

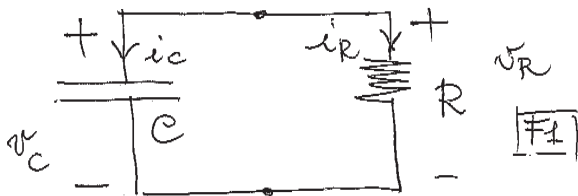
Circuiti del primo ordine

Mauro Forti

June 10, 2020

Risposta libera

- Scarica di C su R
- Consideriamo un circuito elementare RC senza generatori indipendenti; sia $v_C(0) = V_0$; vogliamo determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la tensione su C (v_C) e' la *variabile di stato* del circuito



- si ha dalla KV: $v_C = v_R$ e dalla KI: $i_R + i_C = 0$, mentre le relazioni costitutive sono $i_C = Cdv_C/dt$ e $i_R = v_R/R$; allora

$$v_C = v_R = Ri_R = -Ri_C = -RC \frac{dv_C}{dt}$$

- quindi, ponendo $v_C = v$ il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = 0$$

con condizione iniziale

$$v(0) = V_0$$

- con $\tau = RC$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RC ; si ha $[\tau] = \text{sec}$

- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per $t \geq 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$v(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea

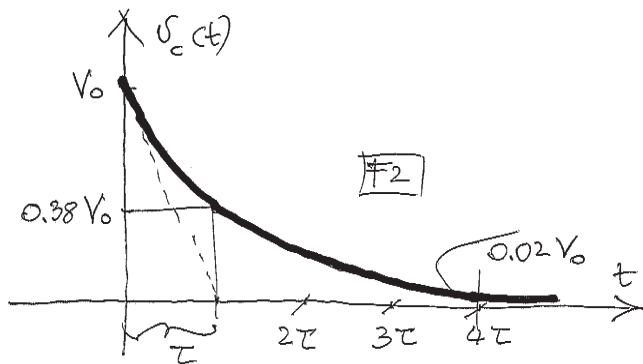
- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$v(0) = ke^0 = k = V_0$$

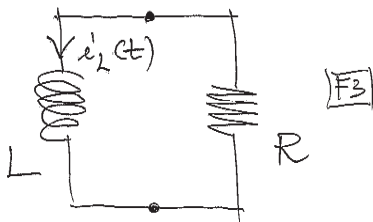
quindi la tensione nel circuito RC vale

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di C inizialmente carico sul resistore R
- in figura e' rappresentato l'andamento temporale della scarica; si ha $v(\tau) \simeq 0.38V_0$, cioe' dopo τ la tensione si e' ridotta al 38 % del valore iniziale; si ha anche $v(4\tau) = 0.02V_0$, cioe' dopo 4τ la tensione si e' ridotta al 2 % della tensione iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RC*



- Scarica di L su R
- Consideriamo un circuito elementare RL senza generatori indipendenti; sia $i_L(0) = I_0$; vogliamo determinare $i_L(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la corrente in L (i_L) e' la variabile di stato del circuito



- il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine (ponendo $i_L = i$)

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

con condizione iniziale

$$i(0) = I_0$$

- con $\tau = L/R$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RL ; si ha $[\tau] = \text{sec}$
- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per $t \geq 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$i(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{tR}{L}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea

- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$i(0) = ke^0 = k = I_0$$

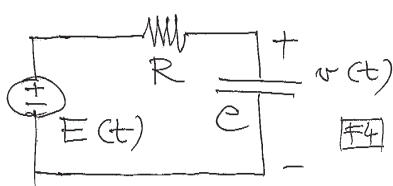
quindi la corrente nel circuito RL vale

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di L inizialmente carico sul resistore R
- si ha $i(\tau) \simeq 0.38I_0$, cioe' dopo τ la corrente si e' ridotta gia' al 38 % del valore iniziale; si ha anche $i(4\tau) = 0.02I_0$, cioe' dopo 4τ la corrente si e' ridotta al 2 % della corrente iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RL*

Risposta forzata

- Consideriamo un circuito RC con un generatore indipendente di tensione $E(t)$; per risposta forzata in corrente si intende la risposta quando e' presente il generatore indipendente e le condizioni iniziali sullo stato sono nulle, cioe' $v(0) = 0$; la risposta forzata e' detta anche risposta allo stato iniziale nullo



- si puo' verificare che il circuito soddisfa all'equazione differenziale del primo ordine di tipo non omogeneo

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E(t), \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(0) = 0$$

- tale problema di Cauchy ha soluzione unica
- dall'analisi sappiamo che

$$v(t) = v_{\text{omogenea}}(t) + v_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_{\text{part.affine}}(t)$$

dove $v_{\text{omogenea}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ e' l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre $v_{\text{part.affine}}(t)$ e' un integrale particolare dell'equazione affine

- ovviamente l'integrale particolare dipende dalla forma della eccitazione $E(t)$; puo' essere determinato usando ad esempio l'integrale di convoluzione

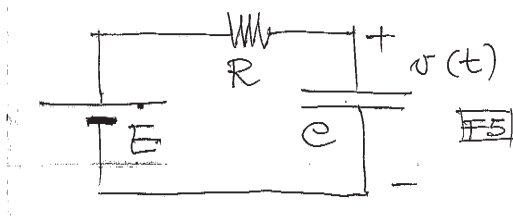
$$v_{\text{part.affine}}(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\sigma}{\tau}} E(\sigma) d\sigma$$

oppure usando il metodo della trasformata di Laplace

- nel seguito vediamo come si determina $v_{\text{part.affine}}(t)$ nel caso importante di eccitazioni costanti o eccitazioni sinusoidali

