprattutto in relazione all'aritmetica usata del tipo a virgola fissa. Nascono dei problemi di sensibilità del tipo di quelli trattati nel Cap.VIII. Inoltre possono insorgere problemi di instabilità legati a meccanismi essenzialmente non-lineari (*cicli limite*).

Un secondo aspetto che vogliamo ricordare è quello della individuazione di circuiti digitali aventi un comportamento simile a quello dei circuiti a costanti concentrate, in modo da poter trasferire ad essi il grande bagaglio di nozioni e procedimenti di sintesi disponibili per i circuiti a costanti concentrate. Per tale aspetto si rimanda all'articolo classico: A.Fettweis, «Digital filter structures related to classical filter networks», Archiv. für Elektronik und Übertragungstechnik, Vol. 25, 1971, p. 79.

*

**INDICE ANALITICO
E
BIBLIOGRAFICO**

INDICE ANALITICO

Per ogni voce dell'indice viene indicata la pagina o le pagine in cui è considerata; per comodità viene anche indicato il volume in cui essa è contenuta (con il numero romano).

A

Aggiunta (rete aggiunta):

- definizione II, 691
- uso nel calcolo della sensibilità II, 691 ÷ 703

Albero:

- definizione I, 56
- proprietà I, 57 ÷ 58

Ammettenza: I, 358

Amplificatore video:

- determinazione della risposta al gradino in caso di sottocompensazione, e sovracompensazione I, 340 ÷ 348

Analisi (vedere: Fasori, Laplace, Nodi, Maglie, Tagli, Automatico) di circuiti contenenti blocchi 2-porte:

- con il teorema di sostituzione II, 608
- con il circuito equivalente II, 611

Analogia della mobilità:

- modelli ideali: la molla II, 783 ÷ 784
lo smorzatore II, 784
la massa II, 784-785
- applicazione tipica: il circuito meccanico a barrette di acciaio II, 787 ÷ 794

Attenuazione:

- di inserzione II, 581
- di potenza II, 580
- di trasduzione II, 580
- legame delle attenuazioni di inserzione, di potenza e trasduzione con i termini della matrice di diffusione II, 579 ÷ 583

- di ritorno II, 539
- legame dell'attenuazione di ritorno con il coefficiente di riflessione II, 542

Attive:

- reti RC attive II, 632

Automatico:

- analisi automatica di un circuito senza memoria:
 - schema a blocchi I, 140 ÷ 153
 - lista in FORTRAN I, 161 ÷ 165
 - ingresso I, 159 ÷ 160
 - uscita I, 160 ÷ 161
 - esempi I, 177 ÷ 194
- analisi automatica di un circuito con memoria nel dominio del tempo con il metodo delle differenze finite:
 - schema a blocchi I, 269 ÷ 282
 - lista in FORTRAN I, 306 ÷ 313
 - esempi I, 329 ÷ 348
- analisi automatica nel dominio dei fasori:
 - schema a blocchi I, 466 ÷ 470
 - lista in FORTRAN I, 496 ÷ 501
 - esempi I, 507 ÷ 518

B

Barretta di acciaio: derivazione del circuito meccanico: II, 788 ÷ 791

Bartlett: teorema di Bartlett per le reti bisezionabili:

- non intrecciate II, 656 ÷ 659
- intrecciate II, 660 ÷ 664

Bilineare: teorema II, 687 ÷ 690

Bipolo:

- versi coordinati della tensione e della corrente I, 8
- potenza assorbita da un bipolo I, 9
- comportamento energetico I, 9

BIQUAD:

- esempio di applicazione delle equazioni di stato nella microelettronica II, 762

Bisezionabile:

- rete bisezionabile non intrecciata II, 656
- rete bisezionabile intrecciata II, 660

Blocchi: (vedere diagramma di flusso)

Bobina ibrida:

- matrice di diffusione II, 623 ÷ 626

C

Causalità: definizione I, 16

CCD: esempio di circuito URC tempo-discreto II, 807

Cifra di rumore:

- definizione II, 642
- legame con la resistenza del generatore II, 642 ÷ 644

Circuito:

- a costanti concentrate I, 8
- aperto I, 22
- aumentato I, 115-116
- di tipo non-elettrico II, 782-796
- progetto di un circuito I, 1
- teoria dei circuiti I, 1

Circuito digitale:

- definizione II, 809
- funzione di trasferimento del circuito digitale che corrisponde a quello a costanti concentrate nel metodo alle differenze finite II, 819
- legame con i metodi alle differenze finite II, 812 ÷ 820
- proprietà tipica II, 809

Circuito equivalente:

- di un bipolo I, 25
- derivazione:
 - mediante le trasformazioni lineari II, 671
 - con la variazione di livello interna II, 675 ÷ 681
 - in modo continuo II, 682
 - in modo continuo con ottimizzazione della sensibilità II, 729 ÷ 733
- generalità I, 44-45
- di un transistor bipolare a giunzione:
 - mediante i parametri h I, 46 ÷ 49
 - a π -ibrido I, 49 ÷ 52

Circuito unidirezionale:

- analisi di un circuito unidirezionale a ritardo costante II, 800
- definizione II, 797 ÷ 802
- elementi ideali costituenti II, 798 ÷ 799
- funzione di trasferimento II, 802
- a ritardo costante II, 799
- risposta impulsiva II, 804

Co-albero:

- definizione I, 56
- proprietà I, 57 ÷ 58

Coefficiente:

- di merito degli induttori e condensatori I, 25
- di riflessione:
 - definizione II, 524
 - legame con altre rappresentazioni II, 526
 - relazione con il massimo trasferimento di potenza attiva II, 541

Colpitts: innescodell'oscillazione con il metodo di Laplace I, 326 ÷ 328

Componente a più terminali:

- definizione I, 11
- versi coordinati delle grandezze elettriche I, 12

Concentrate (vedere costanti concentrate)

Condensatore:

- definizione I, 18
- derivazione del modello II, 781
- circuito equivalente nel metodo alle differenze finite I, 265
- circuito equivalente nel dominio di Laplace I, 243

Connessione:

- in cascata II, 595
- parallelo-parallelo II, 594
- serie-serie II, 591
- altri tipi II, 593

Connesso: circuito non connesso I, 64 ÷ 65

Continuo: circuiti equivalenti in modo continuo II, 682

Convertitori d'impedenza negativa I,
28 ÷ 30

Corto-circuito I, 22

Costanti concentrate:

