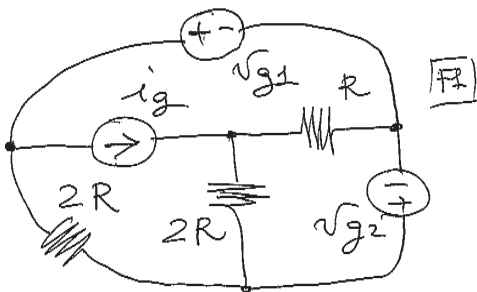


- **Metodi Generali di Analisi di Reti Resistive**

- Consideriamo il seguente circuito con $\ell = 6$ bipoli e $n = 4$ nodi.

Risolvere il circuito significa determinare tutte le tensioni v_i e correnti i_i dei bipoli. Sono $2\ell = 12$ incognite

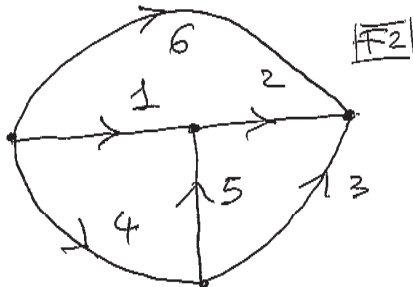


- In pratica si individua un sottoinsieme delle incognite, dette *variabili ausiliarie*, e si cerca di scrivere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili ausiliarie; dalle variabili ausiliarie possiamo poi trovare indirettamente tutte le altre incognite

- per individuare le variabili ausiliarie e scrivere il sistema risolvante facciamo uso di alcuni elementi di teoria dei grafi

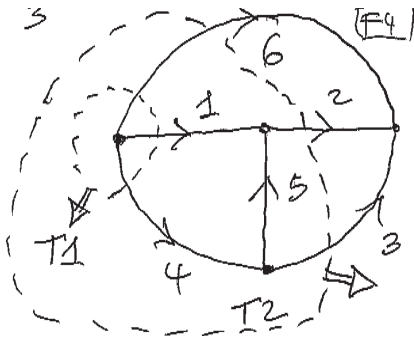
Consideriamo un *grafo orientato* associato al circuito; il grafo e' *connesso* ed ha un numero di *lati* $\ell = 6$ pari al numero di bipoli; supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ogni lato

- *nodo*: e' un punto del grafo a cui sono connessi due o piu' bipoli; si hanno in questo caso $n = 4$ nodi



Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)

- *taglio*: consideriamo una linea chiusa (linea Guassiana) che taglia il grafo in due parti senza passare dai nodi; per taglio si intende l'insieme dei lati che sono intersecati dalla linea chiusa

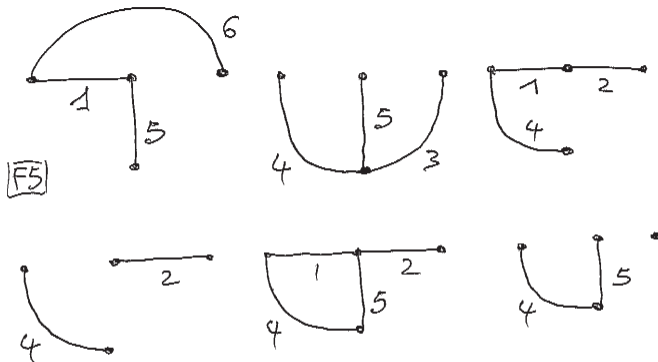


- ad esempio $T1 = \{1, 6, 4\}$, $T2 = \{6, 2, 3\}$
- orientiamo ciascun taglio scegliendo una normale positiva alla linea chiusa (uscente o entrante); nel caso in figura si ha

$$KI \ T1 : i_1 + i_4 + i_6 = 0; \quad KI \ T2 : i_6 + i_2 + i_3 = 0$$

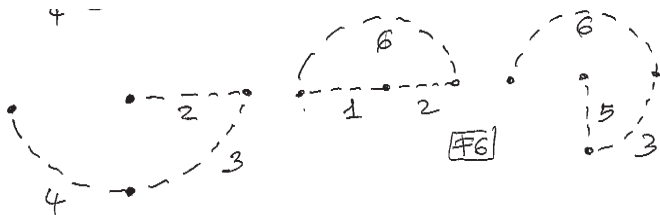
- ogni KI per un taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le correnti dei lati che fanno parte del taglio; le correnti dei lati i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, non sono quindi tutte indipendenti di loro

- *Albero*: insieme connesso di lati del grafo che tocca tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie)



