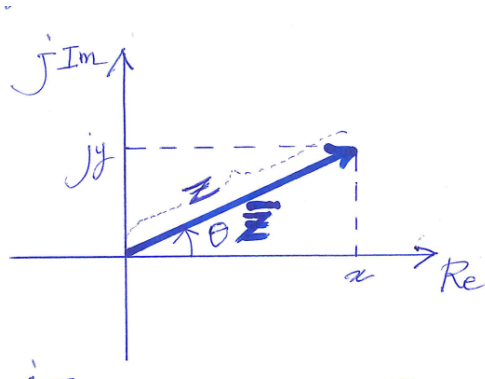


- **Richiami sui numeri complessi**
- Consideriamo il numero complesso espresso in *forma algebrica*

$$\bar{z} = x + jy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \text{Re}[\bar{z}]$ parte reale, $y = \text{Im}[\bar{z}]$ parte immaginaria, e j unita' immaginaria ($j^2 = -1$)

- $\bar{z}$ puo' essere visto come un punto (o vettore) del piano complesso



- $\bar{z}$ può essere individuato tramite il suo modulo $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il suo argomento θ ; gli argomenti θ si misurano a partire dall'asse x , a cui si attribuisce $\theta = 0$ e ruotando in senso *positivo antiorario*
- il verso positivo antiorario è detto anche verso degli anticipi; il verso negativo orario è detto verso dei ritardi
- se $\bar{z} \neq 0$ si ha

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- se $x \neq 0$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

- inversamente

$$x = Z \cos \theta; \quad y = Z \sin \theta$$

- *forma trigonometrica*

$$\bar{z} = Z(\cos \theta + j \sin \theta)$$

- dato che (identità di Eulero) $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ otteniamo la *forma esponenziale*

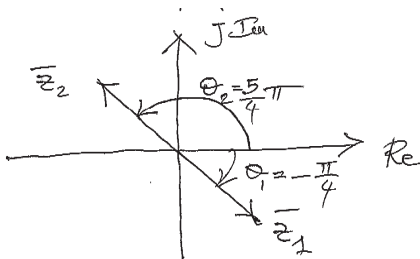
$$\bar{z} = Ze^{j\theta}$$

- E' necessario fare attenzione al calcolo degli argomenti quando $x = \text{Re}[\bar{z}] < 0$!!! Proviamo a scrivere in forma esponenziale i due numeri complessi $\bar{z}_1 = 1 - j$, $\bar{z}_2 = -1 + j$. Si ha $Z_1 = Z_2 = \sqrt{2}$; inoltre

$$\theta_1 = \arctan(-1) = -\pi/4; \quad \theta_2 = \arctan(-1) = -\pi/4!!!!$$

siamo cosi' in assurdo; per non sbagliare conviene disegnare i numeri nel piano complesso; si vede allora che

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$$



Funzioni sinusoidali (dominio del tempo)

- Per senoide si intende una funzione del tipo

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove $E_M \geq 0$ e' l'ampiezza; $\omega \geq 0$ e' la pulsazione (in rad/sec), φ e' la fase (in radianti); la frequenza (in Hz) e' data da

$$f = \frac{1}{T}$$

e

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

dove T (in sec) e' il periodo della senoide

- ad ogni sinusoide corrisponde il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ e quindi un punto del piano complesso inteso come piano dei fasori
- viceversa, assegnato $\bar{\mathbf{E}}$ e ω , vi corrisponde una unica sinusoide a pulsazione ω che possiamo ottenere tramite la formula

$$e(t) = \operatorname{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}]$$

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re} [E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [E_M e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= E_M \cos(\omega t + \varphi) = e(t) \end{aligned}$$

- le due relazioni ottenute sono una coppia trasformata e antitrasformata (tecnicamente e' detta trasformata di Steinmetz)

- **interpretazione geometrica;** l'operatore

$$\times e^{j\omega t}$$

rappresenta una rotazione di un angolo ωt in senso positivo (antiorario); infatti

$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = E_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- allora

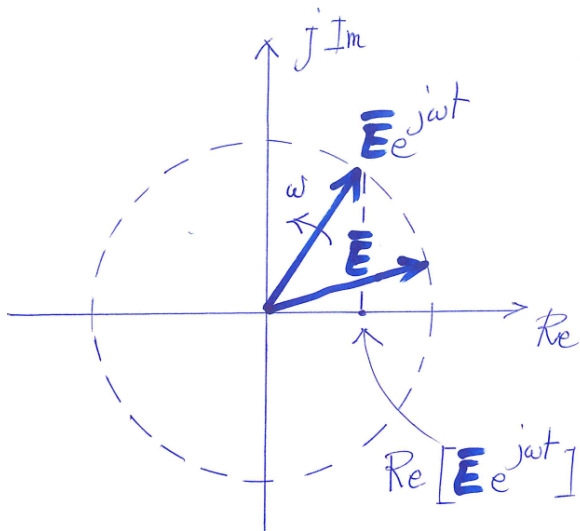
$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}$$

e' un vettore di modulo costante E_M che ruota intorno all'origine con velocita' angolare ω in senso positivo antiorario (vettore rotante)

