



Modulo Professionalizzante "Automazione Industriale e Robotica" A.A. 2003/04

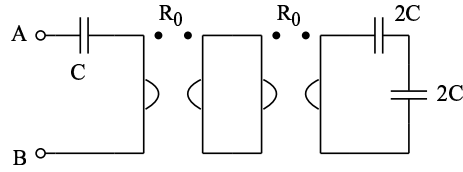
Dispense di Misure per l'Automazione

Università degli Studi di Siena
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

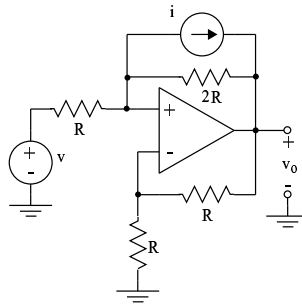
Esercizi svolti di Elettrotecnica 1

Prova 1.

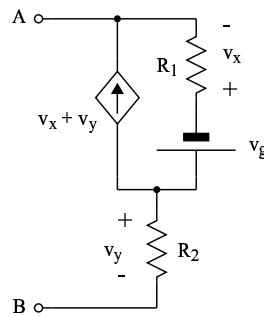
1. Determinare la relazione costitutiva del bipolo $A - B$ e stabilire a cosa equivale. ($R_0 = 2\Omega$; $C = 1F$).



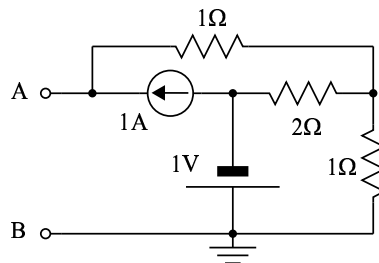
2. Determinare v_0 usando il principio di sovrapposizione degli effetti. ($R = 1\Omega$; $v = 1V$; $i = 1A$).



3. Determinare il circuito equivalente di Thevenin del bipolo $A - B$. ($R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $v_g = 4V$).

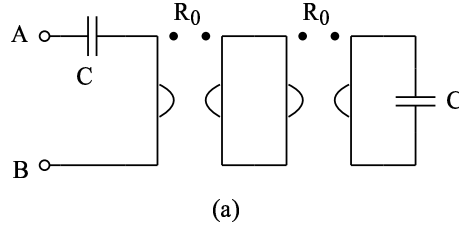


4. Determinare il circuito equivalente di Norton del bipolo $A - B$, usando *trasformazioni circuitali*.

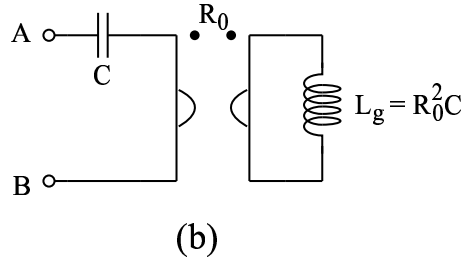


Soluzioni della prova 1.

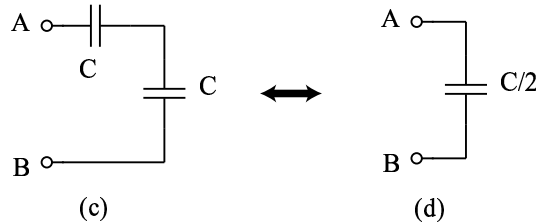
1. La serie dei due condensatori equivale ad un condensatore di capacità $C_{tot} = C$. Il bipolo originario è quindi equivalente al bipolo in figura (a).



Un giratore avente *resistenza di girazione* R_0 chiuso su un condensatore di capacità C è equivalente ad una induttanza di valore $L_g = R_0^2 C$. Il bipolo precedente può quindi essere sostituito con il bipolo in figura (b).



Un giratore avente *resistenza di girazione* R_0 chiuso su un'induttanza di valore $L_g = R_0^2 C$ è equivalente ad un condensatore di capacità $C_g = L_g / R_0^2 = C$; il bipolo precedente è quindi equivalente al bipolo in figura (c). Si conclude che il bipolo $A - B$ è equivalente ad un condensatore di capacità



$C_{eq} = C/2 = 0.5F$; conseguentemente la relazione costitutiva che lo caratterizza è

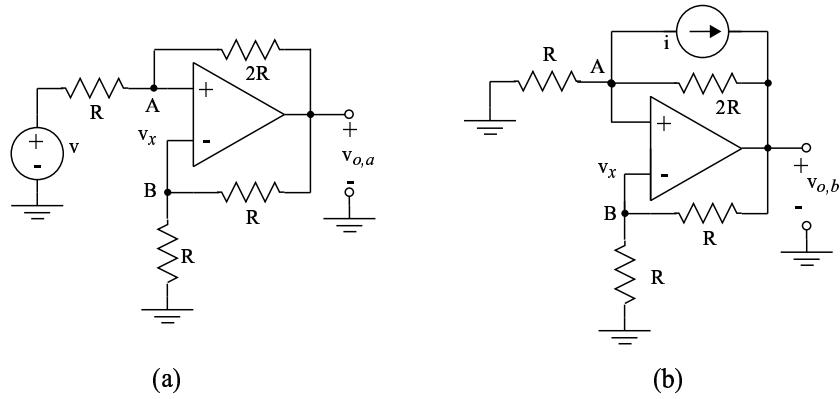
$$i_{in} = C_{eq} \frac{dv_{in}}{dt}.$$

2. Il circuito contiene due generatori indipendenti, uno di corrente, l'altro di tensione. Il principio di sovrapposizione degli effetti assicura che la tensione di uscita del sistema corrisponde alla somma di quella che si avrebbe supponendo attivo il solo generatore di corrente con quella che si avrebbe supponendo attivo il solo generatore di tensione.

- a) Per cominciare si disattiva il generatore di corrente, ossia ad esso si sostituisce un circuito aperto (figura (a)).

Applicando la KI al nodo A si ottiene

$$\frac{v_{o,a} - v_x}{2R} = \frac{v_x - v}{R}$$



ovvero

$$v_x = \frac{v_{o,a} + 2v}{3}.$$

Applicando la KI al nodo B si ha invece

$$\frac{v_{o,a} - v_x}{R} = \frac{v_x}{R};$$

moltiplicando ambo i membri per R e sostituendo l'espressione di v_x precedentemente trovata si può scrivere

$$v_{o,a} - \frac{v_{o,a} + 2v}{3} = \frac{v_{o,a} + 2v}{3}.$$

Da quest'ultima segue che

$$v_{o,a} = 4v = 4V.$$

- b)** Adesso si disattiva il generatore di tensione ovvero lo si sostituisce con un corto circuito (figura (b)).

Applicando la KI al nodo A si ottiene

$$\frac{v_x}{R} + i = \frac{v_{o,b} - v_x}{2R}$$

ovvero

$$v_x = \frac{v_{o,b} - 2Ri}{3}.$$

Applicando la KI al nodo B si ha invece

$$\frac{v_{o,b} - v_x}{R} = \frac{v_x}{R};$$

moltiplicando ambo i membri per R e sostituendo l'espressione di v_x precedentemente trovata si può scrivere

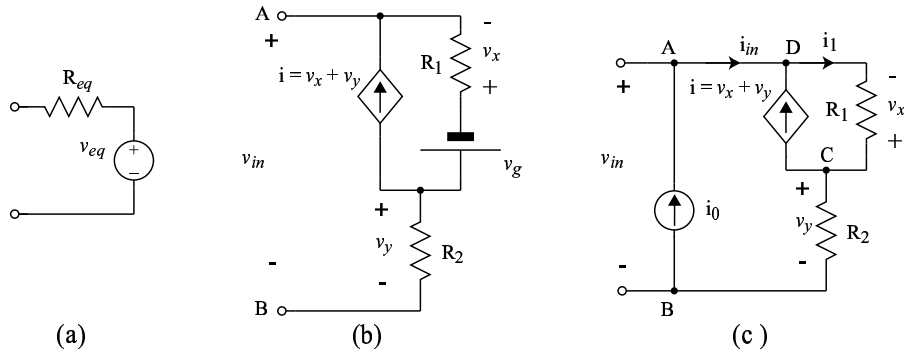
$$v_{o,b} - \frac{v_{o,b} - 2Ri}{3} = \frac{v_{o,b} - 2Ri}{3}.$$

Da quest'ultima segue che

$$v_{o,b} = -4Ri = -4V.$$

In conclusione $v_o = v_{o,a} + v_{o,b} = 4V - 4V = 0V$.

3. Si tratta di determinare i valori di V_{eq} e R_{eq} in modo tale che il bipolo in figura (a) sia equivalente a quello assegnato.



a) Determinazione di v_{eq} .

Supponiamo che il bipolo sia chiuso su un circuito aperto e determiniamo la tensione in ingresso (figura (b)). La corrente nel ramo BC è sicuramente nulla e quindi $v_y = 0V$. Segue che $i = v_x$. Naturalmente anche sul ramo AD non passa corrente e quindi tutta la corrente erogata dal generatore controllato attraversa il ramo contenente il generatore di tensione. La tensione ai capi del resistore R_1 sarà pertanto

$$v_x = 2R_1(-i) = -2R_2v_x.$$

Quest'ultima ammette come unica soluzione $v_x = 0V$. Segue che $v_{in} = v_y - v_g - v_x = -v_g$. Il teorema di Thevenin impone di scegliere $v_{eq} = v_{in} = -4V$.

b) Determinazione di R_{eq} .

Il teorema di Thevenin assicura che l'impedenza equivalente del nostro bipolo coincide con l'impedenza di ingresso del bipolo ottenuto disattivando il generatore di tensione. Si considera pertanto la rete in figura (c).

L'impedenza di ingresso del sistema è per definizione

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}}.$$

Essendo nota i_{in} rimane solo da trovare v_{in} . La corrente che scorre su R_1 è proprio i_0 e quindi $v_y = R_2i_0$. Dato che $i_1 = -v_x/R_1$, applicando la KI al nodo D , si ottiene

$$-v_x/R_1 = i_1 = i_0 + i = i_0 + (v_x + R_2i_0).$$

Risolvendo si ha

$$v_x = -\frac{1 + R_2}{1 + 1/R_1} i_0. \quad (1)$$

Osservazione 1. L'apparente anomalia dimensionale che figura nella (1) si supera osservando che in realtà la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente dovrebbe essere $i = (v_x + v_y)/R_g$, con $R_g = 1\Omega$. Ciò precisato l'espressione completa per v_x è

$$v_x = -\frac{1 + R_2/R_g}{1/R_g + 1/R_1} i_0$$

che è dimensionalmente corretta.

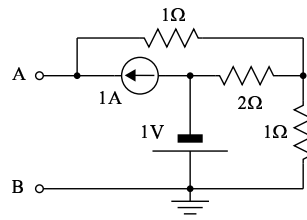
Per concludere

$$v_{in} = v_y - v_x = R_2i_0 + \frac{1 + R_2}{1 + 1/R_1} i_0$$

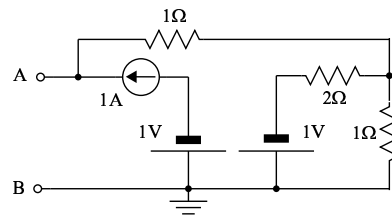
e quindi

$$R_{eq} = R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = R_2 + \frac{1 + R_2}{1 + 1/R_1} = \frac{7}{3} \Omega.$$

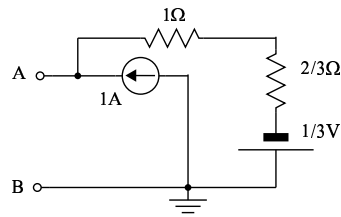
4. La sequenza di trasformazioni che segue risolve l'esercizio.



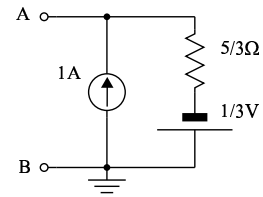
(a)



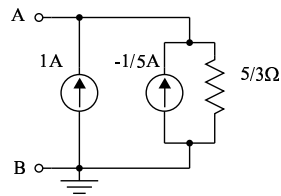
(b)



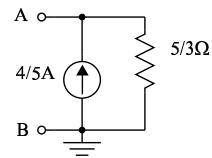
(c)



(d)



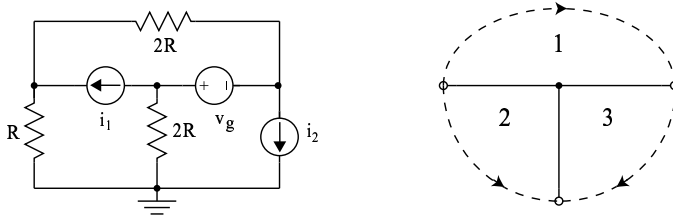
(e)



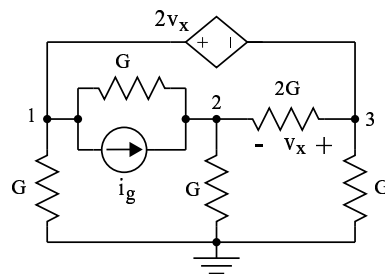
(f)

Prova 2.

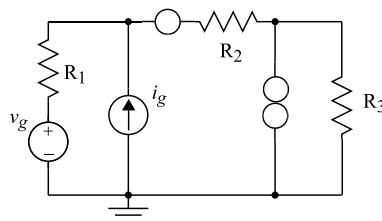
1. Scrivere il sistema risolvante su base maglie fondamentali per il circuito e l'albero in figura, rispettando orientazione e numerazione delle corde. ($[R] = \text{Ohm}$)



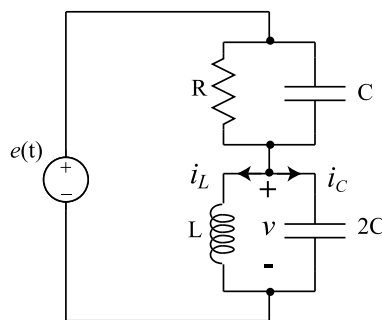
2. Scrivere il sistema risolvante su base nodi per il circuito in figura, usando il nodo di terra come riferimento. ($[G] = (\text{Ohm})^{-1}$)



3. Verificare il teorema di Tellegen per il circuito in figura. ($R_1 = 1\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 2\Omega$; $i_g = 1A$; $v_g = 4V$).

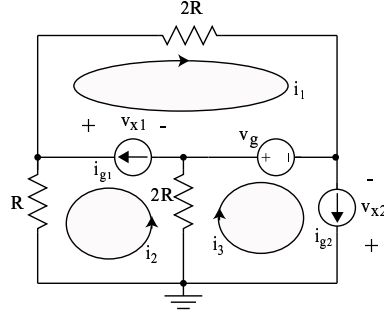


4. Determinare i fasori $\bar{V}$, $\bar{I}_L$, $\bar{I}_C$ e le corrispondenti grandezze nel dominio del tempo relativi al seguente circuito. ($e(t) = \sin 2t$; $L = 1H$; $C = 0.25F$; $R = 2\Omega$).



Soluzioni della prova 2.

1. Come primo passo si identificano le incognite del problema: nel nostro caso si tratta delle correnti di maglia i_1, i_2, i_3 e delle tensioni v_{x1}, v_{x2} che si stabiliscono ai capi dei generatori indipendenti di correnti. La tensione v_g e le correnti i_{g1}, i_{g2} sono invece i termini noti del problema.



Scriviamo le tre equazioni di maglia.

$$\begin{cases} 2Ri_1 = v_g + v_{x1} \\ v_{x1} = 2R(i_2 + i_3) + Ri_2 = 3Ri_2 + 2Ri_3 \\ v_{x2} = v_g + 2R(i_2 + i_3) = v_g + 2Ri_2 + 2Ri_3 \end{cases}$$

Ad esse si aggiungono i vincoli imposti dai generatori di corrente

$$\begin{cases} i_{g1} = i_1 + i_2 \\ i_{g2} = i_3. \end{cases}$$

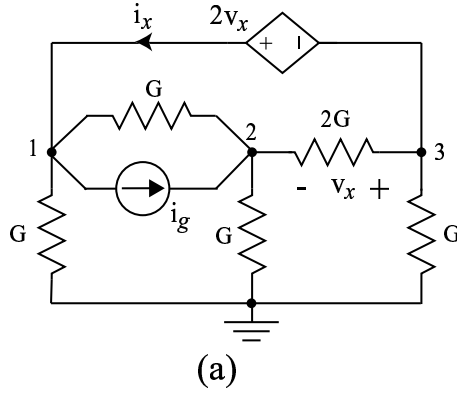
Il sistema di equazioni complessivo diviene pertanto

$$\begin{cases} 2Ri_1 - v_{x1} = v_g \\ 3Ri_2 + 2Ri_3 - v_{x1} = 0 \\ 2Ri_2 + 2Ri_3 - v_{x2} = -v_g \\ i_1 + i_2 = i_{g1} \\ i_3 = i_{g2} \end{cases}$$

che in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3R & 2R & -1 & 0 \\ 0 & 2R & 2R & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ 0 \\ -v_g \\ i_{g1} \\ i_{g2} \end{pmatrix}.$$

2. Ridisegniamo il circuito di partenza come mostrato in figura (a). Come primo passo si identificano le incognite del problema: nel nostro caso si tratta dei potenziali ai nodi v_1, v_2, v_3 e della corrente i_x che attraversa il generatore controllato di tensione. La corrente i_g è invece l'unico termine noto non



nullo del problema. Scriviamo le equazioni relative ai nodi 1, 2 e 3.

$$\begin{cases} i_x = Gv_1 + i_g + G(v_1 - v_2) \\ i_g + G(v_1 - v_2) = Gv_2 + 2G(v_2 - v_3) \\ 2G(v_2 - v_3) = Gv_3 + i_x \end{cases}$$

Ad esse si aggiunge il vincolo $v_x = v_3 - v_2$ che permette di esprimere la tensione ai capi del generatore controllato come

$$v_1 - v_3 = 2v_x = 2(v_3 - v_2).$$

Il sistema di equazioni complessivo diviene pertanto

$$\begin{cases} 2Gv_1 - Gv_2 - i_x = -i_g \\ Gv_1 - 4Gv_2 + 2Gv_3 = -i_g \\ 2Gv_2 - 3Gv_3 - i_x = 0 \\ v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0. \end{cases}$$

ossia, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} 2G & -G & 0 & -1 \\ G & -4G & +2G & 0 \\ 0 & 2G & -3G & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_g \\ -i_g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

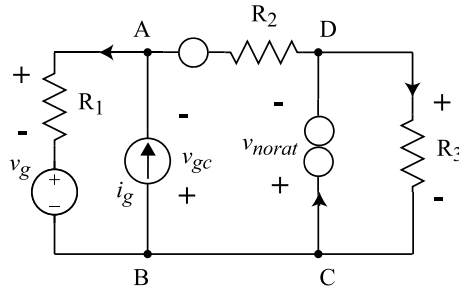
3. Il teorema di Tellegen afferma che la somma delle potenze assorbite da tutti i dispositivi che compongono un circuito è nulla. Si tratta pertanto di risolvere il circuito, calcolare esplicitamente le potenze assorbite e verificare che la loro somma è nulla.

