

Potenza in regime sinusoidale

Mauro Forti

October 21, 2020

Potenza in regime sinusoidale

- Valore efficace di una grandezza sinusoidale
- Data $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$, il suo valore quadratico medio e'

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = V_M^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{V_M^2}{2}$$

dove la media e' calcolata sul periodo $T = 2\pi/\omega$ della sinusoide

- il valore efficace ('root mean square (rms)') e' definito come

$$V_{\text{rms}} = V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 V_M$$

- e' utile per esprimere potenze in regime sinusoidale
- se $V_M = 310 \text{ V}$ si ha $V = 220 \text{ V}$

Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C

• Resistore Ideale

- Consideriamo un resistore ideale R soggetto a $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e quindi attraversato da $i(t) = V_M \cos(\omega t)/R$
- la potenza istantanea assorbita in regime sinusoidale in Watt e'

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \geq 0$$

- consideriamo adesso la *potenza media assorbita da R in un periodo T*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

quindi

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{V^2}{R} = R I^2 = V I > 0$$

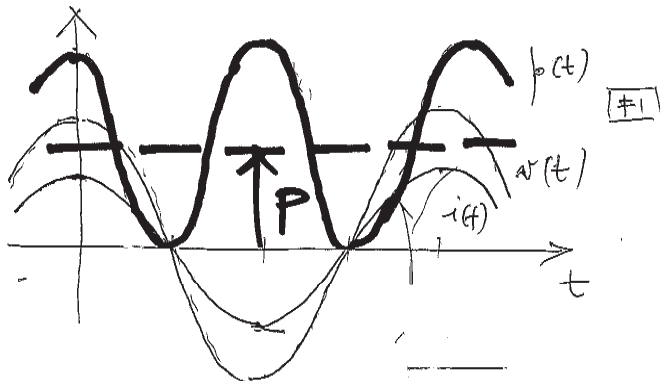
- la quantità P e' detta *potenza attiva e si misura in Watt*

- si ha

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt = E = \text{energia in Joule}$$

- quindi E in Joule e' l'energia elettrica assorbita dal resistore in un periodo; tale energia e' trasformata in altre forme di energia dal resistore (ad esempio, calore, luce, etc.)
- se conosco la potenza attiva posso trovare quindi l'energia elettrica trasferita al bipolo in modo irreversibile; la potenza attiva viene anche detta potenza reale o potenza utilizzata
- consideriamo ad esempio una stufa da 1 kW alimentata alla frequenza $f = 50$ Hz. Il periodo e' $T = 20$ msec. L'energia assorbita dalla stufa e trasformata integralmente in calore in un periodo a' pari a $1000 \times 20 \times 10^{-3} = 20$ Joule. L'energia assorbita in un secondo vale $50 \times 20 = 1000$ joule e quella assorbita in un'ora e' $3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6$ Joule, che corrisponde per definizione a 1 kWh (chilowattora)

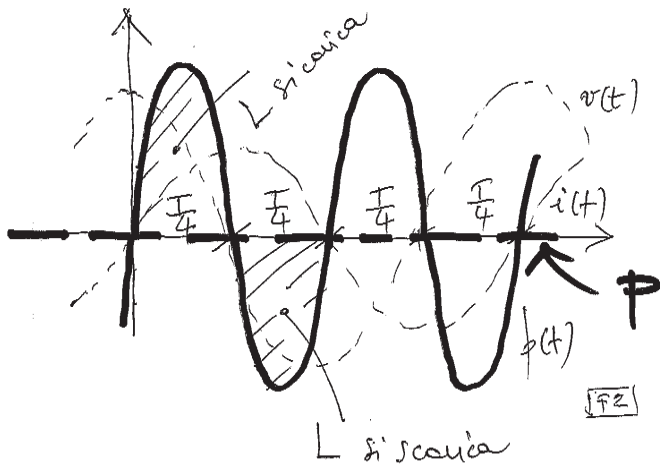
- la figura che segue riporta i diagrammi di $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ e la quantità P .



- **Induttore ideale**

- Sia ancora $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che
 $i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{V_M^2}{2\omega L} \sin(2\omega t) \text{ W}$$



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ l'induttore assorbe energia ($p(t) \geq 0$) ma nel secondo quarto dà indietro tutta l'energia assorbita nel primo quarto ($p(t) \leq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- la potenza attiva assorbita da L vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M^2}{2\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta L e campo magnetico di L ; tecnicamente è importante misurare tale scambio energetico; ciò viene fatto introducendo la *potenza reattiva* dell'induttore

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M = VI = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi)

- si può mostrare che

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$$

dove

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt$$

è l'energia media del campo magnetico di L ; quindi Q_L è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} E_L^{\text{media}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{4} LI_M^2 \text{ Joule} \end{aligned}$$

mentre, come visto, $Q_L = \frac{1}{2} \omega LI_M^2$.

