

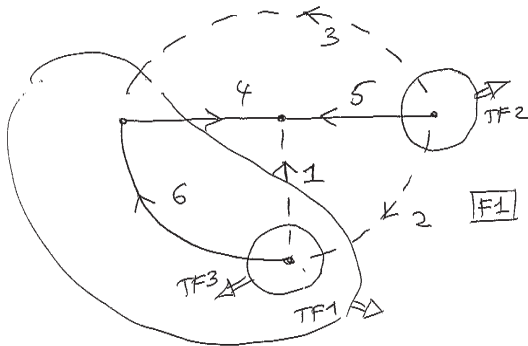
Legame fra Matrici Topologiche

- Esempio. Consideriamo il grafo orientato in figura; utilizziamo inoltre la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; si ha

$$\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T; \quad \mathbf{i}_a = (i_4, i_5, i_6)^T$$

e

$$\mathbf{v}_c = (v_1, v_2, v_3)^T; \quad \mathbf{v}_a = (v_4, v_5, v_6)^T$$



- esprimiamo $\mathbf{i}_a$ (correnti dipendenti) in funzione di $\mathbf{i}_c$ (correnti indipendenti); si ha dalle $n - 1 = 3$ KI ai TF:

$$i_4 + i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_5 + i_2 + i_3 = 0$$

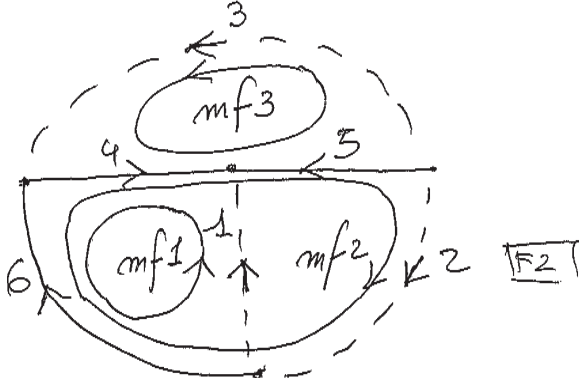
$$i_6 + i_1 - i_2 = 0$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{A}\mathbf{i}_c$$

dove la prima matrice topologica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- esprimiamo adesso $\mathbf{v}_c$ (tensioni dipendenti) in funzione di $\mathbf{v}_a$ (tensioni indipendenti); si ha dalle $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF:

$$v_1 - v_4 - v_6 = 0$$

$$v_2 + v_4 - v_5 + v_6 = 0$$

$$v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{B}\mathbf{v}_a$$

dove la seconda matrice topologica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Proprieta'*: si ha

$$\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}$$

- si puo' dimostrare che questa relazione e' valida in generale

Consideriamo il grafo orientato associato a un circuito; supponiamo vi siano ℓ bipoli e n nodi; utilizziamo inoltre la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; scegliamo un albero

• **Teorema di Tellegen.** Sia $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore di numeri che (pensati come tensioni dei lati del grafo) soddisfano alle KV alle MF; sia $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore di numeri che (pensati come correnti dei lati del grafo) soddisfano alle KI ai TF. Allora si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

cioe' i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ risultano fra di loro ortogonali.

- Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T \mathbf{i} &= (\mathbf{v}_c \ \mathbf{v}_a)^T \begin{pmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_a \end{pmatrix} = \mathbf{v}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{i}_a \\ &= [\mathbf{B} \mathbf{v}_a]^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{i}_c \\ &= \mathbf{v}_a^T \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{i}_c \\ &= \mathbf{v}_a^T (\mathbf{B}^T + \mathbf{A}) \mathbf{i}_c = 0\end{aligned}$$

dato che $\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}$

Principio di conservazione della potenza istantanea (e energia)

- Siano $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{i}(t)$ le *tensioni e correnti effettive in un circuito ad un generico istante t* ; dato che le tensioni soddisfano per ipotesi alle KV e le correnti alle KI possiamo applicare il Teorema di Tellegen e ottenere che

$$\mathbf{v}^T(t)\mathbf{i}(t) = \sum_{k=1}^{\ell} v_k(t)i_k(t) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k(t) = 0 \text{ W}$$

- Quindi *e' nulla, istante per istante, la somma delle potenze istantanee $p_k(t)$ assorbite dagli ℓ bipoli del circuito*
- in sintesi KV, KI implicano Teorema di Tellegen che implica principio di conservazione della potenza istantanea e energia. Un circuito che assiomaticamente soddisfa a KV e KI verifica quindi automaticamente questi due principi fondamentali

- altre conseguenze; consideriamo due istanti $t_1 \neq t_2$ e siano $\mathbf{v}(t_1)$ e $\mathbf{i}(t_1)$ (rispettivamente $\mathbf{v}(t_2)$ e $\mathbf{i}(t_2)$) le tensioni e correnti effettive in un circuito nei due istanti considerati; allora si ha

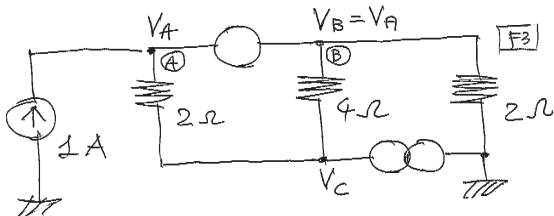
$$\mathbf{v}^T(t_1)\mathbf{i}(t_2) = 0$$

- siano C^a e C^b due circuiti diversi ma con lo stesso grafo orientato; siano $\mathbf{v}^a(t)$ e $\mathbf{i}^a(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^a e $\mathbf{v}^b(t)$ e $\mathbf{i}^b(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^b ; allora

$$(\mathbf{v}^a)^T(t)\mathbf{i}^b(t) = 0$$

- interpretazione geometrica: KV implicano $\mathbf{v} \in \pi_v$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$); KI implicano $\mathbf{i} \in \pi_i$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$): i due sottospazi π_v e π_i di $\mathbb{R}^\ell$ sono fra di loro ortogonali.

- Esempio. Verificare il Teorema di Tellegen per il seguente circuito con a_0 (nullo)

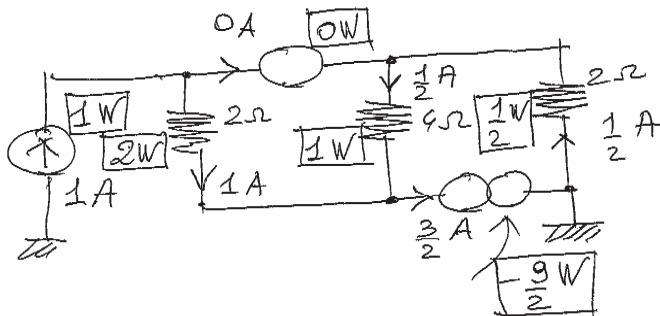


- determiniamo esplicitamente tutte le potenze elettriche assorbite dai bipolo presenti; si ha dalla KI al nodo A e al nodo B (rispettivamente)

$$1 = \frac{V_A - V_C}{2}; \quad \frac{0 - V_A}{2} = \frac{V_A - V_C}{4}$$

da cui $V_A = -1 \text{ V}$ e $V_C = -3 \text{ V}$

- nella figura sono indicate le correnti che fluiscono nei bipoli e le potenze istantanee assorbite



- si verifica che la somma delle potenze istantanee assorbite e' nulla, come previsto dal Teorem di Tellegen.