La presenza del nullatore esclude che il ramo AD possa essere percorso da corrente e quindi i componenti in esso presenti non assorbono alcuna potenza. Sempre a causa della presenza del nullatore nel ramo AD , la corrente erogata dal generatore di corrente finisce integralmente nel ramo contenente il generatore di tensione. Risulta pertanto

$$v_A - v_B = v_g + R_1 i_g.$$

La potenza assorbita dal generatore di corrente è allora $P_{gc} = -i_g(v_A - v_B) = -v_g i_g - R_1 i_g^2$.

Osservazione 2. Quando la potenza assorbita da un bipolo risulta negativa significa che il bipolo sta erogando energia al sistema.



La potenza assorbita dal generatore di tensione vale invece $P_{gt} = i_g v_g$; la potenza assorbita dal resistore è infine $P_{R_1} = R_1 i_g^2$. E' facile verificare che anche il bilancio di potenza sulla maglia sinistra è nullo.

Passiamo alla maglia di destra. Si potrebbe erroneamente pensare che, essendo essa priva di generatori indipendenti tutte, le grandezze elettriche siano nulle. Non è così: infatti, dato che la corrente in AD è nulla e dato che è nulla la tensione ai capi del nullatore, risulta

$$v_D = v_A = v_g + R_1 i_g = 2V \neq 0V.$$

La potenza dissipata dal resistore è

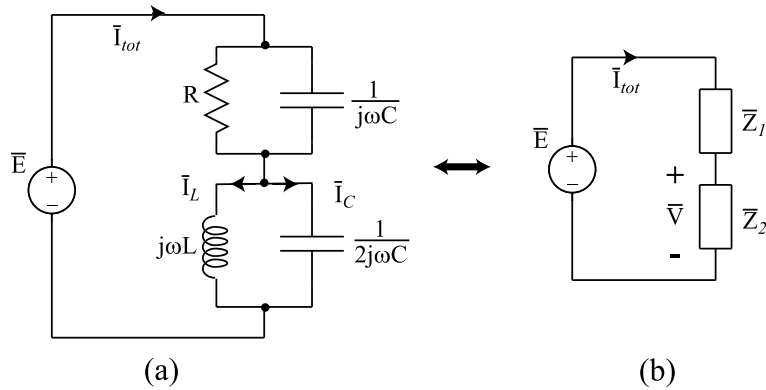
$$P_{R_3} = \frac{(v_d - v_b)^2}{R_3} = \frac{v_d^2}{R_3} = 2W.$$

La corrente che attraversa il noratore corrisponde a quella che attraverso il resistore e quindi vale v_d/R_3 . Segue che la potenza relativa al noratore è

$$P_{norat} = \frac{v_d}{R_3} v_{norat} = -\frac{v_d^2}{R_3} = -2W.$$

Dato che $P_{R_3} + P_{norat} = 0W$ il teorema di Tellegen è verificato.

4. In regime permanente tutte le grandezze elettriche relative al circuito assegnato hanno andamento sinusoidale con pulsazione $\omega = 2\text{rad/sec}$. Rappresentiamo il circuito assegnato nel dominio dei fasori.



Naturalmente si ha

$$\bar{E} = e^{-j\pi/2} = -j,$$

$$\bar{Z}_1 = \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1} = R \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} = 1 - j$$

e

$$\bar{Z}_2 = \left(\frac{1}{j\omega L} + 2j\omega C \right)^{-1} = j \frac{\omega L}{1 - 2\omega^2 CL} = -2j.$$

Dall'analisi della maglia si ha

$$\bar{I}_{tot} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

e dunque

$$\bar{V} = \bar{Z}_2 \bar{I}_{tot} = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{E} = -\frac{1}{5} - j\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} e^{-\arctan 3} = 0.63e^{-1.25}.$$

Osservando che $\bar{V}$ è proprio la tensione ai capi dei due bipoli che costituiscono il bipolo $\bar{Z}_2$, si può scrivere

$$j\omega L \bar{I}_L = \bar{V}$$

e

$$\frac{\bar{I}_C}{2j\omega C} = \bar{V};$$

Da queste si deduce che

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{j\omega L} = -\frac{3}{10} + \frac{j}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10} e^{\pi - \arctan(1/3)} = 0.31e^{2.82}$$

e

$$\bar{I}_C = 2j\omega C \bar{V} = \frac{3}{5} - \frac{j}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} e^{-\arctan(1/3)} = 0.63e^{-0.32}.$$

Per concludere l'esercizio occorre determinare le corrispondenti grandezze nel tempo:

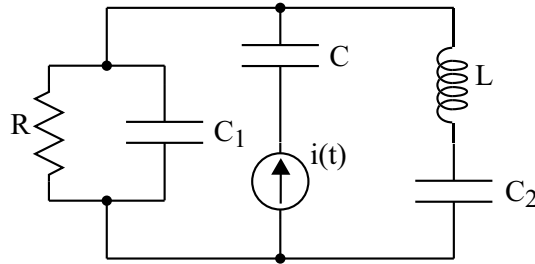
$$v(t) = 0.63 \cos(2t - 1.25)V;$$

$$i_L(t) = 0.31 \cos(2t + 2.82)A;$$

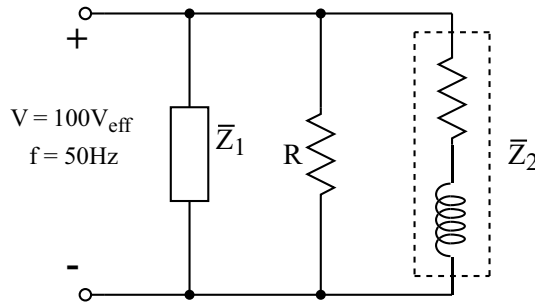
$$i_C(t) = 0.63 \cos(2t - 0.32)A.$$

Prova 3.

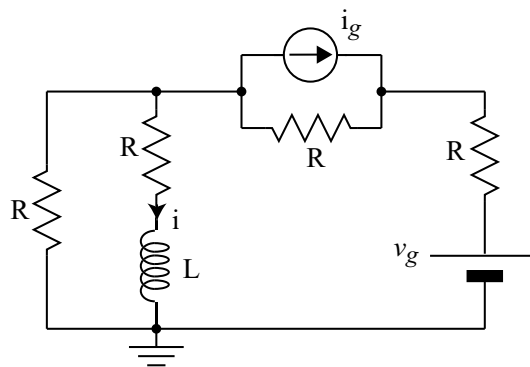
1. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura. ($R = 2\Omega$; $C_1 = 0.25F$; $C_2 = 0.5F$; $C = 1F$; $L = 1H$; $e(t) = (\cos 2t)A$)



2. Il carico $\bar{Z}_1$ ha un' impedenza di 10Ω e fattore di potenza 0.5 induttivo. Il carico $\bar{Z}_2$ assorbe una corrente attiva di $10A$ ed una corrente reattiva di $5A$ efficaci. Effettuare un rifasamento completo del bipolo $A - B$.



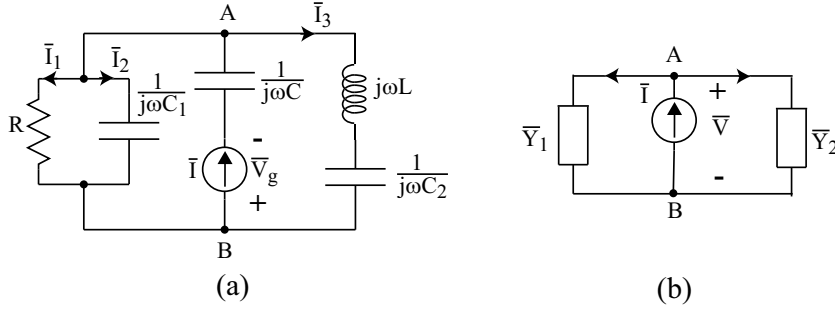
3. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata sapendo che $i(0) = i_0 = 2A$. ($R = 1\Omega$; $L = 2H$; $i_g = 1A$; $v_g = 2V$). Ripetere l'esercizio sostituendo all'induttore un nuovo induttore di induttanza doppia.



Soluzioni della prova 3.

1. Il teorema di Boucherot afferma che in un circuito in regime permanente sinusoidale risultano nulle sia la somma delle potenze attive relative a tutti i componenti sia la somma delle potenze reattive relative a tutti i componenti. Per stabilire se tale teorema occorre quindi valutare la potenza attiva e reattiva associate ad ogni componente, eseguire le somme e verificare se sono nulle.

Supporremo che il circuito sia in regime di funzionamento permanente (in modo tale da rendersi indipendenti dalle condizioni iniziali sugli elementi con memoria); si assume cioè che in ogni componente le grandezze elettriche abbiano andamento sinusoidale con pulsazione $\omega = 2\text{rad/sec}$. Il circuito corrispondente nel dominio di fasori è mostrato in figura (a).



Il fasore associato alla corrente $i(t)$ è $\bar{I} = 1$. La corrente che scorre nel condensatore di capacità C è proprio una $i(t)$ e quindi la potenza complessa da esso assorbita vale

$$P_C = \frac{\bar{V}_C \bar{I}^*}{2} = -j \frac{|\bar{I}|^2}{2\omega C}.$$

Si può quindi scrivere

$$\begin{cases} P_C^{(a)} = 0W \\ Q_C = -\frac{|\bar{I}|^2}{2\omega C} = -0.25 \text{ VAR}. \end{cases}$$

Dato che la serie tra un bipolo ed un generatore di corrente è equivalente al solo generatore di corrente, per determinare le potenze complesse relative agli altri utilizzatori si può far riferimento al circuito in figura (b). Valutiamo le ammettanze dei bipoli $\bar{Y}_1$ e $\bar{Y}_2$.

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{R} + j\omega C_1 = \frac{1 + j\omega C_1 R}{R} = \frac{1 + j}{2} \Omega^{-1}$$

e

$$\bar{Y}_2 = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)^{-1} = j \frac{\omega C_2}{1 - \omega^2 L C_2} = -j \Omega^{-1}.$$

Si ha pertanto

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} = (1 + j)V.$$

La tensione $\bar{V}$ è comune a tutti gli utilizzatori che costituiscono $\bar{Y}_1$ e quindi si ha

$$P_R = \frac{|\bar{V}|^2}{2R}$$

e

$$P_{C_1} = \frac{\bar{Y}_{C_1}^* |\bar{V}|^2}{2} = -j \frac{\omega C_1 |\bar{V}|^2}{2}.$$

Più in dettaglio si può scrivere

$$\begin{cases} P_R^{(a)} = P_R = \frac{|\bar{V}|^2}{2R} = 0.5W \\ Q_R = 0VAR. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} P_{C_1}^{(a)} = 0W \\ Q_{C_1} = -\frac{|\bar{I}|^2}{\omega C} = -0.5VAR. \end{cases}$$

La corrente che attraversa il bipolo $\bar{Y}_2$ è $\bar{I}_3 = \bar{Y}_2 \bar{V} = (1-j)A$ e quindi le potenze complesse relative agli utilizzatori in esso presenti sono

$$P_L = \frac{Z_L |\bar{I}_3|^2}{2} = j \frac{\omega L |\bar{I}_3|^2}{2}$$

e

$$P_{C_2} = \frac{Z_{C_2} |\bar{I}_3|^2}{2} = -j \frac{|\bar{I}_3|^2}{2\omega C_2}$$

Più in dettaglio si può scrivere

$$\begin{cases} P_L^{(a)} = 0W \\ Q_L = \frac{\omega L |\bar{I}_3|^2}{2} = 2VAR. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} P_{C_2}^{(a)} = 0W \\ Q_{C_2} = -\frac{|\bar{I}_3|^2}{2\omega C_2} = -1VAR. \end{cases}$$

Rimane da valutare la potenza complessa relativa al generatore di corrente. Dato che $\bar{V}$ rappresenta la tensione tra il nodo B ed il nodo A , si ha

$$\bar{V}_g + \bar{V}_C = -\bar{V}$$

ossia

$$\bar{V}_g = -\bar{V} - \bar{V}_C.$$

La potenza complessa relativa al generatore risulta perciò essere

$$P_{gen} = \frac{\bar{V}_g \bar{I}^*}{2} = -\frac{(\bar{V} + \bar{V}_C) \bar{I}^*}{2} = -\frac{\bar{V} \bar{I}^*}{2} - P_C = -\frac{1+j}{2} + \frac{j}{4} = -0.5W - j0.25VAR.$$

Decomponendo in parte reale e immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} P_{gen}^{(a)} = -0.5W \\ Q_{gen} = -0.25VAR. \end{cases}$$

Adesso sono disponibili tutte le informazioni che occorrono per fare il bilancio di potenza. Cominciamo dalle potenze attive:

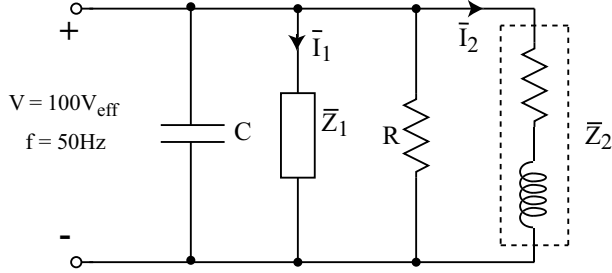
$$P_C^{(a)} + P_R^{(a)} + P_{C_1}^{(a)} + P_L^{(a)} + P_{C_2}^{(a)} + P_{gen}^{(a)} = P_R^{(a)} + P_{gen}^{(a)} = 0.5W - 0.5W = 0W$$

Concludiamo con il bilancio relativo alle potenze reattive:

$$Q_C + Q_R + Q_{C_1} + Q_L + Q_{C_2} + Q_{gen} = (-0.25 + -0.5 + 2 - 1 - 0.25)VAR = 0VAR.$$

Dato che entrambi i bilanci sono nulli il teorema è verificato.

2. Il rifasamento di un circuito serve a ridurre (idealmente ad eliminare) la potenza reattiva scambiata da un bipolo e si ottiene inserendo un condensatore in parallelo all'utilizzatore. Si tratta pertanto di considerare il circuito in figura (a) e stabilire il valore di C che annulla l'angolo di fase del carico.



(a)

La potenza reattiva totale scambiata dal bipolo si ottiene semplicemente sommando le potenze reattive relative ai singoli utilizzatori e quindi l'equazione da soddisfare è

$$Q_{\text{tot}} = Q_C + Q_1 + Q_2 = 0.$$

Dato che la tensione ai capi di ognuno degli utilizzatori è $\bar{V}$ si ha

$$Q_C = -\omega C V_{\text{eff}}^2;$$

$$Q_R = 0 \text{ VAR};$$

$$Q_1 = V_{\text{eff}}^2 \frac{\sin \varphi_1}{Z_1}$$

dove con Z_1 si è indicato il modulo di $\bar{Z}_1$ e con φ_1 l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente in tale bipolo. Dato che il fattore di potenza realtivo al bipolo $\bar{Z}_1$ è di tipo induttivo possiamo affermare che $\sin \varphi_1 = +\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1} = \sqrt{3}/2$.

Rimane da calcolare Q_2 :

$$Q_2 = V_{\text{eff}} I_{2,\text{eff}} \sin \varphi_2$$

dove φ_2 denota l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente del bipolo $\bar{Z}_2$. Osservando che (con ovvia notazione) sussistono le relazioni

$$\begin{cases} I_{2,\text{eff}}^{(a)} = I_{2,\text{eff}} \cos \varphi_2 \\ I_{2,\text{eff}}^{(r)} = I_{2,\text{eff}} \sin \varphi_2, \end{cases}$$

si deduce che

$$\begin{cases} I_{2,\text{eff}} = \sqrt{\left(I_{2,\text{eff}}^{(a)}\right)^2 + \left(I_{2,\text{eff}}^{(r)}\right)^2} \\ \sin \varphi_2 = \frac{I_{2,\text{eff}}^{(r)}}{\sqrt{\left(I_{2,\text{eff}}^{(a)}\right)^2 + \left(I_{2,\text{eff}}^{(r)}\right)^2}} \end{cases}$$

e dunque che

$$Q_2 = V_{\text{eff}} I_{2,\text{eff}}^{(r)}$$

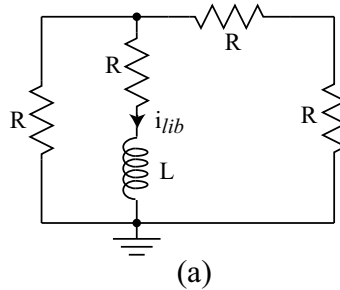
Sostituendo nell'equazione risolutiva le espressioni appena trovate si conclude che

$$C = -\frac{Q_1 + Q_2}{-\omega V_{\text{eff}}^2} = \frac{\sin \varphi_1}{\omega Z_1} + \frac{I_{2,\text{eff}}^{(r)}}{\omega V_{\text{eff}}} = 435 \mu\text{F}.$$

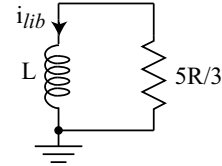
3. Dato che il circuito proposto è lineare può essere risolto supponendo attiva una sola eccitazione alla volta.

a) Risposta libera.

In figura (a) è mostrato il circuito da considerare; tuttavia è facile verificare che per la determinazione di $i_{lib}(t)$ si può fare riferimento alla rete in figura (b).



(a)



(b)

L'equazione che risolve la rete in figura (b) è data da

$$L \frac{di_{lib}}{dt} + \frac{5}{3} R i_{lib} = 0$$

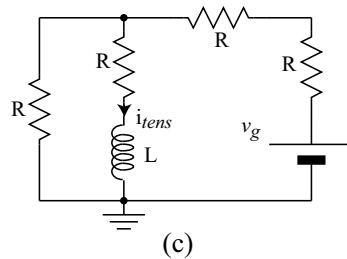
con la condizione iniziale $i_{lib}(0) = i_0$. L'unica soluzione di questo problema con valore iniziale è

$$i_{lib}(t) = i_0 e^{-\frac{5R}{3L}t} = 2e^{-\frac{5}{6}t} A.$$

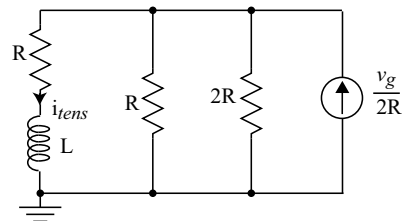
Si noti che $\tau = 3L/5R = 6/5s$ è la costante di tempo del sistema.

b) Risposta forzata dovuta al generatore di tensione.

