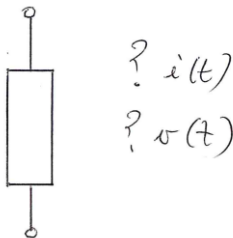


- **Reti elettriche interconnessione di bipoli**

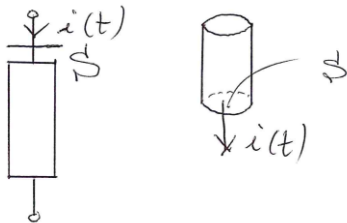
- Consideriamo inizialmente circuiti e reti elettriche ottenute interconnettendo BIPOLI, cioè elementi elettrici a due morsetti (poli o terminali). P. es., R, L, C

- piu' avanti, tripoli, quadripoli, n -poli. P. es., transistor, amplificatore operazionale



Grandezze elettriche su un bipolo

- Interessano la tensione ai morsetti, la corrente che fluisce nel bipolo, la potenza elettrica e energia elettrica assorbita dal bipolo
- definizione di corrente elettrica
- scegliamo un **verso di riferimento** per la corrente indicandolo con una freccia. Consideriamo una sezione S su uno dei conduttori riportando la freccia.



- L'intensità di corrente all'istante t è data da

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}$$

dove $\Delta q(t)$ è la carica che attraversa S in Δt concordemente con il verso indicato

- $i(t)$ è una **grandezza scalare e algebrica (con segno)**
- se la corrente è dovuta p. es. al moto di cariche positive (ioni) e il segno di $i(t)$ è positivo

$$i(t = 1 \text{ sec}) = +3 \text{ Ampere}$$

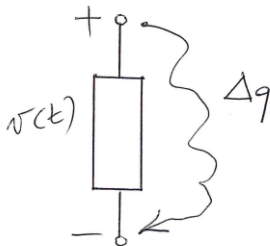
allora il verso del moto delle cariche (**verso vero della corrente**) è concorde con la freccia. Se il segno è negativo

$$i(t = 2) = -4$$

allora il moto delle cariche è discorde con la freccia

- Il verso di riferimento di $i(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $i(t)$ e segno di $i(t)$ permettono di determinare verso effettivo di moto delle cariche (verso vero della corrente)

- definizione di tensione (differenza di potenziale)
- scegliamo un **verso di riferimento** per la tensione indicando con $+$ uno dei morsetti e con $-$ l'altro. Scegliamo un percorso che collega $+$ a $-$ e lo orientiamo da $+$ verso $-$. Sia Δq una carica elettrica infinitesima che si muove lungo il percorso orientato



- La tensione all'istante t e' data da

$$v(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

dove ΔL e' il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo il percorso orientato

- $v(t)$ e' una **grandezza scalare e algebrica (con segno)**
- se il segno di $v(t)$ e' positivo

$$v(t = 1 \text{ sec}) = +4 \text{ Volt}$$

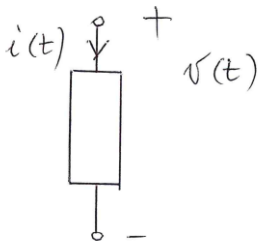
allora il morsetto segnato con $+$ si trova a potenziale piu' alto rispetto a quello segnato con $-$. Accade il contrario se il segno di $v(t)$ e' negativo

$$v(t = 2) = -5$$

- Il verso di riferimento di $v(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $v(t)$ e segno di $v(t)$ permettono di determinare quale dei due morsetti si trova a potenziale piu' alto all'istante t (verso vero della tensione)

Versi coordinati per tensione e corrente

- **convenzione degli utilizzatori:** fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $+$ ed esce dal morsetto $-$



- potenza elettrica assorbita dal bipolo a t

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

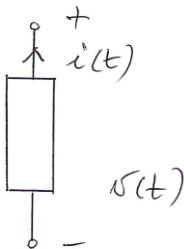
- energia elettrica assorbita dal bipolo in dt