- possiamo pensare a Q_L come una misura convenzionale della potenza che si deve impegnare per creare il campo magnetico dell'induttore

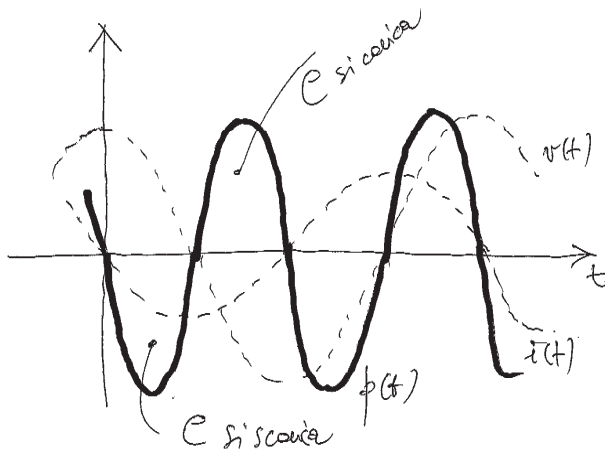
- **Condensatore ideale**

- Vale una trattazione duale rispetto a quella dell'induttore. Sia

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che

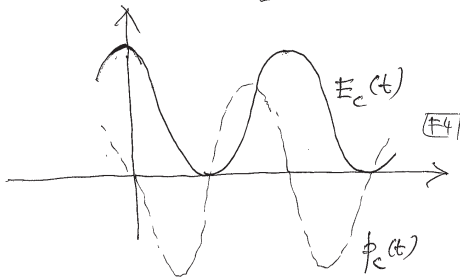
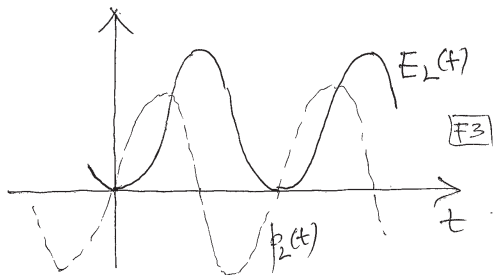
$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_M \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t) \text{ W}$$



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ il condensatore eroga energia ($p(t) \leq 0$) mentre nel secondo quarto assorbe una quantità di energia pari a quella erogata nel primo quarto ($p(t) \geq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- notare che L e C scambiano energia con il generatore con fasi esattamente opposte

- cio' e' confermato dai diagrammi che seguono che mostrano la potenza istantanea assorbita da L ($p_L(t)$), quella assorbita da C ($p_C(t)$) e l'energia $E_L(t)$ e $E_C(t)$



- la potenza attiva assorbita da C vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi e' uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta C e campo elettrico di C ; tale scambio energetico viene misurato convenzionalmente con la *potenza reattiva* del condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -VI = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unita' di misura i VAR (volt-ampere reattivi)
- notare che si attribuisce convenzionalmente segno negativo a Q_C ; in effetti in un circuito gli induttori hanno bisogno di impegnare (assorbire) potenza reattiva per creare il loro campo magnetico, mentre i condensatori funzionano da sorgenti (erogano) potenza reattiva

- si ha

$$Q_C = -2\omega E_C^{\text{media}}$$

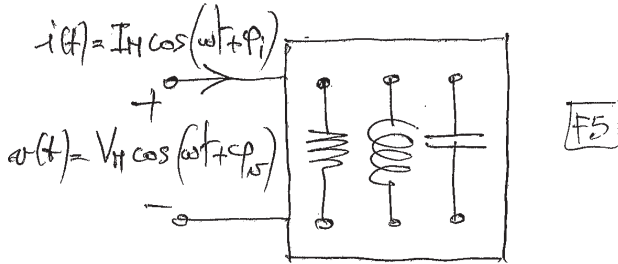
dove

$$E_C^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \quad \text{Joule}$$

e' l'energia media del campo elettrico di C ; quindi Q_C e' proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo elettrico in T e dipende anche dalla velocita' con cui tale scambio avviene.