Il circuito da considerare è mostrato in figura (c); con qualche semplice trasformazione circuitale si ottiene la rete in figura (d). Naturalmente si deve supporre $i_{tens}(0) = 0A$.



(c)



(d)

La forma generale della soluzione sarà

$$i_{tens}(t) = i_{tens}(\infty) \left(1 - e^{t/\tau}\right).$$

La costante di tempo rimane quella del caso precedente, mentre la corrente finale può essere dedotta ricordando che a regime l'induttore appare come un corto circuito:

$$i_{tens}(\infty) = \frac{v_g}{5R} = 0.2A.$$

In conclusione

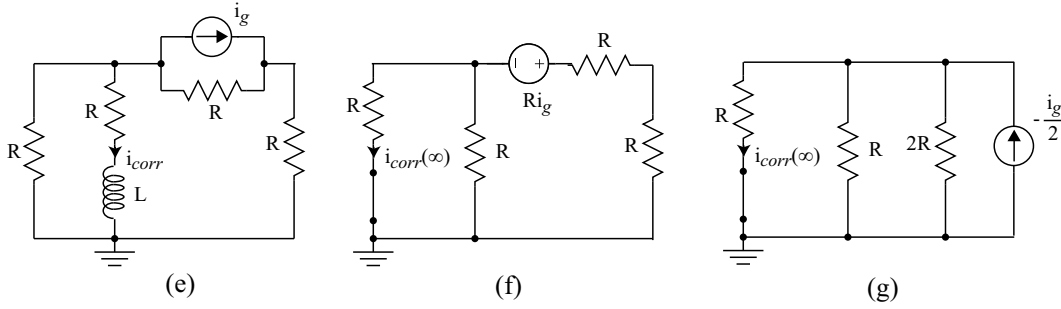
$$i_{tens}(t) = 0.4 \left(1 - e^{-\frac{5}{6}t}\right) A.$$

c) Risposta forzata dovuta al generatore di corrente.

Il circuito da considerare è mostrato in figura (e).

Naturalmente deve essere $i_{corr}(0) = 0A$. La forma della soluzione sarà

$$i_{corr}(t) = i_{corr}(\infty) \left(1 - e^{t/\tau_c}\right).$$



La costante di tempo rimane quella dei casi precedenti; la corrente finale può essere dedotta ricordando che a regime l'induttore appare come un corto circuito (figure (f) e (g)):

$$i_{corr}(\infty) = \frac{v_g}{5R} = -0.2A.$$

In conclusione

$$i_{corr}(t) = -0.2 \left(1 - e^{-\frac{5}{6}t} \right) A.$$

La risposta forzata vale:

$$i_{forz}(t) = i_{tens}(t) + i_{corr}(t) = 0.2 \left(1 - e^{-\frac{5}{6}t} \right) A.$$

Dato che l'unica grandezza dipendente dal valore dell'induttanza è τ , quando si sostituisce all'induttore originario un induttore di induttanza doppia si ha come unica conseguenza un raddoppiamento della costante di tempo del sistema: $\tau' = 3(2L)/5R = 12/5s$. Coseguentemente

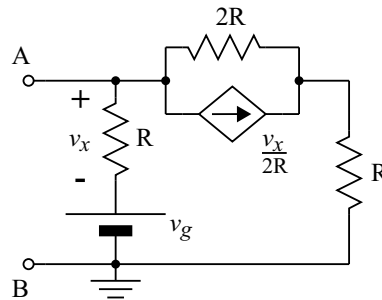
$$i_{lib}(t) = 2e^{-\frac{5}{12}t} A.$$

e

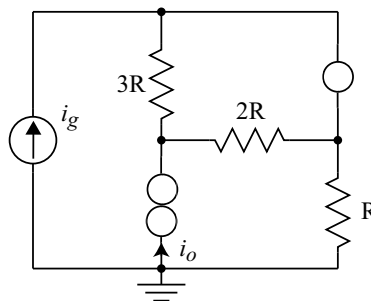
$$i_{forz}(t) = i_{tens}(t) + i_{corr}(t) = 0.2 \left(1 - e^{-\frac{5}{12}t} \right) A.$$

Prova 4.

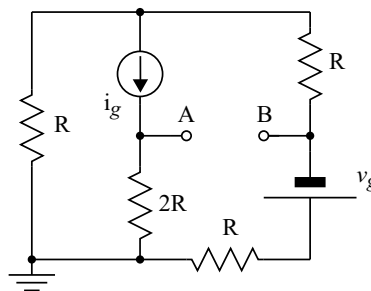
1. Determinare l'equivalente di Thevenin del bipolo $A - B$.



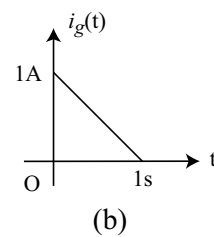
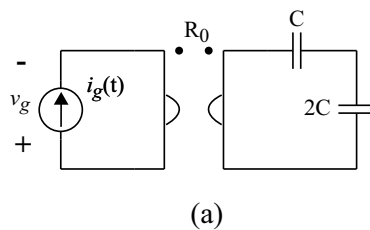
2. Calcolare i_0 e la potenza erogata dal noratore. ($R = 3\Omega$; $R = 2\Omega$; $R = 1\Omega$; $i_g = 2A$).



3. Calcolare v_{AB} usando il principio di sovrapposizione degli effetti.

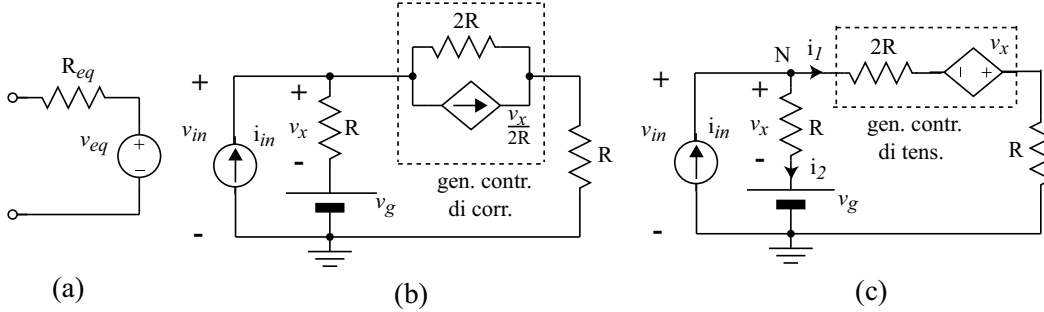


4. Calcolare il lavoro erogato dal generatore nell'intervallo di tempo $[0, 1]$. ($C = 1F$; $R_0 = 2\Omega$; in figura (b) è riportato l'andamento temporale di $i_g(t)$).



Soluzioni della prova 4.

1. Si tratta di determinare i valori da assegnare a V_{eq} e R_{eq} in modo tale che il bipolo in figura (a) sia equivalente a quello assegnato. Si procede applicando il teorema di Thevenin.



Si consideri il circuito in figura (b), dove i_{in} è un'arbitraria corrente di eccitazione. Valutiamo la corrispondente tensione v_{in} . In virtù dell'equivalenza tra il generatore controllato di corrente nel circuito di figura (b) e quello di tensione presente nel circuito in figura (c), è possibile limitare la nostra attenzione alla rete in figura (c).

Dato che $i_2 = v_x/R$, applicando la KI al nodo N si ottiene

$$i_1 = i_{in} - \frac{v_x}{R}.$$

Dalla KV alla maglia di destra si ottiene invece la relazione

$$v_g + v_x = 2Ri_1 - v_x + Ri_1 = 3R \left(i_{in} - \frac{v_x}{R} \right) - v_x$$

ossia

$$v_x = \frac{3}{5} Ri_{in} - \frac{v_g}{5}.$$

Segue che

$$v_{in} = v_g + v_x = \frac{3}{5} Ri_{in} + \frac{4}{5} v_g.$$

La tensione a vuoto del bipolo A_B si ha per $i_{in} = 0A$ e quindi vale $v_{in,0} = 4v_g/5$; la resistenza di ingresso del bipolo $A - B$ si calcola invece supponendo $i_{in} \neq 0A$ e $v_g = 0V$ e vale

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{3}{5} R.$$

Il teorema di Thevenin assicura che il circuito in figura (a) equivale al circuito originario se e solo se si pone

$$R_{eq} = R_{in} = \frac{3}{5} R$$

e

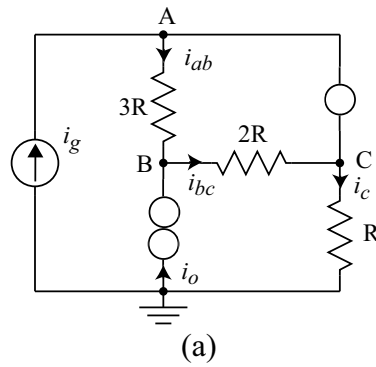
$$v_{eq} = v_{in,0} = 4v_g/5.$$

2. Con riferimento al circuito in figura (a). Applicando la KI al nodo A si ottiene $i_0 = i_{bc} - i_{ab}$; d'altra parte, non consentendo il nullatore il passaggio di corrente, è $i_{ab} = i_g$. Si ha inoltre

$$v_A = v_C + 2Ri_{bc} + 3Ri_{ab} = v_C + 2Ri_{bc} + 3Ri_g.$$

Inoltre la tensione ai capi del nullatore è nulla e quindi risulta $v_A = v_C$ così che vale

$$v_C = v_A = v_C + 2Ri_{bc} + 3Ri_g$$



da cui si ottiene $i_{bc} = -3i_g/2$ e

$$i_0 = i_{bc} - i_{ab} = -\frac{5}{2}i_g = -5A.$$

Per valutare la potenza assorbita dal noratore occorre conoscere la tensione ai suoi capi secondo la convenzione degli utilizzatori, ovvero, in pratica, il valore di $-v_B$. Applicando la KI al nodo C si conclude che $i_c = i_{bc} = -3i_g/2$ e dunque risulta $v_C = Ri_c = -3Ri_g/2$. Si può pertanto scrivere

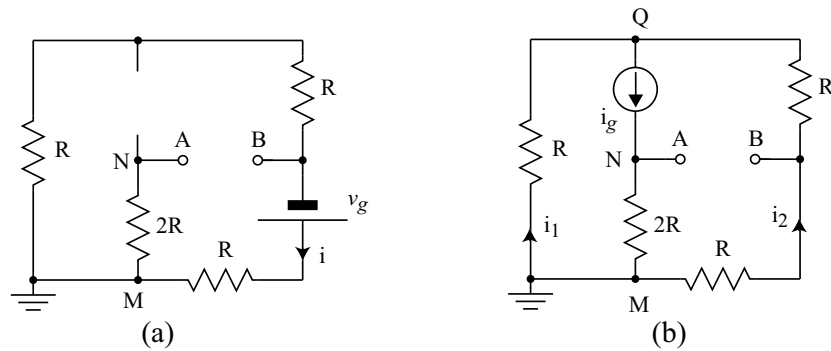
$$v_B = v_A - 3Ri_{ab} = v_C - 3Ri_g = -\frac{3}{2}Ri_g - 3Ri_g = -\frac{9}{2}Ri_g.$$

La potenza assorbita dal noratore è allora

$$P_{nor} = -v_B i_0 = -\left(-\frac{9}{2}Ri_g\right)\left(-\frac{5}{2}i_g\right) = -\frac{45}{4}Ri_g^2 = -45W.$$

Il segno meno ci ricorda che in effetti il noratore eroga potenza al sistema.

3. Il circuito contiene due soli generatori, uno di tensione e l'altro di corrente. Possiamo pertanto scomporre il problema in due parti.



- a) Risposta al generatore di tensione.

Cominciamo supponendo disattivo il generatore di corrente; il circuito che ne risulta è rappresentato in figura (a). Dato che nel ramo MN non scorre corrente si ha

$$i = \frac{v_g}{3R}.$$

Nel ramo MN non scorre corrente e quindi la KV sulla maglia contenente la porta AB permette di scrivere

$$v_{AB}^{(a)} = v_B = Ri - v_g = \frac{v_g}{3} - v_g = -\frac{2}{3}v_g.$$

b) Risposta al generatore di corrente.

Si considera ora il caso in cui ad essere disattivato è il generatore di tensione; il corrispondente circuito è rappresentato in figura (b). Nel ramo MN scorre la corrente i_g e quindi $v_A = 2Ri_g$. Applicando la KI al nodo M si ottiene che $i_1 + i_2 = i_g$; inoltre dalla KV sulla maglia esterna si ha $Ri_1 = 2Ri_2$. Combinando queste due relazioni si deduce che $i_2 = i_g/3$. Segue che $v_B = -Ri_2 = -Ri_g/3$ e

$$v_{AB}^{(b)} = v_B - v_A = -Ri_2 - 2Ri_g = -\frac{Ri_g}{3} - 2Ri_g = -\frac{7}{3} Ri_g.$$

Sommando le due risposte si ha

$$v_{AB} = v_{AB}^{(a)} + v_{AB}^{(b)} = -\frac{2}{3} v_g - \frac{7}{3} Ri_g.$$

4. Si noti intanto che per ogni $t \in [0, 1]s$ risulta $i_g(t) = (1 - t/\tau)A$, dove $\tau = 1s$. Il carico su cui è chiuso il generatore di corrente equivale ad un induttore di induttanza $L_{eq} = 2R_0^2/3$ (per convincersene si veda l'esame 1.1). Segue che in $[0, 1]$

$$v_g(t) = -L_{eq} \frac{di_g}{dt}(t) = \frac{2}{3} R_0^2.$$

La potenza erogata dal generatore al tempo t vale pertanto

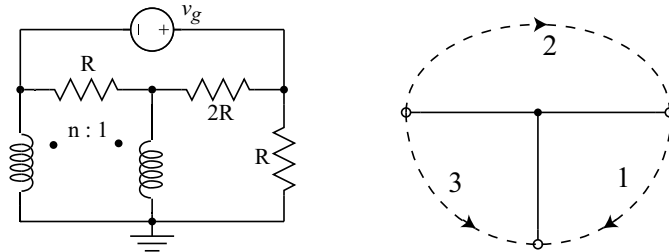
$$p(t) = -v_g(t)i_g(t) = -\frac{2}{3} R_0^2(1 - t/\tau)A = \frac{8}{3}(t/\tau - 1)W.$$

Il lavoro erogato nell'intervallo di tempo $[0, 1]$ si calcola integrando su tale intervallo la potenza istantanea erogata:

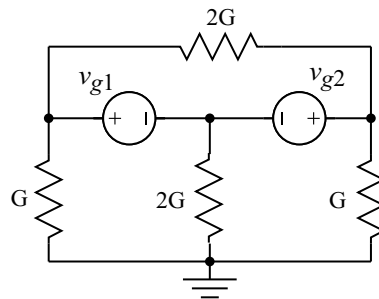
$$L_{gen} = \int_0^1 p(t)dt = \frac{8}{3} \int_0^1 (t/\tau - 1)dt = -\frac{4}{3}J.$$

Prova 5.

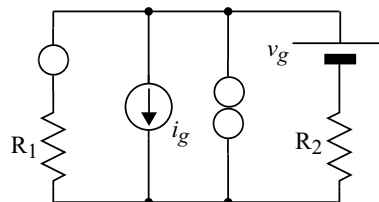
1. Scrivere il sistema risolvante su base maglie fondamentali per il circuito e l'albero in figura, rispettando orientazione e numerazione delle corde. ($[R] = Ohm$).



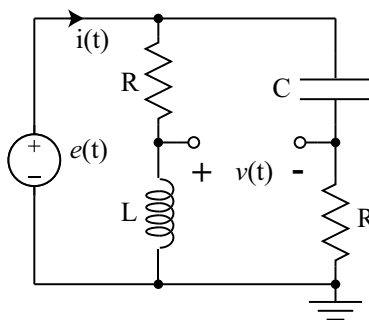
2. Scrivere il sistema risolvante su base nodi per il circuito in figura, usando il nodo di terra come riferimento. ($[G] = (Ohm)^{-1}$)



3. Verificare il teorema di Tellegen per il circuito in figura. ($R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $i_g = 2A$; $v_g = 4V$).

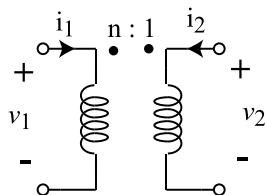


4. Determinare $v(t)$ ed $i(t)$ in regime sinusoidale. ($e(t) = \cos \omega t$ con $\omega = 2rad/sec$; $L = 1H$; $C = 0.5F$; $R = 2\Omega$).

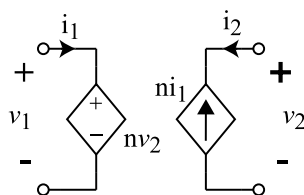


Soluzioni della prova 5.

1. Per poter effettuare l'analisi su base maglie del circuito proposto occorre preventivamente rappresentare il trasformatore ideale per mezzo di generatori controllati. Le relazioni costitutive del



(a)

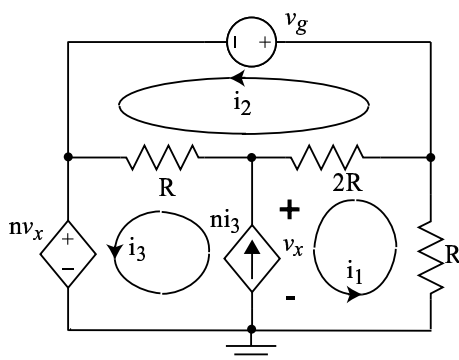


(b)

trasformatore ideale in figura (a) sono

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{i_2}{n}; \end{cases}$$

appare dunque scontata l'equivalenza di quest'ultimo con la rete due porte in figura (b). Si può pertanto sostituire allo studio del circuito originario quello del circuito in figura (c).



(c)

Come primo passo si identificano le incognite del problema: nel nostro caso si tratta delle correnti di maglia i_1 , i_2 , i_3 e della tensione v_x che si stabilisce ai capi del generatore controllato di corrente. La tensione v_g è invece l'unico termine noto non nullo del nostro problema.

Scriviamo le tre equazioni di maglia.

$$\begin{cases} Ri_1 + 2R(i_1 - i_2) = -v_x \\ R(i_3 - i_2) + 2R(i_1 - i_2) = v_g \\ nv_x + R(i_3 - i_2) = v_x \end{cases}$$

Ad esse si aggiunge il vincolo imposto dal generatore controllato di corrente ovvero $ni_3 = i_3 - i_1$.