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- energia elettrica assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} dw(t) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- **convenzione dei generatori:** fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $-$ ed esce dal morsetto $+$



- potenza elettrica erogata dal bipolo a t

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

- energia elettrica erogata dal bipolo in dt

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- energia elettrica erogata dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- **Relazione costitutiva di un bipolo.** Un legame che il bipolo stabilisce fra tensione e corrente
- e' la legge che caratterizza completamente il comportamento elettrico del bipolo all'interno di un circuito
- per parlare di relazione costitutiva bisogna prima stabilire un riferimento elettrico per il bipolo, scegliendo un verso di riferimento per corrente e tensione, e poi scegliere la convenzione degli utilizzatori o generatori
- ad esempio, un resistore ha come relazione costitutiva $v(t) = Ri(t)$ (Legge di Ohm) se usiamo la convenzione degli utilizzatori, mentre si ha $v(t) = -Ri(t)$ se si usa la convenzione dei generatori

Bipoli passivi o attivi

- Usiamo la convenzione degli utilizzatori. Un bipolo si dice passivo se

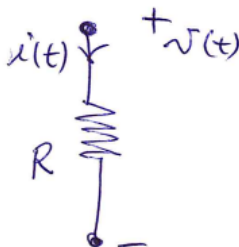
$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' \geq 0$$

per ogni t e per ogni possibile esperimento che facciamo con il bipolo. Con $-\infty$ si indica l'istante in cui viene fabbricato il bipolo

- Intuitivamente, l'energia complessivamente erogata dal bipolo al circuito a cui e' collegato non puo' mai superare quella precedentemente assorbita
- attenzione, per un condensatore C ci sono in generale intervalli di tempo in cui l'energia e' assorbita (C si carica), ed altri in cui l'energia e' invece erogata (C si scarica dando indietro energia al circuito)

- se non vale la relazione precedente, allora il bipolo si dice attivo
- un bipolo attivo ha al suo interno una **sorgente di energia** (pila, alimentatore)

Resistore ideale



- Convenzione utilizzatori. Relazione costitutiva (legge di Ohm)

$$v(t) = Ri(t)$$

con R resistenza in Ohm. Oppure

$$i(t) = Gv(t)$$

con G conduttanza in Ohm^{-1}

- Potenza elettrica assorbita

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = Gv^2(t) \text{ Watt}$$

- Energia elettrica assorbita in dt

$$dw(t) = v(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt \text{ Joule}$$

- Passivita'

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t p(t')dt' = \int_{-\infty}^t v(t')i(t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^t Ri^2(t')dt' = \int_{-\infty}^t Gv^2(t')dt' \geq 0 \end{aligned}$$

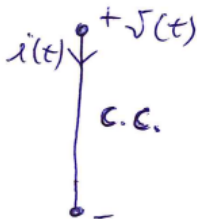
- un resistore ideale e' passivo se e solo se $R \geq 0$ o $G \geq 0$

- un resistore ideale e' un elemento adinamico (senza memoria).
C'e' un legame istantaneo fra $v(t)$ e $i(t)$

- Casi particolari. Corto circuito (c.c.): $R = 0$ Ohm. Relazione costitutiva

$$v(t) = 0$$

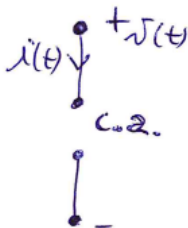
qualunque sia $i(t)$



- Circuito aperto (c.a.): $G = 0$ Ohm. Relazione costitutiva

$$i(t) = 0$$

qualunque sia $v(t)$



- Interruttore ideale. E' un c.c. negli intervalli di tempo in cui e' chiuso e un c.a. in quelli in cui e' aperto
- c.c., c.a., e interruttore ideale sono elementi **inerti**. Si ha $p(t) = 0$ per ogni t e quindi non partecipano agli scambi energetici