Potenza in regime sinusoidale per un bipolo generico

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente coordinata secondo la convenzione degli utilizzatori; vogliamo studiare la potenza in regime sinusoidale che viene assorbita dal bipolo



- la *potenza istantanea assorbita dal bipolo in regime sinusoidale* vale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \quad W$$

- siamo interessati alla *potenza media* su un periodo $T = 2\pi/\omega$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

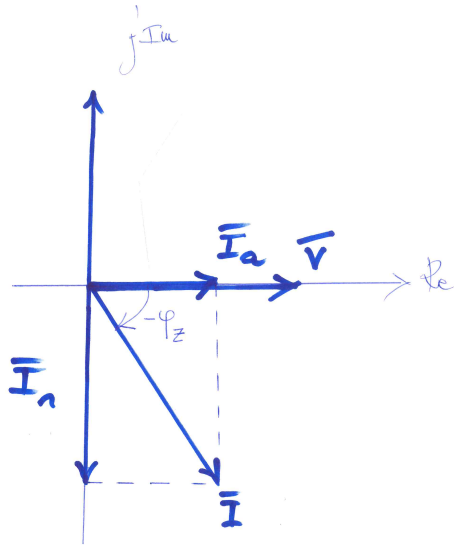
- la *potenza media*, misurata in Watt, e' detta anche *potenza attiva* o *potenza reale* e ha, come per il resistore, un importante significato fisico; infatti

$$PT = \int_0^T p(t) dt = E$$

dove E e' l'energia elettrica in Joule che viene trasferita irreversibilmente e assorbita dal bipolo in un periodo T ; se conosciamo la *potenza attiva* siamo quindi capaci di trovare l'energia utilizzata dal bipolo in T , energia che viene trasformata in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)

Espressione della potenza attiva e reattiva di un bipolo generico

- Consideriamo un bipolo di tipo ohmico-induttivo di impedenza $\bar{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$. Applichiamo $v(t) = V_M \cos(\omega t)$, quindi $\bar{V} = V_M$ e' un vettore diretto lungo l'asse orizzontale. Come noto la corrente $\bar{I}$ e' in ritardo di un angolo $-\varphi_Z$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione
- proiettiamo $\bar{I}$ lungo una direzione parallela a $\bar{V}$ e una direzione ortogonale a $\bar{V}$. Otteniamo $\bar{I}_a$, detta componente di $\bar{I}$ in fase con $\bar{V}$ (o *componente attiva della corrente*), e $\bar{I}_r$, detta componente di $\bar{I}$ ortogonale a $\bar{V}$, o in ritardo rispetto a $\bar{V}$ di $\pi/2$ (o *componente reattiva della corrente*)



- si ha $\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_r$ e quindi $i(t) = i_a(t) + i_r(t)$, dove $i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$ and $i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) = I_{rM} \sin(\omega t)$
- si ha inoltre

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = P_a + P_r \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_r(t)dt \end{aligned}$$

dove P_a e' la potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione e P_r e' la potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura

- valutiamo P_a ; si ha

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_M I_{aM} + \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) \right] dt \end{aligned}$$

- quindi

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0 \quad W$$

- quindi *la componente attiva della corrente trasporta potenza attiva (e quindi energia utile al carico)*
- valutiamo adesso P_r ; si ha

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{rM} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{rM} \sin(2\omega t) dt \end{aligned}$$

quindi

$$P_r = 0 \quad W$$

- *indipendentemente dalla sua ampiezza, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva al carico; quindi ad essa non e' associato un trasferimento di energia utile al carico*

- la componente reattiva della corrente e' detta anche *corrente oziosa* o *corrente swattata*
- da un punto di vista fisico la corrente reattiva modella uno scambio reversibile di energia, a media nulla su un periodo, fra generatore che alimenta il bipolo e campi elettrici e magnetici all'interno del bipolo (vedremo meglio con teorema di Boucherot)
- come misura convenzionale di tale scambio reversibile a media nulla si introduce la *potenza reattiva*

$$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r > 0 \quad \text{VAR}$$

- la potenza reattiva corrisponde a *potenza scambiata ma non utilizzata*; per tale motivo Q viene misurata in VAR
- la trattazione nel caso ohmico capacitivo e' analoga; si attribuisce pero' segno negativo alla potenza reattiva, cioe'

$$Q_r = -\frac{1}{2} V_M I_{rM} = -V I_r < 0 \quad \text{VAR}$$

Conclusione

- Lo stato relativo al trasferimento energetico in regime sinusoidale verso il bipolo consta di due contributi:

1) Trasferimento irreversibile di energia elettrica (energia utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza attiva

$$P = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = VI_a = VI \cos(\varphi_z) = VI \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad W$$

2) vi è sovrapposto uno scambio reversibile di energia elettrica a media nulla su un periodo (energia scambiata ma non utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza reattiva

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = VI_r = VI \sin(\varphi_z) = VI \sin(\varphi_v - \varphi_i) \quad VAR$$

Potenza apparente

- Si introduce la *potenza apparente*

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = VI \quad \text{VA}$$

che si misura convenzionalmente in volt-ampere (VA)