- introduzione dell'ipotesi II, 769 ÷ 771
- limiti di validità II, 771 ÷ 772
- conseguenze dell'ipotesi:
 - suddivisione in regioni tipiche (condensatore, induttore, resistore, generatori) II, 772 ÷ 776
 - il modello circuitale II, 776 ÷ 779
 - le leggi di Kirchhoff II, 778 ÷ 779

D**Derivata di una funzione di rete:**

- calcolo con la rete aggiunta II, 692

Diagramma di flusso:

- blocchi tipici I, 141
- del metodo di analisi su base nodi I, 142 ÷ 153
- del metodo alle differenze finite I, 269 ÷ 282
- del metodo di Gauss per la soluzione di un sistema di equazioni lineari I, 154 ÷ 158
- del metodo di calcolo dell'effetto delle variazioni dei componenti II 714 ÷ 717
- del calcolo del gradiente II, 723

Differenze finite:

- algoritmi per il calcolo della derivata rispetto al tempo I 262 ÷ 263
- circuiti equivalenti dell'induttore I, 264
- circuiti equivalenti del condensatore I, 265
- analisi con il metodo alle differenze finite:
 - schema a blocchi I, 269 ÷ 282
 - lista in Fortran I, 306 ÷ 313
 - esempi di applicazione I, 329 ÷ 348
 - circuito digitale corrispondente al programma di analisi II 812 ÷ 820
 - errori I, 266 ÷ 269; II, 821

Distribuzione di Dirac (vedere impulso unitario)**Doppio: rete a doppio T II, 620****E****Elementi ideali:**

- nei circuiti a costanti concentrate:
 - derivazione II, 772 ÷ 776
 - bipolari I, 17 ÷ 23
 - a due-porte attivi I, 25 ÷ 35
 - a due-porte passivi I, 35 ÷ 42
 - a più porte passivi I, 42 ÷ 44
- nei circuiti meccanici II 783 ÷ 787
- nei circuiti unidirezionali a ritardo costante II, 794 ÷ 795

Equalizzatore audio: risposta in ampiezza I, 510 ÷ 518**Equazioni:**

- differenziali per l'analisi di un circuito con memoria:
 - individuazione I, 201 ÷ 203
 - risoluzione I, 203 ÷ 204
 - esempi del primo ordine I, 204 ÷ 210
 - esempi del secondo ordine I, 211 ÷ 223
- lineari I, 154 ÷ 158
- di stato:
 - introduzione II, 735

algoritmo per la derivazione, nel caso di una rete RLC II, 735 ÷ 751
 algoritmo basato sulla rappresentazione ibrida II, 744 ÷ 751
 uso nella microelettronica lineare II, 760

Equivalente (vedere circuito equivalente)**Equivalenze:**

- tra reti 2-porte simmetriche II, 649
- tra rete a T e rete a π , II, 650
- tra rete a T-parallelo e rete a π II, 652
- tra traliccio simmetrico e rete a scala II, 653 ÷ 655
- tra rete bisezionabile e traliccio II, 656

Errore: nel metodo alle differenze finite I, 266 ÷ 269; II, 831**F****Fasori (metodo dei):**

- derivazione dal metodo di Laplace I, 396 ÷ 401
- descrizione del procedimento I, 401 ÷ 403
- osservazioni ed esempi I, 403 ÷ 408; 501 ÷ 507
- uso grafico I, 408 ÷ 421
- applicazione in presenza di eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa I, 447
- applicazione mediante il calcolatore I, 466 ÷ 470

Filo di accoppiamento:

- derivazione del circuito meccanico equivalente II, 791 ÷ 794

Filtro:

- determinazione della risposta nel tempo:
 - ad un gradino I, 330 ÷ 332
 - ad un impulso rettangolare I, 332 ÷ 333
 - ad un'onda quadra in banda I, 334 ÷ 336
 - ad un'onda quadra fuori banda I, 336 ÷ 340
- determinazione della risposta in frequenza I, 507 ÷ 509

FORTRAN (liste):

- FREQUENZA (analisi nel dominio della frequenza) I, 499
- GAUSS (SUBROUTINE) (soluzione di un sistema di equazioni lineari) I, 164
- NODI (analisi con il metodo dei nodi) I, 161
- TEMPO (analisi con il metodo alle differenze finite) I, 310

Forza:

- nell'analogia della mobilità II, 783
- Fourier:**
 - sviluppo in serie Fourier nell'analisi in regime permanente con eccitazioni periodiche I, 455 ÷ 461
 - trasformata di Fourier per l'analisi in frequenza I, 461 ÷ 466
- Frequenza:** analisi nel dominio della frequenza I, 461 ÷ 466
- FREQUENZA:** programma in FORTRAN per l'analisi in frequenza:
 - schema a blocchi I, 466 ÷ 470
 - lista I, 496 ÷ 501
 - esempi di applicazione I, 507 ÷ 518
- Funzione di rete:**
 - definizione I, 350 ÷ 357
 - tipi I, 357 ÷ 359
 - proprietà derivanti dall'ipotesi costanti concentrate I, 365 ÷ 367
 - proprietà derivanti dalla stabilità I, 367 ÷ 374
 - proprietà conseguenti dalla natura dei componenti I, 383 ÷ 384
 - proprietà conseguenti dalla topologia del circuito I, 384 ÷ 386

G

- Gauss:** schema a blocchi per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari I, 154-158
- GAUSS:** lista in Fortran del metodo di soluzione di un sistema di equazioni lineari I, 164
- Generatore:**
 - indipendente di tensione I, 21
 - indipendente di corrente I, 22
 - derivazione dei modelli dei generatori indipendenti II, 790
 - controllato I, 26 ÷ 28
- Giratore:** I, 40 ÷ 42
- Gradiente:**
 - calcolo del gradiente della funzione obiettivo II, 721 ÷ 723
 - schema a blocchi per il calcolo del gradiente II, 723
- Gradino unitario:**
 - definizione I, 224
 - giustificazione fisica I, 225 ÷ 227
 - trasformata di Laplace I, 286
- Grafico (metodo grafico dei fasori)**
 - relazioni costitutive I, 408 ÷ 411
 - leggi di Kirchhoff I, 411 ÷ 412
 - esempi I, 412 ÷ 415
 - applicazione al sistema trifase I, 415 ÷ 418
 - applicazione al circuito a scala I, 418 ÷ 421