Energetica di un resistore passivo

- Sia $R > 0$. L'energia elettrica assorbita da R in dt coincide con l'energia dissipata su R sotto forma di calore per effetto Joule. Si ha

$$dw = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt = dQ \geq 0$$

dove dQ e' il calore sviluppato

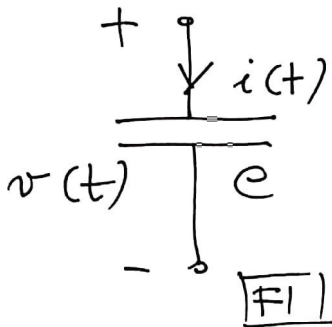
- un resistore passivo e' un puro dissipatore
- trasforma tutta l'energia elettrica assorbita dw istantaneamente e integralmente in calore dQ (o in altre forme di energia non elettrica)
- tale trasformazione e' irreversibile (R non e' capace di effettuare la trasformazione inversa)
- dQ e' energia che esce definitivamente dal circuito.

Condensatore Ideale

- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

$$q(t) = Cv(t)$$

con $q(t)$ carica sulle armature all'istante t e C capacita' in Farad del condensatore



relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

con $v(0)$ tensione iniziale su C

- $v(t)$ (oppure $q(t)$) e' detta *variabile di stato* di C ; $v(0)$ (oppure $q(0)$) e' lo stato iniziale
- C e' un *elemento con memoria*: per conoscere $v(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $v(0)$ e anche tutto l'andamento di $i(t)$ fra 0 e t

Energetica del condensatore ideale

- La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

dove

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo elettrico di C. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo elettrico di C

- in termini differenziali

$$dw(t) = p(t)dt = dE_C(t) = d\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

- **l'energia elettrica dw assorbita da C in dt coincide con la variazione di energia del campo elettrico di C in dt**

- ne consegue che
 - il condensatore ideale e' un elemento **conservativo** (accumulatore perfetto)
 - immagazzina sotto forma di energia del campo elettrico tutta l'energia elettrica assorbita
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo elettrico e' completamente **reversibile**, cioe' C e' capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo elettrico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di C); in particolare C e' capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita
 - C **non dissipa**; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

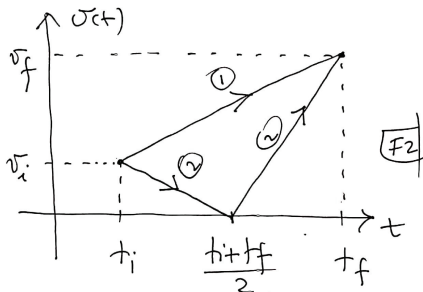
- in termini matematici

$$dw = dE_C = d\left(\frac{1}{2}Cv^2\right)$$

significa che dw e' un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato v)

- analogo al lavoro compiuto dal campo elettrostatico (campo conservativo) in fisica

- **Esempio.** Calcolare l'energia elettrica assorbita da C nell'intervallo $[t_i, t_f]$ per i due diversi andamenti di $v(t)$ in figura



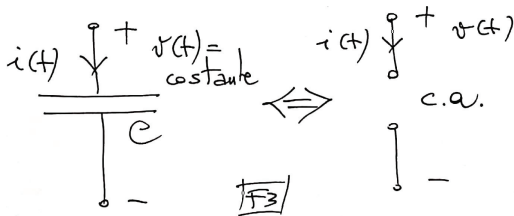
- si ha

$$\begin{aligned}
 w_{[t_i, t_f]} &= \int_{t_i}^{t_f} p(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} v(t) i(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dw \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dE_C = E_C(t_f) - E_C(t_i) = \frac{1}{2} C v_f^2 - \frac{1}{2} C v_i^2 \text{ joule}
 \end{aligned}$$

- l'energia elettrica assorbita dipende solo da stato iniziale v_i e finale v_f ma non dall'andamento di $v(t)$ fra t_i e t_f