Circuito RC con Eccitazione Costante

- determiniamo $v(t)$, risposta forzata, per il circuito RC in figura con eccitazione costante $E(t) = E$



- e' naturale cercare un integrale particolare costante, e cioe' 'della stessa forma della eccitazione':

$$v_{\text{part.affine}}(t) = H = \text{costante}$$

- sostituendo ottengo

$$H = E$$

e quindi

$$v(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

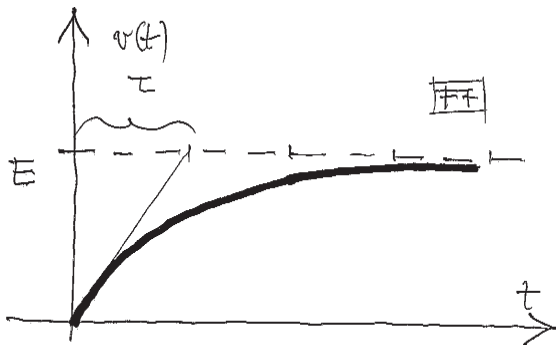
- imponendo la condizione iniziale si ha

$$v(0) = k + E = 0$$

quindi $k = -E$ e la risposta forzata vale

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

- e' il transitorio di carica di un C inizialmente scarico con una batteria di tensione E ; l'andamento temporale e' mostrato in figura



Scomposizione della risposta forzata

- scriviamo la risposta forzata ad una eccitazione costante del circuito RC nella forma

$$v_{\text{forzata}}(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

dove

$$E = v_{\text{part.affine}} = v_{\text{regime stazionario}}$$

e' cio' che resta per $t \rightarrow +\infty$ ed e' della stessa forma della eccitazione; invece $-Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ si dice parte transitoria della risposta forzata ed e' una soluzione dell'omogenea associata

- abbiamo ottenuto la scomposizione:
- Forzata = Transitorio + Regime Stazionario
- oppure $F = T + R$

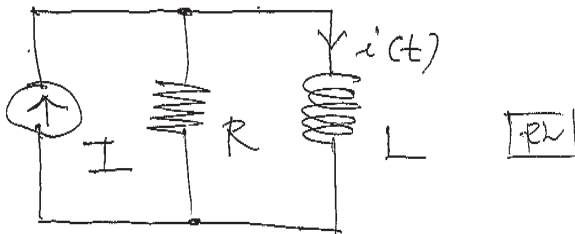
Circuito RL con eccitazione costante

- Mostrare che la risposta forzata in corrente del circuito RL in figura e' data da

$$i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

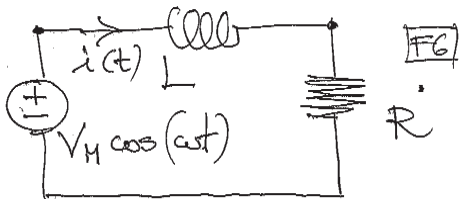
con $\tau = L/R$

- anche adesso vale la scomposizione $F = T + R$



Risposta forzata ad eccitazioni sinusoidali

- Circuito RL con eccitazione sinusoidale



- Determinare $i(t)$, risposta forzata
- Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t)$$

con condizione iniziale nulla sullo stato

$$i(0) = 0$$

- si ha anche in questo caso $F = T + R$, dove T e' una soluzione dell'omogenea associata mentre R e' un integrale particolare dell'affine che corrisponde alla risposta in regime sinusoidale; si ha allora

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$$

quindi

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

- imponiamo adesso la condizione iniziale

$$i(0) = 0 = k + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

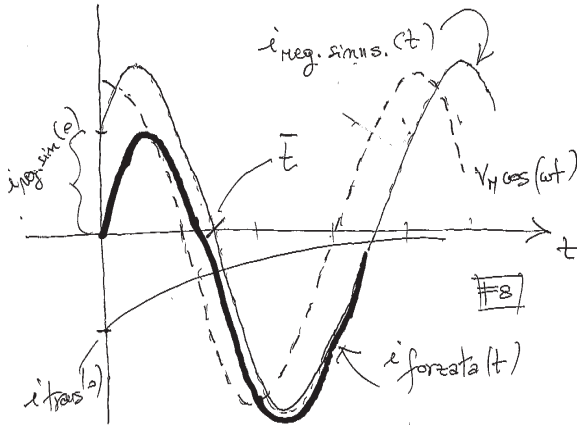
e quindi

$$k = -\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

- da $i(0) = 0$ si ha che

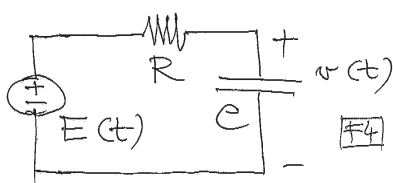
$$i_{\text{transitoria}}(0) = -i_{\text{regime sinusoidale}}(0)$$

- la seguente figura riporta gli andamenti della tensione del generatore, di $i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$, di $i_{\text{transitoria}}(t)$ e di $i(t)$ risposta forzata



Risposta completa

- Consideriamo un circuito RC con un generatore di tensione $E(t)$. Per *risposta completa* in corrente si intende la corrente quando e' presente $E(t)$ e il condensatore e' carico a $v(0) = V_0 \neq 0$



- vi sono quindi due cause: la causa 1 e' il generatore indipendente (sorgente esterna di energia); la causa 2 e' l'energia elettrica immagazzinata inizialmente in C ($\frac{1}{2}CV_0^2$)
- vale la seguente forma del principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta completa (C) e' data dalla risposta libera (L) piu' la risposta forzata (F); quindi $C = L + F$

- facciamo una verifica per il circuito elementare RC ; la risposta completa e' l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\tau \frac{dv_{\text{com}}}{dt} + v_{\text{com}} = E(t)$$
$$v(0) = V_0$$