- si ha

$$P = A \cos(\varphi_z), Q = A \sin(\varphi_z)$$

e

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

cioe' la potenza apparente e' una combinazione di potenza attiva e reattiva

- notare che se $P, Q \neq 0$ allora si $A > P, Q$

Espressioni della potenza istantanea

- Si ha

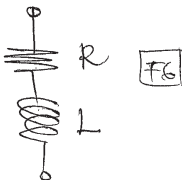
$$\begin{aligned}
 p(t) = v(t)i(t) &= V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

- $p(t)$ ha un termine costante P pari alla potenza attiva e un termine variabile a pulsazione 2ω con ampiezza pari alla potenza apparente
- il termine variabile della potenza istantanea puo' causare problemi; p. es. un alternatore richiede una coppia pulsante per funzionare a frequenza costante; inoltre, lo stesso termine origina vibrazioni meccaniche indesiderabili

- **Esempio** Consideriamo un bipolo dato da L in serie R



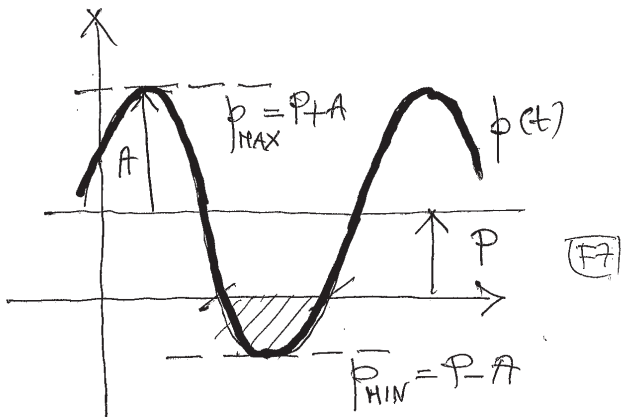
- in questo caso $P = P_R > 0$, $Q = Q_L > 0$ e $A > P, Q$;
l'andamento qualitativo della potenza istantanea $p(t)$ e' riportato in figura
- si noti che $p(t)$ varia fra un massimo

$$p_{\max} = P + A = P + \sqrt{P^2 + Q^2} \quad W$$

e un minimo

$$p_{\min} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0 \quad W$$

- ci sono intervalli di tempo in cui $p(t) < 0$; interpretare fisicamente cosa accade in tali intervalli



Espressioni della potenza attiva e reattiva

- Consideriamo un bipolo di impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e ammettenza $\bar{Y} = G + jB$. Siano $\bar{V}$ e $\bar{I}$ i fasori di tensione e corrente coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori. La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere espressa in una delle seguenti forme equivalenti

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2 \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2
 \end{aligned}$$

- verifica: si ha

$$\bar{V} \bar{I}^* = V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_M I_M e^{j\varphi_z}$$

- inoltre

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z} \bar{I} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} I_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Z}]$$

e

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} (\bar{Y} \bar{V})^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Y}^*]$$

- analogamente, per la potenza reattiva assorbita dal bipolo si ha

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} V_M I_M \sin \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{V} \bar{I}^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{Y}] V_M^2 = -\frac{1}{2} B V_M^2 \end{aligned}$$

dove l'asterisco denota il complesso coniugato

Potenza Complessa

- Definiamo la *potenza complessa*

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \quad VA$$

- si ha

$$\bar{P} = P + jQ$$

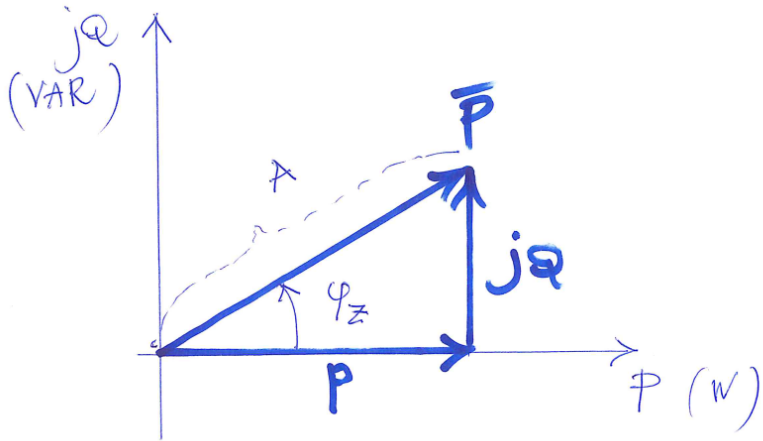
- inoltre

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

e quindi

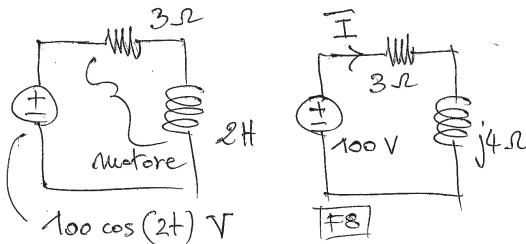
$$\bar{P} = A e^{j\varphi_z}$$

- riassumendo: la potenza complessa ha come parte reale la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva; ha come modulo la potenza apparente e come argomento l'argomento dell'impedenza