- infine, l'operatore

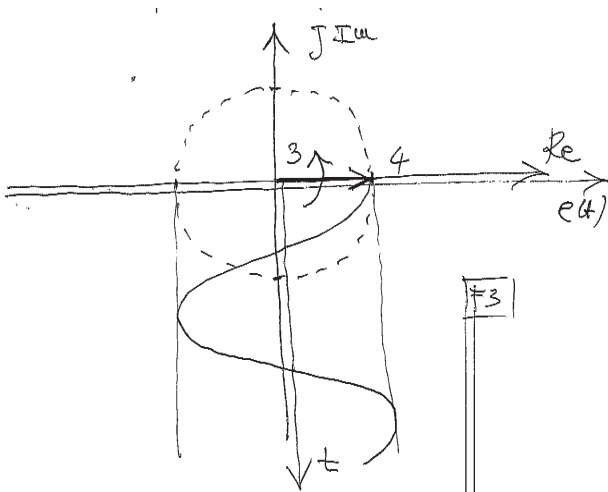
$$\text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}]$$

e' l'operatore di proiezione sull'asse reale

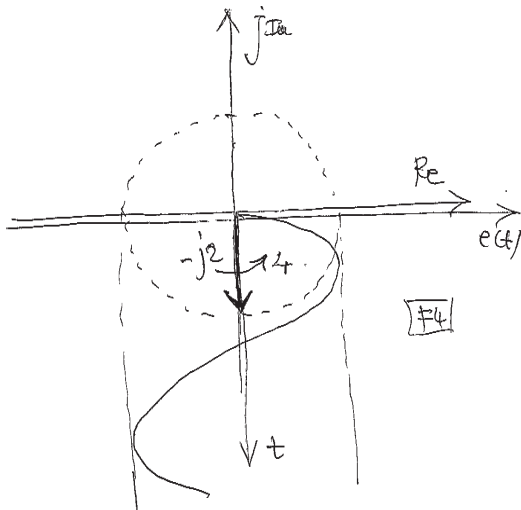


- Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 4 \cos(3t)$ e interpretare graficamente

- si ha $E_M = 4$ e $\varphi = 0$, quindi $\bar{E} = 4e^{j0} = 4$



- Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 2 \sin(4t)$ e interpretare graficamente
- si ha $2 \sin(4t) = 2 \cos(4t - \pi/2)$, quindi $E_M = 2$ e $\varphi = -\pi/2$; allora $\bar{E} = 2e^{-j\pi/2} = -j2$



Calcolo Fasoriale

- Unicità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω ; si ha $e_1(t) = e_2(t)$ per ogni t se e solo se $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$
- Linearità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω e $a, b \in \mathbb{R}$; allora $ae_1(t) + be_2(t)$ è una sinusoide a pulsazione ω con fasore $a\bar{\mathbf{E}}_1 + b\bar{\mathbf{E}}_2$
- Regola di derivazione: sia $e(t)$ una sinusoide a pulsazione ω con fasore $\bar{\mathbf{E}}$; allora $de(t)/dt$ è ancora una sinusoide a pulsazione ω con fasore $j\omega\bar{\mathbf{E}}$; quindi

$$\frac{de(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\bar{\mathbf{E}}$$

- questa importante regola implica che una operazione differenziale d/dt nel dominio del tempo si trasforma in una operazione algebrica $j\omega \times$ nel dominio di fasori; la regola è analoga a quella valida per la trasformata di Fourier

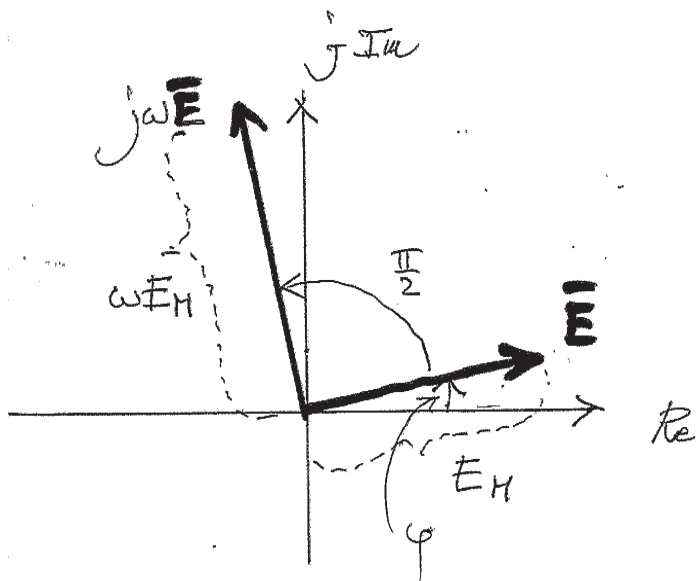
- verifica

$$\begin{aligned}\frac{de(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \{ \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \} \\ &= \text{Re} \left[\frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) \right] \\ &= \text{Re} [j\omega \bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

- graficamente

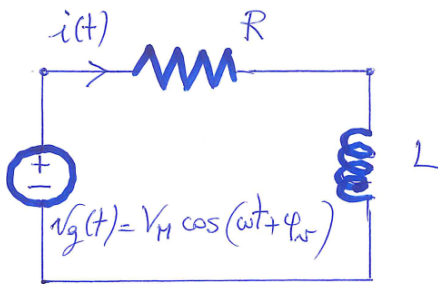
$$j\omega \bar{\mathbf{E}} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

quindi il fasore $j\omega \bar{\mathbf{E}}$ di $de(t)/dt$ ha modulo pari a ωE_M e si ottiene ruotando in senso positivo antiorario di un angolo pari a $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ di $e(t)$



Analisi in regime sinusoidale

- Consideriamo il circuito RL con generatore ideale di tensione sinusoidale $v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$. Vogliamo trovare $i(t)$ per $t \geq 0$ assumendo $i(0) = i_0$



- KV: $v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$, quindi il circuito soddisfa alla equazione differenziale affine del primo ordine

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

con $i(0) = i_0$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-t/\tau} + i_{\text{part.affine}}(t)$$

con $K \in \mathbb{R}$ e $\tau = L/R$ (costante di tempo)

- verifichiamo a breve che possiamo scegliere

$$i_{\text{part.affine}}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

quindi

$$i(t) = Ke^{-t/\tau} + I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

• il primo termine (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$) e' detto parte transitoria, mentre il secondo e' detto *risposta in regime permanente sinusoidale*; in pratica, per $t \geq 4\tau$ si ha

$$i(t) \simeq I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

e quindi, esaurito il transitorio, la *corrente nel circuito e' sinusoidale alla stessa pulsazione ω del generatore*