- la risposta libera e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{\text{lib}}}{dt} + v_{\text{lib}} = 0$$
$$v_{\text{lib}}(0) = V_0$$

- la risposta forzata e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{\text{for}}}{dt} + v_{\text{for}} = E(t)$$
$$v_{\text{for}}(0) = 0$$

- sommando ottengo

$$\tau \frac{d(v_{\text{lib}} + v_{\text{for}})}{dt} + (v_{\text{lib}} + v_{\text{for}}) = E(t)$$
$$(v_{\text{lib}} + v_{\text{for}})(0) = V_0$$

- quindi, per l'unicita' della soluzione del problema di Cauchy iniziale si ottiene che

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t)$$

- **Esempio.** Nel caso di un circuito RC con eccitazione costante E otteniamo

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- **Scomposizione in parti significative:** si ha $C = L + F$ e $F = T + R$; ma L e T sono soluzioni dell'omogenea; si definisce transitorio completo $TC = L + T$; nel caso in questione

$$L = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; F = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); T = -E e^{-\frac{t}{\tau}}; R = E$$

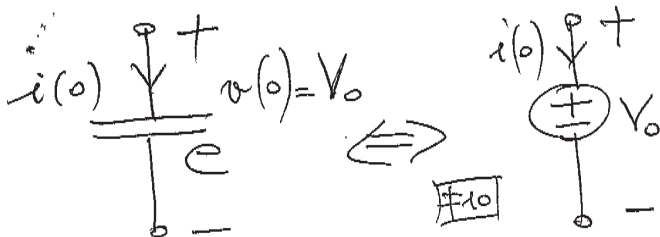
$$TC = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Comportamento a $t = 0$ di L e C

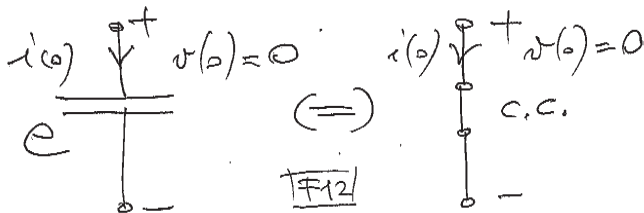
- Consideriamo un condensatore C e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $v(0) = V_0$; allora si ha

$$v(0) = V_0; \quad \forall i(0)$$

quindi all'istante iniziale $t = 0$ il condensatore equivale a un generatore di tensione ideale V_0



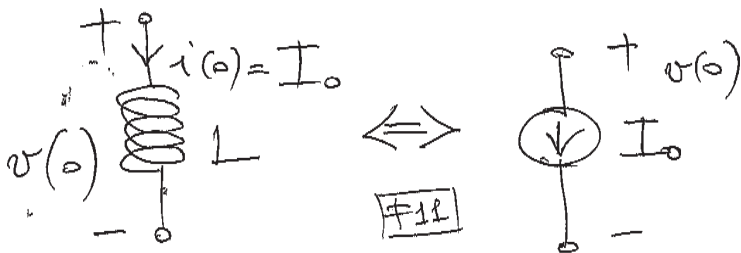
- se il condensatore e' scarico a $t = 0$, cioe' $v(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un corto circuito



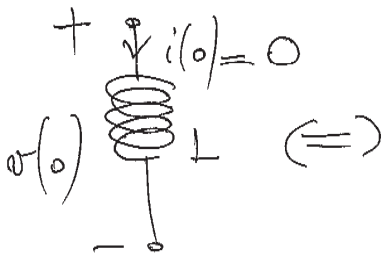
- Consideriamo un induttore L e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $i(0) = I_0$; allora si ha

$$i(0) = I_0; \quad \forall v(0)$$

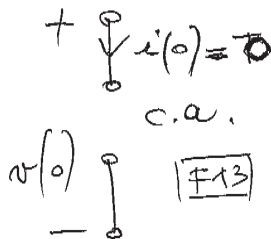
quindi all'istante iniziale $t = 0$ l'induttore equivale a un generatore di corrente ideale I_0



- se l'induttore e' scarico a $t = 0$, cioe' $i(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un circuito aperto



$(\Leftrightarrow)$

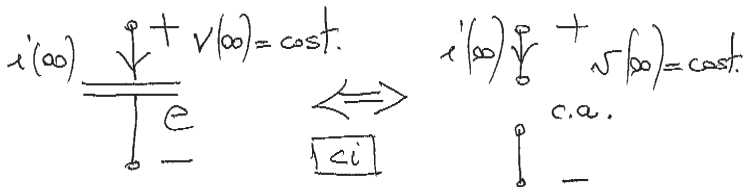


Comportamento per $t \rightarrow \infty$ di L e C

- interessano i due casi: a) il circuito raggiunge un *regime stazionario* dove tutte le tensioni e correnti divengono costanti per $t \rightarrow \infty$; b) il circuito raggiunge un *regime sinusoidale* dove tutte le tensioni e correnti divengono sinusoidali a pulsazione ω per $t \rightarrow \infty$
- a) C in regime stazionario: si ha

