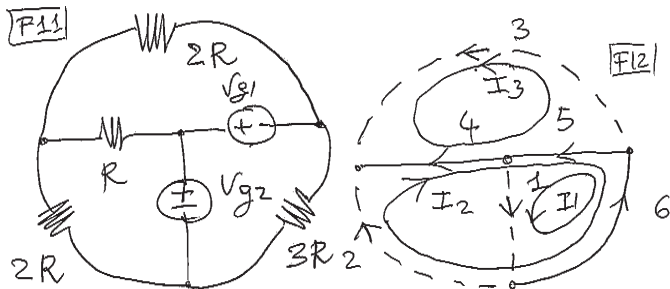


- **Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)**

- Per reti di soli bipoli controllabili in corrente; in particolare reti di resistori e generatori indipendenti ideali di tensione
- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MMF sono le correnti cicliche delle MF

$$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T$$

oppure equivalentemente le correnti $\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T$ delle corde. In generale si hanno $\ell - n + 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $\ell - n + 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 + v_5 + v_6 = 0$$

$$v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

$$v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

- Passo 2: esprimo le correnti dei lati del grafo (in generale sono ℓ) in funzione delle correnti delle correnti cicliche; e' sempre possibile in quanto le correnti cicliche sono una base per lo spazio delle correnti dei lati; nel far cio' uso $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 = l_1$$

$$i_2 = l_2$$

$$i_3 = l_3$$

$$i_4 = -l_2 - l_3$$

$$i_5 = l_1 - l_2 - l_3$$

$$i_6 = l_1 - l_2$$

• Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in corrente, posso esprimere le tensioni dei bipoli (ℓ) in funzione delle correnti dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in corrente

$$v_1 = v_{g2}$$

$$v_2 = 2Ri_2 = 2Rl_2$$

$$v_3 = 2Ri_3 = 2Rl_3$$

$$v_4 = Ri_4 = R(-l_2 - l_3)$$

$$v_5 = -v_{g1}$$

$$v_6 = 3Ri_6 = 3R(l_1 - l_2)$$

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $\ell - n + 1$ equazioni nelle $\ell - n + 1$ incognite date dalle correnti cicliche delle MF; in questo caso $\ell - n + 1 = 3$; in forma vettoriale si ha

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{g1} - v_{g2} \\ -v_{g1} \\ -v_{g1} \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvante per il MMF e' del tipo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_{\text{cicliche}} = \mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$$

con $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(\ell-n+1) \times (\ell-n+1)}$ (matrice delle resistenze),

$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$

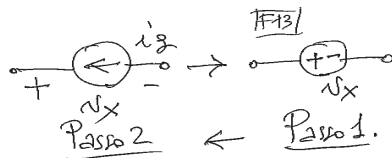
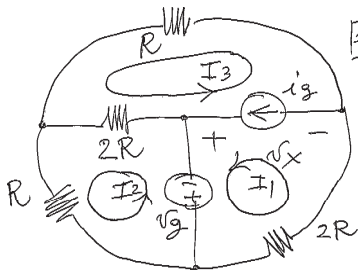
- R_{kk} ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma delle resistenze della maglia k
- R_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma *algebraica* delle resistenze a comune fra maglia k e maglia h ; ogni resistenza si prende col $+$ se I_k e I_h la percorrono in senso concorde, col $-$ altrimenti
- V_k ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma *algebraica* delle tensioni dei gen.ri ind.ti di tensione della MF k ; ogni tensione si prende con il $+$ se I_k 'esce dal morsetto $+$ del gen.re di tensione', col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{R}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$

- Osservazione. Per ottenere il sistema risolvante abbiamo usato tutte le KV ($\ell - n + 1$) al Passo 1, tutte le KI al Passo 2 ($n - 1$) e tutte le relazioni costitutive dei bipoli (ℓ) al Passo 3
- Osservazione. Una volta determinate le correnti cicliche, possiamo determinare indirettamente tutte le altre correnti e tensioni dei bipoli (pensarci!)
- Osservazione. MMF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le correnti dei rami dell'albero, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le tensioni dei bipoli.

