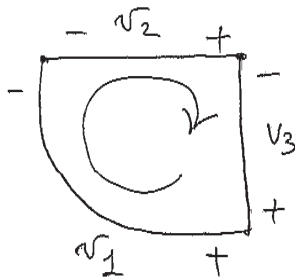
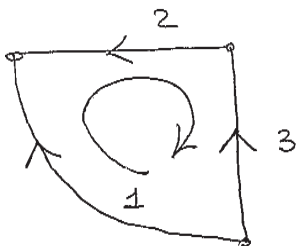
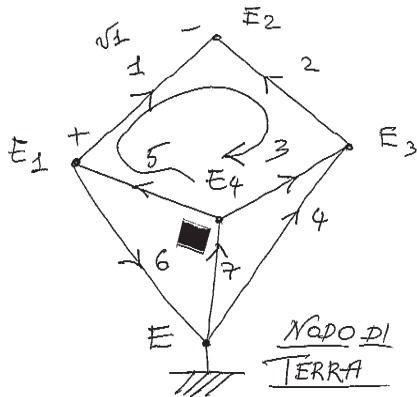


- **Note su legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)**
- Per scrivere la KV a una maglia possiamo usare la regola nota (figura a sinistra); oppure possiamo sommare algebricamente le cadute di tensione che si incontrano percorrendo una maglia (figura di destra); nel secondo caso attribuiamo segno + alla tensione di del bipolo k -esimo se incontro prima il + della tensione v_k ; segno - altrimenti; in ogni caso otteniamo

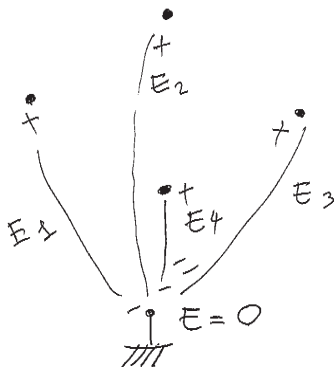
$$KV : v_1 - v_2 - v_3 = 0$$



- Consideriamo un grafo orientato e utilizziamo per ciascun lato la convenzione degli utilizzatori. Lungo la maglia $\{1, 2, 3, 5\}$ si ha da KV che per ogni t risulta $v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) + v_5(t) = 0$. Ricordiamo che $v_1(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \Delta L_1 / \Delta q$, dove ΔL_1 e' il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo un percorso che collega il $+$ al $-$ del bipolo 1. Analogamente per gli altri bipoli



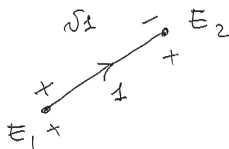
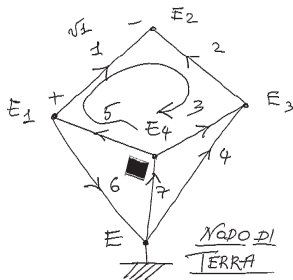
- da KV segue che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico lungo una maglia del grafo e' nullo. Abbiamo a che fare quindi con un campo elettrico conservativo
- ne consegue che il lavoro e' indipendente dal percorso lungo il grafo che facciamo passando da un nodo ad un altro
- ha senso percio' parlare di *tensione fra due nodi* e anche di *tensione (potenziale) di un nodo rispetto ad un nodo di terra a cui si attribuisce potenziale 0*



- ad esempio, E_1 (potenziale del nodo 1 rispetto a terra) e' dato da

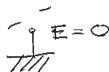
$$E_1 = v_6 = -v_5 - v_7 = v_1 - v_2 - v_4 = \dots$$

- con cio' esprimiamo il potenziale di un nodo in funzione della tensione sui bipoli che si incontrano lungo un percorso (qualsiasi) che collega il nodo a terra
- viceversa, noto il potenziale dei nodi E_1, E_2, E_3, E_4 , la tensione di un bipolo si esprime facilmente come differenza fra i potenziali dei nodi a cui e' collegato
- ad esempio, $v_1 = E_1 - E_2$, $v_3 = E_4 - E_3$, $v_4 = -E_3$



$$v_1 + E_2 - E_1 = 0$$

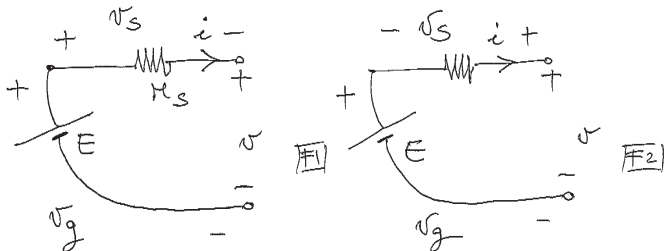
$$\Rightarrow v_1 = E_1 - E_2$$



Bipoli Notevoli Ottenuti Interconnettendo Bipoli Elementari

Generatore (indipendente) reale di tensione

- Si modella con un generatore (indipendente) ideale di tensione in serie a una resistenza $r_s > 0$ detta resistenza interna