- **C in regime stazionario**

- Se $v(t) = \text{costante}$, $i(t) = 0$, quindi in regime stazionario C equivale a un circuito aperto (stessa relazione costitutiva)

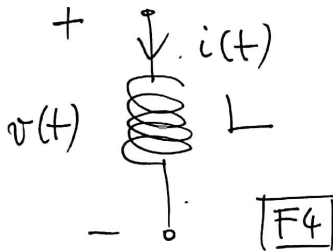


Induttore Ideale

- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

$$\varphi(t) = Li(t)$$

con $\varphi(t)$ flusso del campo di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento all'istante t e L induttanza in Henry dell'induttore



- Relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

con $i(0)$ corrente iniziale in L

- $i(t)$ (oppure $\varphi(t)$) e' detta *variabile di stato di L*; $i(0)$ (oppure $\varphi(0)$) e' lo stato iniziale
- L e' un *elemento con memoria*: per conoscere $i(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $i(0)$ e anche tutto l'andamento di $v(t)$ fra 0 e t

Energetica dell'induttore ideale

- La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)L\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) = \frac{d}{dt}E_L(t)$$

dove

$$E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo magnetico di L. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt}E_L(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo magnetico di L

- in termini differenziali

$$dw(t) = p(t)dt = dE_L(t) = d\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) \geq 0 \quad oppure \quad \leq 0$$

- **l'energia elettrica dw assorbita da L in dt coincide con la variazione di energia del campo magnetico di L in dt**

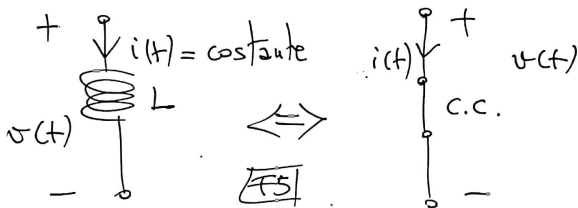
- ne consegue che
 - l'induttore ideale e' un elemento conservativo (accumulatore perfetto)
 - immagazzina sotto forma di energia del campo magnetico tutta l'energia elettrica assorbita
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo magnetico e' completamente **reversibile**, cioe' L e' capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo magnetico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di L); in particolare L e' capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita
 - L **non dissipa**; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

- in termini matematici

$$dw = dE_L = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

significa che dw e' un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato i)

- Se $i(t) = \text{costante}$, $vi(t) = 0$, quindi in regime stazionario L equivale a un corto circuito (stessa relazione costitutiva)

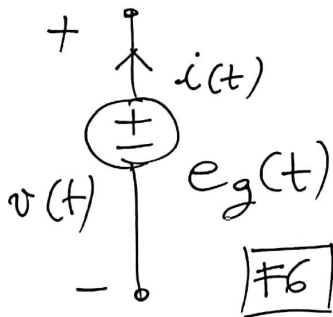


Generatore Indipendente Ideale di Tensione

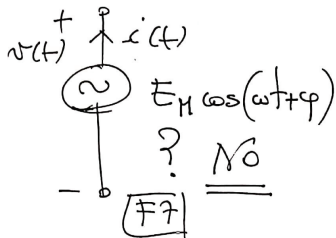
- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$v(t) = e_g(t)$$

cioe' la tensione impressa ai morsetti e' una assegnata (nota) funzione del tempo $e_g(t)$

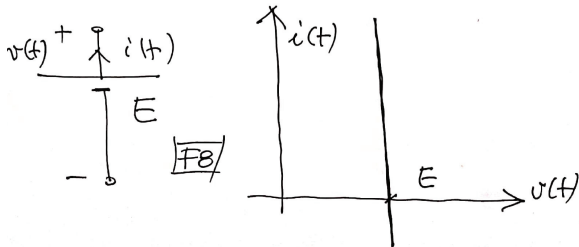


- p. es. $e_g(t) = E = \text{costante}$ (batteria)
- $e_g(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di tensione sinusoidale; alternatore); anche nel caso dell'alternatore dobbiamo indicare uno dei due morsetti del generatore con il $+$ e l'altro con il $-$ (altrimenti siamo in una situazione ambigua); la rappresentazione nella figura che segue e' ambigua e non va usata