- Grafo di un circuito** I, 52 ÷ 54
- Grandezze fisiche tipiche dei circuiti:**
 - non elettriche I, 2
 - elettriche (tensione, corrente) I, 7
- Gruppo (ritardo di gruppo)** II, 587 ÷ 588
- Guadagno:**
 - di potenza II, 579
 - di trasduzione II, 580
 - di inserzione II, 581
 - legame con i termini della matrice di diffusione II, 579 ÷ 583

I

- Ideali (vedere elementi ideali)**
- Impedenza** I, 358
- Impulso unitario:**
 - definizione I, 227
 - proprietà I, 228 ÷ 232
 - trasformata di Laplace I, 286
- Incongruenze del modellamento** I, 23, 52, 86 ÷ 87, 108 ÷ 110
- Induttore:**
 - definizione I, 20
 - derivazione del modello II, 780 ÷ 781
 - circuito equivalente nel metodo alle differenze finite I, 264
 - circuito equivalente nel dominio di Laplace I, 245
- Induttori accoppiati mutuamente** I, 35 ÷ 37
 - circuito equivalente nel dominio di Laplace I, 246
- Interno (variazione interna di livello per la generazione di circuiti equivalenti)** II, 675 ÷ 681
- Invarianti di sensibilità** II, 703 ÷ 704
- Invertitore di impedenza negativa** I, 30 ÷ 31

- Ipotesi costanti concentrate (vedere costanti concentrate)**

K

- Kirchhoff:**
 - prima legge I, 10
 - seconda legge I, 11
 - derivazione delle leggi di Kirchhoff da quelle di Maxwell II, 778 ÷ 779

L

- L (rete ad L)** II, 619
- Laplace (trasformata di Laplace):**
 - definizione I, 235
 - proprietà:

- Linearità** I, 236
 derivazione rispetto al tempo I, 236
 integrazione rispetto al tempo I, 237
 traslazione nel tempo I, 285
 - relazioni costitutive dei componenti nel dominio di Laplace e relativi circuiti equivalenti I, 240 ÷ 246
 - leggi di Kirchhoff nel dominio di Laplace I, 246 ÷ 248
 - analisi di un circuito con il metodo della trasformata di Laplace I, 248 ÷ 260
 - teoremi del valore iniziale e finale I, 285
 - trasformazione inversa di Laplace I, 288 ÷ 300:
 tabelle di trasformate I, 301 ÷ 305
 sviluppo in frazioni parziali I, 289 ÷ 300
 - esempi di applicazione del metodo di analisi I, 313 ÷ 328, 501 ÷ 507

Linearità I, 13

Lorentz (legge di reciprocità) I, 15



Maglia:

- definizione I, 55 ÷ 56
- proprietà I, 59 ÷ 60

Maglie (metodo delle maglie):

- analisi su base maglie I, 71, 75
- correnti fittizie di maglia I, 75
- equazioni risolventi per circuiti costituiti da resistori e generatori indipendenti di tensione I, 76
- analisi in presenza di generatori indipendenti di corrente:
 metodo misto I, 81 ÷ 89
 metodo diretto I, 89 ÷ 94
- analisi in presenza di generatori controllati I, 128 ÷ 132

Massa

- nell'analogia della mobilità II, 782

Massimo trasferimento di potenza attiva:

- teorema II, 537
- relazione con il coefficiente di riflessione II, 541

Matrice:

- impedenze a vuoto II, 552
- ammettenze di corto-circuito II, 555
- ibrida $[H]$ II, 557
- ibrida $[G]$ II, 559
- di trasmissione II, 560
- di diffusione II, 569
- legame tra le varie matrici II, 553

Microelettronica:

- elementi ideali:
 sommatore II, 762
 integratore II, 761
- esempio di applicazione delle equazioni di stato II, 762

Minima (rete a fase minima) II, 585

Minimizzazione:

- lungo una direzione II, 723 ÷ 726
- aspetto locale II, 726 ÷ 728

Misura di rumore II, 645

Mobilità (vedere analogia della mobilità)

Modi naturali di un circuito:

- definizione II, 751
- derivazione dalle equazioni di stato II, 752
- calcolo del numero dei modi naturali per una rete RLC II, 755
- assenza in qualche grandezza di un circuito II, 754

Molla ideale (nell'analogia della mobilità) II, 783 ÷ 784

Moltiplicatore II, 794

N

Nodi:

- analisi su base nodi di circuiti contenenti resistori e generatori indipendenti di corrente I, 118 ÷ 122
- di circuiti contenenti generatori indipendenti di tensione I, 122 ÷ 127
- di circuiti contenenti generatori controllati I, 132 ÷ 136
- in presenza di nullori I, 138 ÷ 140
- schema a blocchi I, 140 ÷ 153
- lista in FORTRAN I, 161 ÷ 165

Noratore I, 33

Normalizzazione:

- in frequenza I, 471 ÷ 472
- in livello I, 472 ÷ 473
- esempio I, 474 ÷ 475

Norton (teorema di Norton) II, 530

Nullatore I, 33

Nullore:

- definizione e proprietà I, 31 ÷ 35
- analisi in presenza di nullori I, 136 ÷ 140
- analisi automatica con nullori I, 151

O

Obiettivo (funzione obiettivo):

- errore quadratico medio II, 719
- deviazione massima II, 719

Onde incidente e riflessa II, 540

Ottimizzazione delle prestazioni di un circuito:

- metodo del gradiente:
 descrizione II, 720 ÷ 721
 schema a blocchi II, 723

- minimizzazione nella direzione del gradiente II, 723 ÷ 726
- mediante i circuiti equivalenti in modo continuo, II, 729 ÷ 733

P

Passatutto (funzione passatutto) II, 585

Passività I, 15

Permanenza I, 14

Pi-greco (rete a π) II, 618 ÷ 619

Poli:

- di un circuito passivo I, 372-374
- di un circuito stabile I, 374

Porta I, 11

Potenza:

- in regime permanente sinusoidale:
 - potenza istantanea I, 421 ÷ 423
 - potenza attiva:
 - definizione I, 423 ÷ 425
 - trasferimento nei bipoli II, 537
 - potenza reattiva I, 427
 - potenza complessa I, 426
 - conservazione della potenza complessa I, 430 ÷ 435
 - espressioni esplicite delle potenze assorbite dai componenti tipici I, 435 ÷ 440
 - bilancio energetico I, 440 ÷ 446
- potenza attiva in presenza di eccitazioni sinusoidali di frequenza diversa I, 450 ÷ 455
- disponibile II, 539
- scambiabile II, 541

