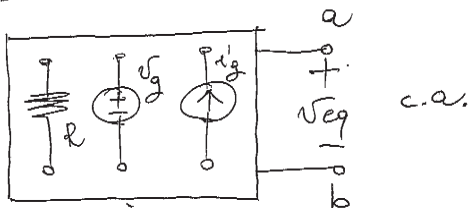
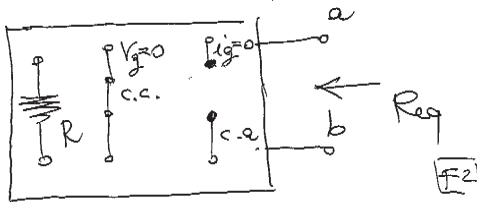
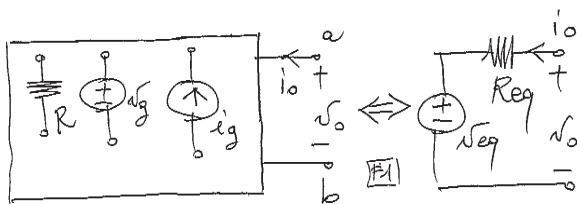


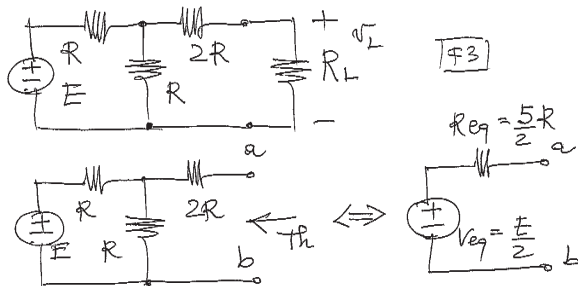
- Teorema di Thevenin e di Norton
- I teoremi permettono di ottenere una rappresentazione molto utile di bipoli *lineari non omogenei* che contengono resistori lineari e generatori indipendenti di tensione o corrente
- **Teorema di Thevenin.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Il bipolo e' equivalente a una resistenza equivalente R_{eq} in serie a un generatore di tensione equivalente v_{eq} cosi' definiti:
- R_{eq} : resistenza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- v_{eq} : tensione ai morsetti ab quando sono lasciati a circuito aperto

$$v_{eq} = v_{c.a.} = v_{vuoto}$$

- Usando uno schema a blocchi



Esempio. Determinare v_L con il Teorema di Thevenin

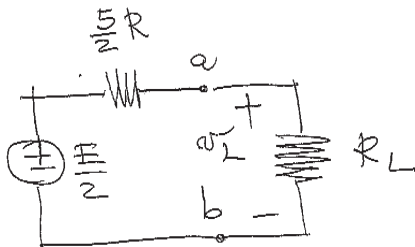


• scollegiamo il carico R_L e troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; notiamo che il resistore $2R$ e' appeso (non vi passa corrente); quindi e' immediato determinare Thevenin: si ha

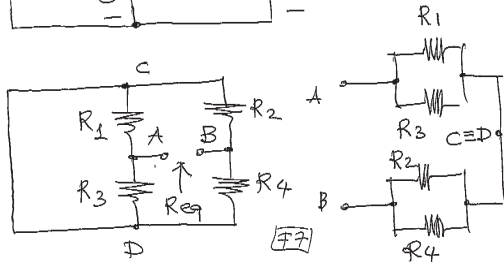
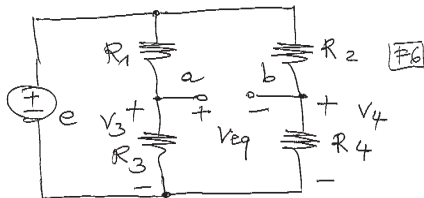
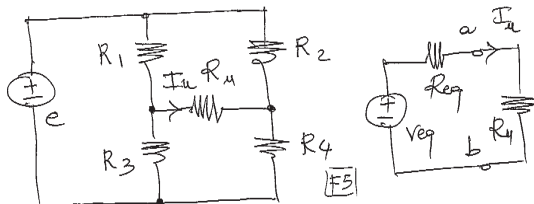
$$R_{eq} = \frac{5}{2}R; \quad v_{eq} = \frac{E}{2}$$