$$i(\infty) = 0; \quad \forall v(\infty) = \text{costante}$$

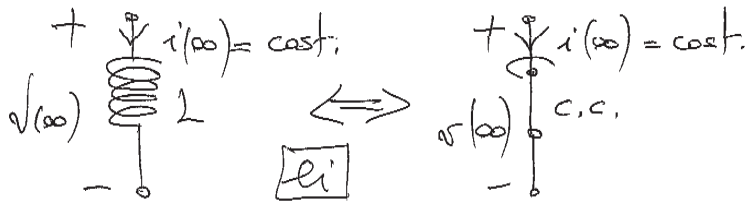
quindi C equivale ad un circuito aperto



L in regime stazionario: si ha

$$v(\infty) = 0; \quad \forall i(\infty) = \text{costante}$$

quindi L equivale ad un corto circuito

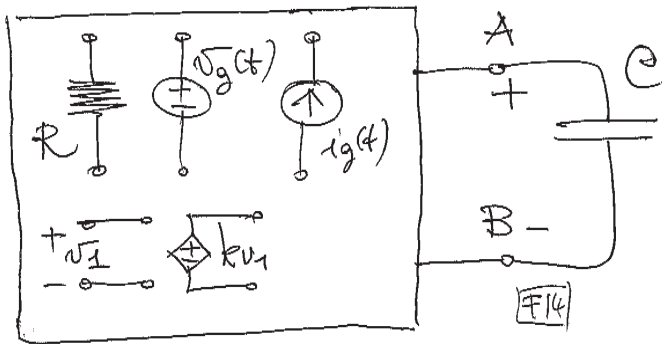


b) • C in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$

• L in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_L = j\omega L$

Circuiti del primo ordine

- Sono costituiti da un bipolo AB senza memoria che alimenta un C o un L (un solo elemento reattivo)



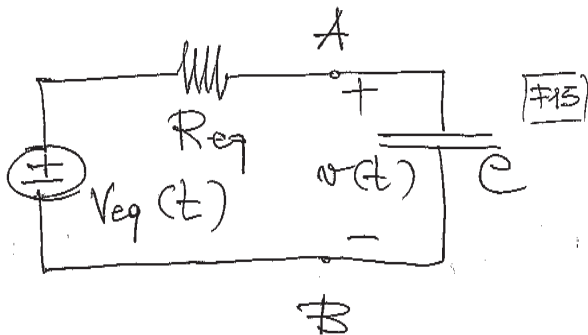
- consideriamo il caso con un solo C ; supponiamo che il bipolo AB sia controllabile in corrente; consideriamo l'equivalente di Thevenin e supponiamo $R_{eq} > 0$

- ci riconduciamo allora al problema di Cauchy già studiato

$$\tau_{eq} \frac{dv}{dt} + v = V_{eq}(t)$$

$$v(0) = V_0$$

dove $\tau_{eq} = R_{eq}C$

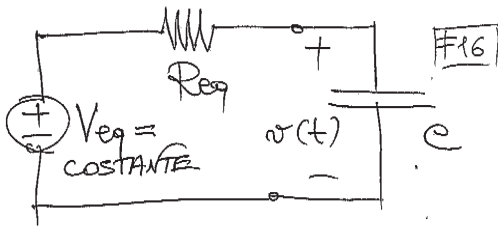


- si parla di risposta libera se $V_{eq}(t) = 0$ e $V_0 \neq 0$; forzata se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 = 0$; completa se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 \neq 0$

Circuiti del primo ordine con eccitazioni costanti

- Supponiamo che i generatori indipendenti all'interno del bipolo AB imprimano tensioni e/o correnti costanti; in tal caso si ha

$$V_{eq}(t) = V_{eq} = \text{costante}$$



- così' ci siamo ricondotti a un caso già' studiato; quindi si ha

$$L : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

$$F : v(t) = V_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

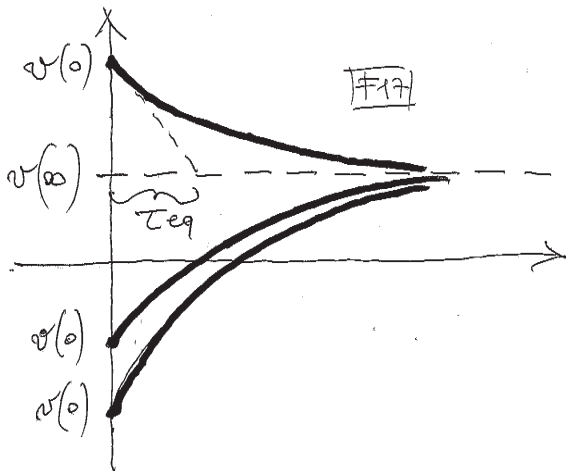
$$C = L + F : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- possiamo scrivere la completa (ma anche la libera e forzata, pensarci!) nella seguente forma

$$\begin{aligned}v(t) &= V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}} + V_{\text{eq}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}}) \\&= V_{\text{eq}} + [V_0 - V_{\text{eq}}]e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}} \\&= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}}\end{aligned}$$

dove $v(\infty) = V_{\text{eq}}$

- la completa dipende quindi da tre parametri: il valore all'istante iniziale $t = 0$, il valore in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$ e la costante di tempo equivalente τ_{eq}
- l'andamento tipico e' riportato nella figura che segue



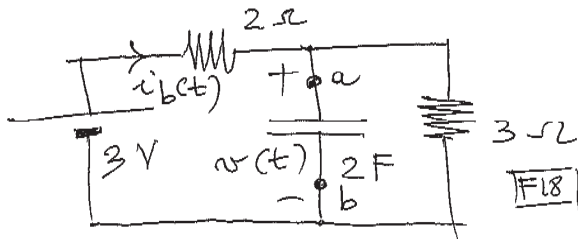
- l'analisi di un circuito del primo ordine con eccitazioni costanti e' perciò condotta in tre passi: 1) analisi all'istante iniziale $t = 0$; 2) analisi in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$; 3) determinazione della costante di tempo equivalente

- si può dimostrare che anche la libera e la forzata sono 'della stessa forma'; inoltre, è della stessa forma l'andamento di qualunque altra grandezza elettrica nel circuito; ad esempio, se consideriamo la corrente in un resistore avremo

$$i_R(t) = i_R(\infty) + [i_R(0) - i_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

- notare che τ_{eq} è la stessa per tutte le grandezze elettriche.