Predistorsione I, 374 ÷ 379

Progetto di una struttura fisica I, 4

R

Rappresentazione di un circuito sul calcolatore I, 65 ÷ 69

Reciprocità:

- definizione I, 14
- di un bipolo II, 605
- di una rete 2-porte costituita di bipoli II, 605
- del trasformatore II, 606
- degli induttori accoppiati II, 606
- conseguenze della reciprocità sulla
 - matrice $[Z]$ II, 599
 - matrice $[Y]$ II, 599
 - matrice $[H]$ II, 599
 - matrice $[G]$ II, 600
 - matrice $[T]$ II, 600
- parametri immagine II, 601
- matrice di diffusione II, 602

Relazioni costitutive (vedere elementi ideali)

Rendimento nella trasmissione di potenza II, 540

Resistore:

- definizione I, 17
- derivazione del modello II, 779 ÷ 780

Rete aggiunta (vedere aggiunta)

Reti 2-porte:

- bisezionabili II, 656
- circuiti equivalenti delle reti 2-porte II, 612
- connessione di reti 2-porte:
 - parallelo-parallelo II, 594
 - serie-serie II, 591
 - in cascata II, 595
- a fase minima II, 585
- rappresentazione generale II, 544
- rappresentazioni comuni:
 - mediante $[Z]$ II, 552
 - mediante $[Y]$ II, 555
 - mediante $[H]$ II, 557
 - mediante $[G]$ II, 559
 - mediante $[T]$ II, 560
- rappresentazioni orientate verso la sintesi:
 - parametri immagine II, 563
 - matrice di diffusione II, 569
- reciproche II, 598 ÷ 602
- risposta in ampiezza e fase II, 584
- rumorose II, 639
- simmetriche II, 603 ÷ 604
- stabilità delle reti 2-porte II, 635 ÷ 638
- tipiche II, 616
- trasferimento di potenza attraverso una rete 2-porte II, 579

Reti N-porte:

- rappresentazione generale II, 538 ÷ 539
- rappresentazione mediante $[Z]$ ed $[S]$ II, 622
- proprietà della rappresentazione nel caso di reti RLCT II, 627 ÷ 632

Rifasamento di un carico I, 443 ÷ 446

Risonante:

- circuito risonante parallelo I, 477
- circuito risonante serie I, 480
- coefficiente di risonanza I, 478, 480
- legame del coefficiente di risonanza con il coefficiente di merito degli elementi reattivi I, 485 ÷ 486
- energia a risonanza I, 481 ÷ 484

Risposta:

- in ampiezza di una rete 2-porte II, 584
- in fase di una rete 2-porte II, 584

- in frequenza I, 466
- impulsiva:
 - definizione I, 359 ÷ 360
 - proprietà derivanti dalla stabilità I, 367 ÷ 374
- libera e forzata I, 379 ÷ 382
- permanente e transitoria:
 - definizione I, 387 ÷ 391
 - validità I, 391 ÷ 396

Ritardo

- elemento di ritardo in un circuito URC II, 819
- di gruppo:
 - definizione II, 586 ÷ 590
 - legame con la sensibilità II, 590

Rumore:

- cifra di rumore II, 642
- circuito equivalente di un bipolo rumoroso II, 639 ÷ 640
- circuito equivalente di una rete 2-porte rumorosa II, 640 ÷ 642
- misura di rumore II, 645
- cascata di reti 2-porte rumorose II, 646 ÷ 647

S**Scala (rete a scala)**

- descrizione II, 620 ÷ 621
- traliccio equivalente a rete a scala simmetrica II, 653 ÷ 655

Schema a blocchi (vedere diagramma di flusso)**Sensibilità alla variazione dei componenti:**

- definizione II, 686 ÷ 687
- calcolo con la rete aggiunta II, 699 ÷ 703
- espressione esplicita:
 - per l'induttore II, 699
 - per il condensatore II, 700
 - per il resistore II, 699
 - per la transconduttanza II, 700
- invarianti di sensibilità II, 703 ÷ 704

Simmetria:

- conseguenze sulle rappresentazioni di una rete 2-porte:

[Z]	II, 603
[Y]	II, 603
[H]	II, 603
[G]	II, 604
[T]	II, 604
[S]	II, 604

parametri immagine II, 604

Sinusoidale (funzione sinusoidale):

- definizione I, 232 ÷ 234
- trasformata di Laplace I, 286 ÷ 287, 303 ÷ 305

Smorzatore ideale (nell' analogia della mobilità) II, 784**Sommatore** II, 799**Sostituzione** (teorema di sostituzione) II, 528**Stabilità:**

- di un bipolo II, 633 ÷ 635
- a circuito aperto di un bipolo II, 634
- in corto-circuito di un bipolo II, 634
- condizionata II, 633
- incondizionata II, 633
- intrinseca II, 633
- fattore invariante di stabilità II, 638
- di una rete 2-porte II, 635 ÷ 638

Stato di un circuito:

- definizione II, 734
- equazioni di stato II, 735

Stella-poligono (trasformazione) II, 667**Stella-triangolo:**

- trasformazione II, 665 ÷ 666
- uso nell'analisi delle reti a scala II, 669 ÷ 671

Sviluppo in frazioni parziali I, 289 ÷ 296**T****T (rete a T):**

- definizione II, 618
- equivalenza con rete a π II, 650 ÷ 652

Taglio:

- definizione I, 55
- proprietà I, 59 ÷ 60
- analisi su base tagli:
 - metodo I, 94 ÷ 114
- equazioni risolventi nel caso di un circuito costituito da resistori e generatori indipendenti di corrente I, 99 ÷ 103
- in presenza di generatori indipendenti di tensione:
 - metodo misto I, 104 ÷ 110
 - metodo diretto I, 111 ÷ 114

T-derivato:

- definizione II, 619
- equivalenza con rete a π II, 652

Tellegen:

- teorema I, 62 ÷ 63
- legame tra teorema di Tellegen e rumore II, 647

Tempo:

- la variabile tempo in un circuito senza memoria I, 197 ÷ 199
- analisi di un circuito con memoria nel dominio del tempo con il metodo delle differenze finite:
 - schema a blocchi I, 269 ÷ 282
 - lista in FORTRAN I, 306 ÷ 313
- applicazione ad un filtro I, 329 ÷ 340