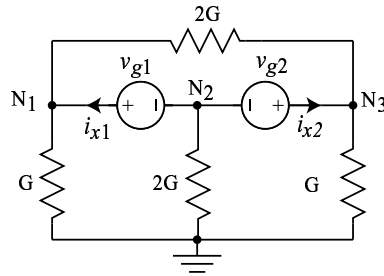
Il sistema di equazioni complessivo diviene pertanto

$$\begin{cases} 3Ri_1 - 2Ri_2 + v_x = 0 \\ 2Ri_1 - 3Ri_2 + Ri_3 = v_g \\ -Ri_2 + Ri_3 + (n-1)v_x = 0 \\ i_1 + (n-1)i_3 = 0, \end{cases}$$

che in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} 3R & -2R & 0 & 1 \\ 2R & -3R & R & 0 \\ 0 & -R & R & n-1 \\ 1 & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Con riferimento al circuito in figura (a), identifichiamo le incognite del problema: nel nostro caso si tratta dei potenziali ai nodi v_1, v_2, v_3 e delle correnti i_{x1}, i_{x2} che attraversano i due generatori indipendenti di tensione. Le tensioni v_{g1} e v_{g2} sono invece i termini noti non nulli del nostro problema.



Scriviamo le equazioni relative ai nodi N_1, N_2 e N_3 .

$$\begin{cases} Gv_1 = 2G(v_3 - v_1) + i_{x1} \\ i_{x1} + i_{x2} + 2Gv_2 = 0 \\ i_{x2} = Gv_3 + 2G(v_3 - v_1). \end{cases}$$

Ad esse si aggiungono i vincoli indotti dai generatori di tensione ovvero $v_{g1} = v_1 - v_2$ e $v_{g2} = v_3 - v_2$.

Il sistema di equazioni complessivo diviene pertanto

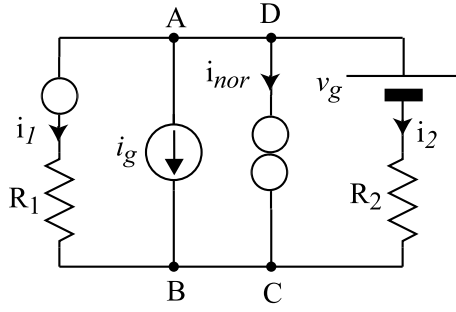
$$\begin{cases} 3Gv_1 - 2Gv_3 - i_{x1} = 0 \\ 2Gv_2 + i_{x1} + i_{x2} = 0 \\ 2Gv_1 - 3Gv_3 + i_{x2} = 0 \\ v_1 - v_2 = v_{g1} \\ v_3 - v_2 = v_{g2} \end{cases}$$

ossia, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} 3G & 0 & -2G & -1 & 0 \\ G & 2G & 0 & 1 & 1 \\ 2G & 0 & -3G & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{x1} \\ i_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{g1} \\ v_{g2} \end{pmatrix}.$$

3. Il teorema di Tellegen afferma che la somma delle potenze assorbite da tutti i dispositivi che compongono un circuito è nulla. Si tratta pertanto di risolvere il circuito, calcolare esplicitamente le potenze assorbite dai singoli utilizzatori e verificare che la loro somma è nulla.

La presenza del nullatore esclude che nel ramo di sinistra passi corrente. La tensione ai capi del resistore R_1 è conseguente nulla; essendo inoltre nulla la tensione ai capi del nullatore possiamo



concludere che il potenziale relativo ai nodi A e D è nullo. Il nostro compito appare adesso particolarmente semplificato: ricordando che la potenza istantanea assorbita da un utilizzatore è data dal prodotto della tensione ai suoi capi per la corrente che lo attraversa, si conclude che:

$$P_{R_1} = i_1 v_{AB} = 0W;$$

$$P_{null} = 0W;$$

$$P_{gc} = i_g v_{AB} = 0W;$$

$$P_{nor} = i_{nor} v_{DC} = 0W.$$

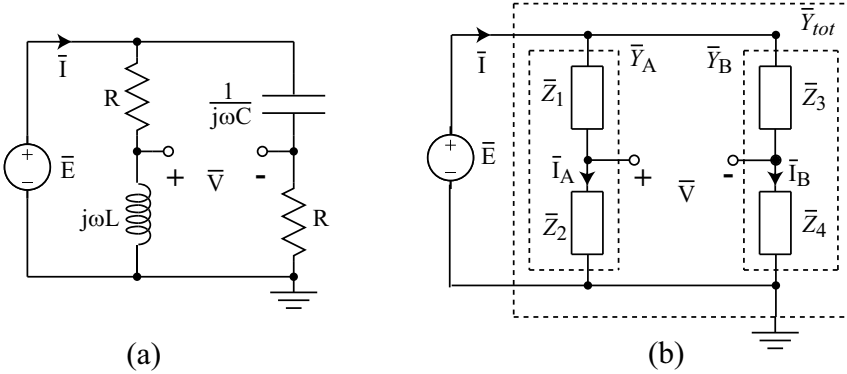
Dovrà inoltre risultare $R_2 i_2 + v_g = v_{DC} = 0V$ e dunque

$$i_2 = -\frac{v_g}{R_2} = -4A.$$

Ma allora $P_{gt} = v_g i_2 = -16W$ e $P_{R_2} = R_2 i_2^2 = 16W$. In accordo con il teorema di Tellegen si ha

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{null} + P_{nor} + P_{gt} + P_{gc} = 0W.$$

4. In figura (a) è mostrato il circuito proposto nel dominio dei fasori; naturalmente si ha $\bar{E} = 1$. Per risolvere tale circuito si può far riferimento allo schema in figura (b).



Valutiamo le impedenze rappresentate:

$$\bar{Z}_1 = R;$$

$$\bar{Z}_2 = j\omega L;$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C};$$

$$\bar{Z}_4 = R.$$

Segue che

$$\bar{Y}_A = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)^{-1} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1 - j}{4},$$

$$\bar{Y}_B = (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)^{-1} = \frac{1}{1/j\omega C + R} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2} (\omega C R + j) = \frac{2+j}{5}$$

e dunque che

$$\bar{Y}_{tot} = \bar{Y}_A + \bar{Y}_B = \frac{13}{20} - \frac{j}{20}.$$

Risulta pertanto

$$\bar{I} = \bar{Y}_{tot} \bar{E} = \frac{13}{20} - \frac{j}{20} = 0.65e^{-j \arctan 1/13}.$$

Vale inoltre

$$\bar{I}_A = \bar{Y}_A \bar{E} = \frac{1-j}{4}$$

e

$$\bar{I}_B = \bar{Y}_B \bar{E} = \frac{2+j}{5}.$$

Si conclude che

$$\bar{V} = \bar{Z}_2 \bar{I}_A - \bar{Z}_4 \bar{I}_B = -\frac{3}{10} + \frac{j}{10} = 0.316e^{j(\pi - \arctan 1/3)}.$$

Tornando nel dominio del tempo si ottiene

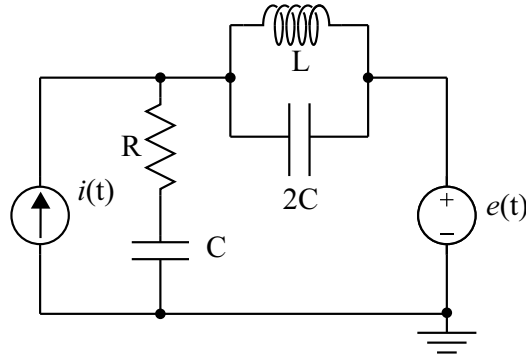
$$i(t) = 0.65 \cos(2t - 0.0768 \text{rad}) A$$

e

$$v(t) = 0.316 \cos(2t + 2.82 \text{rad}) V.$$

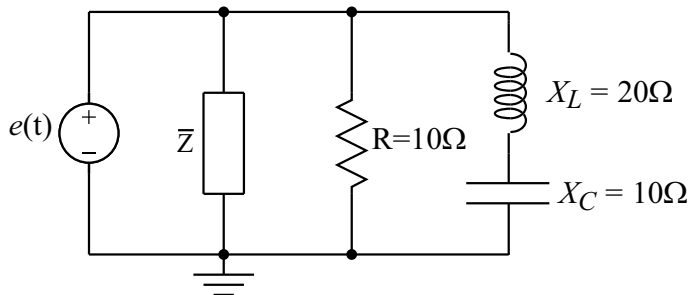
Prova 6.

1. Determinare potenza attiva e reattiva erogata da ciascuno dei generatori del circuito in figura. ($R = 10\Omega$; $C = 1F$; $L = 1H$; $i(t) = i_m \sin \omega t$ e $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ con $i_m = 1A$, $e_m = 1V$ e $\omega = 1\text{rad/sec}$)

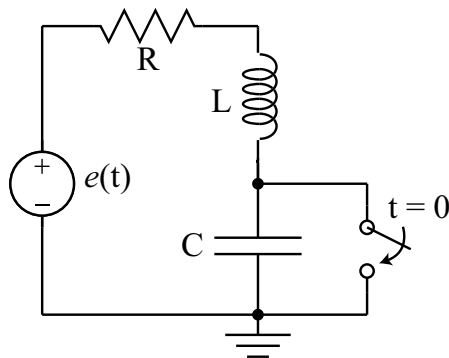


2. Determinare l'impedenza complessa $\bar{Z}$ sapendo che:

- il generatore di tensione genera una f.e.m. di $100V_{eff}$ ad una frequenza $f = 50Hz$.
- il carico $\bar{Z}$ ha un fattore di potenza 0.8 induttivo;
- la corrente attiva totale erogata dal generatore è pari a $15A_{eff}$.

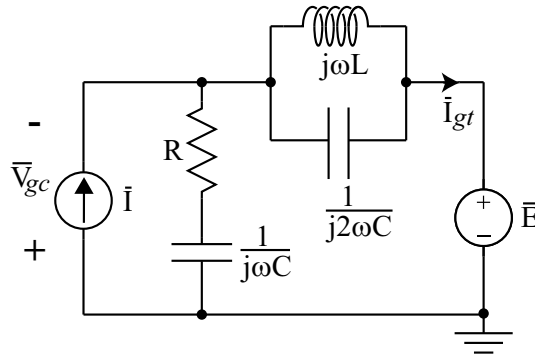


3. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$ per $t > 0$, risposta completa. ($R = 2\Omega$; $L = 1H$; $C = 0.5F$; $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ con $e_m = 1V$ e $\omega = 2\text{rad/s}$).



Soluzioni della prova 6.

1. Rappresentiamo il circuito originario nel dominio dei fasori.



Naturalmente risulta $\bar{I} = i_m e^{-\pi/2} = -j$ e $\bar{E} = e_m = 1$. Per risolvere l'esercizio occorre determinare il fasore $\bar{V}_{gc}$ che rappresenta la tensione ai capi del generatore di corrente e quello $\bar{I}_{gt}$ che rappresenta la corrente attraverso il generatore di tensione. Per ottenere queste due grandezze si applicherà il principio di sovrapposizione degli effetti.

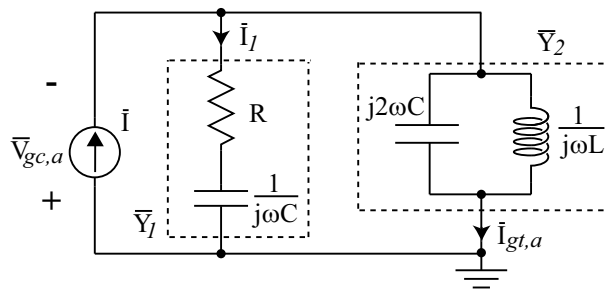
- a) Risposta relativa al generatore di corrente.

Per cominciare si suppone disattivato il generatore di tensione. Il circuito risultante è rappresentato in figura (a), dove vale

$$\bar{Y}_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)^{-1} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2} (\omega C R + j) = \frac{1+j}{2}.$$

e

$$\bar{Y}_2 = \left(2j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) = j \frac{2\omega^2 LC - 1}{\omega L} = j.$$



(a)

Si ha ovviamente

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = -\bar{Y}_1 \bar{V}_{gc,a} \\ \bar{I}_{gt,a} = -\bar{Y}_2 \bar{V}_{gc,a} \end{cases}$$

e dunque per la prima legge di Kirchoff risulta

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_{gt,a} = -(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \bar{V}_{gc,a}$$

ovvero

$$\bar{V}_{gc,a} = -\frac{\bar{I}}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} = \frac{3}{5} + \frac{j}{5}.$$

Inoltre

$$\bar{I}_{gt,a} = -\bar{Y}_2 \bar{V}_{gc,a} = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} \bar{I} = \frac{1}{5} - j \frac{3}{5}.$$

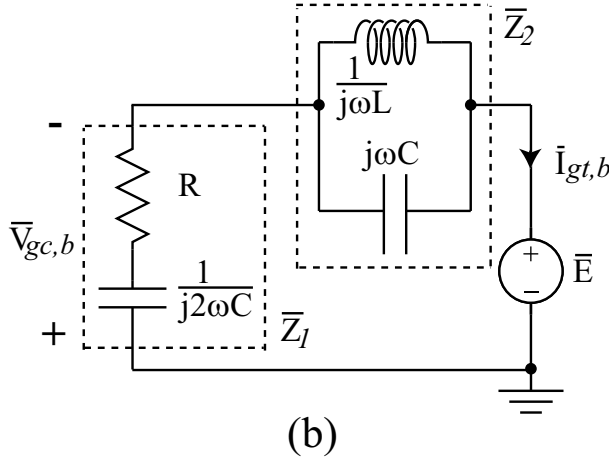
b) Risposta relativa al generatore di tensione.

Adesso si suppone disattivato il generatore di corrente. Il circuito risultante è rappresentato in figura (b), dove vale

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{\bar{Y}_1} = 1 - j$$

e

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{\bar{Y}_2} = -j.$$



Applicando la KV all'unica maglia si ottiene

$$\bar{I}_{gt,b} = -\frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = -\frac{1}{5} - j \frac{2}{5}.$$

Segue che

$$\bar{V}_{gc,b} = \bar{Z}_1 \bar{I}_{gt,b} = -\frac{3}{5} - j \frac{j}{5}.$$

Siamo ora in grado di valutare i valori complessivi di $\bar{I}_{gt}$ e $\bar{V}_{gc}$:

$$\bar{V}_{gc} = \bar{V}_{gc,a} + \bar{V}_{gc,b} = 0$$

$$\bar{I}_{gt} = \bar{I}_{gt,a} + \bar{I}_{gt,b} = -\infty.$$

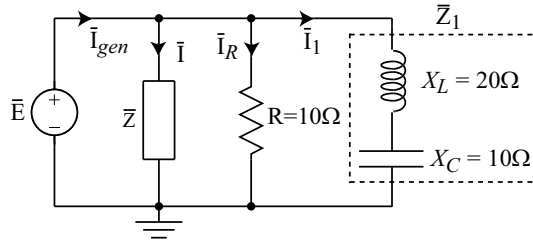
Se indichiamo con P_{gt} e P_{gc} la potenza complessa assorbita rispettivamente dal generatore di tensione e dal generatore di corrente, si ha allora $P_{gt} = 0W + j0VAR$ e

$$P_{gc} = \frac{\bar{E}_{gt} \bar{I}_{gt}^*}{2} = 0W + \frac{j}{2} VAR.$$

2. Denotando con φ l'angolo di fase relativo al carico $\bar{Z}$ e con Z il modulo di $\bar{Z}$ si, ha $\bar{Z} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$. E' noto che $\cos \varphi = 0.8$; inoltre, dato che il carico è di tipo induttivo, si ha che $\varphi \in [0, \pi/2]$ e quindi $\sin \varphi = +\sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$. per completare l'esercizio occorre e basta individuare Z .

Se indichiamo con $I_{eff}^{(a)}$ il valore efficace della corrente attiva che attraversa il carico $\bar{Z}$ si può scrivere $Z I_{eff}^{(a)} = V_{eff} \cos \varphi$ e quindi

$$Z = \frac{V_{eff}}{I_{eff}^{(a)}} \cos \varphi.$$



Rimane da determinare $I_{eff}^{(a)}$. Se si indica con $I_{eff,gen}^{(a)}$ la corrente attiva complessivamente erogata dal generatore di tensione si ha

$$I_{gen,eff}^{(a)} = I_{eff}^{(a)} + I_{R,eff}^{(a)} + I_{1,eff}^{(a)}$$

Dato che il fattore di potenza del carico resistivo vale uno, si ha

$$I_{R,eff}^{(a)} = I_{R,eff} = \frac{V_{eff}}{R} = 10A_{eff}.$$

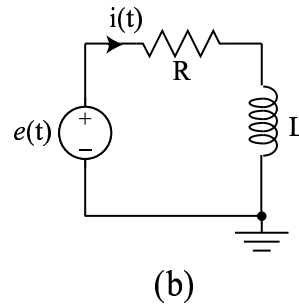
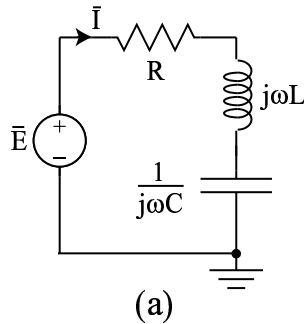
Il carico $\bar{Z}_1$ ha parte ohmica nulla e dunque $I_{1,eff}^{(a)} = 0A_{eff}$. Segue che

$$I_{eff}^{(a)} = I_{gen,eff}^{(a)} - I_{R,eff} = 15A_{eff} - 10A_{eff} = 5A_{eff},$$

$$Z = \frac{V_{eff}}{I_{eff}^{(a)}} \cos \varphi = 16\Omega$$

e dunque $\bar{Z} = (12.8 + j9.6)\Omega$.

3. Come primo passo occorre calcolare i valori della corrente nell'induttore e della tensione ai capi del condensatore un attimo prima della chiusura dell'interruttore e cioè a per $t = 0^-$. Dato che l'interruttore è rimasto aperto 'per lungo tempo', si può assumere che il circuito abbia raggiunto il regime di funzionamento permanente e fare riferimento al circuito in figura (a), dove $\bar{E} = e_m = 1V$.



Si ha banalmente

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \omega C \frac{\omega C R - j(\omega^2 LC - 1)}{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2} \bar{E} = \left(\frac{2}{5} - \frac{j}{5} \right) A = 0.447e^{-j \arctan 1/2} A$$

ovvero $i(t) = 0.447 \cos(2t - \arctan 1/2)A$ e $i(0^-) = 0.4A$.