Esempio. Determinare $i_b(t)$ per $t \geq 0$, risposta completa, sapendo che $v(0) = 4 \text{ V}$

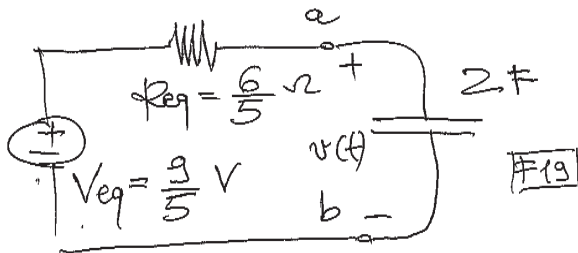


- Metodo 1). Determino la variabile di stato $v(t)$ e poi, indirettamente $i_b(t)$ (che non e' variabile di stato)
- troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab; si ha $\tau_{eq} = R_{eq}C = 12/5 \text{ s}$; allora la risposta completa in tensione e'

$$v(t) = 4e^{-\frac{5t}{12}} + \frac{9}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{12}}) = \frac{9}{5} + \frac{11}{5}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

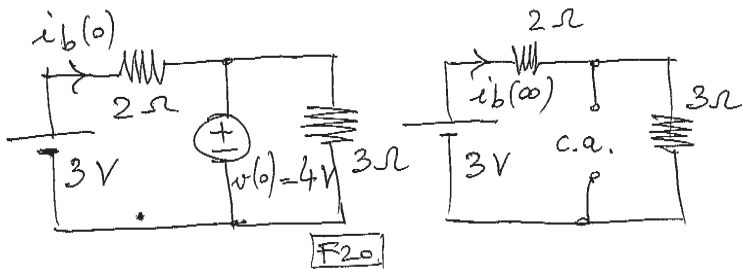
- infine

$$i_b(t) = \frac{3 - v(t)}{2} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$



- Metodo 2). Per un circuito del primo ordine con eccitazione costante la forma della corrente i è del tipo

$$i_b(t) = i_b(\infty) + [i_b(0) - i_b(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

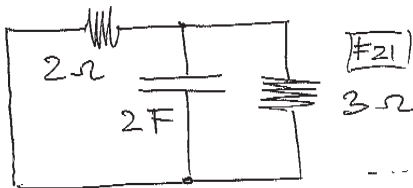


- analisi a $t = 0$; il condensatore e' un generatore di tensione V_0 quindi

$$i_b(0) = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

- analisi per $t \rightarrow +\infty$; il condensatore e' un circuito aperto quindi

$$i_b(\infty) = \frac{3}{5} \text{ A}$$



- per determinare τ_{eq} si nota che

$$ke^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

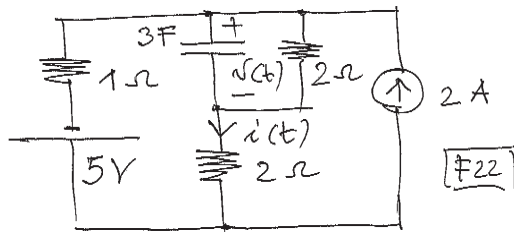
e' una soluzione dell'omogenea; studiamo allora il circuito in evoluzione libera disattivando la batteria; noto allora che C si scarica sul parallelo fra 2 Ohm e 3 Ohm ; si ha quindi

$$\tau_{eq} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \text{ s}$$

- infine

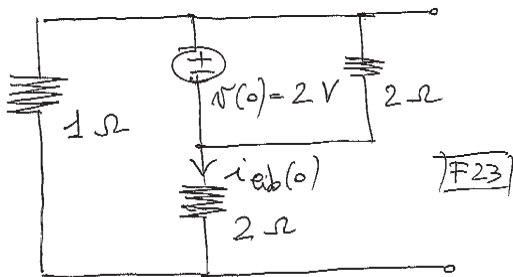
$$i_b(t) = \frac{3}{5} + \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right]e^{-\frac{5t}{12}} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0.$$

- **Esempio.** Determinare $i(t)$, parte libera, forzata, transitoria e di regime; si ha $v_C(0) = 2\text{ V}$



- per la libera si ha

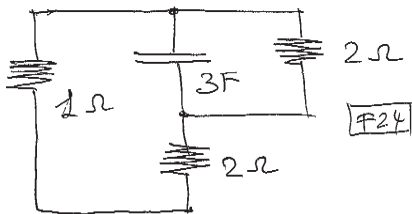
$$i_{\text{lib}}(t) = i_{\text{lib}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{lib}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$



- dalla 'istantanea del circuito a $t = 0$ ', dove C e' un generatore di tensione $v_C(0) = 2 \text{ V}$, si ha

$$i_{\text{lib}}(0) = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

mentre $i_{\text{lib}}(\infty) = 0$



- infine

$$\tau_{eq} = 3 \times \frac{6}{5} = \frac{18}{5} \text{ s}$$

- quindi

$$i_{lib}(t) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

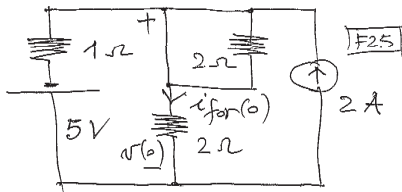
- la forzata puo' essere scritta come

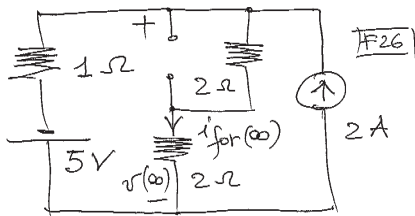
$$i_{\text{for}}(t) = i_{\text{for}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{for}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$

- istantanea a $t = 0$ (C e' scarico a $t = 0$): si ha

$$v(0) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = -2 \text{ V}$$

quindi $i_{\text{for}}(0) = -1 \text{ A}$





- studiamo adesso il regime stazionario per $t \rightarrow +\infty$; si ha

$$v(\infty) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{12}{5} \text{ V}$$

e $i_{\text{for}}(\infty) = -12/(5 \times 4) = -3/5 \text{ A}$; quindi

$$i_{\text{for}}(t) = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

- il primo termine rappresenta la parte di regime stazionario, mentre il secondo e' la parte transitoria della forzata.