- determiniamo I_M e φ_i nel dominio del tempo; si ha

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) + R I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= I_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi_i) \right] \\ &= Z I_M [\cos \varphi_z \cos(\omega t + \varphi_i) - \sin \varphi_z \sin(\omega t + \varphi_i)] \\ &= Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z) \end{aligned}$$

con

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \sin \varphi_z = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{e quindi}$$

$$\tan \varphi_z = \frac{\omega L}{R}$$

- allora

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

da cui

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

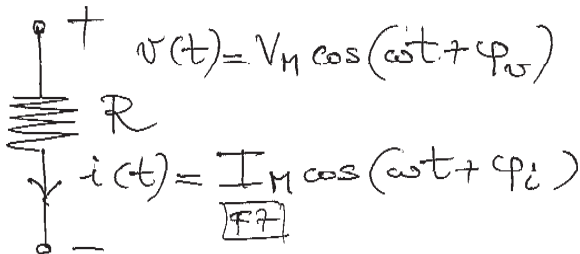
- *soluzione nel dominio del tempo e' complicata!!!*
- introduciamo *metodo dei fasori*, molto efficiente per trovare le correnti e tensioni in regime sinusoidale; attenzione, vedremo che il metodo dei fasori non permette pero' di trovare la parte transitoria delle risposta.

Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale nel dominio del tempo

- Resistore ideale R . Supponiamo $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora da legge di Ohm

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; quindi

$$V_M = RI_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

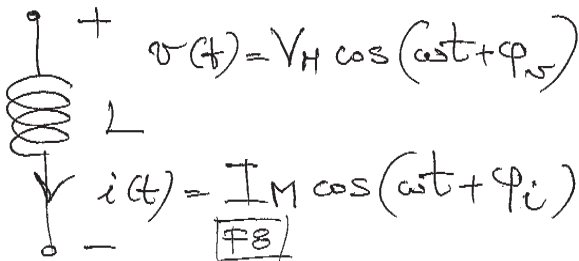


- R rappresenta la resistenza fisica (dovuta a un fenomeno dissipativo) offerta dal resistore al passaggio di una corrente; la tensione da applicare per fare scorrere tale corrente ha ampiezza $V_M = RI_M$ ed è in fase con la corrente

- Induttore ideale. In accordo alla legge di Faraday si ha

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{d\varphi_{\text{conc}}}{dt}$$

dove $\varphi_{\text{conc}} = Li$ e' il flusso concatenato



- Esperimento 1. Supponiamo che L sia percorso da una corrente costante (continua) $i(t) = I$; allora $v(t) = 0$, quindi L e' un corto circuito per le correnti costanti (interpretare fisicamente!)

- Esperimento 2. Supponiamo adesso che L sia attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = L \frac{di}{dt} \\ &= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \end{aligned}$$

- quindi

$$V_M = \omega L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

- Conclusione importante: a differenza del caso in continua, per far scorrere su L una corrente alternata di ampiezza I_M , e' necessario applicare una tensione alternata di ampiezza

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M.$$

Tale tensione e' necessaria per 'vincere' la forza contro elettromotrice che si sviluppa su L per il fenomeno dell'autoinduzione. Si ha inoltre che la tensione e' in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente

- abbiamo posto

$$X_L = \omega L; \quad [X_L] = \text{Ohm}$$

che e' detta *reattanza induttiva* e si misura in Ohm

- dato che

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} = \frac{V_M}{X_L}$$

la reattanza induttiva ha il significato fisico di *resistenza apparente che l'induttore offre al passaggio di una corrente alternata*;

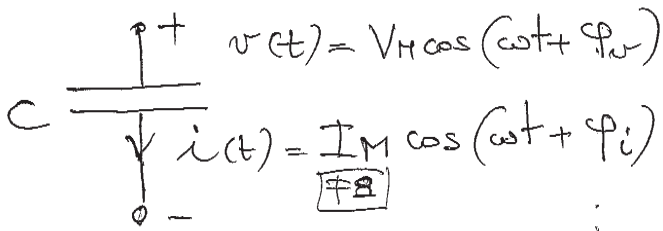
'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non e' legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo (dovuto all'autoinduzione)

- notare che $X_L = \omega L$ cresce se cresce ω ; quindi L offre resistenze apparenti tanto piu' elevate quanto ω e' elevata

- Condensatore ideale. Si ha

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = \frac{dq_c}{dt}$$

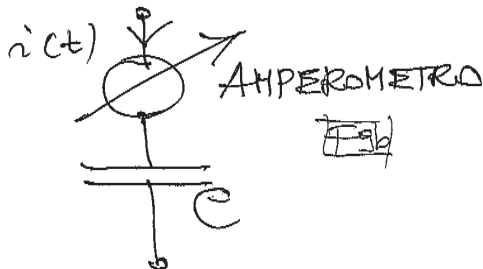
dove $q_c = Cv$ e' la carica sulle armature



Hand-drawn circuit diagram of a capacitor C . The top plate is connected to a voltage source $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ and the bottom plate is connected to a current source $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$. The current source is represented by a box containing a circle with a diagonal line through it.

- Esperimento 1. Supponiamo di applicare a C una tensione costante (continua) $v(t) = V$; allora $i(t) = 0$, quindi C e' un circuito aperto (una interruzione elettrica) per le tensioni costanti (interpretare fisicamente!)

- Esperimento 2. Supponiamo adesso di applicare a C una tensione alternata (sinusoidale) $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$; dato che la tensione varia, si ha un passaggio continuativo di cariche (elettroni) fra le armature, quindi l'amperometro misura un passaggio di corrente; ne consegue che C non e' una interruzione elettrica per le correnti alternate



- si ha

$$\begin{aligned} i(t) &= I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = C \frac{dv}{dt} \\ &= -\omega C V_M \sin(\omega t + \varphi_v) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \pi/2) \end{aligned}$$

- quindi

$$I_M = \omega C V_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{X_C}; \quad \varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2}$$

- abbiamo indicato con

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad [X_C] = \text{Ohm}$$

la *reattanza capacitiva*

- la reattanza capacitiva (si misura in Ohm) ha il significato fisico di *resistenza apparente che il condensatore offre al passaggio di una corrente alternata*; 'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non è legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo

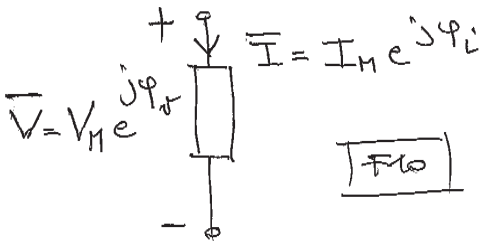
- notare che $X_C = 1/\omega C$ decresce se cresce ω ; quindi C offre resistenze apparenti tanto piu' piccole quanto ω e' elevata
- notare che vi sono diverse proprieta' duali per L e C (rifletterci).

Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale

- Consiste di due passi
- Passo 1. Determino le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori
- Passo 2. Determino l'espressione delle leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori
- facciamo vedere che otteniamo nel dominio dei fasori un circuito senza memoria che puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori

• Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione ai morsetti e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente; indichiamo con $\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v}$ il fasore della tensione e con $\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i}$ quello della corrente; come in figura, pensiamo simbolicamente che al bipolo sia applicato $\bar{\mathbf{V}}$ e vi fluisca $\bar{\mathbf{I}}$ (in questo caso coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori)

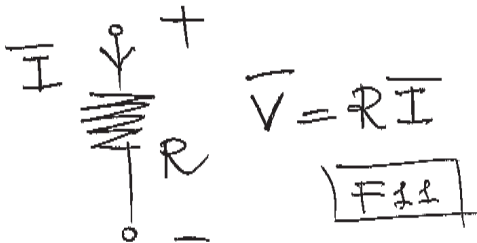


• *Relazione costitutiva del bipolo:* e' il legame che il bipolo stabilisce fra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ nel dominio dei fasori

- **Resistore ideale.** Da $v(t) = Ri(t)$, usando la linearita' della trasformata fasoriale, otteniamo

$$\bar{\mathbf{V}} = R\bar{\mathbf{I}}$$

detta legge di Ohm simbolica nel dominio dei fasori



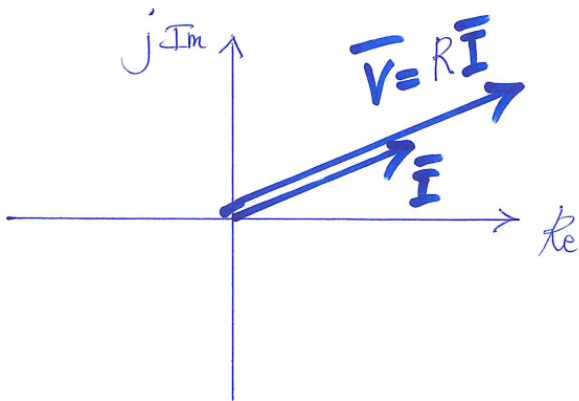
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = R\bar{\mathbf{I}} = R I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi, in accordo a quanto visto nel dominio del tempo

$$V_M = R I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

- per $R > 0$ i due fasori $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ sono *paralleli fra di loro e in fase*



• **Induttore ideale.** Da $v(t) = L di(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = jX_L \bar{\mathbf{I}}$$

• *l'induttore è quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di L è il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L = jX_L; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_L] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza è definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_L = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_L}$$

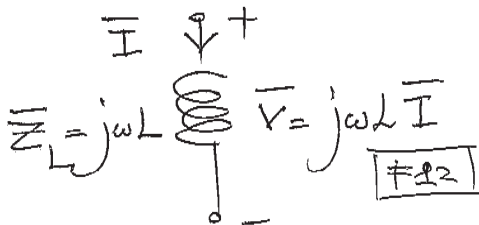
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_L} = \bar{\mathbf{Y}}_L \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per l'induttore'

- quindi, nel dominio dei fasori, l'induttore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = \omega L I_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_i}$$

quindi

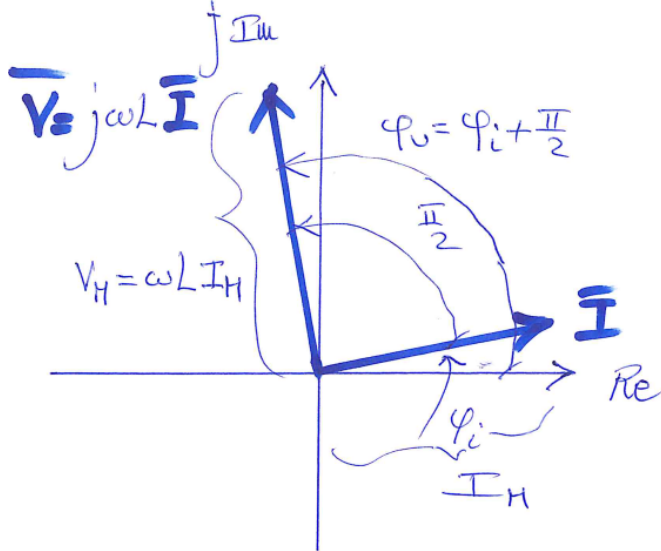
$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \omega L I_M e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

e

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{V}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{I}}$



• **Condensatore ideale.** Da $i(t) = Cdv(t)/dt$, usando la linearita' e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}}$$

• *il condensatore e' quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di C e' il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_C] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza e' definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = j\omega C$$

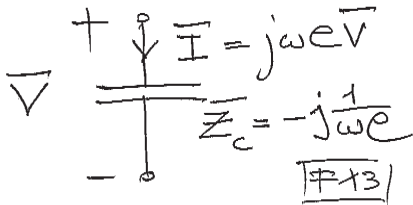
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_C \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per il condensatore'