- applicazione ad un amplificatore video I, 340 ÷ 348
- Tempo-discreti (circuiti) II, 806**
- Thevenin:**
- teorema II, 530
 - teorema generalizzato II, 546
- Tolleranze dei componenti:**
- analisi dell'effetto sulla risposta di un circuito con il metodo statistico II, 706 ÷ 708
 - con il metodo Monte-Carlo II, 709
 - con il metodo del caso peggiore II, 709 ÷ 711
 - in modo automatico II, 711 ÷ 717
- Topologia di un circuito I, 52 ÷ 64**
- Transistore:**
- circuito equivalente a π -ibrido I, 49 ÷ 52
 - circuito equivalente a parametri h I, 46 ÷ 49
 - nello schema:
 - con emettitore a massa I, 166 ÷ 170
 - con base a massa I, 170 ÷ 173
 - con collettore a massa I, 173 ÷ 177
- Traliccio II, 616**
- Trasduzione:**
- esponente di trasduzione su base immagine II, 565
 - guadagno di trasduzione II, 579
- Trasformatore:**
- ideale I, 37 ÷ 40
 - a più di due porte I, 42 ÷ 44
- Trasformazioni lineari nella generazione dei circuiti equivalenti II, 671**
- Triangolo-stella (trasformazione) II, 665 ÷ 666**

Trifase:

- sistema trifase:
 - simmetrico ed equilibrato I, 487
 - dissimmetrico e non equilibrato I, 492
- metodo delle coordinate simmetriche I, 492 ÷ 496
- connessione:
 - stella-stella I, 416
 - stella-triangolo I, 417 ÷ 418
- potenza in un sistema trifase I, 489-490
- trasmissione di energia e rendimento I, 490-491

U

Unidirezionale (vedere circuito unidirezionale)

V**Validità:**

- della connessione di due reti 2-porte:
 - serie-serie II, 592
 - parallelo-parallelo II, 594
- del comportamento di un blocco come rete 2-porte II, 614 ÷ 616
- dell'ipotesi costanti concentrate II, 771 ÷ 772

VAR (programma per l'analisi automatica dell'effetto delle variazioni del valore dei componenti) II, 711 ÷ 717

Variazione interna di livello (per la generazione di circuiti equivalenti) II, 675

Velocità (nell'analogia della mobilità) II, 783

*

INDICE BIBLIOGRAFICO

I riferimenti bibliografici sono riportati in ordine alfabetico. Vicino a ciascuno di essi si riporta il volume e la pagina in cui viene citato.

A

- B.D.O. ANDERSON, S.VONGPANITLERD: «*Network analysis and synthesis. A modern system approach*», Englewood Cliffs, 1973. II, 766
- A. ANGOT: «*Compléments de mathématiques*», Ed. de la Revue d'Optique, 1957. I, 465

B

- C. BECCARI: «*La trasformazione di Laplace nell'analisi dei circuiti*», Boringhieri, 1977. II, 796
- R.D. BERRY: «*An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution*», IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. 18, gennaio 1971. I, 195
- G. BIORCI: «*Fondamenti di Elettrotecnica*», UTET, 1975. I, 9, 348
- W.A. BLACKWELL: «*Mathematical modelling of physical networks*», Mac Millan (New York), 1968. II, 796
- F. BLASI, G. MARTINELLI: «*Simplex approach to the analysis of piecewise-linear networks consisting of transistors, resistors, diodes and independent source*», Alta Frequenza, agosto 1976. I, 69
- H.W. BODE: «*Network analysis and feedback amplifier design*», D. Van Nostrand, 1959. II, 634
- F.H. BRANIN: «*The algebraic - topological basis for network analogies and the vector calculus*», Proc. Symposium on generalized networks, P.I.B., Wiley, 1966. II, 792
- O. BRUGIA: «*A non-iterative method for the partial fraction expansion of a rational function with high order poles*», SIAM Rev., Vol. 7, 1965. I, 260

C

- H.J. CARLIN, A.B. GIORDANO: «*Network theory*», Prentice-Hall, 1964. I, 17;
II, 571, 647

- W. CAUER: «*Synthesis of linear communication networks*», Mc Graw-Hill, 1958 II, 569
- W. CAUER: «*Vierpole*», Elek. Nachr. Tech., Vol. 6, 1929. II, 684
- B.M.G. CHERTMAN: «*A new theory of continuously equivalent networks*», IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 21, gennaio, 1974. II, 685, 733
- L.O. CHUA: «*Introduction to non linear network theory*», Mc Graw-Hill, 1969. I, 69, 348
- L.O. CHUA, PEN-MIN-LIN: «*Computer-aided analysis of electronic circuits*», Prentice-Hall, 1975. I, 195, 262, 349
- G.C. CORAZZA: «*Fondamenti di campi elettromagnetici e circuiti*», Pàtron (Bologna), 1974. II, 581, 648

D

- M. DECINA, F. RICINIELLO, A. ROVERI: «*Esercizi di sistemi digitali*», Siderea, 1976. I, 519
- M. DECINA, F. RICINIELLO: «*Criteri di scelta degli algoritmi per la soluzione dei problemi di ottimizzazione*», Alta Frequenza, gennaio 1976. II, 733
- C.A. DESOER, E.S. KUH: «*Basic circuit theory*», Mc Graw-Hill, 1969. I, 69
- S.W. DIRECTOR: «*Circuit theory: a computational approach*», Wiley, 1975. I, 195
- S.W. DIRECTOR, R.A. ROHRER: «*Inter-reciprocity and its implications*», Proc. Int. Symposium on Network Theory Belgrado, settembre, 1968. II, 647

F

- V.N. FADEEVA: «*Computational methods of linear algebra*», Dover, 1959. I, 196
- A. FETTWEIS: «*Digital filter structures related to classical filter networks*», Archiv. für Elektronik und Übertragungstechnik, 1971. II, 822
- T. FJÄLLBRANT: «*Linear network activity and stability*», IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. 12, marzo 1965. II, 648