- per una batteria (generatore reale) la relazione costitutiva e' (convenzione dei generatori)

$$v = E - r_s i$$

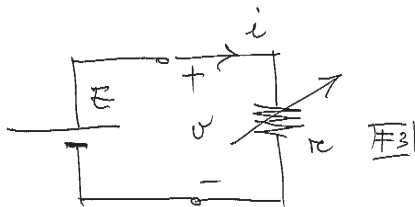
verifica: scrivendo la KV alla maglia si ottiene $v - v_g + v_s = 0$. Si ha poi $v_g = E$ e $v_s = r_s i$

- il risultato non dipende dalla scelta (peraltro arbitraria) dei versi.

Nel secondo caso si ha $v - v_g - v_s = 0$, $v_g = E$ ma $v_s = -r_s i$

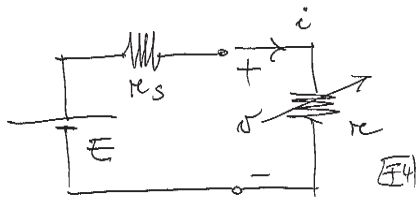
Confronto generatore indipendente ideale e reale di tensione

- Generatore ideale (batteria)



- $v(t) = E, \forall i(t)$
- comportamento al variare del carico $r > 0$: $i = E/r$ non e' limitata, potenza fornita al carico $p = E^2/r$ non e' limitata (tendono a infinito per $r \rightarrow 0$)

- generatore reale



- $v = E - r_s i$ e $v = r i$ da cui

$$i = \frac{E}{r + r_s}$$

e' limitata da E/r_s (corrente quando $r = 0$ o corrente di corto circuito). La potenza assorbita da r vale

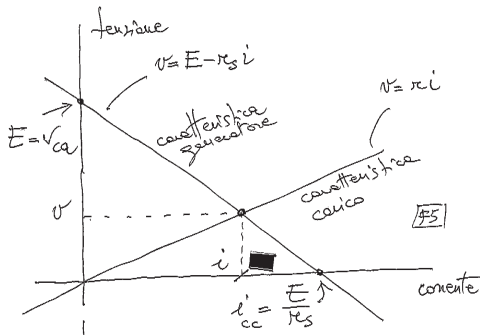
$$p = r i^2 = \frac{r E^2}{(r + r_s)^2}$$

- p ha un massimo per $r = r_s > 0$ e la potenza massima vale

$$p_{\max} = \frac{E^2}{4 r_s} \text{ W}$$

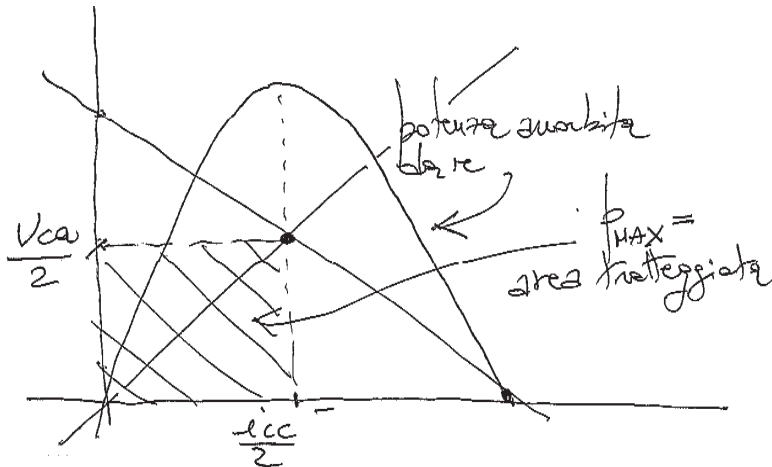
Interpretazione grafica

- Tensione e corrente ai morsetti si ottengono intersecando la caratteristica tensione-corrente del generatore reale $v = E - r_s i$ con la retta di carico $v = r i$.