Metodo Modificato di Analisi su Base MF

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di corrente (bipoli *non controllabili in corrente*); in tal caso non possiamo ripetere il Passo 3 della precedente procedura
- vediamo come si fa con un esempio; non conosco la tensione sul gen.re di corrente i_g ; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la tensione v_x ai capi di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

$$I_1, I_2, I_3, v_x$$



- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di corrente come se fosse un gen.re di tensione v_x ; mi riconduco così ad una rete con sole resistenze e gen.ri di tensione; posso scrivere le seguenti KV

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di corrente per scrivere una equazione aggiuntiva detta *equazione di vincolo*

$$i_g = I_1 - I_3$$

- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ -v_g \\ 0 \\ i_g \end{pmatrix}$$

- il metodo descritto è detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base maglie fondamentali*

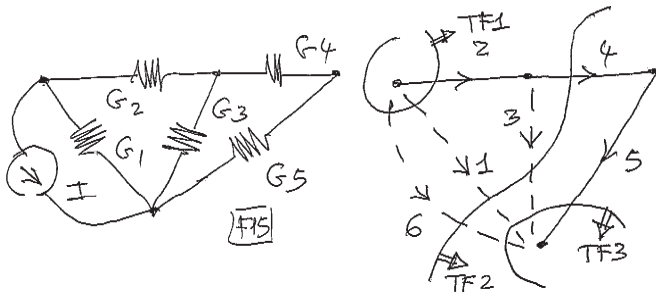
- **Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)**

- Si introduce, per dualita' rispetto al MMF, per reti di soli bipoli controllabili in tensione; in particolare reti di conduttanze e generatori indipendenti ideali di corrente

- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MTF sono le tensioni dei rami dell'albero

$$\mathbf{v}_a = (v_2, v_4, v_5)^T$$

In generale si hanno $n - 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $n - 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 + i_2 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$$

- Passo 2: esprimo le tensioni delle corde (in generale sono $\ell - n + 1$) in funzione delle tensioni delle tensioni dei rami dell'albero; e' sempre possibile in quanto tali tensioni sono una base per lo spazio delle tensioni dei lati; nel far cio' uso $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 = v_2 + v_4 + v_5$$

$$v_6 = v_2 + v_4 + v_5$$

$$v_3 = v_4 + v_5$$

- Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in tensione, posso esprimere le correnti dei bipoli (ℓ) in funzione delle tensioni dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in tensione

$$i_1 = G_1 v_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5)$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i_3 = G_3 v_3 = G_3(v_4 + v_5)$$

$$i_4 = G_4 v_4$$

$$i_5 = G_5 v_5$$

$$i_6 = I$$

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite date dalle tensioni dei rami dell'albero; in questo caso $n - 1 = 3$; in forma vettoriale si ha (verificare)

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvante per il MTF e' del tipo

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_a = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze), $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze si puo' dare una regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$

- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$

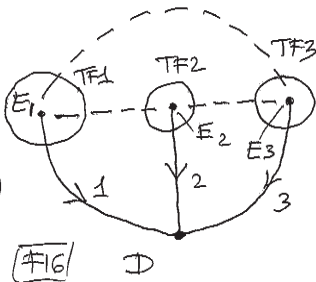
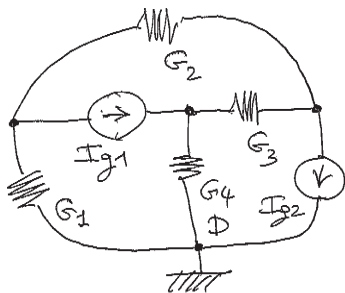
- Osservazione. Per ottenere il sistema risolvante abbiamo usato tutte le KI al Passo 1, tutte le KV al Passo 2 e tutte le relazioni costitutive dei bipoli al Passo 3

- Osservazione. Una volta determinate le tensioni dei rami dell'albero, possiamo determinare indirettamente tutte le altre tensioni e correnti dei bipoli (pensarci!)

- Osservazione. MTF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le tensioni delle corde, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le correnti dei bipoli

Metodo dei Nodi

- Il metodo dei nodi è un caso particolare del metodo dei tagli. Cominciamo dal caso in cui sono presenti solo bipoli controllabili in tensione (conduttanze e gen.ri ind.ti di corrente)
- scegliamo un nodo di riferimento (nodo di terra, o Datum (D)) a cui viene attribuito potenziale $E = 0$; scegliamo poi un *albero stellato* e cioè un albero che collega ogni nodo direttamente a D ; infine orientiamo i rami dell'albero in modo che 'le frecce puntino verso D '