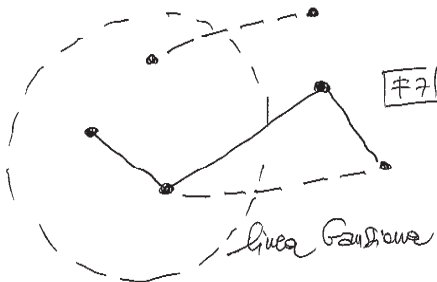
- esempi di alberi validi e di alberi non validi
- Proprieta': ogni albero ha $n - 1$ rami
- Infatti il primo ramo connette 2 nodi; aggiungendo un ramo connesso un terzo nodo; procedendo cosi' riesco a connettere tutti gli n nodi con $n - 1$ rami

- *Coalbero*: insieme di lati del grafo che non fanno parte dell'albero



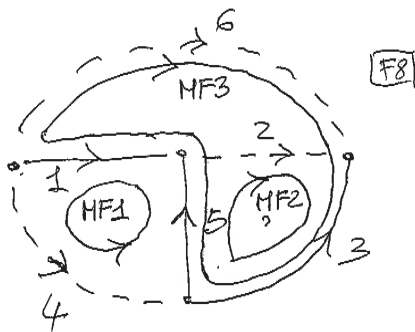
- esempi di coalberi validi e esempi di coalberi non validi (fare)
- Proprieta': ogni coalbero ha $\ell - n + 1$ corde (ovvio)
- convenzionalmente i rami dell'albero vengono indicati a tratto continuo mentre le corde sono tratteggiate

- Proprieta: un coalbero non contiene tagli (non e' possibile tagliare il grafo in due parti intersecando solo corde)



- Cenno alla verifica: consideriamo una linea chiusa che taglia il grafo in due parti; prendiamo un nodo interno ed un nodo esterno alla linea chiusa; dato che l'albero connette tutti i nodi, ed e' connesso, vi sara' un percorso lungo l'albero che collega il nodo interno a quello esterno; quindi la linea chiusa interseca almeno un ramo dell'albero

Proprieta': se aggiungo una corda ad un albero si forma una maglia costituita dalla corda e, per il resto, da rami dell'albero; tale maglia e' detta *maglia fondamentale* (MF)



- Proprieta': le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde del coalbero; vi sono quindi $\ell - n + 1$ maglie fondamentali associate all'albero; ciascuna maglia fondamentale si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente della corda che le individua

- $MF1 = \{1, 5, 4\}$; $MF2 = \{2, 3, 5\}$; $MF3 = \{1, 3, 5, 6\}$

- Indichiamo con $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle tensioni dei lati del grafo

- **Tensioni indipendenti.** Indichiamo con $\mathbf{v}_a$ il vettore delle $n - 1$ tensioni dei rami dell'albero e con $\mathbf{v}_c$ il vettore delle $\ell - n + 1$ tensioni delle corde del coalbero.

Le tensioni $\mathbf{v}_a$ formano una base per lo spazio delle tensioni dei lati del grafo, e cioè:

- 1) le tensioni $\mathbf{v}_a$ sono indipendenti fra di loro

- 2) da $\mathbf{v}_a$ si possono determinare le tensioni dipendenti $\mathbf{v}_c$ scrivendo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

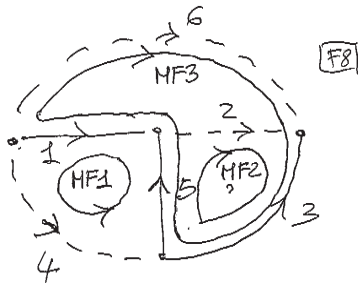
- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che l'albero non contiene maglie (pensarci!)

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo di un esempio; scegliamo l'albero in figura per cui $\mathbf{v}_a = (v_1, v_3, v_5)^T$ e $\mathbf{v}_c = (v_2, v_4, v_6)^T$; le $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF sono date da

$$v_4 - v_1 + v_5 = 0$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_6 - v_1 - v_3 + v_5 = 0$$



- notare che tali KV sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la tensione della corda che individua la MF corrispondente; tale tensione non appare per costruzione in altre KV

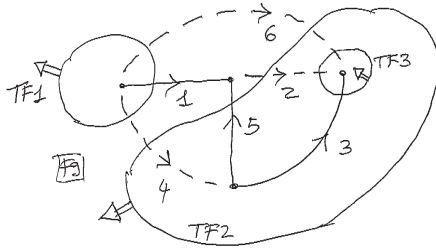
- risolvendo otteniamo le $\ell - n + 1 = 3$ tensioni dipendenti delle corde in funzione delle tensioni indipendenti dei rami dell'albero

$$v_4 = v_1 - v_5$$

$$v_2 = v_3 - v_5$$

$$v_6 = v_1 + v_3 - v_5$$

Taglio Fondamentale (TF): e' un taglio che contiene un ramo dell'albero e, per il resto, solamente corde del coalbero; ogni taglio si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente del ramo corrispondente



- Proprieta': i tagli fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero; vi sono quindi $n - 1$ tagli fondamentali associati all'albero

- $TF1 = \{1, 4, 6\}$; $TF2 = \{2, 4, 5, 6\}$; $TF3 = \{2, 3, 6\}$

- Indichiamo con $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle correnti dei lati