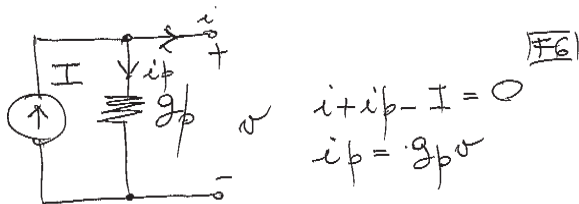
- al variare di r la corrente varia fra 0 e $i_{cc} = E/r_s$ (corrente di corto circuito) e la tensione fra 0 e $v_{ca} = E$ (tensione a circuito aperto)

- la potenza massima corrisponde a $i = i_{cc}/2$ e $v = v_{ca}/2$



Generatore indipendente reale di corrente

- E' dato da un generatore ind.te ideale di corrente con in parallelo una conduttanza $g_p = 1/r_p > 0$

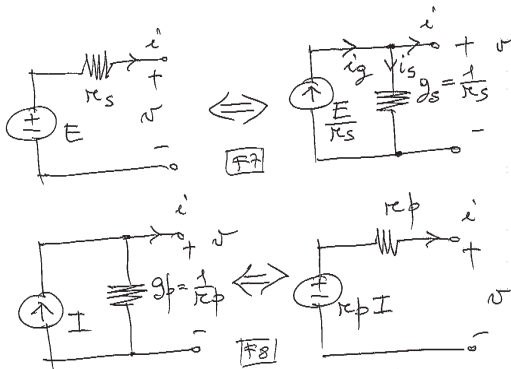


- la relazione costitutiva e' (convenzione dei generatori)

$$i = I - g_p v$$

Equivalenza fra bipoli

- Due bipoli si dicono equivalenti (esternamente) se hanno la stessa relazione costitutiva (stabiliscono lo stesso legame fra tensione e corrente ai morsetti)
- equivalenza fra gen.re ind.te reale di tensione e di corrente

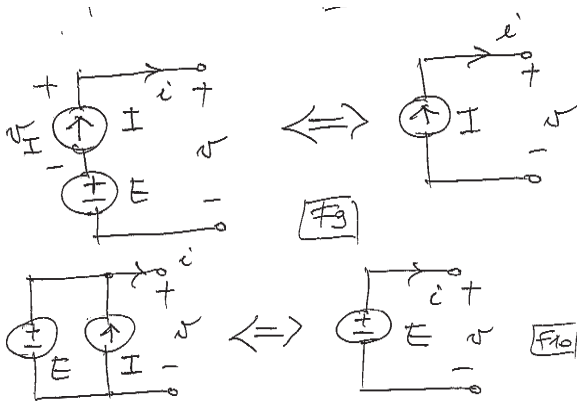


- verifica prima equivalenza: dalla KI al nodo otteniamo $i_g = i_s + i$; si ha poi $i_g = E/r_s$ e $i_s = v g_s = v/r_s$ da cui $v = E - r_s i$ che e' proprio la relazione costitutiva del generatore reale di tensione

- interpretare graficamente
- l'equivalenza e' esterna (ai morsetti) ma non e' interna
- equivalenza inversa fra gen.re ind.te reale di corrente e di tensione (verificare per esercizio)

Altre equivalenze

- Serie con generatore ind.te ideale di corrente. In questo caso il gen.re di tensione E e' ridondante (esternamente). Infatti si ha per la serie $v = v_I + E$ con v_I qualsiasi, inoltre $i = I$. Quindi $i = I$ con v qualsiasi che e' proprio la relazione costitutiva di un gen.re ind.te ideale di corrente



- analogamente si puo' dimostrare l'altra equivalenza

Bipoli controllabili in tensione o in corrente

- Un bipolo si dice controllabile in tensione se ha una relazione costitutiva del tipo

$$i = g(v)$$

cioe' v e' una grandezza indipendente e, nota v , conosciamo univocamente i

- Un bipolo si dice controllabile in corrente se ha una relazione costitutiva del tipo