Osservazione 3. Per la determinazione di $i(0^-)$ è possibile in questo caso evitare alcuni calcoli: $i(t) = i^{(a)}(t) + i^{(r)}(t)$, dove $i^{(a)}(t)$ e $i^{(r)}(t)$ sono rispettivamente la parte attiva e reattiva della corrente; d'altra parte in un carico induttivo è $\bar{I}^{(a)} = \text{re}(\bar{I}) = 2/5A$ e $\bar{I}^{(r)} = j \text{im}(\bar{I}) = -j/5$. Segue che $i^{(a)}(t) = (2/5) \cos(\omega t)A$, $i^{(r)}(t) = \cos(\omega t - \pi/2)/5A = \sin(\omega t)/5A$ e dunque che $i(0^-) = i^{(a)}(0^-) + i^{(r)}(0) = 2/5A$.

Con la chiusura dell'interruttore il condensatore si scarica istantaneamente e per $t > 0$ si comporta da circuito aperto. La corrente nell'induttore, nuova ed unica variabile di stato del sistema, rimane invece invariata; risulta cioè $i(0^+) = i(0^-) = 0.4A$. Il nuovo circuito da considerare è rappresentato in figura (b). La corrispondente equazione di maglia al generico istante t è

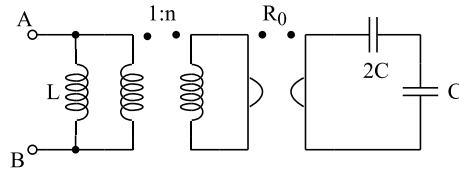
$$Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) = e(t) = e_m \cos(\omega t),$$

cui si aggiunge la condizione iniziale $i(0^+) = 0.4A$. L'unica soluzione di questo *problema con valore iniziale* è

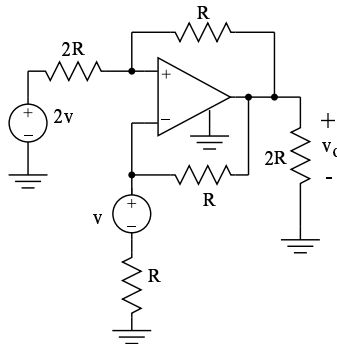
$$i(t) = \left(\frac{3}{20} e^{-2t} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(2t - \pi/4) \right) A.$$

Prova 7.

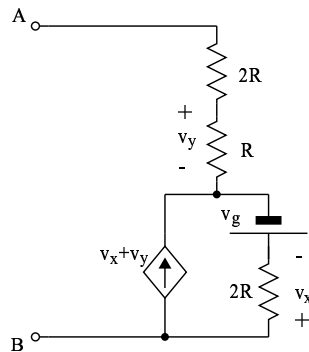
1. Determinare la relazione costitutiva del bipolo $A - B$ e stabilire a cosa equivale. ($L = 1H$; $n = 2$; $R_0 = 3\Omega$; $C = 1F$).



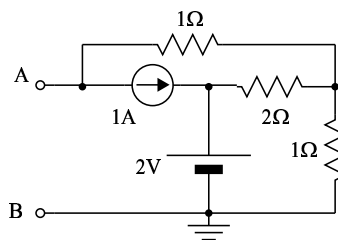
2. Determinare v_0 usando il principio di sovrapposizione degli effetti. ($R = 1\Omega$; $v = 1V$).



3. Determinare il circuito equivalente di Thevenin del bipolo $A - B$. ($R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $v_g = 4V$).

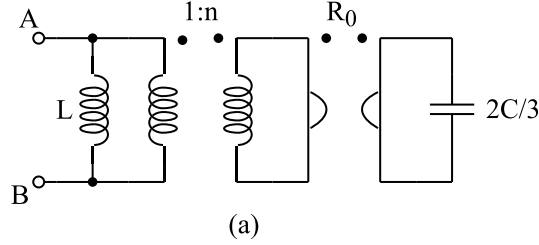


4. Determinare il circuito equivalente di Norton del bipolo $A - B$, usando *trasformazioni circuitali*.

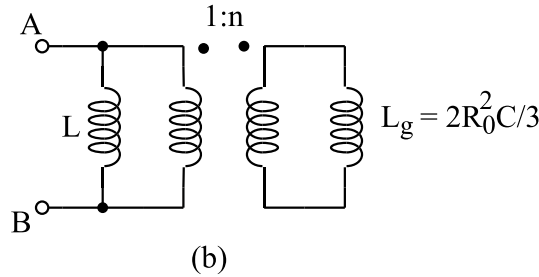


Soluzioni della prova 7.

1. La serie dei due condensatori equivale ad un condensatore di capacità $C_{tot} = 2C/3$. Il bipolo originario è quindi equivalente al bipolo in figura (a).



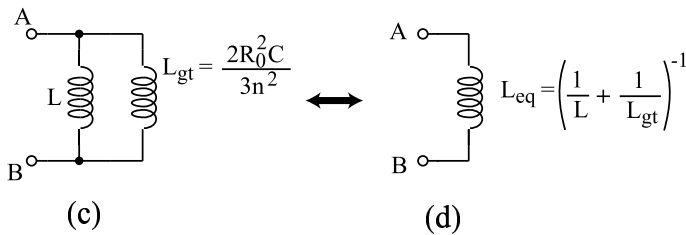
Un giratore avente *resistenza di girazione* R_0 chiuso su un condensatore di capacità $2C/3$ è equivalente ad una induttanza di valore $L_g = R_0^2 C/3$. Al bipolo precedente si può quindi sostituire il bipolo in figura (b).



Un trasformatore ideale con *rapporto di trasformazione* n chiuso su un'induttanza di valore $L_g = C/3$ equivale ad un'induttanza di valore

$$L_{gt} = \frac{L_g}{n^2} = \frac{2R_0^2 C}{3n^2};$$

il bipolo precedente è quindi equivalente al bipolo in figura (c). Si conclude che il bipolo $A - B$

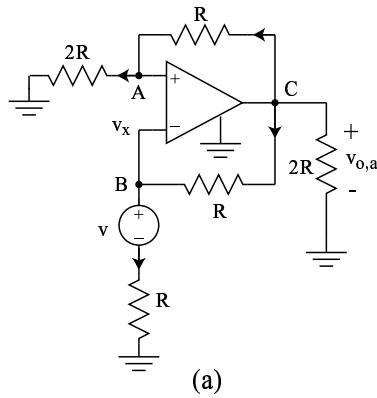


è equivalente ad un'induttanza di valore $L_{eq} = 0.6H$ e che quindi è caratterizzato dalla relazione costitutiva

$$v_{in} = L_{eq} \frac{di_{in}}{dt}.$$

2. Il circuito contiene due generatori indipendenti di tensione. Il principio di sovrapposizione degli effetti assicura che la tensione di uscita del sistema corrisponde alla somma di quelle che si avrebbero supponendo attivo un solo generatore alla volta.

- a)** Per cominciare (figura (a)) si disattiva il generatore di tensione a sinistra (si ricorda che disattivare un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto circuito).



Applicando la KI al nodo A si ottiene

$$\frac{v_{o,a} - v_x}{R} = \frac{v_x}{2R}$$

(infatti risulta $v_A = v_B = v_x$ e la corrente d'ingresso dell'amplificatore operazionale è nulla) ovvero

$$v_x = \frac{2}{3} v_{o,a}.$$

Applicando la KI al nodo B si ha invece

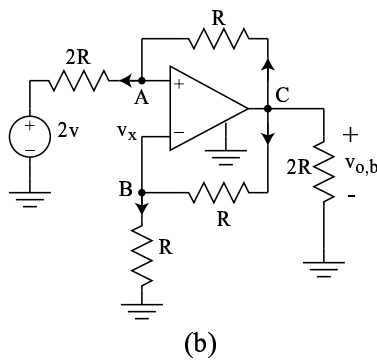
$$\frac{v_{o,a} - v_x}{R} = \frac{v_x - v}{R};$$

moltiplicando ambo i membri per R e sostituendo l'espressione di v_x precedentemente trovata si può scrivere

$$v_{o,a} - \frac{2}{3} v_{o,a} = \frac{2}{3} v_{o,a} - v.$$

Da quest'ultima segue che $v_{o,a} = 3v = 3V$.

b) Adesso si disattiva il generatore di tensione di destra (figura(b)).



Applicando la KI al nodo A si ottiene

$$\frac{v_{o,b} - v_x}{R} = \frac{v_x - 2v}{2R}$$

ovvero

$$v_x = \frac{2}{3} (v_{o,b} + v).$$

Applicando la KI al nodo B si ha invece

$$\frac{v_{o,b} - v_x}{R} = \frac{v_x}{R};$$

moltiplicando ambo i membri per R e sostituendo l'espressione di v_x precedentemente trovata si può scrivere

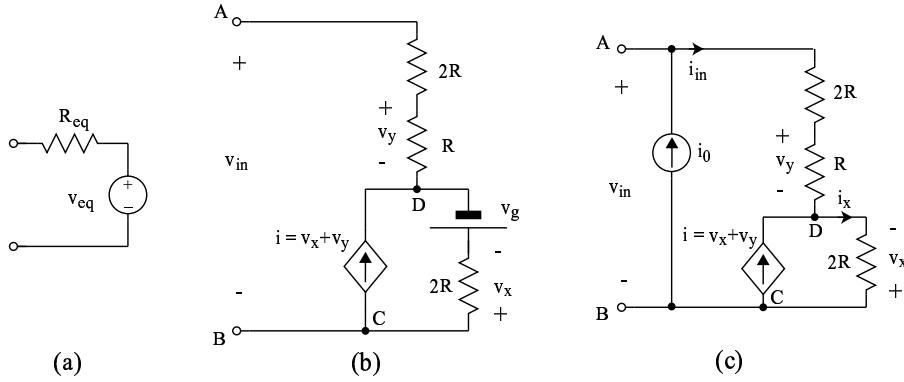
$$v_{o,b} - \frac{2}{3}(v_{o,b} + v) = \frac{2}{3}(v_{o,b} + v).$$

Da quest'ultima segue che

$$v_{o,b} = -4v = -4V.$$

In conclusione $v_o = v_{o,a} + v_{o,b} = 3V - 4V = -1V$.

3. Si tratta di determinare i valori di V_{eq} e R_{eq} in modo tale che il bipolo in figura (a) sia equivalente a quello assegnato. Si procede applicando il teorema di Thevenin.



a) Determinazione di v_{eq} .

Supponiamo che il bipolo di partenza sia chiuso su un circuito aperto e determiniamo la tensione in ingresso (figura (b)).

La corrente nel ramo AD è sicuramente nulla e quindi $v_y = 0V$. Segue che $i = v_x$. Analizziamo la maglia contenente il generatore controllato di corrente e quello indipendente di tensione. Dato che nel ramo BC non passa corrente si ha $v_x = -2Ri = -2Rv_x$ ossia $v_x = 0$. Ciò significa che $v_{in} = v_y - v_g - v_x = -v_g$. Il teorema di Thevenin impone di scegliere $v_{eq} = v_{in} = -4V$.

b) Determinazione di R_{eq} .

Sempre per il teorema di Thevenin, affinché il bipolo in figura (a) sia equivalente a quello assegnato occorre che il valore di R_{eq} coincida con l'impedenza di ingresso del bipolo in figura (c). Occorre dunque calcolare quest'ultima. L'impedenza di ingresso del sistema è per definizione

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}}.$$

Naturalmente $i_{in} = i_0$ e quindi rimane solo da trovare v_{in} .

$$v_y = Ri_{in} = Ri_0.$$

Applicando la KI al nodo D si ottiene

$$i_x = i + i_{in} = v_x + v_y + i_0 = v_x + (R + 1)i_0.$$

Si ha allora

$$-v_x = 2Ri_x = 2R[v_x + (R + 1)i_0],$$

ovvero

$$v_x = -2R \frac{R + 1}{2R + 1} i_0. \quad (2)$$

Osservazione 4. L'apparente anomalia dimensionale che figura nella (2) si supera osservando che in realtà la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente dovrebbe essere $i = (v_x + v_y)/R_g$, con $R_g = 1\Omega$. Con questa notazione l'espressione completa per v_x diviene

$$v_x = -2R \frac{R/R_g + 1}{2R/R_g + 1} i_0$$

che è dimensionalmente corretta.

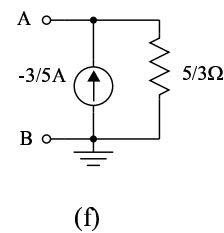
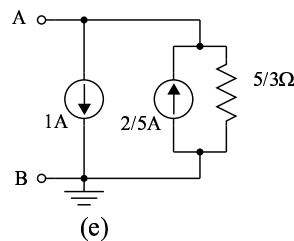
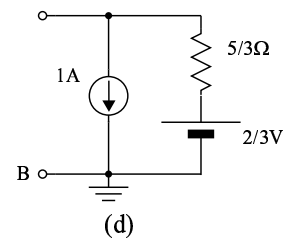
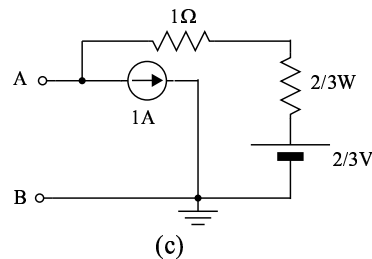
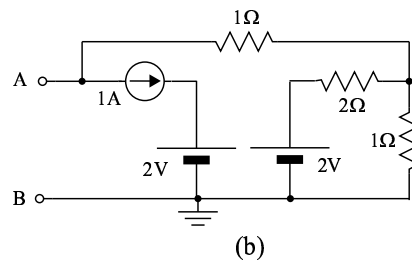
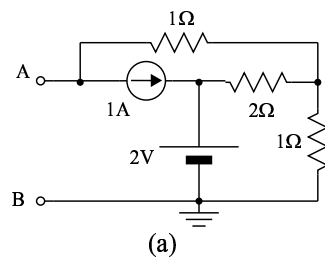
Per concludere

$$v_{in} = 2Ri_0 + v_y - v_x = 2Ri_0 + Ri_0 + 2R \frac{R+1}{2R+1} i_0 = Ri_0 \frac{4R+3}{2R+1}$$

e quindi

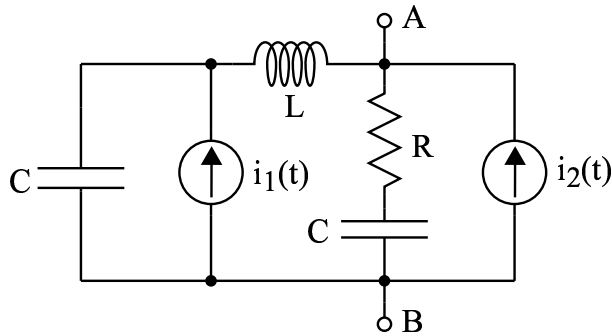
$$R_{eq} = R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = R \frac{8R+5}{2R+1} = \frac{13}{3} \Omega.$$

4. La sequenza di trasformazioni che segue risolve l'esercizio.

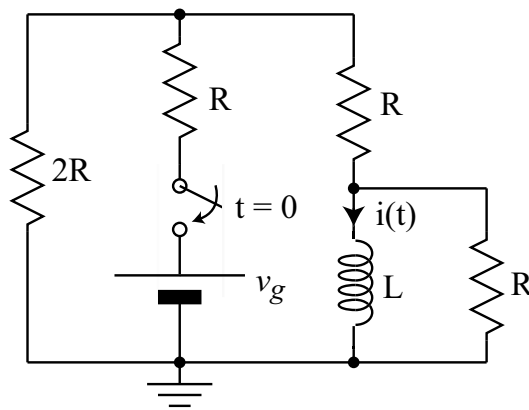


Prova 8.

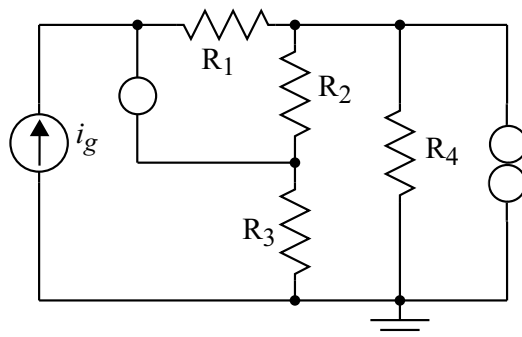
1. Determinare il carico che collegato alla porta $A - B$ assorbe la massima potenza attiva e valutare tale potenza massima. ($i_1(t) = i_m \sin(\omega t)$, $i_2(t) = i_m \cos(\omega t)$ con $\omega 1 \text{ rad/sec}$, e $i_m = 1 \text{ A}$; $C = 1 \text{ F}$; $R = 1 \Omega$; $L = 2 \text{ H}$.)



2. Sapendo che $i(0^-) = 0.2 \text{ A}$, determinare la parte libera e la parte forzata di $i(t)$ per $t \geq 0$. ($R = 1 \Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $v_g = 5 \text{ V}$.)

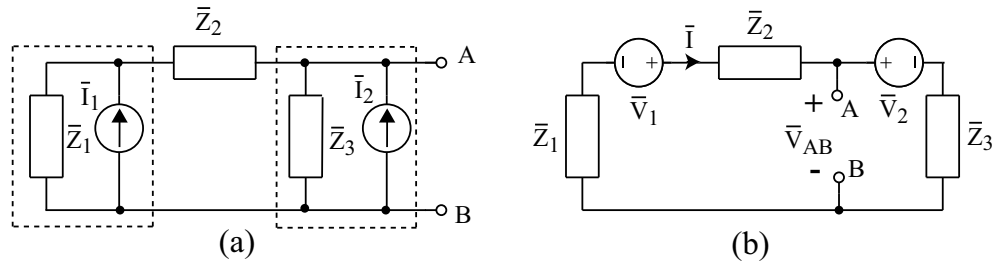


3. Verificare il teorema di Tellegen per il circuito in figura. ($R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$; $R_3 = 2 \Omega$; $R_4 = 1 \Omega$; $i_g = 1 \text{ A}$.)



Soluzioni della prova 8.