- **Correnti indipendenti.** Indichiamo con $\mathbf{i}_c$ il vettore delle $\ell - n + 1$ correnti delle corde del coalbero e con $\mathbf{i}_a$ il vettore delle $n - 1$ correnti dei rami dell'albero. Le correnti $\mathbf{i}_c$ formano una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo, e cioè':

- 1) le correnti $\mathbf{i}_c$ sono indipendenti fra di loro

- 2) da $\mathbf{i}_c$ si possono determinare le correnti dipendenti $\mathbf{i}_a$ scrivendo $n - 1$ KI ai TF associate all'albero

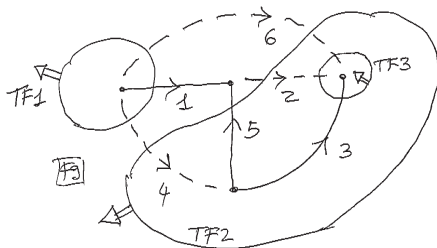
- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che il coalbero non contiene tagli (pensarci!)

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo dell'esempio considerato per il quale $\mathbf{i}_c = (i_2, i_4, i_6)^T$ e $\mathbf{i}_a = (i_1, i_3, i_5)^T$; le $n - 1 = 3$ KI ai TF sono date da

$$i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0$$

$$i_3 + i_2 + i_6 = 0$$



- notare che tali KI sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la corrente del ramo che individua il TF corrispondente; tale corrente non appare per costruzione in altre KI

- risolvendo otteniamo le $n - 1 = 3$ correnti dipendenti dei rami dell'albero in funzione delle correnti indipendenti delle corde del coalbero

$$i_1 = -i_4 - i_6$$

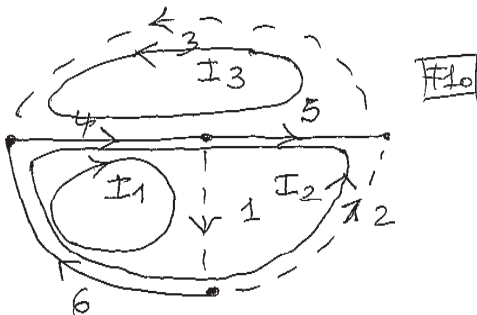
$$i_5 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$i_3 = -i_2 - i_6$$

Correnti cicliche delle maglie (di Maxwell)

- Esempio. Facciamo percorrere ogni MF da una corrente I_i che si richiude su se stessa (detta corrente ciclica o di Maxwell); ovviamente vi sono $\ell - n + 1 = 3$ correnti cicliche delle MF; inoltre tali correnti risultano in corrispondenza biunivoca con le correnti delle corde

$$I_1 = i_1; I_2 = i_2; I_3 = i_3$$



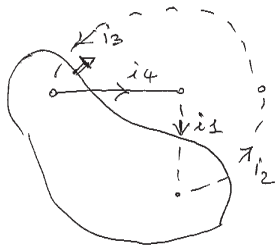
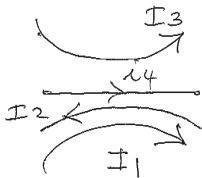
- ne consegue che anche le correnti cicliche

$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T \in \mathbb{R}^3$ costituiscono una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

- le correnti dipendenti dei rami dell'albero si possono ottenere per sovrapposizione delle correnti cicliche; ad esempio, per il ramo 4 si ha

$$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$$

dato che $I_i = i_i$, $i = 1, 2, 3$, si vede che cio' equivale a determinare la corrente del ramo usando una KI al TF individuato da tale ramo



$$KI: i_4 - i_3 - i_1 + i_2 = 0$$

- I_{cicliche} e i_c costituiscono 2 basi equivalenti per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

Metodo Totale (del Tableau)

- Consideriamo un circuito con ℓ bipoli e n nodi e un grafo orientato ad esso associato; scegliamo un albero; le incognite sono le tensioni v_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ e le correnti i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ dei lati del grafo; in totale vi sono 2ℓ incognite

- Equazioni di tipo topologico (dipendono solo dal grafo orientato)
 $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero
 $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

In totale abbiamo $\ell - n + 1 + n - 1 = \ell$ equazioni topologiche

- Equazioni tipologiche (dipendono dalla natura degli elementi presenti)

ℓ relazioni costitutive dei bipoli

- Complessivamente sappiamo perciò scrivere $\ell + \ell = 2\ell$ equazioni, tante quante sono le incognite; il problema è quindi *ben posto*

- nei principali metodi di analisi non si usa l'intero insieme delle incognite ma un suo sottoinsieme (variabili ausiliarie); ad esempio, nella versione più semplice del metodo delle maglie fondamentali, le variabili ausiliarie sono le $\ell - n + 1$ correnti delle corde.