- il trasferimento di potenza in regime sinusoidale può essere caratterizzato in modo completo riportando nel piano complesso $\bar{P}$, P , Q , A e φ_z . Otteniamo così il triangolo delle potenze (che è simile a quello delle impedenze)
- in questo contesto il piano complesso è inteso come piano delle potenze. La potenza attiva P (Watt) è sull'asse reale e rappresenta una cessione irreversibile di energia al carico; la potenza reattiva Q (VAR) è sull'asse immaginario e rappresenta uno scambio reversibile di energia con i campi elettrici e magnetici del carico
- ricordiamoci anche che la potenza attiva è il tramite con cui si trasforma energia elettrica in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)
- si noti in particolare che il triangolo rettangolo P, Q, A rappresenta geometricamente la nota relazione $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Esempio. Determinare la potenza istantanea, attiva e reattiva fornita dal generatore al motore.



- Consideriamo il circuito simbolico per il quale si ha

$$P = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

- si ha

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = 12 - j16 \text{ A}$$

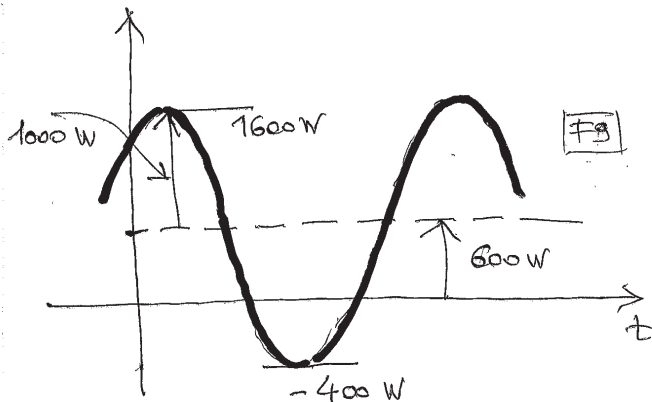
quindi

$$P = \frac{1}{2} 100(12 + j16) = 600 + j800 \text{ VA}$$

- allora $P = 600 \text{ W}$, $Q = 800 \text{ VAR}$
- si ha inoltre $A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA}$ e
 $\varphi_z = \arctan(4/3) \simeq 53^\circ$; allora

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_z) = 600 + 1000 \cos(4t - 53^\circ) \text{ W}$$

- notare che $p(t)$ varia fra un massimo $p_{\max} = P + A = 1600 \text{ W}$ e un minimo $p_{\min} = P - A = -400 \text{ W}$.



Potenza complessa degli elementi fondamentali

- Resistore ideale
- si ha

$$\bar{P}_R = P_R + jQ_R = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}R\bar{I}\bar{I}^* = \frac{1}{2}RI_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_R = \frac{1}{2}RI_M^2 = \frac{1}{2}GV_M^2 = RI^2 = GV^2 \quad \text{W}$$

e

$$Q_R = 0 \quad \text{VAR}$$

- un resistore ideale assorbe solo potenza attiva, mentre la potenza reattiva impegnata e' nulla (non vi e' energia scambiata)

- Induttore ideale
- si ha

$$\bar{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}j\omega L\bar{I}\bar{I}^* = j\frac{1}{2}\omega LI_M^2 \quad VA$$

quindi

$$P_L = 0 \quad W$$

e

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega LI_M^2 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{\omega L} = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad VAR$$

- un induttore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

- Condensatore ideale
- si ha

$$\bar{P}_C = P_C + jQ_C = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{V}(j\omega C\bar{V})^* = -j\frac{1}{2}\omega CV_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_C = 0 \quad \text{W}$$

e

$$Q_C = -\frac{1}{2}\omega CV_M^2 = -\frac{1}{2}\frac{I_M^2}{\omega C} = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \quad \text{VAR}$$

- un condensatore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

- mettiamo anche in evidenza che un induttore ha una potenza reattiva positiva. Tale potenza e' impegnata per creare il campo magnetico dell'induttore
- invece un condensatore ha una potenza reattiva negativa, e' cioe' una sorgente di potenza reattiva (una sorgente di potenza magnetizzante)
- quando L e C sono presenti in uno stesso circuito, la potenza reattiva necessaria a L puo' essere in parte, o completamente, fornita da C ; discuteremo ulteriormente questo fatto in relazione al problema del rifasamento di carichi industriali