- a questo punto ricollego il carico R_L ; dalla regola del partitore di tensione otteniamo

$$v_L = \frac{E}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{5}{2}R}$$



Esempio. Determinare la corrente I_u per il circuito a ponte in figura



- colleghiamo R_u e determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; si ha usando la regola del partitore di tensione

$$v_{eq} = V_3 - V_4 = e \frac{R_3}{R_1 + R_3} - e \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

- per determinare R_{eq} disattivo il gen.re di tensione sostituendolo con un corto circuito; 'semplifico' il corto circuito che collega i nodi C e D e ridisegno il bipolo; a questo punto e' facile vedere che

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

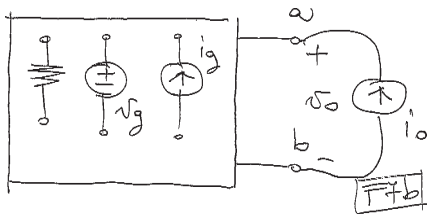
- reinserendo R_u si trova che

$$I_u = \frac{v_{eq}}{R_{eq} + R_u}$$

- verificare che il ponte e' bilanciato ($I_u = 0$) se e solo se $R_1 R_4 = R_2 R_3$

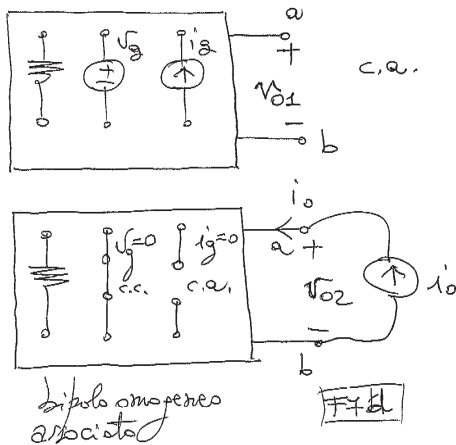
Dimostrazione del Teorema di Thevenin

- alimento il bipolo ab con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 e determino la tensione v_0 usando il pse; cio' e' possibile in quanto la rete e' *lineare*



- raggruppo le cause in due insiemi: causa 1 e' data da tutti i gen.di di tensione e corrente interni al bipolo; causa 2 e' data dal gen.re di corrente esterno i_0 ; dal pse si ha

$$v_0 = v_{01} + v_{02}$$



disattivando i_0 si trova che $v_{01} = v_{c.a.} = v_{eq}$; disattivando i gen.ri interni al bipolo trovo invece che $v_{02} = R_{eq}i_0$; quindi

$$v_0 = v_{01} + v_{02} = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

che e' la stessa relazione costitutiva del bipolo di Thevenin (verificare)

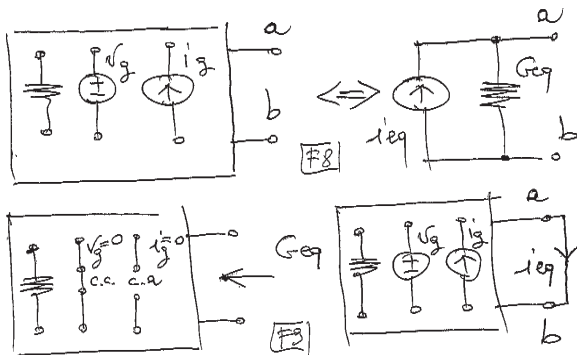
- **Importante.** Dalla dimostrazione si nota che l'equivalente di Thevenin esiste purché il bipolo ab sia *controllabile in corrente*

Con Thevenin abbiamo ottenuto una rappresentazione di un bipolo tramite un generatore reale di tensione. Con Norton, dualmente, e sotto opportune ipotesi, otteniamo una rappresentazione tramite un generatore reale di corrente