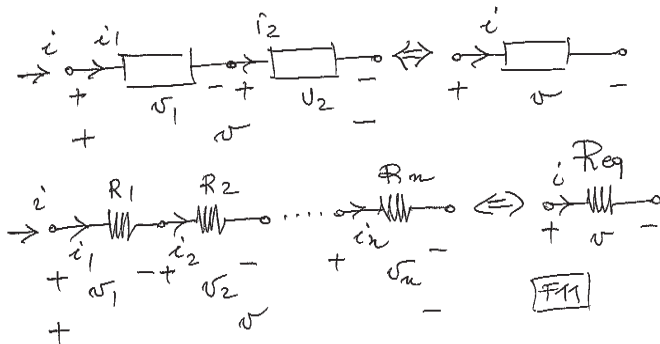
$$v = f(i)$$

cioe' i e' una grandezza indipendente e, nota i , conosciamo univocamente v

- un resistore ideale R e' controllabile in entrambi i modi
- un generatore ind.te ideale di tensione $v = v_g(t)$ e' controllabile in corrente; infatti la corrente i nel generatore e' indipendente e nota, i , e' nota la tensione $v_g(t)$! Invece non e' controllabile in tensione. Infatti la tensione $v = v_g(t)$ e' stabilita dal generatore e quindi non e' indipendente. Inoltre, nota $v_g(t)$, non e' nota a priori la corrente i
- un generatore ind.te ideale di corrente $i = i_g(t)$ e' controllabile in tensione ma non in corrente (riflettere)
- un gen.re ind.te reale di tensione (o di corrente) e' controllabile in entrambi i modi
- un corto circuito e' controllabile in corrente ma non in tensione. Analogamente, un circuito aperto e'....

Connessione serie fra bipoli

- Due bipoli si dicono collegati in serie se hanno un nodo a comune a cui non sono collegati altri bipoli



- relazioni con cui si studia la serie (KI e KV)

$$i = i_1 = i_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

- la definizione si estende immediatamente alla serie fra n bipoli

- la serie ha sempre senso se tutti i bipoli sono controllabili in corrente ed e' di solito facile studiare il bipolo equivalente alla serie

- Ad esempio. Serie fra n resistori. Si ha $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = R_1 i_1 + R_2 i_2 + \dots + R_n i_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)i = R_{\text{eq}}i$. La serie equivale a un resistore di resistenza $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

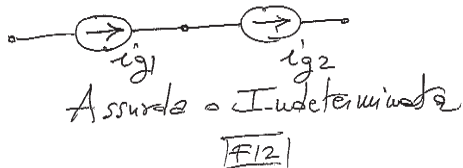
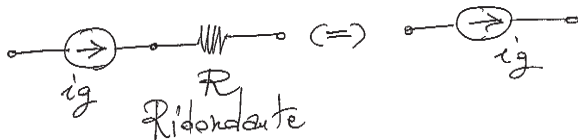
- si ha

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

e quindi la tensione sui singoli resistori puo' essere trovata con la formula $v_k = R_k i_k = R_k i$; quindi (*regola del partitore di tensione*)

$$v_k = \frac{v R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

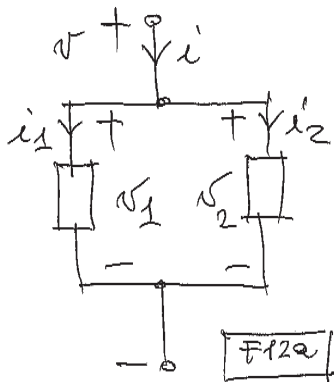
- se un bipolo non e' controllabile in corrente la connessione puo' essere 'ridondante' (esternamente uno dei bipoli puo' essere 'eliminato')
- supponiamo che entrambi i bipoli siano non controllabili in corrente; in questo caso la connessione serie e' assurda se $i_{g1} \neq i_{g2}$ (viene contraddetta KI) oppure indeterminata se $i_{g1} = i_{g2}$ (il potenziale del nodo centrale puo' assumere qualunque valore)



F12

Connessione parallelo fra bipoli

- Due bipoli si dicono in parallelo se sono collegati fra la stessa coppia di nodi