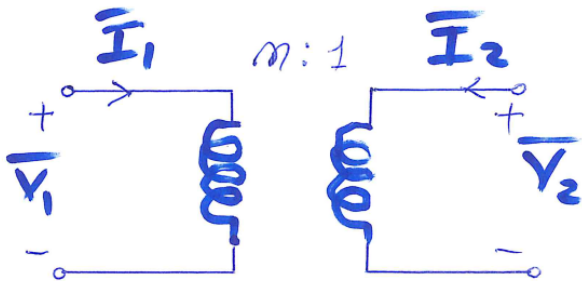
- Trasformatore ideale
- consideriamo un trasformatore ideale e cioè' una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = n v_2(t)$$

e

$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)$$

dove $n = N_1/N_2$ e' il rapporto di trasformazione (N_1 e N_2 sono le spire del primo e secondo avvolgimento)



- sappiamo che $p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t)(-\frac{1}{n}i_2(t)) + v_2(t)i_2(t) = 0$ per ogni t , quindi il trasformatore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = n\bar{V}_2, \bar{I}_1 = -\frac{1}{n}\bar{V}_2$$

- la potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned}\bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{I}_1^* + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2}n\bar{V}_2(-\frac{1}{n}\bar{I}_2^*) + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* = 0 \quad \text{VA}\end{aligned}$$

- quindi un trasformatore ideale e' trasparente sia alla potenza attiva che alla potenza reattiva

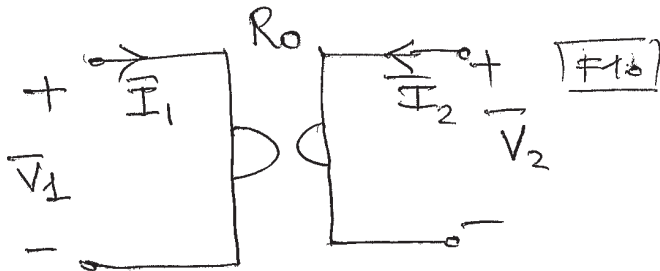
- Giratore ideale
- consideriamo un giratore ideale e cioè una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = -R_0 i_2(t)$$

e

$$v_2(t) = R_0 i_1(t)$$

dove R_0 in Ohm e' il rapporto di girazione



- sappiamo che anche il giratore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = -R_0 \bar{I}_2, \bar{V}_2 = R_0 \bar{I}_1$$

- la potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned} \bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2} \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* \\ &= -\frac{1}{2} R_0 \bar{I}_2 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} R_0 \bar{I}_1 \bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2} R_0 [\bar{I}_1 \bar{I}_2^* - \bar{I}_1^* \bar{I}_2] \\ &= jR_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad VA \end{aligned}$$

- quindi un giratore ideale e' trasparente alla potenza attiva ($P = 0$); non e' invece trasparente alla potenza reattiva che vale

$$Q = R_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad \text{VAR.}$$

Teorema di Boucherot (conservazione della potenza attiva, reattiva e complessa)

- Consideriamo una rete con ℓ bipoli in regime sinusoidale a pulsazione ω . Utilizziamo per ogni bipolo k la convezione degli utilizzatori per coordinare i fasori $\bar{V}_k$ e $\bar{I}_k$. Si ha allora (teorema di Boucherot)

$$\sum_{k=1}^{\ell} \bar{P}_k = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \sum_{k=1}^{\ell} (P_k + jQ_k) = 0 \quad \forall A$$

vale cioè' la *conservazione della potenza complessa*

- ne consegue che vale anche la conservazione di potenza attiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} P_K = 0 \quad W$$

e della potenza reattiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_K = 0 \quad VAR$$

- in un circuito in cui sono presenti R, L, C e un certo numero di generatori di tensione e/o corrente possiamo scrivere

$$\sum_{\text{gen.ri}} P_{s,i} = \sum_{\text{resistori}} P_{R_i} = \sum_{\text{resistori}} R_i I_i^2 \quad W$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\text{gen.ri}} Q_{s,i} &= \sum_{\text{induttori}} Q_{L_i} + \sum_{\text{condensatori}} Q_{C_i} \\ &= \sum_{\text{induttori}} \omega L_i I_i^2 + \sum_{\text{condensatori}} (-\omega C_i V_i^2) \\ &= 2\omega \left[\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} - \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}} \right] \quad VAR \end{aligned}$$