- **Teorema di Norton.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Supponiamo che il bipolo sia controllabile in tensione. Allora il bipolo e' equivalente a una conduttanza equivalente G_{eq} in parallelo a un generatore di corrente equivalente i_{eq} cosi' definiti:
 - G_{eq} : conduttanza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
 - i_{eq} : corrente ai morsetti ab quando sono chiusi in corto circuito

$$i_{eq} = i_{c.c.}$$

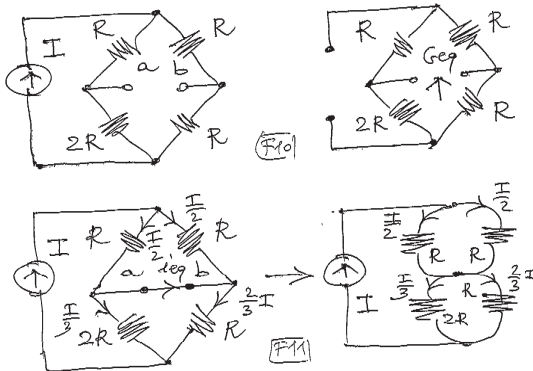
- Usando uno schema a blocchi



- per esercizio provare a dimostrare il teorema usando il pse
- Nota: se un bipolo e' controllabile sia in corrente che in tensione si ha

$$i_{c.c.} = \frac{v_{c.a.}}{R_{eq}}; \quad v_{c.a.} = R_{eq} i_{c.c.}; \quad R_{eq} = \frac{v_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo ab



- si ha

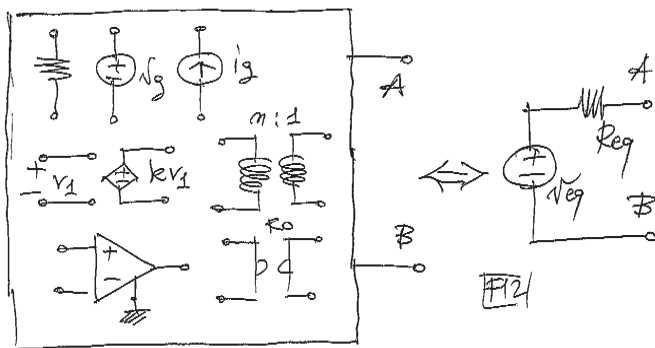
$$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$$

- notiamo poi che dalla regola del partitore di corrente si ha

$$i_{eq} = \frac{I}{2} - \frac{I}{3} = \frac{I}{6}.$$

Presenza di generatori controllati e ao

- I teoremi di Thevenin e Norton sono facilmente estendibili al caso importante in cui il bipolo contiene generatori controllati e/o ao ideali; ci sono però alcune cose da evidenziare

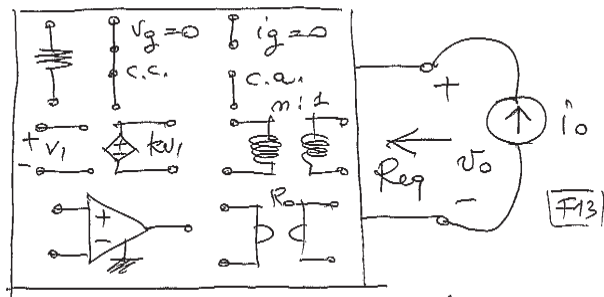


- supponiamo che il bipolo sia controllabile in corrente; vale ancora enunciato Teorema di Thevenin; la definizione di v_{eq} e R_{eq} è la stessa data in precedenza

- c'è da fare molta attenzione a come si valuta la R_{eq} ; a tal fine

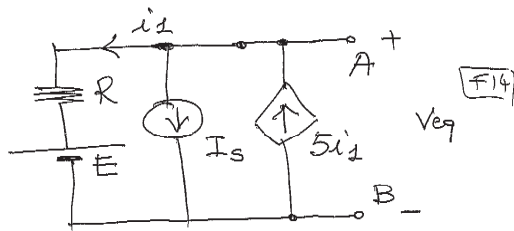
- 1) disattivo i generatori indipendenti di tensione e corrente
- 2) *non disattivo* i generatori controllati
- 3) lascio così come sono gli ao
- 4) ottengo così il bipolo omogeneo associato per il quale applicando i_0 e valutando v_0 ottengo