G

- M. GASPARINI, D. MIRRI: «*Dispositivi e circuiti elettronici*», Calderini (Bologna), 1976. I, 45
- K. GEHER: «*Theory of network tolerances*», Akadémiai Kiadó Budapest, 1971. II, 689, 704, 708, 729
- A. GHIZZETTI: «*Calcolo simbolico*», Zanichelli, 1943. I, 285, 348
- A. GHIZZETTI, L. MARCHETTI, A. OSSICINI: «*Lezioni di complementi di matematica*», Veschi (Roma), 1972. I, 227, 232, 235, 283, 288, 297
- A. GHIZZETTI, A. OSSICINI: «*Trasformata di Laplace e calcolo simbolico*», UTET, 1971. I, 283
- J.G. GRAEME: «*Applications of operational amplifiers; third generation techniques*», Mc Graw-Hill, 1975. I, 510, 514
- L.G. GRANT, J.I. SEWELL: «*A theory of equivalent active networks*», Proc. ISCAS, Monaco, 1976. II, 685
- E.A. GUILLEMIN: «*Synthesis of passive networks*», Wiley, 1957. II, 647, 684
- A.E. GÜNTHER: «*High-quality wide-band mechanical filters theory and design*», IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. 20, ottobre, 1973. II, 791

H

- G.D. HATCHEL, R.K. BRAYTON, F.G. GUSTAVSON: « *The sparse tableau approach to network analysis and design* », IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. 18, gennaio 1971.
I, 191
- K. HATMAN: « *Noise characterization of linear circuits* », IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 23, ottobre, 1976.
II, 642, 648
- H.A. HAUS, R.B. ADLER: « *Circuit theory of linear noisy networks* », Wiley, 1959.
II, 645, 646
- H. HOLMES: « *Active filters for integrated circuits* », Prentice-Hall, 1974.
II, 648
- N. HOWITT: « *Group theory and electric circuits* », Phys. Rev., Vol. 37, 1931.
II, 684
- H.Y. HSIEH, M.S. GHASI: « *A probabilistic approach to optimal pivoting and prediction of fill - in for random sparse matrices* », IEEE Trans. on Circuit theory, Vol. 19, luglio 1972.
I, 195
- L.P. HUELSMAN: « *Theory and design of active RC circuits* », Mc Graw-Hill, 1968.
II, 761
- L.P. HUELSMAN: « *Basic circuit theory with digital computations* », Prentice - Hall, 1972.
I, 195

J

- R.W. JENSEN, L.P. MC NAMEE: « *Handbook of circuit analysis languages and techniques* », Prentice-Hall, 1976.
I, 349

K

- A.E. KENNELLY, C.P. STEINMETZ: Trans. Amer. Eng., Vol. 10, 1893
I, 518
- G. KRON: « *Equivalent circuit of the elastic field* », J. Appl. Mech., 1944, Vol. 11.
II, 795
- G. KRON: « *Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures* », J. Franklin Inst., 1944, n. 238.
II, 795
- G. KRON: « *Elastic circuit models of partial differential equations* », Elec. Engr., 1948.
Vol. 67.
II, 795
- G. KRON: « *Numerical solution of ordinary and partial differential equations by means of equivalent circuits* », J. Appl. Phys., 1945, Vol. 16.
II, 795
- G. KRON: « *Electric circuit models of the Schrödinger equation* », Phys. Rev., 1945 Vol. 67.
II, 795
- G. KRON: « *Electric circuit models for the vibration spectrum of polyatomic molecules* », J. Chem. Phys., 1946, Vol. 14.
II, 795
- G. KRON: « *Equivalent circuits of compressible and incompressible fluid flow fields* », J. Aeronaut. Soc., 1945, Vol. 12.
II, 795
- G. KRON: « *Tensor analysis of networks* », Wiley, 1939.
I, 196
- F. KÜNEMUND: « *Channel filter with longitudinally coupled flexural mode resonator* », Siemens Forsch., 1972.
II, 790
- F.K. KUO, W.G. MAGNUSON: « *Computed oriented circuit design* », Prentice-Hall, 1965
II, 709, 724, 726, 733

M

- P. MANDARINI: « *Teoria dei segnali* », Ed. Goliardica, Roma, 1976
I, 348

- G. MARTINELLI: «*Sintesi delle reti elettriche*», Siderea 1971. I, 26, 33, 41, 52, 477;
II, 647, 653, 526
- G. MARTINELLI, F. RICINIELLO, M. SALERNO: «*Possibilità d'impiego dei metodi di ottimizzazione nell'analisi delle reti elettriche*», Alta Frequenza, Vol. 42, dicembre, 1973. I, 196; II, 733
- G. MARTINELLI, M. SALERNO: «*Metodo iterativo convergente per l'analisi di reti lineari*», N.R.N., Vol. 20, maggio 1971. I, 196
- G. MARTINELLI: «*Sulla teoria e sintesi delle reti lineari attive*», N.R.N., Vol. 15, 1966. I, 384
- G. MARTINELLI, M. SALERNO: «*Sensitivity and noise comparison of RC active filters*», Network and Signal Theory, P. Peregrinus (Londra), 1973. II, 762, 764
- G. MARTINELLI, M. SALERNO: «*Circuit approach to steady-state Kinetics of multi-reactant enzymes*», Int. Symposium on Network Theory, 1979, Lubiana. II, 796
- S.J. MASON: «*Topological analysis of linear non-reciprocal networks*», Proc. IRE, Vol. 45, giugno 1957. I, 194
- J. MEIXNER: «*Network theory in its relation to thermodynamics*», Proc. Symposium on generalized networks, PIB, Wiley, 1966. II, 796
- J. MILLMAN, H. TAUB: «*Circuiti ad impulsi e digitali*», Ed. Bizzarri, 1967. I, 340, 341
- J. MILLMAN, C.C. HALKIAS: «*Electronic devices and circuits*», Mc Graw-Hill, 1967. I, 165
- S.K. MITRA: «*Analysis and synthesis of linear active networks*», Wiley, 1969. II, 648, 761
- H.J. MOROWITZ, W.A. HIGINBOTHAM, S.W. MATTHYSSE, H. QUASTLER: «*Passive stability in a metabolic network*», J. Theor. Biol., 1964. I, 1; II, 796

N

- S. NEWMAN, S. RICE: «*Model for constraint and control in biochemical networks*», Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 1971. II, 796

O

- G. OSTER, A. PERELSON: «*Chemical reaction networks*», IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1974. II, 795
- G. OSTER, A. PERELSON, A. KATCHALSKY: «*Network thermodynamics: dynamic modelling of biophysical systems*», Quart. Rev. Biophys., Vol. 6, 1973. II, 795
- G. OSTER, A. PERELSON: «*Systems, circuits and thermodynamics*», Isr. J. Chemistry, Vol. II, 1973. II, 796
- N.G. OTHMER, L.E. SCRIVEN: «*Instability and dynamic pattern in cellular networks*», J. Theor. Biol., 1971. II, 796