- quindi, nel dominio dei fasori, il condensatore è un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_C = -j/(\omega C)$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}} = \omega C V_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_v}$$

quindi

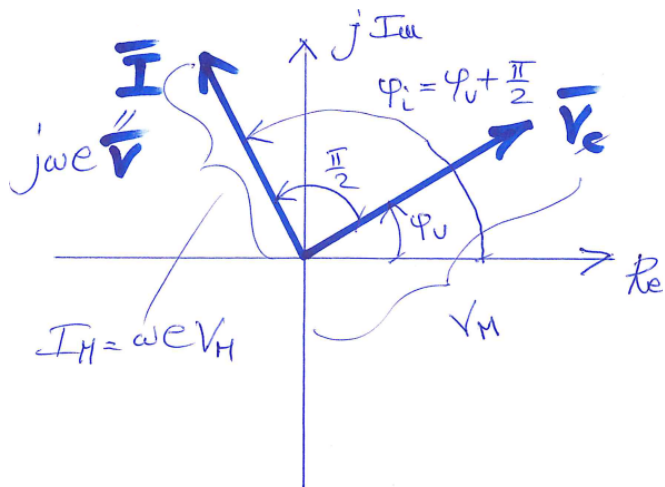
$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C V_M e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

e

$$I_M = \omega C V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{I}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{V}}$



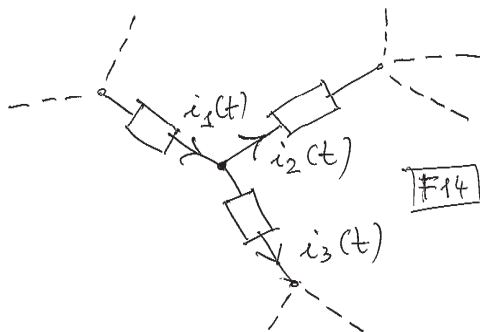
- **Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori**

- Consideriamo una rete in regime sinusoidale a pulsazione ω (tutte le correnti e tensioni, esaurito il transitorio, sono sinusoidali a pulsazione ω); consideriamo un nodo a cui sono collegati tre bipoli. Si ha dalla KI: $-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ per ogni t ; quindi

$$-\text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_2 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_3 e^{j\omega t}] = \text{Re}[(-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3) e^{j\omega t}] = 0$$

per ogni t da cui

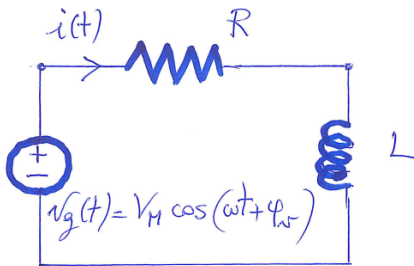
$$-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3 = 0$$



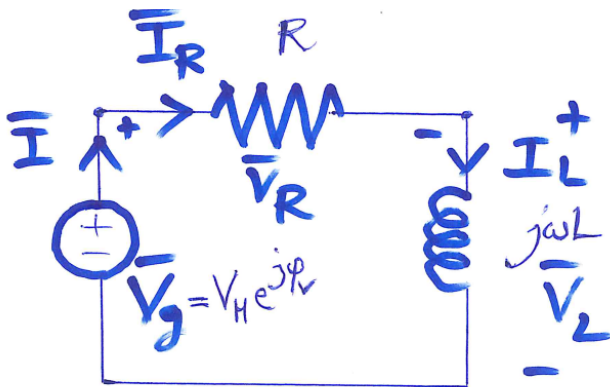
- *KI nel dominio dei fasori: i fasori delle correnti in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le correnti*
- analogamente, *KV nel dominio dei fasori: i fasori delle tensioni in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le tensioni*
- usando le relazioni costitutive e le leggi di Kirchhoff illustrate possiamo associare al circuito un *circuito simbolico* nel dominio dei fasori; il circuito simbolico e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti senza memoria visti nella Parte 1

Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori

- Consideriamo ancora il circuito RL studiato in precedenza; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Passo 1. Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



- Passo 2. Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$:

- KI: $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_R = \bar{\mathbf{I}}_L$

- KV: $\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L$

- relazioni costitutive: $\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}}_R$; $\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L\bar{\mathbf{I}}_L$

- si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}}_g = V_M e^{j\varphi_v} = (R + j\omega L)\bar{\mathbf{I}}$$

e

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L}$$

- Passo 3. Da $\bar{\mathbf{I}}$ otteniamo $i(t)$. Scriviamo $\bar{\mathbf{I}}$ in forma esponenziale

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\frac{\omega L}{R})}}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))}$$

allora

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

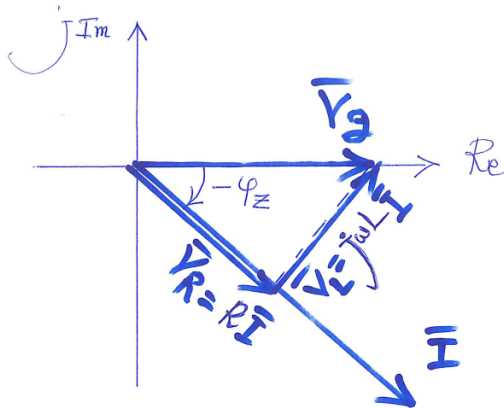
• stesso risultato ottenuto con analisi nel dominio del tempo; il procedimento nel dominio dei fasori e' molto piu' semplice e diretto

- Esercizio per casa: ripetere il Passo 3 usando invece la formula di antitrasformata fasoriale $i(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{I}} e^{j\omega t}]$

- **Diagramma fasoriale**
- Sia ad esempio $\varphi_v = 0$, quindi $\bar{\mathbf{V}}_g = V_M$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega L}{R})}$$

- si ha $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} + j\omega L\bar{\mathbf{I}}$; $R\bar{\mathbf{I}}$ e' parallelo a $\bar{\mathbf{I}}$, mentre $j\omega L\bar{\mathbf{I}}$ e' in anticipo di $\pi/2$ rispetto a $\bar{\mathbf{I}}$; possiamo allora costruire il seguente diagramma fasoriale



- **Interpretazione fisica**

- Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto combinato della resistenza Ohmica e del fenomeno dell'autoinduzione, offre al passaggio di una corrente alternata una "resistenza apparente" (impedenza) pari a