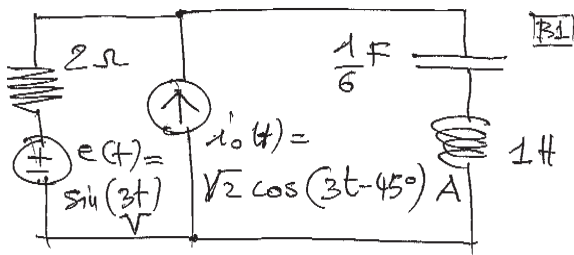
dove $P_{s,i}$ (risp., $Q_{s,i}$) e' la potenza attiva (risp., potenza reattiva) erogata dal generatore i -esimo

- notare che, nel complesso, i generatori non hanno bisogno di erogare potenza reattiva al circuito se L e C si compensano, cioè l'energia media di tipo elettrico è pari a quella di tipo magnetico

$$\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} = \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}}$$

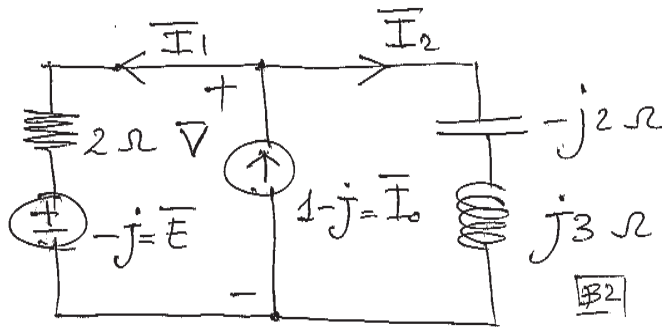
- ciò accade ad esempio in condizioni di risonanza.

Esempio. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura



- consideriamo il circuito simbolico associato e usiamo il teorema di Millmann per determinare $\bar{V}$; si ha

$$\bar{V} = \frac{-\frac{j}{2} + 1 - j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}} = \frac{8 + j}{5} \text{ V}$$



• allora

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V} + j}{2} = \frac{4 + j3}{5} \text{ A}$$

e

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 - \bar{I}_1 = \frac{1 - j8}{5} \text{ A}$$

- la potenza *erogata* dal generatore di corrente vale

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}_0^* = \frac{7 + j9}{10} \text{ VA}$$

e quella erogata dal generatore di tensione

$$\bar{P}_e = -\frac{1}{2} \bar{E} \bar{I}_1^* = \frac{3 + j4}{10} \text{ VA}$$

- inoltre la potenza assorbita dal resistore vale

$$P_R = \frac{1}{2} 2 I_{1M}^2 = 1 \text{ W}$$

quella assorbita da L vale

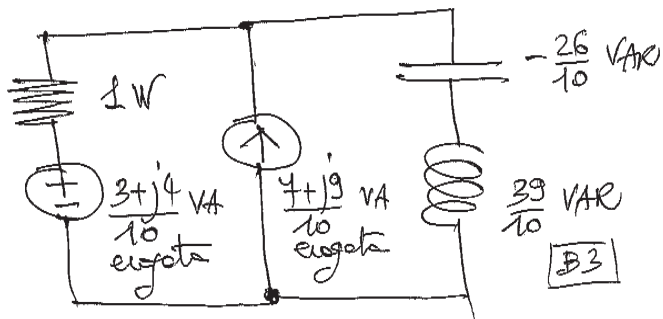
$$Q_L = \frac{1}{2} 3 I_{2M}^2 = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

e quella assorbita da C

$$Q_C = -\frac{1}{2} 2 I_{2M}^2 = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

- e' verificato il teorema di Boucherot

- conviene riportare quanto ottenuto in una figura



Alcune convenzioni

- Abbiamo definito

$$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} \text{ A}$$

- a volte utilizzeremo negli esercizi questa notazione

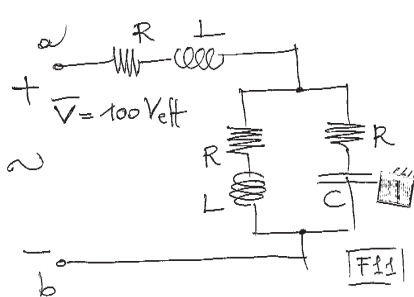
$$\bar{I} = I_{\text{rms}} e^{j\varphi_i} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi_i} = I e^{j\varphi_i} \text{ Aeff}$$

dove il modulo del fasore corrisponde al valore efficace; per evitare ambiguità va esplicitamente indicata l'unità di misura, e cioè Ampere efficaci

- con la seconda notazione si ha ad esempio che la potenza complessa è semplicemente espressa da

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* \text{ VA}$$

Esempio. Determinare potenza attiva e reattiva assorbita dal bipolo ab (in regime sinusoidale a pulsazione ω); verificare inoltre la validità del teorema di Boucherot; e' noto che $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ Ohm}$