P

- P. PENFIELD, R. SPENCE, S. DUINKER: «*Tellegen's theorem*», M.I.T. 1971. II, 704
- W.S. PERCIVAL: «*The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees*», J. Inst. Electr. Engrs, Vol. 100, Parte 3, maggio 1953. I, 57, 194
- G. PESAMOSCA: «*Elementi di analisi numerica*», Sistema (Roma), 1976. I, 262

R

- S.O. RICE: «*Mathematical analysis of random noise*», Bell. Syst. Tech. J., Vol. 24, 1945. II, 639

- F. RICINIELLO: «*Panoramica dei metodi di programmazione lineare e quadratica*», N.R.N., marzo 1973. II, 733
- G.E. ROBERTS, H. KAUFMAN: «*Table of Laplace transforms*», Saunders(Londra), 1966 I, 283
- R.A. ROHRER, L. NAGEL, R. MEYER, H. WEBER: «*Computationally efficient electronic circuit noise calculation*», IEEE J. Solid State Circuits, agosto 1971. II, 647
- R.A. ROHRER: «*Circuit theory. An introduction to the state variable approach*», Mc Graw-Hill, 1970. II, 736, 766
- J.M. ROLLETT: «*Stability and power gain invariants of linear two-ports*», IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. 9. marzo 1962. II, 648
- D.J. ROSE, R.A. WILLOUGHBY: «*Sparse matrices and their applications*», Plenum (New York), 1972. I, 195
- A. RUBERTI, A. ISIDORI: «*Teoria dei sistemi*», Boringhieri, 1979. II, 734, 735, 753, 760

S

- R. SAAL: «*Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe*», Teletunken. I, 329, 474
- I.W. SANDBERG: «*The realizability of multiport structures obtained by embedding a tunnel-diode in a lossless reciprocal network*», B.S.T.J., Vol. 41, marzo 1962. I, 384
- I.W. SANDBERG: «*The tunnel diode as a linear network element*», B.S.T.J., Vol. 41, maggio 1962. I, 384
- J.D. SCHOEFFER: «*The synthesis of minimum sensitivity networks*», IEEE Trans. on Circuit Theory, giugno 1964. II, 683, 685
- D. SINGER: «*Network thermodynamic approach to chemical kinetics*», Acta Chimica Acad. Scient. Hung., Vol. 90, 1976. II, 795
- J. STAUDHAMMER: «*Circuit analysis by digital computer*», Prentice-Hall, 1975. I, 195

T

- A. TALBOT: «*Topological analysis of general linear networks*», IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. 12, giugno 1965. I, 194
- G.C. TEMES, S.K. MITRA: «*Modern filter theory and design*», Wiley, 1973. I, 348; II, 792, 796
- J. TOW: «*A step-by-step active filter design*», IEEE Spectrum, dicembre 1969. II, 762

W

- L. WEINBERG: «*Network analysis and synthesis*», Mc Graw-Hill, 1962. I, 57, 194; II, 647
- D.J. WILDE: «*Optimum seeking methods*», Prentice-Hall, 1964. II, 724
- A. WILLSON: «*Some aspects of the theory of non-linear networks*», Proc. IEEE, agosto 1973. I, 69

Y

- D.C. YOULA, L.J. CASTRIOTA, H.J. CARLIN: «*Bounded real scattering matrices and the foundation of linear passive network theory*», IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. 6, 1959. I, 17
- D.H. YOUNG: «*Iterative solution of large linear systems*», Academic Press, 1971. I, 196

Z

- L.A. ZADEH, C.A. DESOER: «*Linear system theory (the state approach)*», Mc Graw-Hill, 1963. I, 236

INDICE

INDICE

CAPITOLO VI : Caratterizzazione esterna dei circuiti.

VI. 1 - Introduzione.	521
VI. 2 - Caratterizzazione di un circuito in corrispondenza ad una porta.	523
1 - Rappresentazione di un bipolo con le variabili onda incidente e riflessa: coefficiente di riflessione.	524
2 - Caratterizzazione limitata di un bipolo con una tensione od una corrente: teorema di sostituzione.	527
3 - Caratterizzazione esterna di un bipolo contenente nel suo interno eccitazioni: teoremi di Thevenin e Norton.	529
VI. 3 - Trasferimento di potenza attiva nei bipoli.	537
1 - Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva.	537
2 - Legame tra il coefficiente di riflessione e il massimo trasferimento di potenza attiva.	541
VI. 4 - Caratterizzazione di un circuito in corrispondenza a due porte.	544
1 - Rappresentazione generale di una rete 2-porte.	544
2 - Caratterizzazione di un circuito accessibile da due porte quando nell'interno ci sono eccitazioni: il teorema generalizzato di Thevenin.	546
VI. 5 - Rappresentazioni comuni delle reti due portè.	549
1 - Matrice impedenze a vuoto.	552
2 - Matrice ammettenze di corto circuito.	555
3 - Matrice ibrida $[H]$.	557
4 - Matrice ibrida $[G]$.	559
5 - Matrice di trasmissione.	560
VI. 6 - Rappresentazioni delle reti 2-porte orientate verso la sintesi.	562
1 - Rappresentazione mediante i parametri immagine.	563
2 - Rappresentazione mediante la matrice di diffusione.	569
VI. 7 - Trasferimento attraverso una rete 2-porte.	578
1 - Trasferimento di potenza attiva attraverso le reti 2-porte.	579
2 - Risposta in ampiezza e fase di una rete 2-porte.	584
3 - Ritardo nel trasferimento.	586
VI. 8 - Connessioni delle reti 2-porte.	590
1 - Connessione serie-serie.	591
2 - Connessione parallelo-parallelo.	594
3 - Connessione in cascata.	595
VI. 9 - Reciprocità e simmetria nelle reti 2-porte.	596
1 - Conseguenze della reciprocità sulla rappresentazione delle reti 2-porte.	598
2 - Conseguenze della simmetria sulla rappresentazione delle reti 2-porte.	603
3 - Reciprocità dei bipoli e delle reti 2-porte costituite da bipoli.	604