1. In figura (a) è mostrata la versione nel dominio dei fasori del circuito assegnato.



Naturalmente si ha

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = -j\Omega;$$

$$\bar{Z}_2 = j\omega L = 2j\Omega;$$

$$\bar{Z}_3 = R + \frac{1}{j\omega C} = (1 - j)\Omega;$$

$$\bar{I}_1 = -jA;$$

$$\bar{I}_2 = 1A.$$

Il circuito in figura (b) si ottiene da quello in figura (a) sostituendo ai generatori di corrente il loro equivalente di Thevenin; si ha pertanto

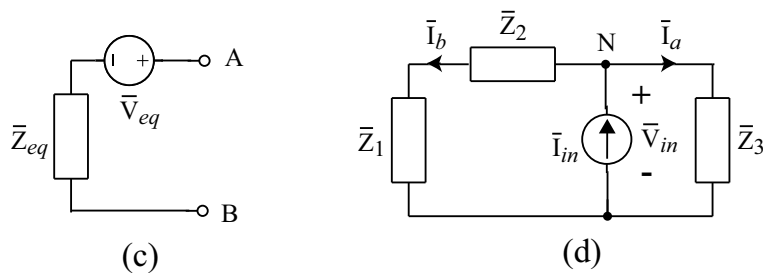
$$\bar{V}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 = -1V$$

e

$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_3 \bar{I}_2 = (1 - j)V.$$

Il teorema di Thevenin assicura che se $\bar{Z}_{eq}$ coincide con l'impedenza di ingresso $\bar{Z}_{in}$ del bipolo in figura (b) e $\bar{V}_{eq}$ coincide con la tensione a vuoto del bipolo in figura (b), allora il bipolo in figura (b) è equivalente al bipolo in figura (c). Poniamo allora

$$\bar{V}_{eq} = \bar{V}_{AB} = \bar{V}_2 + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) = 2jV.$$



Per la determinazione di $\bar{Z}_{eq}$, si può far riferimento al circuito in figura (d). Dalla KI al nodo N si ha

$$\bar{I}_a = \bar{I}_{in} - \bar{I}_b;$$

Applicando la KV alla maglia esterna si ottiene la relazione

$$(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \bar{I}_b = \bar{Z}_3 \bar{I}_a = \bar{Z}_3 (\bar{I}_{in} - \bar{I}_b)$$

da cui segue che

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \bar{I}_{in}$$

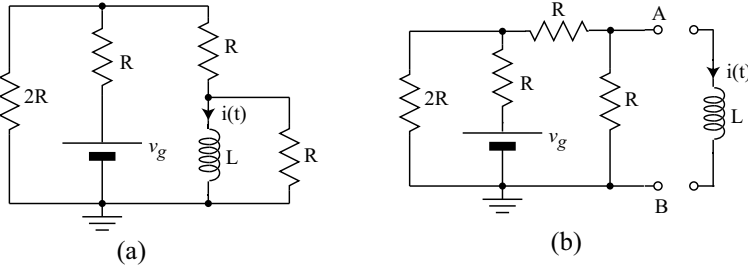
e

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_{in} = \frac{\bar{V}_{in}}{\bar{I}_{in}} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \bar{Z}_3 = (1 + j)\Omega.$$

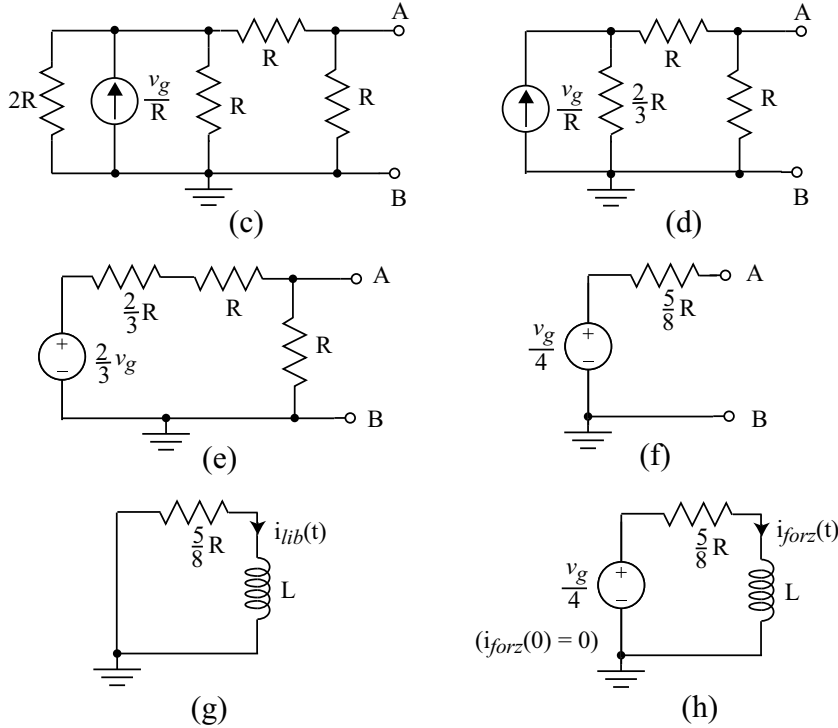
Il *teorema del massimo trasferimento di potenza attiva* assicura che il carico che ottimizza il trasferimento di potenza è quello la cui impedenza corrisponde al coniugato dell'impedenza interna del generatore equivalente: deve cioè essere $\bar{Z}_u = \bar{Z}_{eq}^* = (1 - j)\Omega$. La potenza trasferita in queste condizioni è detta *potenza disponibile* del generatore e vale

$$P_D = \frac{|\bar{V}_{eq}|^2}{8R_{eq}} = \frac{1}{2} W.$$

2. Per $t > 0$ l'interruttore rimane chiuso e dunque il circuito originario coincide con quello in figura (a); quest'ultimo può poi essere pensato come il bipolo in figura (b) chiuso su un induttore di induttanza L .



Con la sequenza di trasformazioni (c-d-e-f) si determina l'equivalente di Thevenin del bipolo in figura (b).



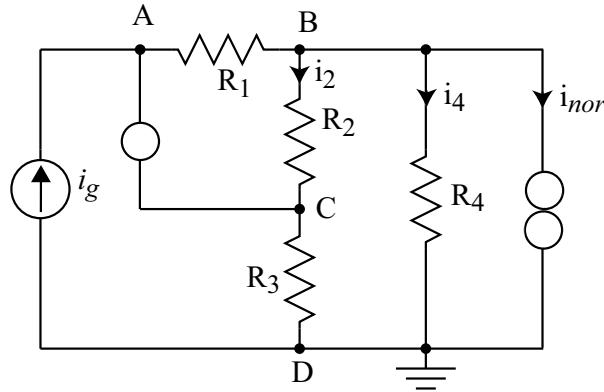
I circuiti che permettono di calcolare in maniera diretta le correnti cercate sono rappresentati nelle figura (g) e (h). Si ha

$$i_{lib}(t) = i(0)e^{-\frac{5R}{8L}t} = 2e^{-5t/24} A$$

e

$$i_{forz}(t) = \frac{2}{5} \frac{v_g}{R} \left(1 - e^{-\frac{5R}{8L}t}\right) = 2 \left(1 - e^{-5t/24}\right) A.$$

3. Il teorema di Tellegen afferma che la potenza istantanea complessivamente assorbita da tutti i componenti di un circuito (quindi compresi i generatori) è nulla. Per verificarlo occorre quindi preventivamente risolvere il circuito.



La corrente nel resistore R_1 è necessariamente i_g (in quanto il nullatore non permette il passaggio di corrente) così che $v_{AB} = R_1 i_g = 2V$; d'altra parte la tensione ai capi del nullatore è nulla e quindi

$$0V = v_{AC} = R_2 i_2 + v_{AB} = R_2 i_2 + R_1 i_g,$$

ovvero

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_2} i_g = -2A.$$

Tutta la corrente che attraversa il resistore R_2 deve attraversare anche il resistore R_3 . Ciò permette di calcolare i potenziali ai nodi A e B:

$$v_B = (R_2 + R_3) i_2 = -\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 i_g = -6V;$$

$$v_A = v_B + R_1 i_g = -\frac{R_3}{R_2} R_1 i_g = -4V.$$

Per completare l'analisi rimangono da valutare la corrente nel noratore e quella nel resistore R_4 :

$$i_4 = \frac{v_B}{R_4} = -\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \frac{R_1}{R_4} i_g = -6A$$

e

$$i_{nor} = i_g - i_2 - i_4 = 9A.$$

Calcoliamo le potenze:

$$P_{gc} = (-v_A) i_g = 4W;$$

$$P_{R_1} = \frac{v_{AB}^2}{R_1} = 2W;$$

$$P_{R_2} = R_2 i_2^2 = 4W;$$

$$P_{R_3} = R_3 i_2^2 = 8W;$$

$$P_{R_4} = \frac{v_B^2}{R_4} = 36W;$$

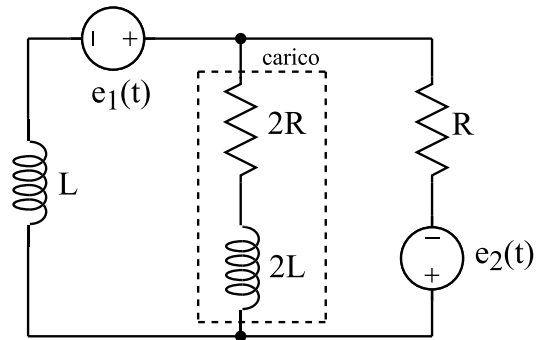
$$P_{nor} = v_B i_{nor} = -54W;$$

$$P_{null} = 0W.$$

In accordo con quanto previsto dal teorema di Tellegen, la somma algebrica delle potenze è nulla.

Prova 9.

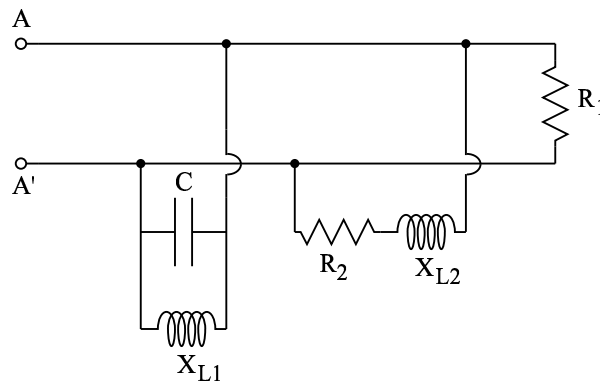
1. Assegnato il circuito in figura, valutare:



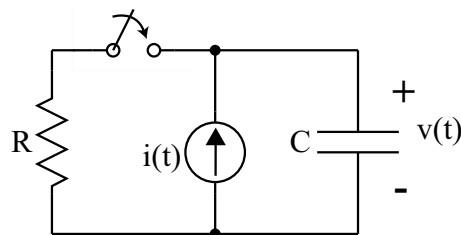
- a) potenza attiva, reattiva ed istantanea massima e minima assorbita dal carico;
 b) l'impedenza che sostituita al carico è capace di assorbire la massima potenza attiva.

($R = 1\Omega$; $L = 0.5H$; $e_1(t) = e_m \cos(\omega t)$; $e_2(t) = \sqrt{2} e_m \cos(\omega t - \theta)$ con $e_m = 2V$, $\omega = 2\text{rad/s}$ e $\theta = \pi/4\text{rad}$).

2. Sapendo che la rete opera ad una frequenza f di 50Hz e che il condensatore ha una reattanza di $X_C = -4\Omega$ ed assorbe -10^4VAR , effettuare un rifasamento che porti il fattore di potenza alla sezione AA' a 0.95 induttivo. Svolgere l'esercizio lavorando per via energetica. ($R_1 = 4\Omega$; $R_2 = 3\Omega$; $X_{L1} = 2\Omega$, $X_{L2} = 4\Omega$)

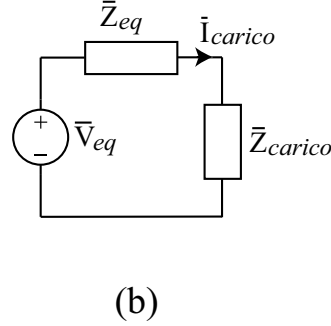
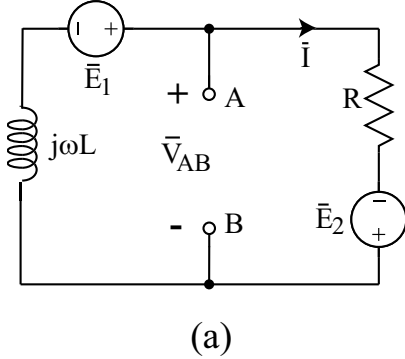


3. L'interruttore si chiude a $t = 0$; sapendo che $v(0^-) = 3V$, determinare la parte libera, la parte forzata, il transitorio ed il permanente di $v(t)$ per $t > 0$. ($R = 2\Omega$; $C = 0.5F$; $i(t) = i_m \cos(\omega t)$ con $i_m = 5A$ e $\omega = 2\text{rad/s}$.)



Soluzioni della prova 9.

1. Per risolvere il problema è utile valutare l'equivalente di Thevenin della rete $A - B$ che alimenta il carico (ossia del bipolo in figura (a)) e fare riferimento al circuito in figura (b).



Naturalmente si ha che

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= e_m = 2V \\ \bar{E}_2 &= \sqrt{2} e_m e^{-j3\pi/4} = -2(1+j)V. \\ \bar{Z}_{carico} &= 2(R + j\omega L) = 2(1+j)\Omega.\end{aligned}$$

Disattivando i generatori si conclude che l'impedenza di ingresso del bipolo AB è

$$\bar{Z}_{ingr} = \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \omega RL \frac{\omega L + jR}{R^2 + \omega^2 L^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \Omega.$$

La tensione a vuoto alla sezione AB si ottiene invece applicando la KV all'unica maglia della rete:

$$R\bar{I} + j\omega L\bar{I} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2}{R + j\omega L}$$

e quindi

$$\bar{V}_{AB} = R\bar{I} - \bar{E}_2 = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} (R\bar{E}_1 - j\omega \bar{E}_2) = (1+j)V.$$

Nel circuito di figura (b) si può assumere

$$\bar{V}_{eq} = \bar{V}_{AB} = (1+j)V$$

e

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_{ingr} = \frac{1+j}{2} \Omega.$$

Siamo ora in grado di rispondere alle domande proposte dal problema.

a) Con riferimento alla figura (b) si ha:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{carico} &= \frac{\bar{V}_{eq}}{\bar{Z}_{eq} + \bar{Z}_{carico}} = \frac{2}{5} A; \\ P_C &= \bar{Z}_{carico} \frac{|\bar{I}_{carico}|^2}{2} = \frac{4}{25} W + j \frac{4}{25} VAR.\end{aligned}$$

La potenza attiva assorbita vale pertanto

$$P^{(a)} = \frac{4}{25} W$$

mentre quella reattiva è

$$Q = \frac{4}{25} VAR.$$

La formula per la potenza istantanea è data

$$P(t) = P^{(a)} + |P_C| \cos(2\omega t + \Delta)$$

per qualche Δ di cui non ci interessa il valore; segue che

$$P_{max} = P^{(a)} + |P_C| = \frac{4}{25}(1 + \sqrt{2})W$$

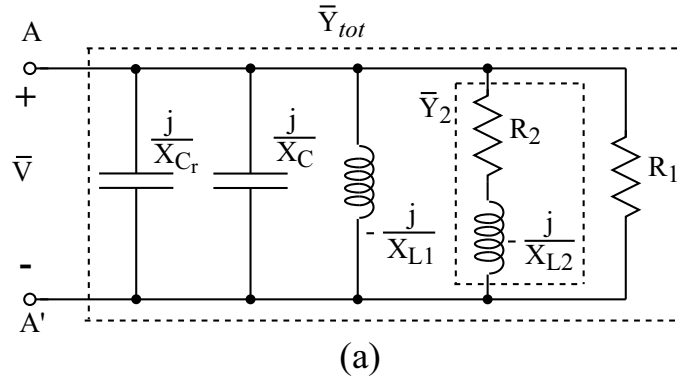
e

$$P_{min} = P^{(a)} - |P_C| = \frac{4}{25}(1 - \sqrt{2})W.$$

- b)** Il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva assicura che il carico ottimo è quello di impedenza

$$\bar{Z}_{ott} = \bar{Z}_{eq}^* = \frac{1-j}{2} \Omega.$$

2. Ridisegnando il circuito come in figura (a) ci si convince facilmente che il bipolo considerato è ottenuto collegando alcuni carichi in parallelo. Tra questi figura il condensatore (di capacità incognita C_r) che serve per realizzare il rifasamento.



Con $\bar{V}$ si è ovviamente indicata la tensione in ingresso, mentre gli utilizzatori sono caratterizzati per mezzo delle loro ammettanze. Si ha

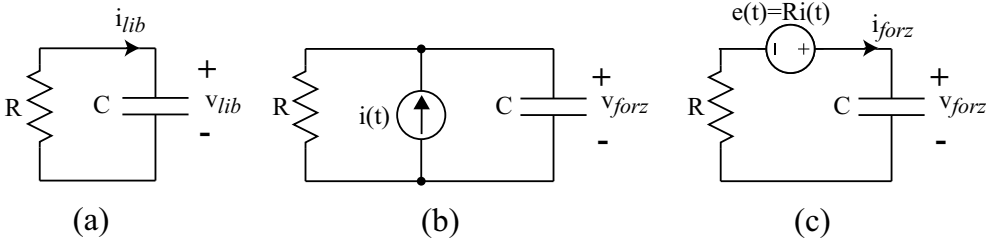
$$\bar{Y}_2 = \left(\frac{1}{R_2} - j \frac{1}{X_{L2}} \right)^{-1} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} - j \frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2} = \left(\frac{3}{25} - j \frac{4}{25} \right) \Omega;$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{tot} &= j\omega C_r + \frac{j}{X_C} - \frac{j}{X_{L1}} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} - j \frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2} + \frac{1}{R_1} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} + \frac{1}{R_1} + j \left(\omega C_r + \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L1}} - \frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2} \right) = \left[\frac{37}{100} + j \left(100\pi C_r - \frac{41}{100} \right) \right] \Omega^{-1}. \end{aligned}$$

Il fattore di potenza complessivo che si vuole far apparire alla sezione AA' vale 0.95 ed è di tipo induttivo; pertanto se si indica con φ_{tot} l'angolo di fase del carico complessivo (compreso il condensatore C_r) si deve avere

$$0.3287 = \tan \varphi_{tot} = - \frac{\text{Im}(\bar{Y}_{tot})}{\text{Re}(\bar{Y}_{tot})} = - \frac{100\pi C_r - \frac{41}{100}}{\frac{4}{25}};$$

segue che $C_r = 918 \mu F$.