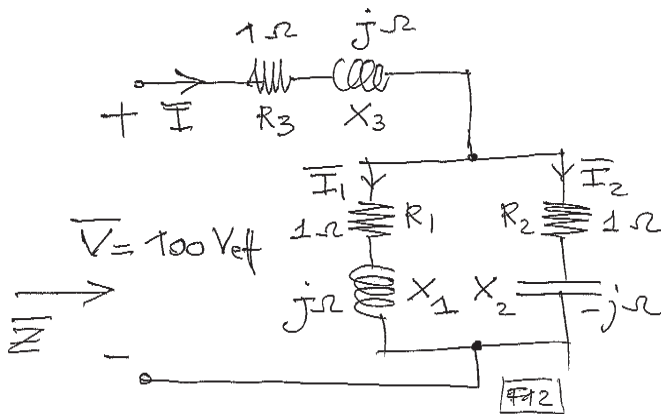


- consideriamo il circuito simbolico associato, per quale

$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = 2 + j \text{ Ohm}$$

e

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2 + j} = 40 - j20 \text{ Aeff}$$



• allora

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}^* = 100(40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

e quindi

$$P = 4 \text{ kW}; \quad Q = 2 \text{ kVAR}$$

- verifichiamo adesso Boucherot; si ha dalla regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = (40 - j20) \frac{1-j}{2} = 10 - j30 \text{ Aeff}$$

e quindi

$$\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 30 + j10 \text{ Aeff}$$

- valutiamo potenze attive e reattive assorbite dai bipoli R, L, C ; si ha $I_1^2 = 1000$, $I_2^2 = 1000$ e $I^2 = 2000$; quindi

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1 \text{ kW}; P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1 \text{ kW}; P_{R3} = R_3 I_3^2 = 2 \text{ kW}$$

e

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = P = 4 \text{ kW}$$

- inoltre

$$Q_{X1} = X_1 I_1^2 = 1 \text{ kVAR}; Q_{X2} = -X_2 I_2^2 = -1 \text{ kVAR}$$

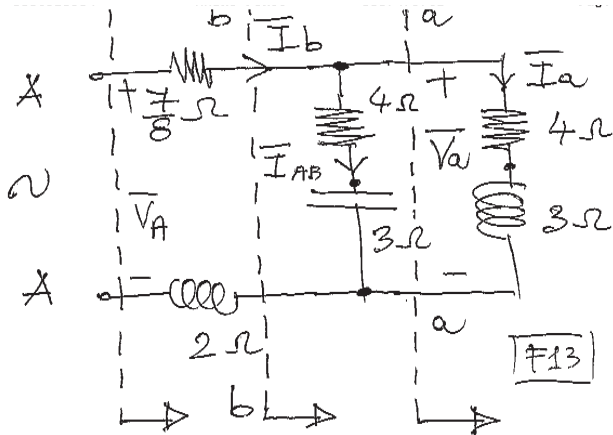
$$Q_{X3} = X_3 I_3^2 = 2 \text{ kVAR}$$

e quindi

$$Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3} = Q = 2 \text{ kVAR}$$

- il teorema di Boucherot e' verificato.

Esempio. Il bipolo AA e' in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Sulla figura sono indicate resistenze e reattanze dei bipoli alla ω considerata. E' noto che $I_a = 20$ Aeff. Calcolare per via energetica (utilizzando il teorema di Boucherot) potenza attiva e reattiva ai morsetti AA



- Analizziamo il circuito iniziando dalla sezione aa e poi procedendo verso le sezioni a monte
- sezione aa):

$$P_a = 4I_a^2 = 1600 \text{ W}; Q_a = 3I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

- allora

$$A_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} = 2000 = V_a I_a = 20 V_a \text{ VA};$$

da cui $V_a = 100 \text{ Veff}$. Inoltre

$$I_{AB} = \frac{V_a}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{V_a}{5} = 20 \text{ Aeff}$$

- sezione bb): dal teorema di Boucherot

$$P_b = P_a + 4I_{AB}^2 = 3200 \text{ W}; Q_b = Q_a - 3I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

- quindi

$$A_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} = 3200 = V_a I_b = 100 I_b \text{ VA}$$

da cui $I_b = 32 \text{ Aeff}$

- sezione di ingresso AA): si ha

$$P_A = P_b + \frac{7}{8}I_b^2 = 4096 \text{ W}; Q_A = Q_b + 2I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$

- si ha anche

$$A_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 4580 = V_A I_b = 36 V_A \text{ VA}$$

da cui $V_A = 143 \text{ V}$.

- *Osservazione importante:* si ha da KV $\bar{I}_b = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_a$, pero'

$$I_b = 36 \neq I_{AB} + I_a = 20 + 20 = 40 \text{ A}$$

- **non si possono sommare i valori efficaci di grandezze sinusidali**

- interpretare usando un diagramma fasoriale.