- **Transitori che conseguono ad un evento critico**

- Finora abbiamo studiato risposta libera, forzata, completa per $t > 0$ in evoluzione continua; vogliamo adesso studiare i transitori che conseguono ad un evento critico

- *Evento critico*: apertura o chiusura di uno o più interruttori oppure discontinuità sulla tensione o corrente impressa da uno o più generatori indipendenti di tensione e/o corrente

- cominciamo studiando alcune proprietà delle variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti negli induttori)

- **Proprietà'**: Se la corrente $i_C(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la tensione $v_C(t)$ è continua in (t_a, t_b) ; analogamente, se la tensione $v_L(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la corrente $i_L(t)$ è continua in (t_a, t_b)

- cenno alla verifica: sia $t_0 \in (t_a, t_b)$ e $\epsilon > 0$ piccolo; si ha

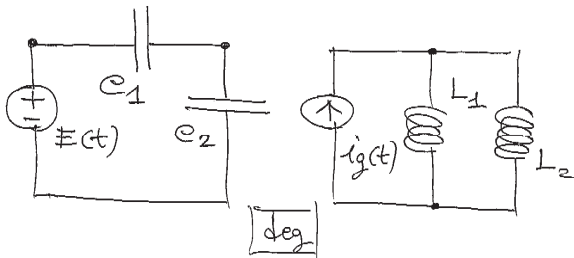
$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| = \left| \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} i_C(t') dt' \right| \leq \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} |i_C(t')| dt'$$

quindi essendo $|i_C| \leq M$

$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| \leq (2M\epsilon)/C \rightarrow 0 \text{ per } \epsilon \rightarrow 0$$

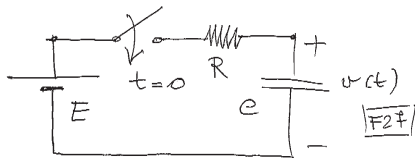
- **Rete RLC degenere:** e' una rete che contiene una maglia di soli condensatori e/o generatori indipendenti ideali di tensione, oppure un taglio di soli induttori e/o generatori indipendenti ideali di corrente

- ad esempio

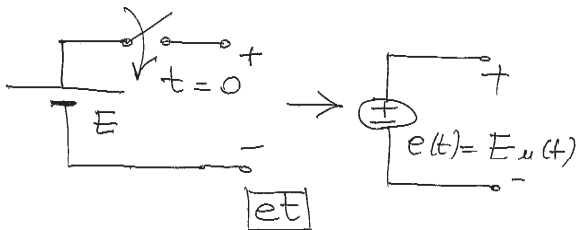


- **Proprieta' di continuita' delle variabili di stato:** in una rete *non degenerare* le variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti degli induttori) sono continue in presenza di eventi critici
 - tale proprieta' deriva dal fatto che in una rete non degenerare le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono funzioni limitate in corrispondenza di eventi critici
- nel seguito studiamo transitori supponendo che vi sia un evento critico all'istante critico $t = 0$

- Consideriamo un circuito elementare RC ; supponiamo C scarico per $t < 0$; l'interruttore si chiude a $t = 0$; vogliamo determinare $v_C(t) = v(t)$ per $t \geq 0$



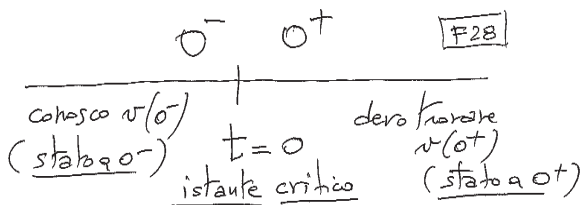
- si noti che chiudere l'interruttore equivale a applicare una tensione a gradino $e(t) = Eu(t)$ con $u(t) = 0$ per $t < 0$ e $u(t) = 1$ per $t > 0$



- per $t > 0$ il circuito soddisfa alla nota equazione

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = ?$$



- notare che conosciamo lo stato a $t = 0^-$, cioè $v_C(0^-) = 0$; però per risolvere l'equazione differenziale devo conoscere lo stato a $t = 0^+$! A tal fine uso il fatto che il circuito *non è degenero* e quindi lo stato si conserva all'istante critico, quindi $v(0^+) = v(0^-) = 0$ e

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0$$

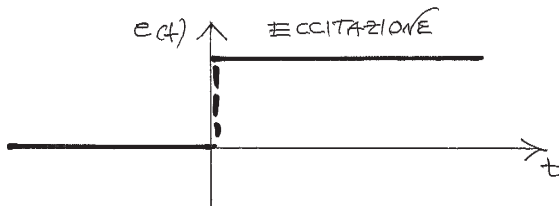
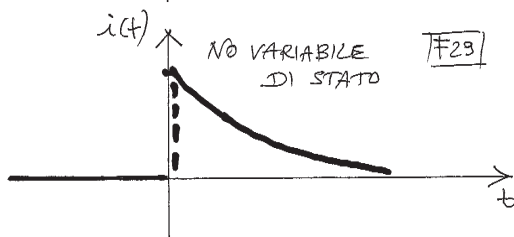
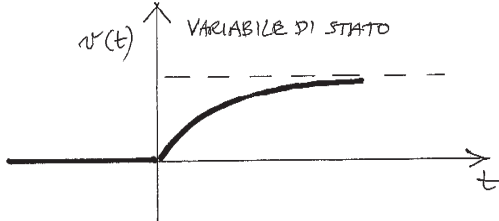
- si tratta quindi di una risposta forzata per cui