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ Ohm}$$

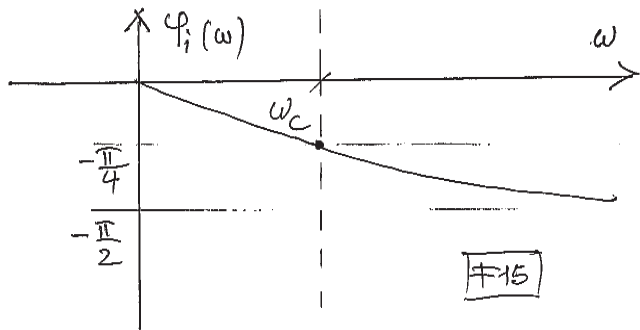
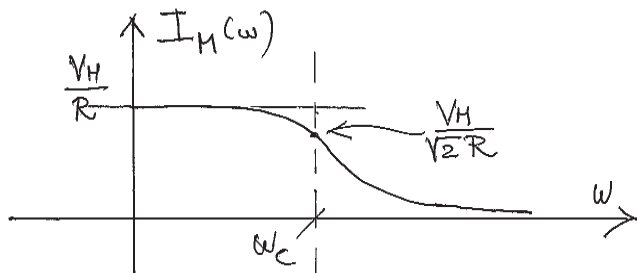
La presenza di L in serie a R provoca quindi

- 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$
- 2) uno sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\varphi_z = \arctan(\omega L/R)$ compreso fra 0 e $\pi/2$
- 3) tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' elevata

- **Risposta in frequenza**
- Supponiamo $v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$, facciamo variare ω e studiamo gli andamenti di

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- il primo degli andamenti rappresenta la risposta in ampiezza, mentre il secondo la risposta in fase; nel complesso sono la risposta in frequenza del circuito



7-15

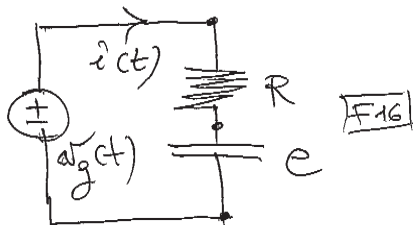
- si tratta di un filtro passa basso del primo ordine; la pulsazione critica vale

$$\omega_c = \frac{R}{L} \text{ rad/sec}$$

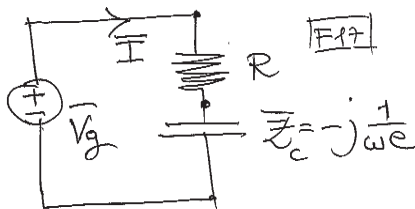
ed e' la pulsazione alla quale la risposta in ampiezza e' pari a $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ la massima risposta in ampiezza (che vale V_M/R quando $\omega = 0$)

- **Circuito RC serie**

Consideriamo il circuito RC serie in figura; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



- Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C = R\bar{\mathbf{I}} - \frac{j}{\omega C}\bar{\mathbf{I}}$$

da cui

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))}$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$

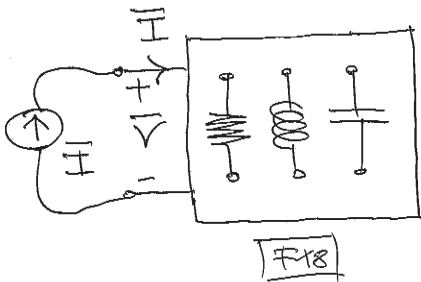
- la presenza di C in serie a R provoca
 - 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$
 - 2) uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\arctan(1/(\omega CR))$ compreso fra 0 e $\pi/2$
 - 3) tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' bassa
- studiare la risposta in frequenza del filtro e mostrare che e' un passa alto del primo ordine con pulsazione critica $\omega_c = 1/(RC)$

Impedenza e ammettenza di un bipolo

• Consideriamo un bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω contenente R, L, C (no generatori ind.ti di tensione e corrente); l'impedenza

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \text{ Ohm}$$

e' definita in modo analogo alla resistenza equivalente di un bipolo



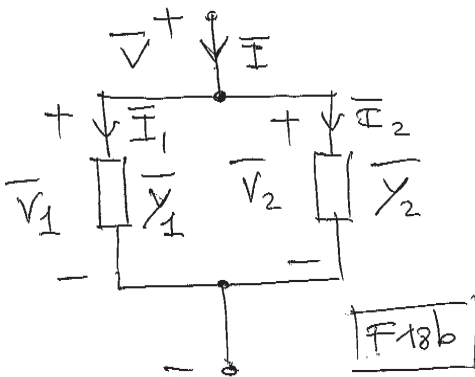
- l'ammettenza del bipolo e' il reciproco dell'impedenza

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{\bar{\mathbf{I}}}{\bar{\mathbf{V}}} \text{ Ohm}^{-1}$$

- si puo' dimostrare che

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}}; \quad \bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Y}}}$$

- Le regole per il calcolo delle impedenze e ammettenze sono perfettamente analoghe a quelle per il calcolo delle resistenze equivalenti; ad esempio, per due bipoli in parallelo si ha $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \bar{V}$, quindi $\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$



- *Forma algebrica:*

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

dove $R(\omega)$ in Ohm e' detta resistenza mentre $X(\omega)$ in Ohm e' detta reattanza

-

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

dove $G(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta conduttanza mentre $B(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta suscettanza

- *formule di trasformazione:* si ha

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

quindi

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- studiare anche le trasformazioni inverse

- *Forma esponenziale:*

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z}$$

dove Z in Ohm e' il modulo dell'impedenza e φ_z e' l'argomento

-

$$\bar{\mathbf{Y}} = Y e^{j\varphi_y}$$

dove Y in Ohm^{-1} e' il modulo dell'ammettenza e φ_y e' l'argomento

- *formule di trasformazione:*

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

- Ulteriori trasformazioni:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e, se $\bar{\mathbf{Z}} \neq 0$, φ_z e' tale che