4 - Reciprocità del trasformatore ideale, delle induttanze accoppiate e delle reti 2-porte costituite da elementi reciproci.	606
VI.10 - Analisi di circuiti contenenti blocchi che si comportano come reti 2-porte.	607
1 - Procedimento di analisi derivato dal teorema di sostituzione.	608
2 - Procedimento di analisi con i circuiti equivalenti.	611
3 - Controllo del comportamento dei blocchi come reti 2-porte.	614
VI.11 - Reti 2-porte tipiche.	616
1 - Traliccio.	616
2 - Rete 2-porte a «T».	618
3 - Rete 2-porte a « π » (pi-greco).	618
4 - Rete 2-porte ad «L».	619
5 - Rete 2-porte a «T-derivato».	619
6 - Rete 2-porte a «doppio T».	620
7 - Rete 2-porte a «scala».	620
APPENDICI AL CAPITOLO VI	
VI. A - Reti N-porte.	622
VI. B - Cenni alle proprietà delle rappresentazioni delle reti.	627
1 - Reti N-porte costituite dagli elementi resistenza, induttanza, capacità, trasformatore ideale (reti RLCT).	627
2 - Reti N-porte costituite da resistori, condensatori ed elementi attivi.	632
VI. C - Stabilità dei circuiti.	632
1 - Stabilità dei bipoli.	633
2 - Stabilità delle reti 2-porte.	635
VI. D - Caratterizzazione del rumore nelle reti 2-porte.	639
1 - Circuito equivalente di una rete 2-porte rumorosa.	640
2 - Cifra di rumore e misura di rumore.	642
VI. E - Bibliografia.	647
CAPITOLO VII : Trasformazioni dei circuiti ed equivalenze.	
VII. 1 - Equivalenze di reti 2-porte simmetriche tipiche.	649
1 - Reti simmetriche a T, π , traliccio e T-parallelo.	650
2 - Equivalenza tra traliccio simmetrico e rete a scala.	653
VII. 2 - Trasformazione di una rete simmetrica bisezionabile in un traliccio simmetrico: il teorema di Bartlett.	656
1 - Caso delle reti bisezionabili non intrecciate.	656
2 - Caso delle reti bisezionabili intrecciate.	660
VII. 3 - Trasformazioni stella-triangolo e stella-poligono.	665
VII. 4 - Impiego delle trasformazioni lineari nella generazione di circuiti equivalenti.	671
VII. 5 - Generazione di reti a scala equivalenti con la tecnica della variazione interna di livello di impedenza.	676

APPENDICI AL CAPITOLO VII

VII. A - Circuiti equivalenti in modo continuo.	682
VII. B - Riferimenti bibliografici.	684

CAPITOLO VIII : **Analisi degli effetti delle variazioni dei componenti e ottimizzazione dei circuiti.**

VIII. 1 - Effetto della variazione dei componenti e relativa misura.	686
1 - Il teorema « bilineare ».	687
VIII. 2 - Sensibilità rispetto a tutti i componenti.	691
1 - Calcolo delle derivate con il metodo della rete aggiunta.	691
2 - Determinazione delle sensibilità rispetto ai componenti con il metodo della rete aggiunta.	699
3 - Invarianti di sensibilità.	703
VIII. 3 - Analisi dell'effetto complessivo della variazione dei componenti.	705
1 - Analisi statistica.	706
2 - Analisi con il metodo Monte Carlo.	709
3 - Analisi con il metodo del caso peggiore.	709
4 - Analisi automatica: programma VAR.	711
VIII. 4 - Ottimizzazione delle prestazioni di un circuito.	717
1 - Il metodo del gradiente.	720
2 - Calcolo del gradiente della funzione obiettivo nel caso della funzione di trasferimento in tensione.	721
3 - Minimizzazione della funzione obiettivo nella direzione del gradiente.	723
4 - Aspetto locale dell'ottimizzazione.	726

APPENDICI AL CAPITOLO VIII

VIII. A - Uso della tecnica dei circuiti equivalenti in modo continuo per l'ottimizzazione della sensibilità.	729
VIII. B - Riferimenti bibliografici.	733

CAPITOLO IX : **Il circuito come un particolare sistema.**

IX. 1 - Stato ed equazioni di stato di un circuito.	734
IX. 2 - Algoritmi per la determinazione delle equazioni di stato di un circuito.	735
1 - Circuiti del primo tipo.	736
2 - Circuiti del secondo tipo.	744
IX. 3 - Modi naturali di un circuito.	751
1 - Assenza di modi naturali in qualche grandezza elettrica.	754
2 - Calcolo diretto del numero dei modi naturali per circuiti costituiti da resistori, condensatori e induttori.	755

APPENDICE AL CAPITOLO IX

IX. A - Utilità della rappresentazione mediante le equazioni di stato nella sintesi dei micro-circuiti lineari.	760
1 - Elementi ideali tipici della microelettronica lineare e schemi dei sommatore, degli integratori e dei moltiplicatori.	760

2 - Un problema tipico di sintesi nella microelettronica lineare.	762
IX. B - Riferimenti bibliografici.	766

APPENDICE AL TESTO

A : Derivazione del modello di circuito a costanti concentrate e suoi limiti di validità.	
A.1 - Introduzione.	769
A.2 - Limiti di validità dell'ipotesi di «costanti concentrate».	771
A.3 - Conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: suddivisione in regioni tipiche della struttura elettrica.	772
1 - Regione di tipo 1.	773
2 - Regione di tipo 2.	775
3 - Regione di tipo 3.	776
A.4 - Ulteriori conseguenze dell'ipotesi di «costanti concentrate»: il modello circuitale della struttura elettrica.	776
A.5 - Derivazione delle relazioni costitutive degli elementi ideali bipolari.	779
1 - Resistore.	779
2 - Generatore indipendente di tensione.	780
3 - Generatore indipendente di corrente.	780
4 - Induttore.	780
5 - Condensatore.	781
B : Circuiti di tipo non elettrico.	
B.1 - Analogia della mobilità dei circuiti meccanici.	782
B.2 - Applicazione tipica dell'analogia della mobilità.	787
B.3 - Riferimenti bibliografici.	794
C : I circuiti digitali.	
C.1 - I circuiti unidirezionali a ritardo costante.	797
C.2 - Funzione di trasferimento ingresso-uscita di un circuito URC e risposta impulsiva.	802
C.3 - I circuiti URC tempo-discreti e i circuiti digitali.	806
C.4 - Il metodo alle differenze finite ed i circuiti digitali.	812
C.5 - Valutazione dell'influenza della struttura del circuito sull'errore commesso con il metodo alle differenze finite.	821
C.6 - Riferimenti bibliografici.	822
Indice Analitico	825
Indice Bibliografico	833

FINITO DI STAMPARE
Ottobre 1979