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad t > 0$$

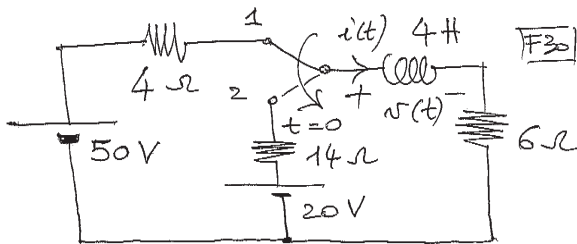
- si ha inoltre

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

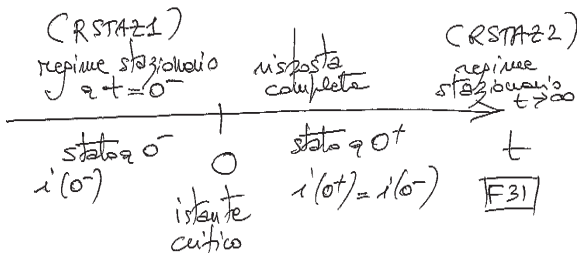
- lo scenario e' quindi rappresentabile come in figura: l'eccitazione $e(t) = Eu(t)$ e' discontinua in $t = 0$, la variabile di stato $v(t)$ e' continua in $t = 0$ mentre $i_C(t)$, che non e' variabile di stato, e' discontinua in $t = 0$; questo e' lo scenario tipico che possiamo aspettarci in una rete non degenera in corrispondenza di un istante critico.



Esempio. L'interruttore, da lungo tempo nella posizione 1, viene commutato a $t = 0$ nella posizione 2. Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$



- consideriamo il seguente schema



- determiniamo lo stato a $t = 0^-$ considerando che il circuito ha raggiunto un regime stazionario e quindi L e' un corto circuito a $t = 0^-$; si ha

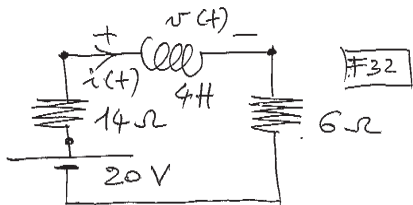
$$i(0^-) = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

- il circuito non e' degenere per cui lo stato si conserva fra 0^- e 0^+ :

$$i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

- per $t > 0$ analizziamo il seguente circuito in evoluzione continua; si ha

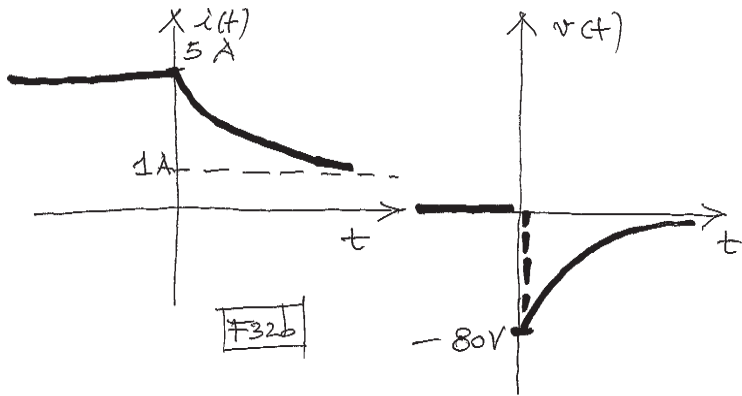
$$i(t) = i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 5e^{-5t} + 1 - e^{-5t} = 1 + 4e^{-5t}, \quad t > 0$$



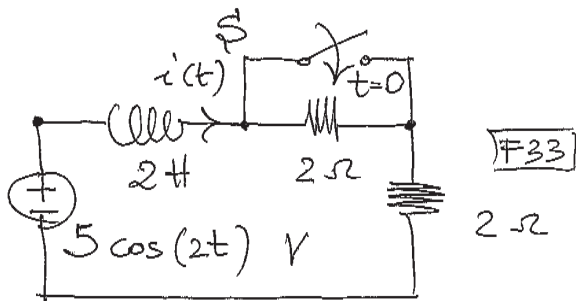
- per $t > 0$ si ha anche

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -80e^{-5t} \text{ V}$$

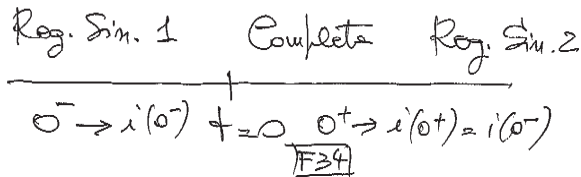
- gli andamenti di $i(t)$ e $v(t)$ sono riportati in figura; notare che $v(t)$ e' discontinua all'istante critico

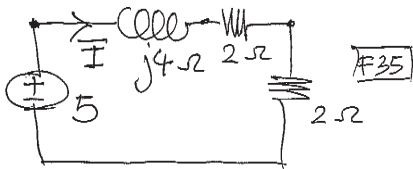


Esempio. L'interruttore S, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, $t > 0$, risposta completa.