3. Per $t > 0$ l'interruttore è definitivamente chiuso e dunque può essere sostituito con un corto circuito. Risolveremo il problema trovando separatamente la risposta libera e quella forzata. Il circuito in figura (a) permette di calcolare la risposta libera del sistema. L'equazione di maglia al generico istante t permette di scrivere

$$v_{lib}(t) = -Ri_{lib}(t) = -RC \frac{dv_{lib}}{dt}(t);$$

a questa si aggiunge la condizione iniziale $v_{lib}(0) = v(0^-) = 3V$. L'unica soluzione di questo problema con valore iniziale è

$$v_{lib}(t) = v(0^-)e^{-t/RC} = 3e^{-t}V.$$

In figura (b) è rappresentato il circuito per il calcolo della risposta forzata; naturalmente si suppone che il condensatore sia inizialmente scarico. Per agevolare il calcolo si può sostituire al generatore di corrente reale il suo equivalente di Thevenin; il circuito risultante è proposto in figura (c). La corrispondente equazione di maglia è

$$v_{forz}(t) = e(t) - Ri_{forz}(t) = R \left(i(t) - C \frac{dv_{forz}}{dt}(t) \right),$$

con la condizione iniziale $v_{forz}(0) = 0$. Tale problema con valore iniziale ammette come unica soluzione la funzione

$$\begin{aligned} v_{forz}(t) &= -\frac{Ri_m}{1 + (\omega RC)^2} e^{-t/RC} + \frac{Ri_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan \omega CR) = \\ &= \left[-2e^{-t} + \frac{10}{\sqrt{5}} \cos(2t - \arctan 2) \right] V. \end{aligned}$$

Il transitorio ed il permanente si ottengono immediatamente da $v_{lib}(t)$ e da $v_{forz}(t)$ separando i termini evanescenti da quelli persistenti:

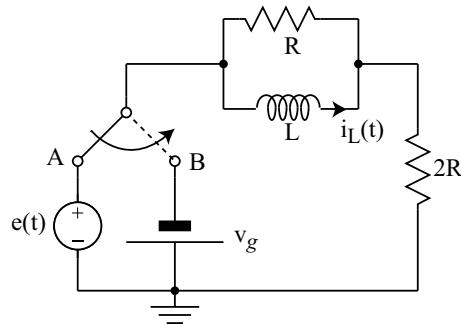
$$v_{trans}(t) = (3 - 2)e^{-t}V = e^{-t}V$$

e

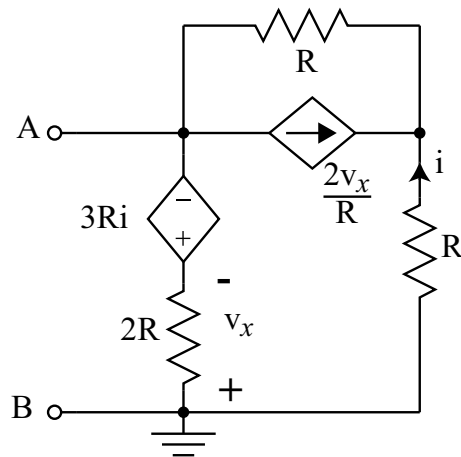
$$v_{perm}(t) = \frac{10}{\sqrt{5}} \cos(2t - \arctan 2) V.$$

Prova 10.

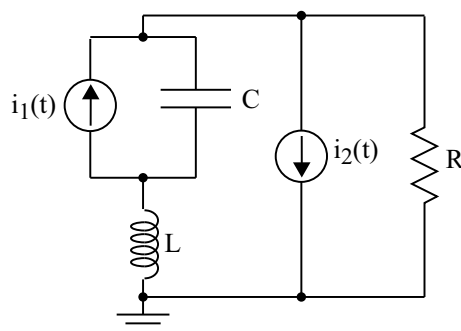
1. Il commutatore, da lungo tempo nella posizione A , al tempo $t = 0$ viene portato nella posizione B . Determinare $i_L(t)$ (risposta completa) per $t > 0$. ($R = 1\Omega$; $L = 0.5H$; $v_g = 5V$; $e(t) = e_m \cos \omega t$ con $e_m = 1V$ e $\omega = 2rad/sec$).



2. Determinare il circuito equivalente di Thevenin del bipolo $A - B$.

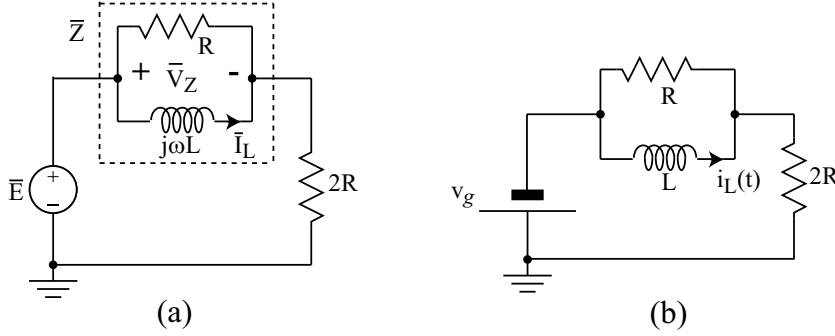


3. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura. ($R = 2\Omega$; $C = 0.5F$; $L = 1H$; $i_1(t) = i_m \sin \omega t$; $i_2(t) = i_m \cos \omega t$ con $i_m = 1A$ e $\omega = 2rad/sec$).



Soluzioni della prova 10.

1. Per risolvere l'esercizio occorre valutare $i_L(0^+)$; la conoscenza di quest'ultimo richiede di capire cosa accade per $t < 0$. Dato che si suppone che l'interruttore rimanga sulla posizione A per un lungo periodo, si può assumere che per $t < 0$ si siano esauriti i transitori e che rimanga un comportamento di tipo sinusoidale. Per tale ragione il circuito di riferimento è quello in figura (a).



Naturalmente si ha $\bar{E} = e_m = 1V$ e

$$\bar{Z} = \left(\frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} \right)^{-1} = \frac{1+j}{2} \Omega.$$

Dall'equazione di maglia si ha che

$$\bar{V}_Z = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} + 2R} \bar{E}.$$

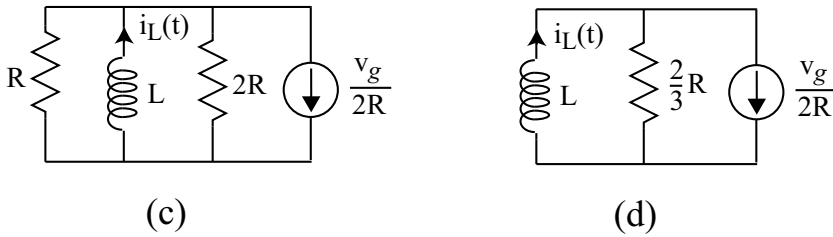
Segue che

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_Z}{j\omega L} = \frac{\bar{Z} j\omega L}{(\bar{Z} + 2R)} \bar{E} = \frac{2-3j}{13} A$$

ovvero che

$$i_L(0^-) = \frac{2}{13} A.$$

Siamo adesso in grado di analizzare il sistema per $t > 0$. Il circuito di riferimento è quello di figura (b). Dato che la corrente nell'induttore è una variabile di stato, non risente nell'immediato degli effetti della chiusura dell'interruttore; ciò significa che $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2/13 A$. Sostituendo al generatore di tensione il suo equivalente di Thevenin, si può considerare il circuito in figura (c); con un'ulteriore, semplice trasformazione circuitale si passa alla rete in figura (d).



Dalla KI al nodo N, segue che

$$i_R(t) = -\frac{v_g}{2R} - i_L(t).$$

Dalla KV alla maglia sinistra si ha invece l'equazione (valida ad ogni istante t)

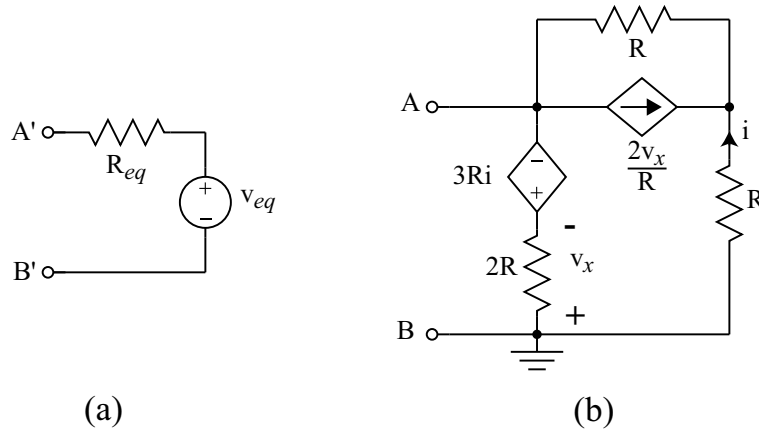
$$L \frac{di}{dt} + \frac{2}{3} R \left(i_L(t) \frac{v_g}{2R} \right) = 0,$$

cui si affianca la condizione iniziale $i_L(0^+) = 2/13 A$. L'unica soluzione di questo problema con valore iniziale è

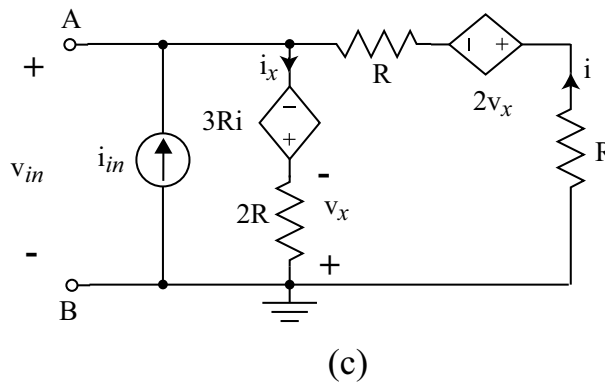
$$i_L(t) = i_L(0^+) e^{-2Rt/3L} - \frac{v_g}{2R} = \left(-\frac{5}{2} + \frac{2}{13} e^{-4t/3} \right) A.$$

Osservazione 5. Per la determinazione del valore di $i_L(t)$ a regime si può osservare che una volta esauritosi il transitorio la tensione ai capi dell'induttore è nulla e dunque equivale ad un circuito aperto. Ma allora la corrente nel resistore è nulla (bilancio delle tensioni lungo la maglia di sinistra) e dunque tutta la corrente erogata dal generatore attraversa l'induttore (KI al nodo N).

2. In figura (a) vi è la forma di thevenin del bipolo assegnato; si tratta di determinare V_{eq} e R_{eq} .



Anzitutto si osservi che il circuito assegnato (figura (b)) è privo di generatori indipendenti e quindi la tensione a vuoto alla porta AB è sicuramente nulla; per il bipolo equivalente si può pertanto porre $v_{eq} = 0V$. Rimane da valutare R_{eq} . Sostituendo al generatore controllato di corrente il suo equivalente di Thevenin si ottiene il circuito in figura (c); si noti che la trasformazione è legittima in quanto non coinvolge la grandezza di controllo.



Naturalmente $i_x = i_{in} + i$ e $v_x = -2Ri_x$. Applicando la KV alla maglia di destra si ottiene l'equazione

$$0 = Ri - +2v_x + Ri + -v_x - 3Ri = Ri - 4Ri_x + Ri + 2Ri_x - 3Ri =$$

$$= Ri - 4R(i_{in} + i) + Ri + 2R(i_{in} + i) - 3Ri$$

da cui si ottiene

$$i = -\frac{2}{3}i_{in}$$

e

$$i_x = i_{in} + i = \frac{i_{in}}{3}.$$

Segue che

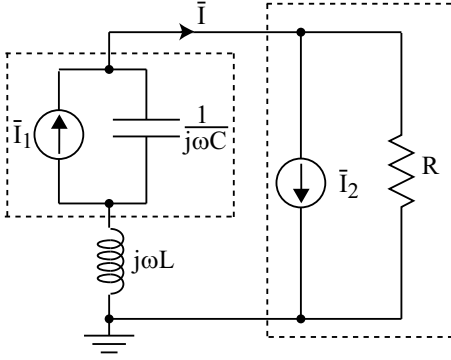
$$v_{in} = -v_x - 3Ri = 2Ri_x - 3Ri = \frac{8}{3}Ri_{in}$$

ovvero

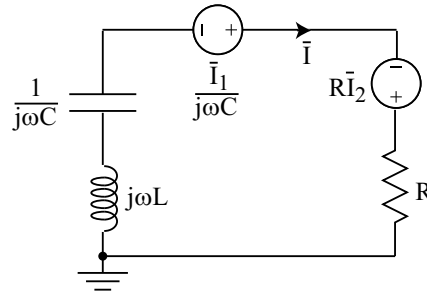
$$R_{in} \doteq \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{8}{3} R.$$

Ponendo $R_{eq} = R_{in} = 8R/3$ si ha la soluzione.

3. L'esercizio richiede di verificare che la somma delle potenze complesse assorbite dai componenti del circuito è nulla; si tratta quindi di risolvere il circuito, calcolare le potenze ed effettuare la somma. In figura (a) è rappresentata nel dominio dei fasori la rete originaria.



(a)



(b)

Naturalmente si ha $\bar{I}_1 = i_m e^{-j\pi/2} A = -ji_m = -jA$ e $\bar{I}_2 = i_m = 1A$. Per agevolare il nostro compito conviene inizialmente considerare la rete in figura (b), dove ai due generatori di corrente sono stati sostituiti i loro equivalenti di Thevenin. Applicando la KV alla maglia si ha

$$\frac{\bar{I}_1}{j\omega C} + R\bar{I}_2 = \bar{I} \left(\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L \right)$$

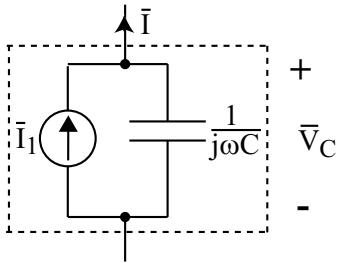
da cui si ottiene che

$$\bar{I} = \frac{\frac{\bar{I}_1}{j\omega C} + R\bar{I}_2}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \left(R - \frac{1}{\omega C}\right) i_m = \frac{2-j}{5} A.$$

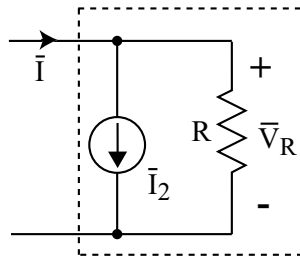
La potenza complessa assorbita dall'induttore è pertanto

$$P_{C,L} = j\omega L \frac{|\bar{I}|^2}{2} = \frac{j}{5} VAR.$$

Valutiamo cosa accade nei generatori presenti nel circuito originario.



(c)



(d)

Con riferimento alla figura (c) si ha

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}_1 - \bar{I}}{j\omega C} = \frac{-4+2j}{5} V$$

e dunque

$$P_{C,C} = -j\omega C \frac{|\bar{V}_C|^2}{2} = -j \frac{2}{5} VAR.$$

e, ricordando la convenzione degli utilizzatori,

$$P_{C,gc1} = -\frac{\bar{V}_C \bar{I}_1^*}{2} = \frac{1}{5}W + j \frac{2}{5}VAR.$$

Con riferimento alla figura (d) si ha

$$\bar{V}_R = R(\bar{I} - \bar{I}_2) = -\frac{6+2j}{5}V$$

e dunque

$$P_{C,R} = \frac{|\bar{V}_R|^2}{2R} = \frac{2}{5}W.$$

e, sempre ricordando la convenzione degli utilizzatori,

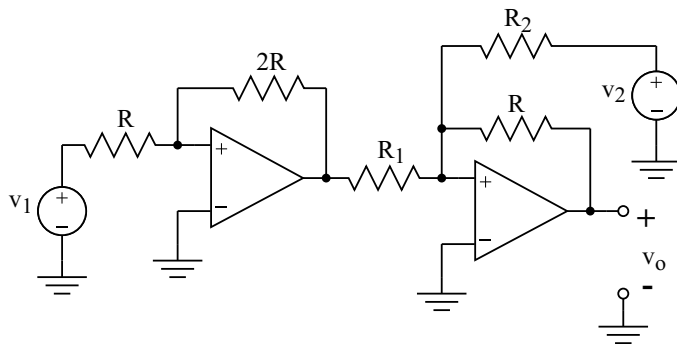
$$P_{C,gc2} = \frac{\bar{V}_R \bar{I}_2^*}{2} = -\frac{3}{5}W - \frac{j}{5}VAR.$$

Il bilancio energetico complessivo vale allora

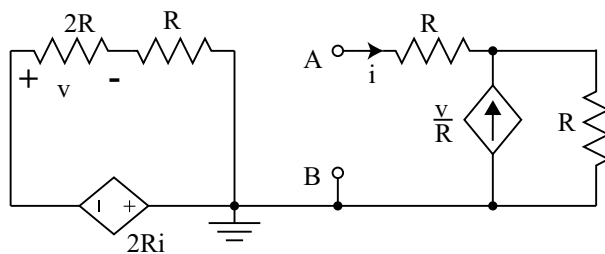
$$P_{C,L} + P_{C,C} + P_{C,gc2} + P_{C,R} + P_{C,gc1} = 0W + j0VAR.$$

Prova 11.

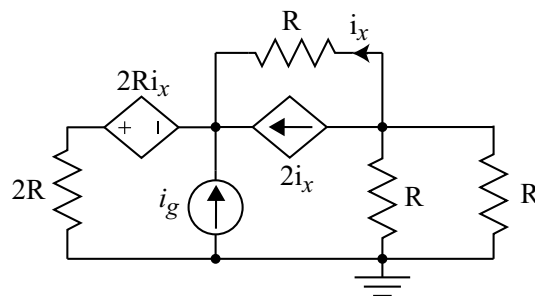
1. Determinare la tensione di uscita v_o .



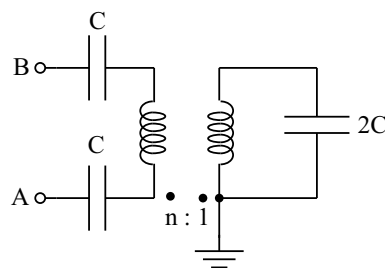
2. Calcolare la resistenza equivalente del bipolo $A - B$.



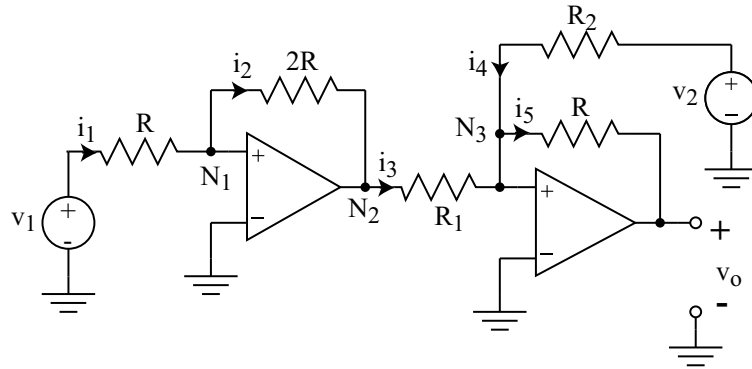
3. Scrivere il sistema risolvente su base nodi, scegliendo il nodo di terra come riferimento. Non effettuare trasformazioni circuitali.