- per un generatore indipendente ideale di tensione e' nota a priori la tensione $v(t)$ impressa ai morsetti mentre non e' nota la corrente $i(t)$ erogata; la corrente $i(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la corrente solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

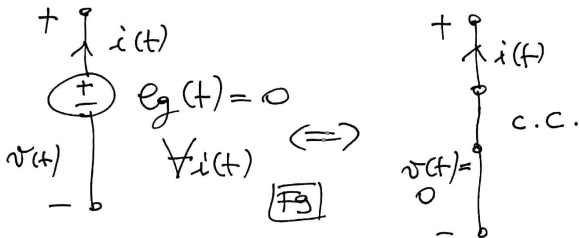
- **Esempio.** Caratteristica tensione corrente di una batteria
 $v(t) = E$.



- **Disattivare** un generatore ind.te ideale di tensione significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$v(t) = e_g(t) = 0, \quad \forall i(t)$$

- in tale situazione il generatore **equivale a un corto circuito**.

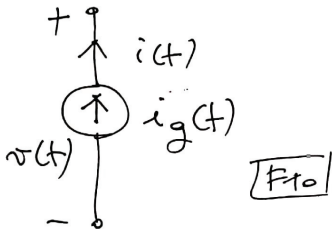


Generatore indipendente ideale di corrente

- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$i(t) = i_g(t)$$

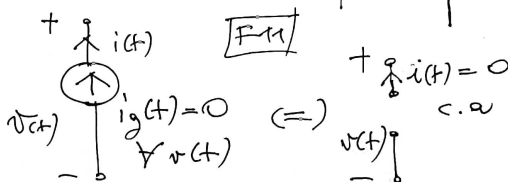
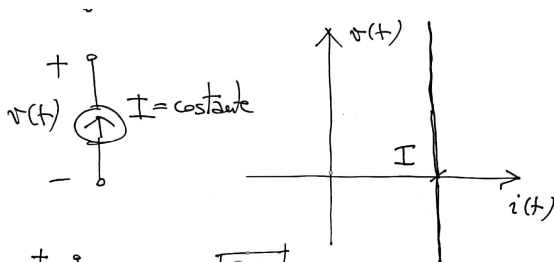
cioè la corrente impressa ai morsetti è una assegnata (nota) funzione del tempo $i_g(t)$



- p. es. $i_g(t) = I = \text{costante}$
- $i_g(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di corrente sinusoidale)

- per un generatore indipendente ideale di corrente e' nota a priori la tensione $i(t)$ impressa ai morsetti mentre non e' nota la tensione $v(t)$ ai morsetti; la tensione $v(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la tensione solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

- Esempio.** Caratteristica tensione corrente di un generatore di corrente costante $i(t) = I$.



- **Disattivare** un generatore ind.te ideale di corrente significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$i(t) = i_g(t) = 0, \quad \forall v(t)$$

- in tale situazione il generatore **equivale a un circuito aperto.**

Energetica di un generatore indipendente ideale di tensione

- Un generatore indipendente e' l'interfaccia per eccellenza fra circuito e mondo esterno. Scambia energia elettrica in modo illimitato e completamente reversibile operando la conversione fra energia elettrica e altre forme di energia non elettriche (ad es. energia chimica)
- per una batteria di un automobile (sistema elettrochimico) si ha (convenzione dei generatori)

$$dw = dE_{\text{chimica}}$$

cioe' energia elettrica scambiata con circuito (dw) coincide con energia scambiata in modo reversibile con un sistema chimico (dE_{chimica})