- vale il seguente schema





- determiniamo lo stato $i(0^-)$; dal circuito nel dominio dei fasori ottengo

$$\bar{I} = \frac{5}{4 + j4} = \frac{5}{8}(1 - j) \text{ A}$$

quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}e^{j0}] = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A}$$

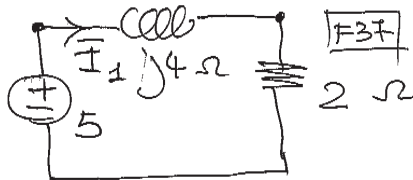
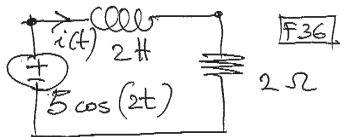
- il circuito non e' degenere per cui

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{5}{8} \text{ A}$$

- per $t > 0$ il circuito diventa quello in figura; si ha $C = L + F$, oppure $C = TC + R$ (regime sinusoidale), quindi

$$i(t) = ke^{-t/\tau} + I_M \cos(2t + \varphi_i)$$

con $\tau = L/R = 1$ sec



- per il secondo regime sinusoidale

$$\bar{I}_1 = \frac{5}{2 + j4} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(63.4^\circ)}$$

- quindi

$$i(t) = ke^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}$$

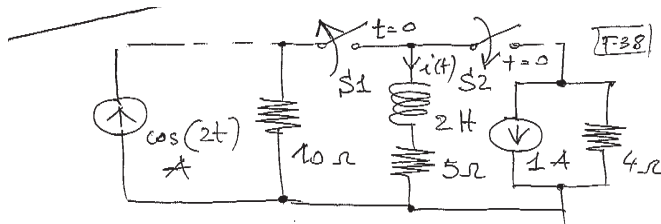
- infine determiniamo k con le condizioni iniziali

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ)$$

da cui $k \simeq 0.125$. Riassumendo

$$i(t) = 0.125e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}, \quad t > 0.$$

Esempio. L'interruttore S1, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$, mentre S2, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, per $t \geq 0$

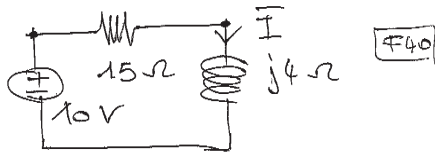
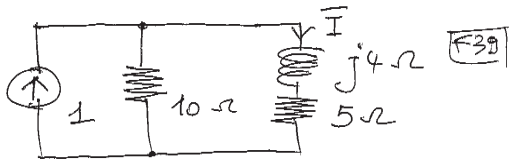


- troviamo lo stato in regime sinusoidale a $t = 0^-$; si ha

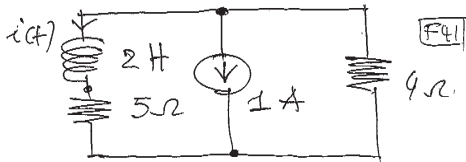
$$\bar{I} = \frac{10}{15 + j4} = \frac{10(15 - j4)}{241} \text{ A}$$

quindi

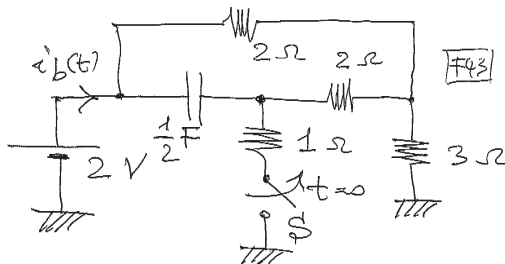
$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}] = \frac{150}{241} \text{ A}$$



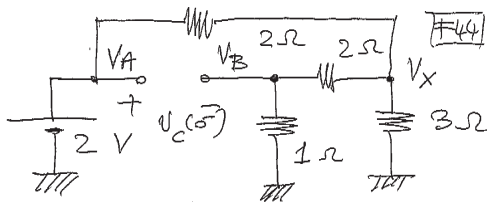
- per $t > 0$ il circuito diviene



Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.
 Determinare $i_b(t)$, per $t \geq 0$, risposta completa



- consideriamo il circuito in regime stazionario a $t = 0^-$



- si ha $v_C(0^-) = V_A - V_B$, inoltre

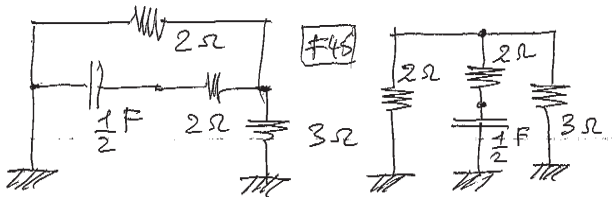
$$V_x = 2 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7} \text{ V}; \quad V_B = \frac{V_x}{3} = \frac{2}{7} \text{ V}$$

quindi $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12/7 \text{ V}$ (rete non degenere)

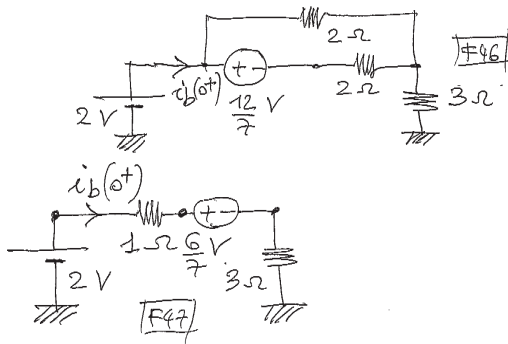
- per $t > 0$ si ha

$$i_b(t) = i_b(0^+)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_b(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- per τ_{eq} considero il seguente circuito, per cui $\tau_{eq} = 8/5 \text{ sec}$



- si ha $i_b(\infty) = 2/5$ A (... disegnare il circuito per $t > 0$ e verificare)
- per $i(0^+)$ considero l'istantanea a 0^+



- allora dalla KV ottengo $2 = 4i_b(0^+) + 6/7$, quindi $i_b(0^+) = 2/7$
- A. Riassumendo

$$i_b(t) = \frac{2}{7}e^{-\frac{5t}{8}} + \frac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{8}}) \text{ A}; \quad t > 0.$$