4. Determinare la capacità equivalente del circuito A_B ($C = 1F$; $n = 2$).



Soluzioni della prova 11.



1. Per il *principio del corto circuito virtuale* il potenziale al nodo N_1 è nullo e quindi

$$i_1 = \frac{v_1}{R}.$$

L'impedenza di ingresso di un amplificatore operazionale ideale è infinita e quindi tutta la corrente i_1 finisce sul ramo N_1N_2 ; segue che

$$i_2 = i_1 = \frac{v_1}{R}$$

ovvero che

$$v_{N_2} = v_{N_1} - 2Ri_2 = -2v_1.$$

Osservazione 6. Dato che la corrente di uscita di un amplificatore operazionale ideale può assumere qualsiasi valore (impedenza di uscita nulla), il primo stadio del circuito appare al secondo come se fosse un generatore indipendente di tensione di valore $-2v_1$.

Anche il nodo N_3 è a potenziale nullo (sempre per il principio del corto circuito virtuale). Segue che

$$i_3 = \frac{v_{N_2}}{R_1} = -2 \frac{v_1}{R_1}$$

e

$$i_4 = \frac{v_2}{R_2}.$$

Si ha inoltre

$$i_5 = i_3 + i_4 = \frac{v_2}{R_2} - 2 \frac{v_1}{R_1}$$

e dunque

$$v_0 = -Ri_5 = -\frac{R}{R_2} v_2 + 2 \frac{R}{R_1} v_1.$$

2. Il teorema di Thevenin afferma che la resistenza equivalente del bipolo proposto corrisponde alla sua resistenza di ingresso; in figura (a) è rappresentato il circuito che permette di calcolarla. Dato che il generatore controllato di corrente non contiene la grandezza elettrica che lo controlla, si può ad esso sostituire il suo equivalente di Thevenin (figura (b)). Ovviamente $i = i_{in}$; applicando la KV alla maglia di si ottiene l'equazione

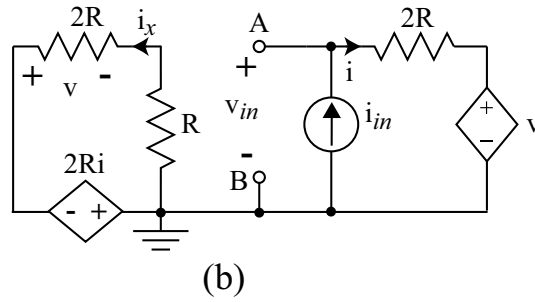
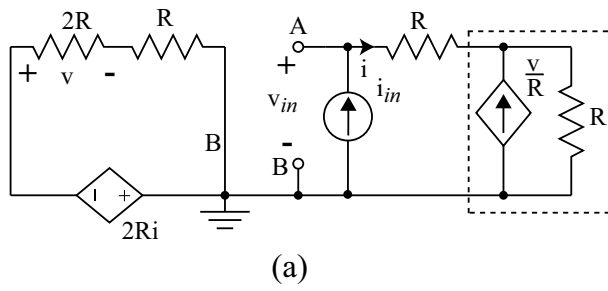
$$2Ri = 2Ri_x + Ri_x$$

da cui segue che

$$v = -2Ri_x = -\frac{4}{3}Ri = -\frac{4}{3}Ri_{in}.$$

Siamo ora in grado di analizzare la maglia di destra:

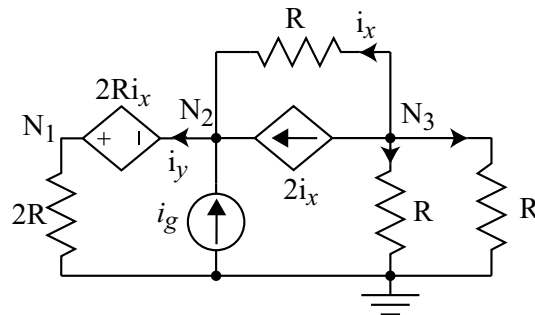
$$v_{in} = v + 2Ri_{in} = 2Ri_{in} - \frac{4}{3}Ri_{in} = \frac{2}{3}Ri_{in}.$$



Segue che

$$R_{in} \doteq \frac{v_{in}}{i_{in}} = 2R/3.$$

3. Con riferimento alla figura (a) siano v_1 , v_2 e v_3 i potenziali relativi ai nodi N_1 , N_2 e N_3 . Queste grandezze, insieme con le correnti i_x ed i_y , costituiscono le incognite del problema.



Ovviamente l'eccitazione indipendente i_g costituisce l'unico termine noto non nullo. Scriviamo le KI relative ai nodi N_1 , N_2 , N_3 .

$$\begin{cases} i_y = \frac{v_1}{2R} \\ i_y = 2i_x + i_x + i_g \\ \frac{v_3}{R} + \frac{v_3}{R} = 2i_x + i_x. \end{cases}$$

Ad esse si aggiungono i vincoli

$$\begin{cases} i_x = \frac{v_3 - v_2}{R} \\ v_1 - v_2 = 2Ri_x. \end{cases}$$

Il sistema complessivo diviene pertanto

$$\begin{cases} v_1 - 2Ri_y = 0 \\ 3i_x - i_y = -i_g \\ 2v_3 - 3Ri_x = 0 \\ v_2 - v_3 + Ri_x = 0 \\ v_1 - v_2 - 2Ri_x = 0. \end{cases}$$

In forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2R \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3R & 0 \\ 0 & 1 & -1 & R & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

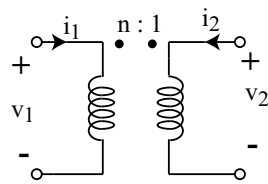
4. Le relazioni costitutive del trasformatore ideale (figura (a)) sono

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_2 = -ni_1. \end{cases}$$

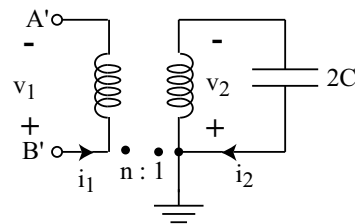
Si consideri il bipolo in figura (b). Facendo attenzione alle convenzioni sui segni, per ogni istante t è possibile scrivere

$$i_1(t) = -\frac{i_2(t)}{n} = -\frac{1}{n} \left[-2C \frac{dv_2}{dt}(t) \right] = \frac{2}{n} C \left[\frac{1}{n} \frac{dv_1}{dt}(t) \right] = \frac{2}{n^2} C \frac{dv_1}{dt}(t)$$

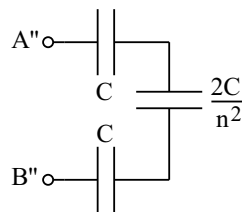
e quindi il bipolo $A' - B'$ appare come un condensatore di capacità $2C/n^2 = 0.5F$.



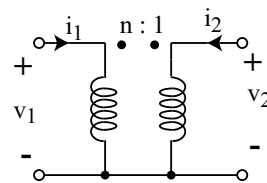
(a)



(b)



(c)



(d)

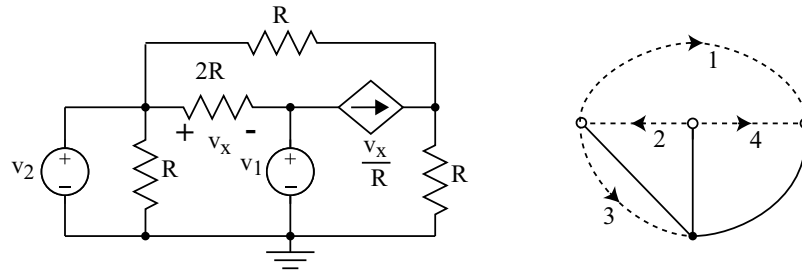
La rete originaria è pertanto equivalente a quella rappresentata in figura (c), ossia una serie di tre condensatori. La capacità complessiva del sistema risulta essere

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{n^2}{2C} \right)^{-1} = \frac{2C}{4 + n^2} = 0.25F.$$

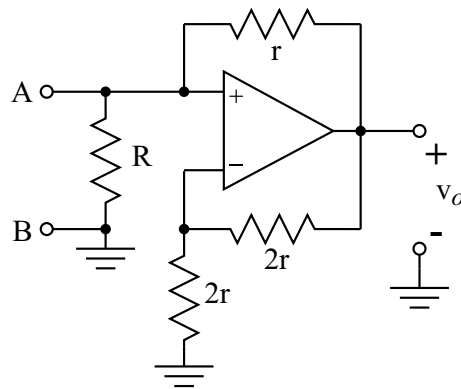
Osservazione 7. Si noti che nel bipolo in figura (c) non sono specificati riferimenti che permettano di valutare il potenziale assoluto dei morsetti A'' e B'' ; ciò accade in quanto il trasformatore ideale trasferisce (opportunamente scalate) le differenze di potenziale e non i potenziali assoluti. Quando si ha l'esigenza di trasferire da un avvolgimento all'altro anche i potenziali ci si può affidare alla rete due-porte in figura (d).

Prova 12.

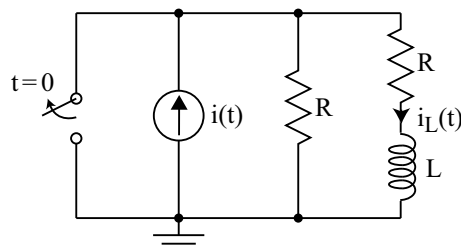
1. Scrivere il sistema risolvete su base maglie fondamentali in relazione e alle direzioni delle corde in figura. Non effettuare trasformazioni circuitali.



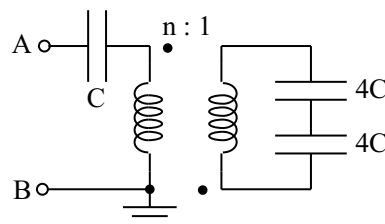
2. Stabilire se esistono valori di R per cui il bipolo $A - B$ equivale ad un circuito aperto. ($r = 1\Omega$).



3. Determinare il valore dello stato a $t = 0^-$ per cui risulta nullo il transitorio della risposta $i_L(t)$. ($R = 2\Omega$; $L = 1H$; $i(t) = i_m \cos \omega t$ con $i_m = 1A$ e $\omega = 2rad/sec$).

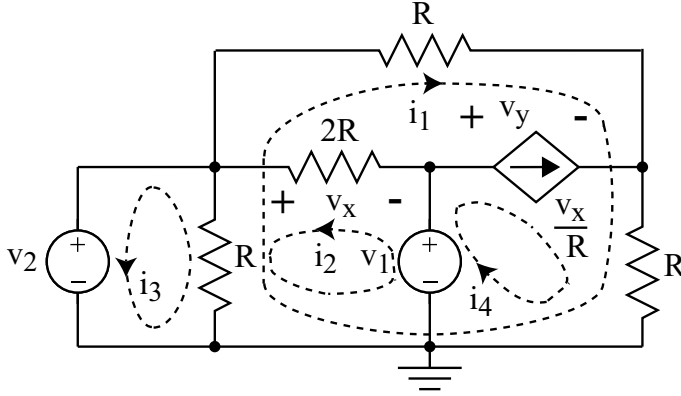


4. Determinare la capacità equivalente del circuito $A - B$ ($C = 0.5F$; $n = 2$).



Soluzioni della prova 12.

1. Le incognite del problema sono le correnti di maglia i_1, i_2, i_3, i_4 e le tensioni v_x e v_y ; le tensioni v_1 e v_2 costituiscono invece i termini noti del problema.



Scriviamo le quattro equazioni di maglia:

$$\begin{cases} R(i_1 + i_4) + Ri_1 + R(i_1 - i_2 + i_3) = 0 \\ R(i_2 - i_1 - i_3) + v_x = v_1 \\ v_2 = -R(i_1 - i_2 + i_3) \\ v_1 = R(i_1 + i_4) + v_y. \end{cases}$$

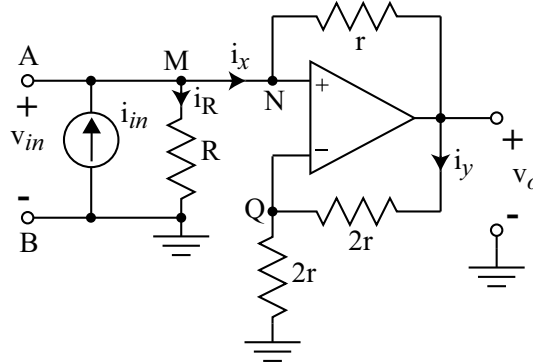
Ad esse si aggiungono il vincolo $i_4 = v_x/R$ imposto dal generatore controllato di corrente ed il vincolo sulla grandezza di controllo $v_x = -2Ri_2$. Il sistema complessivo è pertanto

$$\begin{cases} 3Ri_1 - Ri_2 + Ri_3 + Ri_4 = 0 \\ -Ri_1 + Ri_2 - Ri_3 + v_x = v_1 \\ -Ri_1 + Ri_2 - Ri_3 = v_2 \\ Ri_1 + Ri_4 + v_y = v_1 \\ i_4 - \frac{v_x}{R} = 0 \\ 2Ri_2 + v_x = 0. \end{cases}$$

In forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & R & R & 0 & 0 \\ -R & R & -R & 0 & 1 & 0 \\ -R & R & -R & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 2R & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Prende il nome di circuito aperto un bipolo in grado di impedire il passaggio di corrente e di sostenere qualsiasi tensione a suoi capi. Per risolvere l'esercizio occorre verificare se esiste un valore di R tale per cui sono soddisfatte queste condizioni. In pratica si tratta di verificare se per qualche valore di R la resistenza di ingresso R_{in} del bipolo diviene infinita. Valutiamo R_{in} in funzione di R .



La KI al nodo M assicura che $i_x = i_{in} - i_R$; la KI al nodo N garantisce invece che la corrente sul resistore di resistenza r è proprio i_x ; la KI al nodo Q assicura che i_y è proprio la corrente che scorre verso terra attraverso il resistore di resistenza $2r$. Il corto circuito virtuale, infine, permette di scrivere l'equazione $Ri_R = 2ri_y$ da cui si ottiene che

$$i_y = \frac{R}{2r} i_R.$$

Dato che i nodi N e Q sono al medesimo potenziale deve anche risultare $v_N - ri_x = v_0 = v_Q + 2ri_y$ ovvero, effettuate le dovute sostituzioni, $-r(i_{in} - i_R) = Ri_R$ da cui si ottiene che

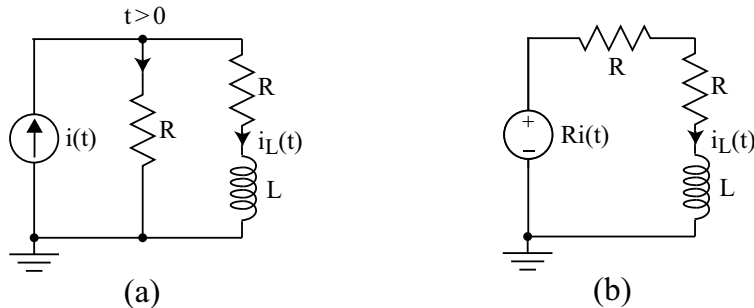
$$i_R = \frac{r}{r - R} i_{in}$$

e

$$R_{in} \doteq \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{Ri_R}{i_{in}} = \frac{rR}{r - R} = \frac{r}{r/R - 1}.$$

La resistenza di ingresso R_{in} diviene infinita se e solo se $r/R - 1 = 0$ e cioè se e solo se $R = r = 1\Omega$.

3. Cominciamo con il calcolare la risposta completa $i_L(t)$ per $t > 0$ in funzione della generica condizione iniziale $i_L(0^+)$. $i_L(0^+)$ sarà la nostra incognita e dovrà esser scelta in modo tale che il transitorio di $i_L(t)$ sia nullo. il circuito da analizzare è rappresentato in figura (a); ai fini del calcolo di $i_L(t)$ si può comunque fare riferimento alla rete in figura (b), ottenuta sostituendo al generatore di corrente il suo equivalente di Thevenin.



L'equazione di maglia al generico istante t assume forma

$$2Ri_L(t) + \frac{di_L}{dt}(t) = Ri(t).$$

La corrispondente soluzione è

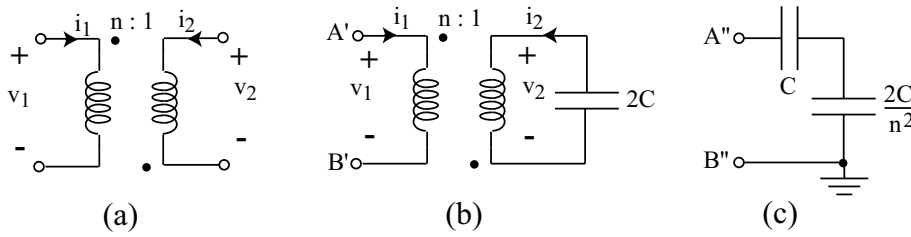
$$i_L(t) = \left(i_L(0^+) - \frac{2R^2}{4R^2 + \omega^2 L^2} i_m \right) e^{-2Rt/L} + \frac{R}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}} i_m \cos \left(\omega t - \arctan \frac{\omega L}{2R} \right).$$

Appare adesso chiaro che il transitorio è nullo se e solo se

$$i_L(0^+) = \frac{2R^2}{4R^2 + \omega^2 L^2} i_m = \frac{2}{5} A.$$

Osservando che quando si chiude l'interruttore la corrente attraverso l'induttore non cambia, si conclude che deve essere $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2/5 A$.

4. Si osservi per cominciare che alla serie di condensatori si può sostituire un unico condensatore di capacità dimezzata.



Le relazioni costitutive del trasformatore ideale in figura (a) sono

$$\begin{cases} v_1 = -n v_2 \\ i_2 = n i_1. \end{cases}$$

Segue che ad ogni istante t il bipolo in figura (b) deve verificare la catena di uguaglianze

$$i_1(t) = \frac{i_2(t)}{n} = \frac{1}{n} \left[-2C \frac{dv_2}{dt}(t) \right] = -\frac{2}{n} C \left[-\frac{1}{n} \frac{dv_1}{dt}(t) \right] = \frac{2}{n^2} C \frac{dv_1}{dt}(t)$$

e quindi il bipolo $A' - B'$ appare come un condensatore di capacità $2C/n^2 = 0.25F$. La rete originaria è pertanto equivalente a quella rappresentata in figura (c), ossia una serie di due condensatori. La capacità complessiva del sistema risulta essere

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C} + \frac{n^2}{2C} \right)^{-1} = \frac{2C}{2 + n^2} = \frac{1}{6} F.$$