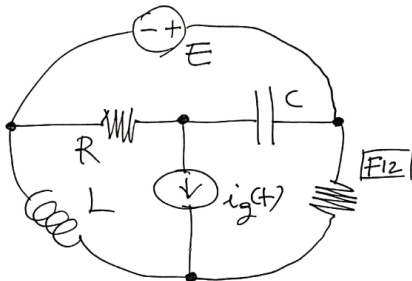
- il segno può essere positivo o negativo. Le batterie idealmente possono erogare o assorbire energia elettrica
- ad esempio, se si genera energia di legame chimico $dE_{\text{chimica}} > 0$, allora una pari quantità di energia elettrica viene data al circuito ($dw = dE_{\text{chimica}} > 0$). Se la batteria assorbe energia elettrica, viene accumulata nella batteria una pari quantità di energia sotto forma di legami chimici ($dw = dE_{\text{chimica}} < 0$)
- durante tali processi di carica e scarica non vi è dissipazione.

Leggi di Kirchhoff

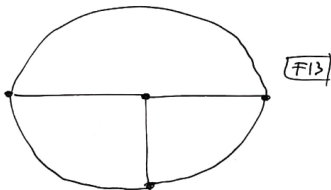
- Per scrivere le leggi di Kirchhoff di un circuito devo preliminarmente stabilire un riferimento elettrico sul circuito. Cio' si effettua assegnando un verso di riferimento (ad arbitrio) per ciascuna tensione e corrente degli elementi del circuito.

- **Grafo e Grafo Orientato Associato a un Circuito**

- Consideriamo un circuito con 6 bipoli come in figura. Supponiamo che il circuito sia connesso

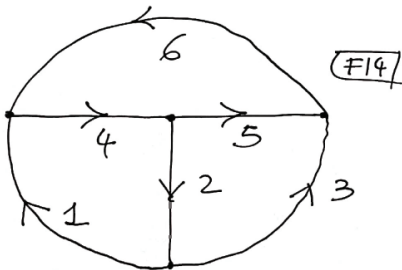


- **Grafo.** A ciascun bipolo facciamo corrispondere astrattamente un **lato** del grafo. Sia in generale ℓ il numero di lati del grafo (numero di bipoli). In questo caso $\ell = 6$

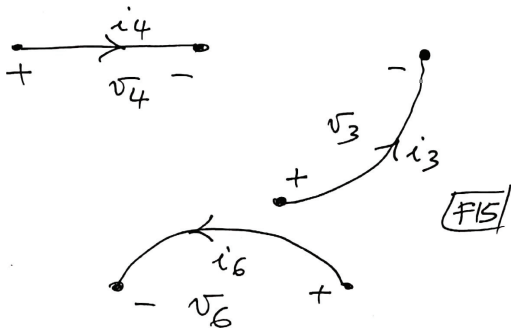


- **Nodo:** e' un punto del grafo dove sono connessi due o piu' bipoli. Sia n il numero di nodi (in questo caso $n = 4$)

- **Grafo Orientato:** scelgo una numerazione per i lati del grafo e assegno ad arbitrio un verso di riferimento per la corrente di ciascun lato indicando tale verso con una freccia



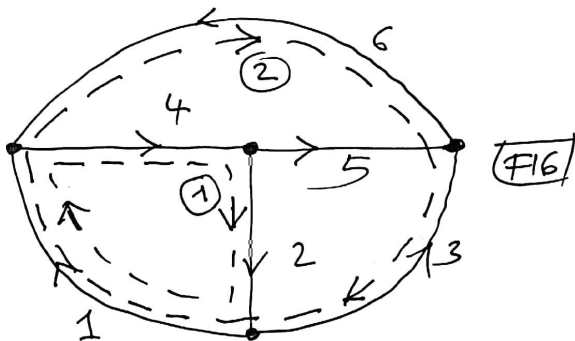
- supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ciascun bipolo; ne consegue che, fissato il verso di riferimento della corrente, resta automaticamente fissato il verso di riferimento della tensione di ciascun bipolo