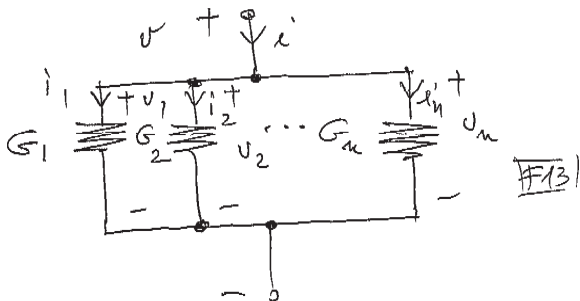
- relazioni con cui si studia il parallelo (KV e KI)

$$v = v_1 = v_2$$

$$i = i_1 + i_2$$

- la definizione si estende immediatamente al parallelo fra n bipoli

- il parallelo ha sempre senso se i bipoli sono controllabili in tensione ed e' di solito facile studiare il bipolo equivalente al parallelo



- ad esempio, parallelo fra n conduttanze; si ha

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots + G_n v_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) v = G_{eq} v.$$
 Il parallelo equivale a una conduttanza di valore $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$

- si ha

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

e quindi la corrente nelle singole conduttanze puo' essere trovata con la formula $i_k = G_k v_k = G_k v$; quindi (*regola del partitore di corrente*)

$$i_k = \frac{i G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

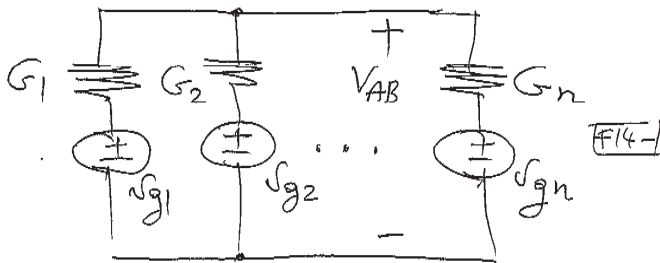
- se un bipolo non e' controllabile in tensione la connessione puo' essere 'ridondante' (esternamente uno dei bipoli puo' essere 'eliminato')
- se entrambi i bipoli sono non controllabili in tensione la connessione parallelo e' assurda oppure indeterminata (proporre esempi)

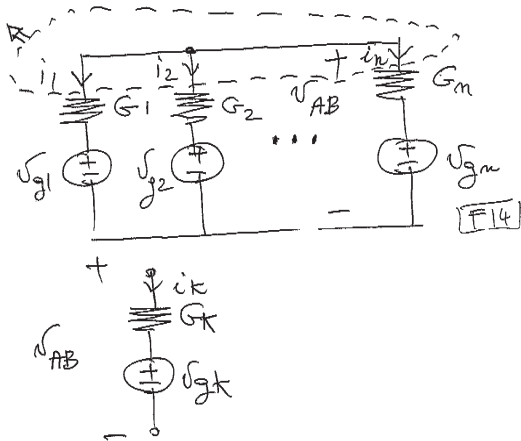
Teorema di Millmann

- Configurazione con n generatori indipendenti reali di tensione in parallelo fra di loro. La tensione v_{AB} si puo' determinare con la seguente formula

$$v_{AB} = \frac{v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + \dots + v_{gn}G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

Nota v_{AB} e' facile determinare tutte le altre tensioni e correnti del circuito





• verifica: applicando KI alla superficie Gaussiana tratteggiata si ha $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$. Per il generatore reale k si ha $v_{AB} = \frac{1}{G_k} i_k + v_{gk}$, quindi $i_k = v_{AB} G_k - v_{gk} G_k$. Sostituendo

$$v_{AB}(G_1 + G_2 + \dots + G_n) - (v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + \dots + v_{gn}G_n) = 0$$

e quindi il risultato detto

tre varianti

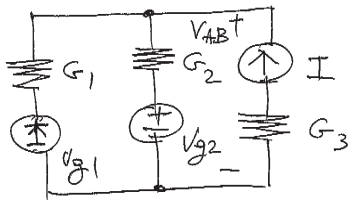
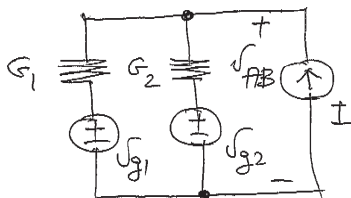
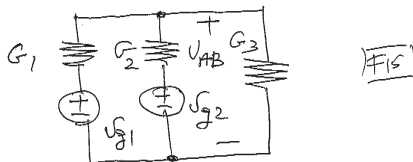


Fig 15

Fig 16

- variante 1; mostrare che

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

- variante 2; mostrare che

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + I}{G_1 + G_2}$$

- variante 3; mostrare che

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + I}{G_1 + G_2}$$