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad \sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

quindi

$$\tan \varphi_z = \frac{X}{R}$$

- viceversa

$$R = Z \cos \varphi_z; \quad X = Z \sin \varphi_z$$

- studiare le rimanenti formule di trasformazione

Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale

- Consideriamo un bipolo di cui si conosce $\bar{\mathbf{Z}}$ o $\bar{\mathbf{Y}}$
- nota $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ vogliamo trovare $v(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{I}} = Z e^{j\varphi_z} I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi

$$V_M = Z I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \varphi_z$$

e

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

- nota $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ vogliamo trovare $i(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{V}} = Y e^{j\varphi_y} V_M e^{j\varphi_v}$$

quindi

$$I_M = Y V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \varphi_y$$

e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y)$$

- possiamo anche scrivere

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$$

Osservazione: si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}}$$

e quindi

$$Z = \frac{V_M}{I_M}; \quad \varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

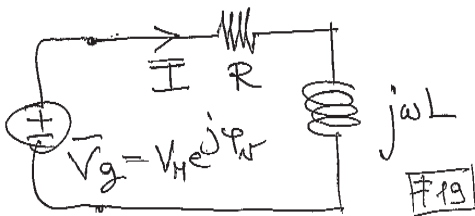
- il modulo dell'impedenza coincide con il rapporto delle ampiezze di tensione e corrente del bipolo; l'argomento dell'impedenza coincide con lo sfasamento tensione corrente
- studiare formule analoghe in relazione all'ammettenza

- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RL ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

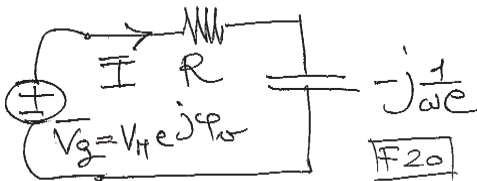


- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RC ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctan(1/(\omega CR))}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$



Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo

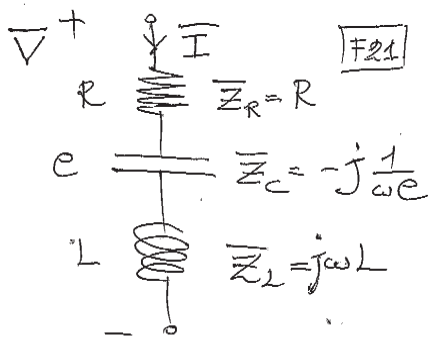
- Consideriamo l'impedenza

$$\bar{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

e supponiamo che il bipolo sia passivo ($R(\omega) > 0$)

- l'impedenza e' di tipo *ohmico-induttivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \geq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in ritardo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- l'impedenza e' di tipo *ohmico-capacitivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \leq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in anticipo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- come vedremo, l'impedenza di un bipolo puo' essere di tipo ohmico induttivo per certi valori di ω e di tipo ohmico capacitivo per altri valori di ω

- **Circuiti risonanti RLC**
- Consideriamo il circuito risonante RLC serie in figura in regime sinusoidale a pulsazione ω



- l'impedenza vale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

- c'è un effetto di cancellazione fra X_L e X_C

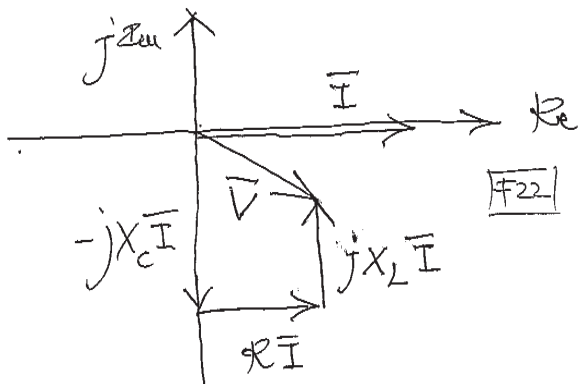
- *pulsazione di risonanza* ω_0 : pulsazione alla quale $X_L = X_C$, cioè' $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$; quindi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

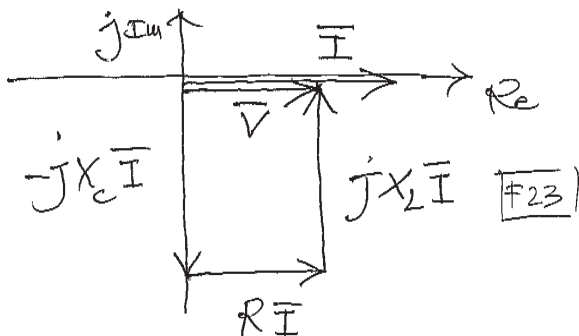
- *diagrammi fasoriali*. Supponiamo scorra una corrente $\bar{\mathbf{I}}$ con $\varphi_i = 0$; vogliamo costruire graficamente la tensione $\bar{\mathbf{V}}$ da applicare per far scorrere tale corrente; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} - jX_C\bar{\mathbf{I}} + jX_L\bar{\mathbf{I}}$$

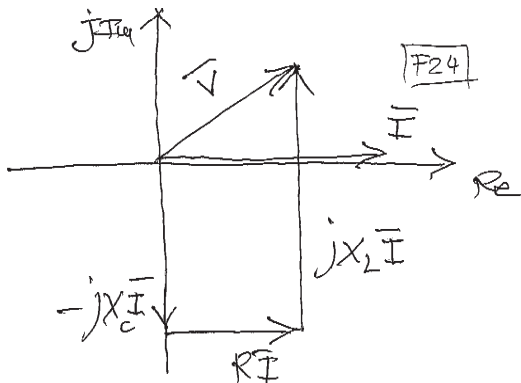
- 3 casi diversi
- Caso 1. $\omega < \omega_0$; in tal caso $X_L < X_C$, $X < 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico capacitivo (corrente anticipa tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Caso 2. $\omega = \omega_0$; in tal caso $X_L = X_C$, $X = 0$ e $\bar{\mathbf{Z}} = R$; quindi il comportamento e' di tipo resistivo (corrente in fase con la tensione)