- il grafo orientato tiene conto di quanti bipoli ci sono e come sono interconnessi fra di loro (topologia del circuito); astrae però dal tipo di elementi presenti

Leggi Kirchhoff

- Una volta fissato un grafo orientato, siamo in grado di scrivere le leggi di Kirchhoff per il circuito
- Scegliamo una **maglia** sul grafo, cioè' un percorso chiuso formato da lati del grafo. **Orientiamo** la maglia in senso orario o antiorario.



- **Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV).** E' nulla, istante per istante, la **somma algebrica** delle tensioni dei lati che si incontrano percorrendo la maglia (algebrica significa che la tensione ha un segno); ogni tensione si prende col segno $+$ se concorde con il verso di percorrenza della maglia, col segno $-$ altrimenti
- Per la maglia 1 si ha

$$v_2 + v_1 + v_4 = 0$$

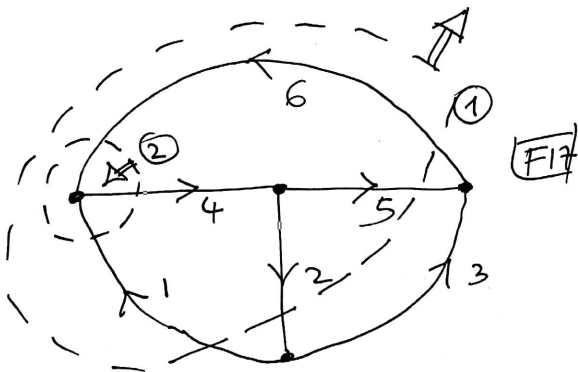
mentre per la maglia 2 si ha

$$-v_6 - v_3 + v_1 = 0$$

- ogni KV implica un vincolo di dipendenza fra le tensioni dei lati della maglia; quindi $v_1(t), \dots, v_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro

- problema: quante KV indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante tensioni indipendenti ci sono per un grafo orientato?
- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KV indipendenti sono in generale pari a $\ell - n + 1$, quindi le tensioni indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (\ell - n + 1) = n - 1$

- **Superficie Gaussiana:** linea chiusa che taglia i lati del grafo senza passare dai nodi.
- Scegliamo una linea Gaussiana e **orientiamo** la linea scegliendo una normale positiva rivolta verso l'esterno o verso l'interno



- **Legge di Kirchhoff per le correnti (KI).** E' nulla, istante per istante, la **somma algebrica** delle correnti dei lati che intersecano la linea Gaussiana (algebrica significa che la corrente ha un segno); ogni corrente si prende col segno + se concorde con la normale alla linea Gaussiana, col segno - altrimenti
- Per la linea 1 si ha

$$i_5 - i_6 - i_1 + i_2 = 0$$

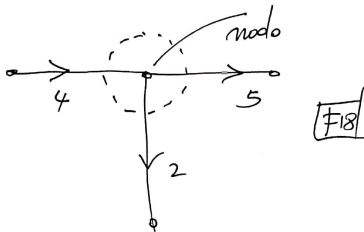
mentre per la linea 2 si ha

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

- ogni KI implica un vincolo di dipendenza fra le correnti dei lati intersecati da una linea Gaussiana; quindi $i_1(t), \dots, i_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro

- problema: quante KI indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante correnti indipendenti ci sono per un grafo orientato?
- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KI indipendenti sono in generale pari a $n - 1$, quindi le correnti indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (n - 1) = \ell - n + 1$

- **Seconda Versione della KI (Fisica II):** E' nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono in un nodo. Ogni corrente si prende col segno + se esce dal nodo, col segno - altrimenti



- si ha

$$-i_4 + i_2 + i_5 = 0$$

- e' facile mostrare che le due formulazioni sono equivalenti fra di loro.