- applichiamo il MTF all'albero stellato; si nota che:
- le incognite (tensione dei rami dell'albero) coincidono con le $n - 1$ tensioni dei nodi, $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, rispetto a D
- ogni TF e' una linea chiusa che contiene un solo nodo (taglio nodale) ed e' orientata positivamente verso l'esterno
- le KI per i TF si esprimono dicendo che e' nulla la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono su un nodo; ogni corrente si prende col $+$ se uscente dal nodo, con il $-$ se entrante nel nodo; sono $n - 1$ KI per tutti i nodi eccetto il nodo di riferimento
- in generale il sistema risolvante per il metodo dei nodi e' del tipo

$$\mathbf{G}\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

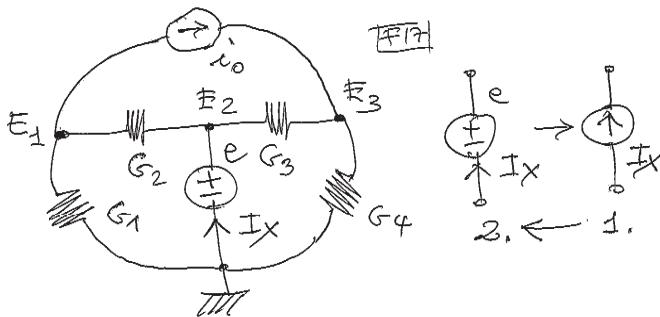
con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze),
 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ vettore delle incognite (tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento); $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$
 (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di corrente e conduttanze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$
- G_{kk} ; $k = 1, \dots, n - 1$: somma delle conduttanze collegate al nodo k
- G_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, n - 1$: *somma cambiata di segno* delle conduttanze a comune fra nodo k e nodo h
- I_k ; $k = 1, \dots, n - 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma *algebrica* delle correnti dei gen.ri ind.ti di corrente collegati al nodo k ; ogni corrente si prende con il $+$ se entrante nel nodo k , col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$
- e' un sistema di $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite; notare che la dimensionalita' del sistema non dipende da ℓ

Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA, 'modified nodal analysis')

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di tensione (bipoli *non controllabili in tensione*)
- vediamo come si procede con un esempio; non conosco la corrente del gen.re di tensione e ; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la corrente I_x di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$



- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di tensione come se fosse un gen.re di corrente I_x ; mi riconduco così ad una rete con sole conduttanze e gen.ri di corrente; posso scrivere le seguenti KI

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ I_x \\ i_0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di tensione per scrivere una equazione aggiuntiva detta *equazione di vincolo*; in questo caso si ha semplicemente

$$E_2 = e$$

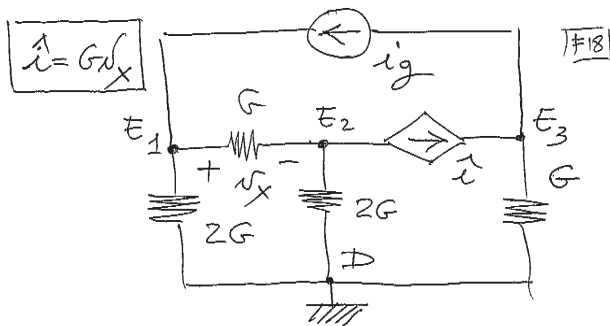
- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, e' dato da

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 & -1 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ 0 \\ i_0 \\ e \end{pmatrix}$$

- il metodo descritto e' detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base nodi*; e' uno dei metodi piu' utilizzati in pratica (ad esempio nel simulatore di circuiti SPICE)

Presenza di Generatori Controllati

- Esempio (Nodi con generatori controllati di corrente). Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3 (attenzione, v_x non e' una variabile ausiliaria e non deve apparire nel sistema risolvente finale)



- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; scrivo quindi le KI ai nodi

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -\hat{i} \\ \hat{i} - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato e esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