- Caso 3. $\omega > \omega_0$; in tal caso $X_L > X_C$, $X > 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico induttivo (corrente ritarda rispetto alla tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Notare che un circuito RLC cambia drasticamente il suo comportamento al variare di ω passando da un comportamento ohmico-capacitivo ad uno resistivo e infine a uno ohmico-capacitivo

- Si ha

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$$

con

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi_z(\omega) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

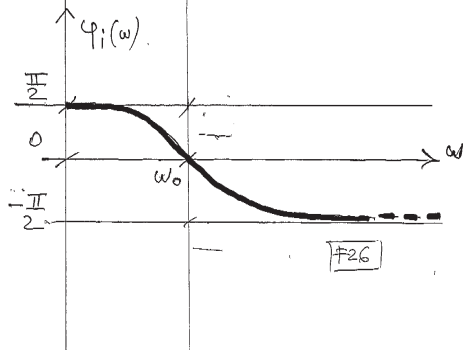
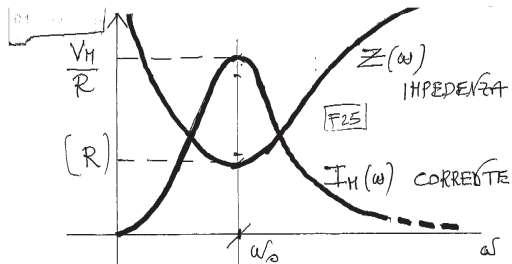
- la corrente assorbita in regime sinusoidale vale

$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$ con

$$I_M(\omega) = \frac{V_M(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_M(\omega)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

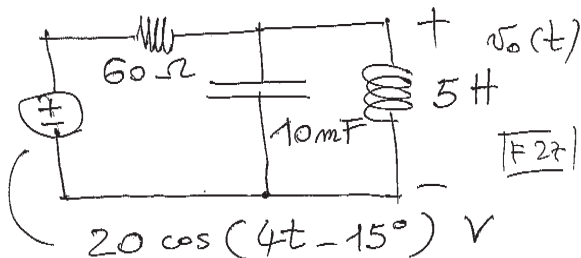
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v(\omega) - \varphi_z(\omega) = \varphi_v(\omega) - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- *risposta in frequenza*; assumiamo per semplicità' $V_M(\omega) = V_M$ e $\varphi_v(\omega) = 0$ e disegniamo gli andamenti della risposta in ampiezza $I(\omega)$ e in fase $\varphi_i(\omega)$; riportiamo anche per convenienza $Z(\omega)$

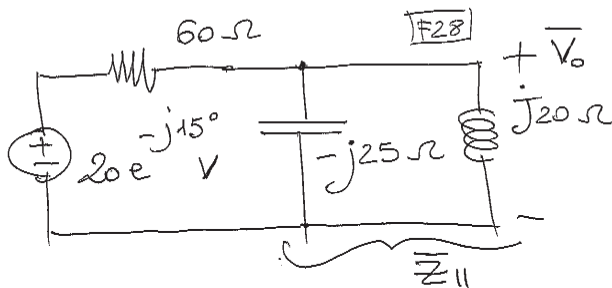


- si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine; notare che *un circuito RLC serie offre la minima impedenza alla pulsazione ω_0 di risonanza, pulsazione alla quale l'ampiezza della corrente assorbita risulta massima.*

Esempio. Determinare $v_o(t)$ in regime sinusoidale per il circuito in figura.



- Notare che la fase della tensione del generatore e' espressa in gradi invece che in radianti; nei calcoli che seguono dobbiamo comportarci di conseguenza



- Si ha

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ohm}; \quad X_L = \omega L = 20 \text{ Ohm}$$

quindi otteniamo il circuito simbolico in figura che possiamo analizzare con i metodi delle reti resistive; in particolare

$$\overline{Z}_{||} = -j25 || j20 = j100 \text{ Ohm}$$

- dalla regola del partitore di tensione

$$\bar{\mathbf{V}}_o = 20e^{-j15^\circ} \times \frac{j100}{60 + j100} = 17.15e^{j16^\circ} \text{ V}$$

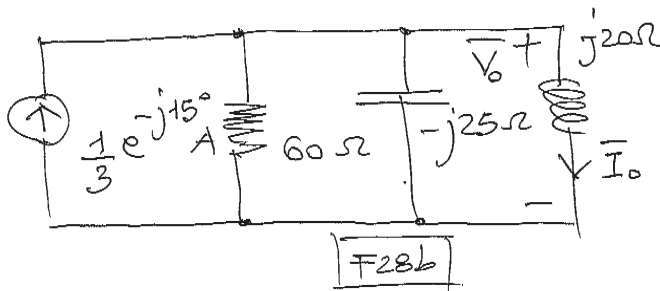
- la tensione in regime sinusoidale vale quindi

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 16^\circ) \text{ V.}$$

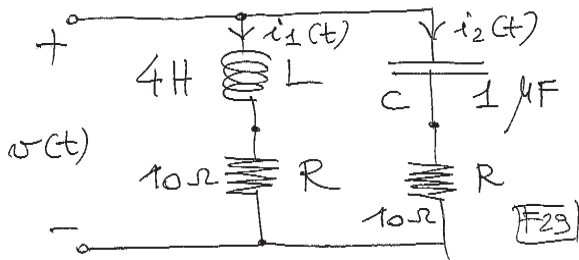
- Metodo alternativo: trasformo il generatore reale di tensione in uno reale di corrente a trovo $\bar{I}_o$ con la regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_o = \frac{e^{-j15^\circ}}{3} \frac{\frac{1}{j20}}{\frac{1}{60} + \frac{1}{-j25} + \frac{1}{j20}}$$

e poi $\bar{V}_o = j20\bar{I}_o$; verificare che si ottiene lo stesso risultato precedente



- **Esempio.** Determinare ω in modo che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in regime sinusoidale.



- da cui $X_L = X_C$ ossia

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/sec}$$

- problema: disegnare un diagramma fasoriale alla ω ottenuta assumendo $\varphi_v = 0$ e interpretare il risultato.