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0}$$



bipolo OMogeneo associato

Esempio. Determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo AB



- la tensione equivalente e' direttamente valutabile dal circuito di partenza e si ha usando Millmann

$$v_{eq} = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_{eq} = Ri_1 + E$, quindi

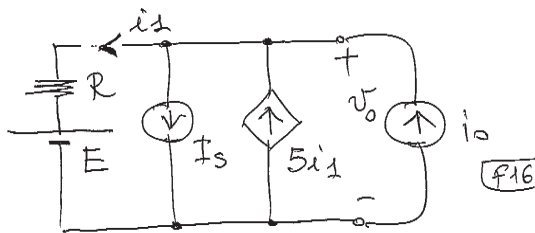
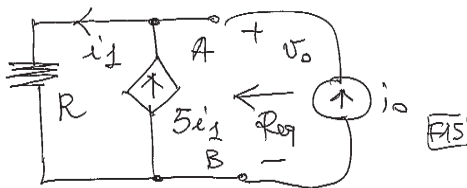
$$i_1 = \frac{v_{eq} - E}{R}$$

facendo sistema

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s$$

- per la resistenza equivalente considero il seguente circuito per il quale $i_0 = -5i_1 + i_1$ e $i_1 = v_0/R$ da cui

$$R_{eq} = -\frac{R}{4}$$



Secondo metodo risolutivo (determino insieme v_{eq} e R_{eq}); alimento il bipolo di partenza con un gen.re ind.te di corrente i_0 ; si ha

$$v_0 = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1 + i_0}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1 + Ri_0$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_0 = Ri_1 + E$, quindi

$$i_1 = \frac{v_0 - E}{R}$$

facendo sistema otteniamo

$$v_0 = E + \frac{R}{4}I_s - \frac{R}{4}i_0$$

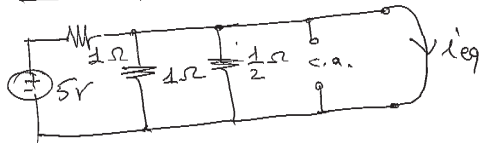
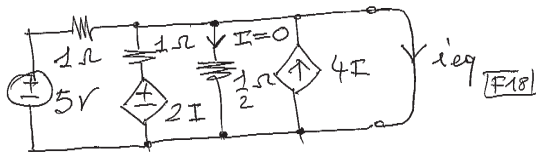
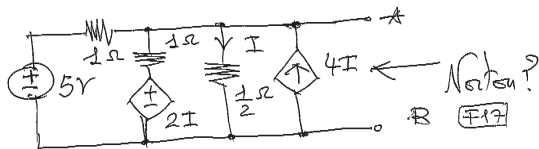
- se confrontiamo con la relazione costitutive

$$v_0 = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

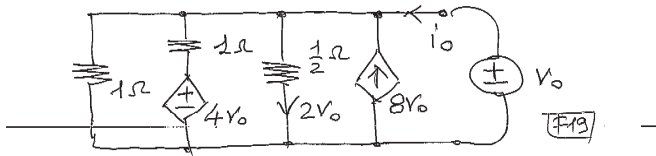
del bipolo equivalente di Thevenin otteniamo

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s; \quad R_{eq} = -\frac{R}{4}$$

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo



- per $i_{c.c.}$ notare che si ha $I = 0$ dato che la resistenza da $1/2$ Ohm e' cortocircuitata; quindi possiamo semplificare come mostrato; ne consegue facilmente che $i_{c.c.} = 5 \text{ A}$



• valutiamo adesso G_{eq} ; si ha $I = 2v_0$ da cui scrivendo una KI per la linea Gaussiana indicata otteniamo
 $i_0 = v_0 + v_0 - 4v_0 + 2v_0 - 8v_0$; quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = -8 \text{ Ohm}^{-1}.$$