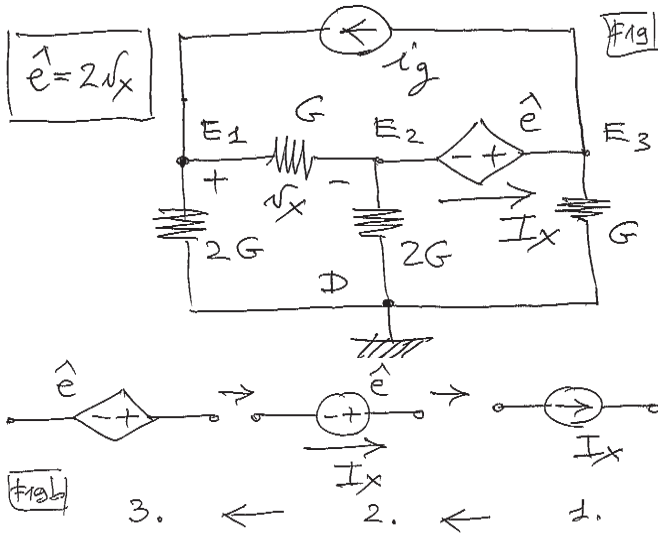
$$\hat{i} = Gv_x = G(E_1 - E_2)$$

- sostituendo arrivo al sistema

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ -G & G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \end{pmatrix}$$

- notare che il generatore controllato influisce sulla matrice **G** rendendola (in generale) non-simmetrica

- Esempio (Nodi con generatori controllati di tensione)



- Passo 1. Penso il generatore controllato di tensione come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base nodi introducendo una incognita aggiuntiva data dalla corrente di tale generatore di tensione; le variabili ausiliarie sono quindi

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$

- Posso scrivere le KI

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -I_x \\ I_x - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Esprimo il vincolo imposto dal generatore di tensione $\hat{e}$:

$$\hat{e} = E_3 - E_2$$

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di tensione ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{e} = 2v_x = 2(E_1 - E_2)$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$2E_1 - E_2 - E_3 = 0$$

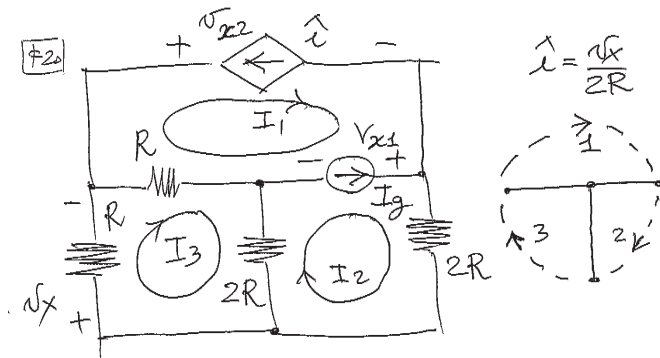
che rappresenta la quarta equazione del sistema risolvibile

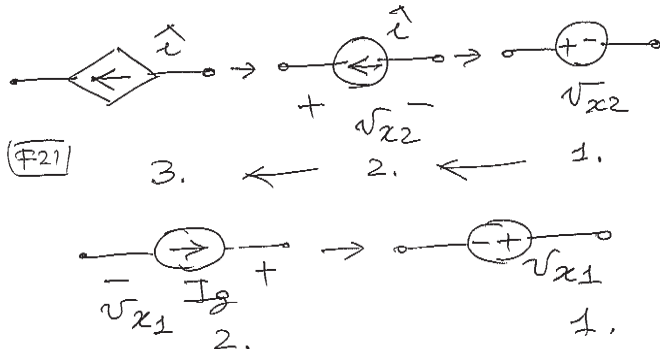
- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 4 equazioni nelle variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 & 0 \\ -G & 3G & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Esempio (MF in presenza di generatori controllati).
- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base MF introducendo una incognita aggiuntiva data dalla tensione su tale generatore di corrente; anche per il generatore di corrente I_g introduco come incognita aggiuntiva la tensione ai suoi morsetti; le variabili ausiliarie sono quindi

$$I_1, I_2, I_3, V_{x1}, V_{x2}$$





Posso scrivere le KV

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R \\ 0 & 4R & -2R \\ -R & -2R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_{x1} - V_{x2} \\ V_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Vincoli imposti dai generatori di corrente:

$$I_g = -I_1 + I_2; \quad \hat{I} = -I_1$$

la prima fra queste relazioni e' la quarta equazione del sistema risolvibile

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{i} = \frac{v_x}{2R} = \frac{Rl_3}{2R} = \frac{l_3}{2}$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$l_1 + \frac{l_3}{2} = 0$$

che rappresenta la quinta equazione del sistema risolvete

- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 5 equazioni nella variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R & 1 & 1 \\ 0 & 4R & -2R & -1 & 0 \\ -R & -2R & 4R & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_g \\ 0 \end{pmatrix}$$