

Trasformata di Laplace

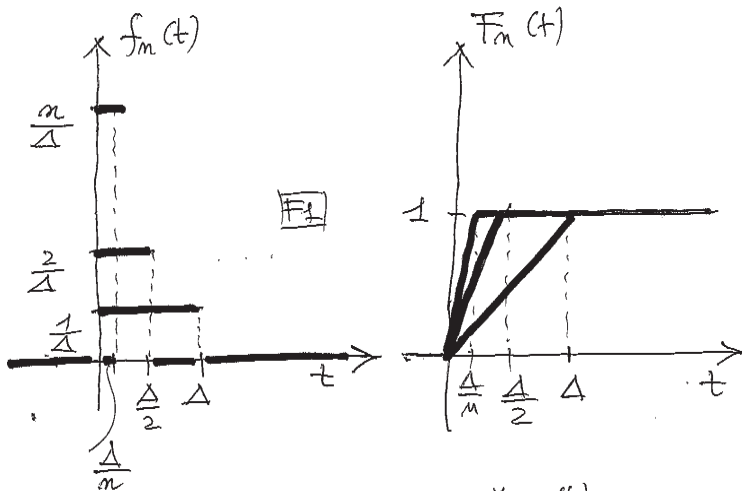
Mauro Forti

May 22, 2020

Preliminari matematici

- **Funzioni impulsive**

- Ricordiamo la definizione in termini euristici della funzione impulsiva $\delta(t)$; consideriamo una successione di funzioni $f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, come mostrato in figura



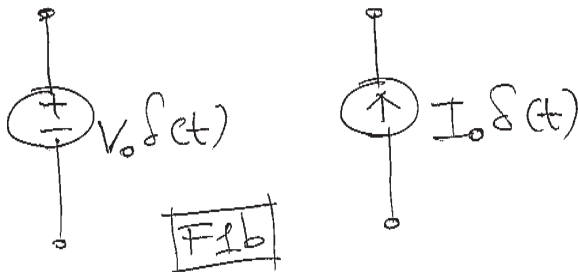
- si ha

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

quindi $\delta(t) = 0$ per $t \neq 0$, $\delta(t)$ singolare in $t = 0$, inoltre l'area sottesa e' unitaria, cioe', per ogni $\epsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

Generatori impulsivi di tensione e corrente



- Con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di tensione che imprime una tensione $V_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di V_0 ; V_0 misura l'area sottesa dall'impulso in un diagramma tensione-tempo, quindi $[V_0] = \text{Volt per secondi}$
- analogamente, con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di corrente che imprime una corrente $I_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di I_0 ; I_0 misura l'area sottesa dall'impulso in un diagramma corrente-tempo, quindi $[I_0] = \text{Ampere per secondi}$

- per quasi ogni (q.o.) t si ha

$$f_n(t) = F'_n(t)$$

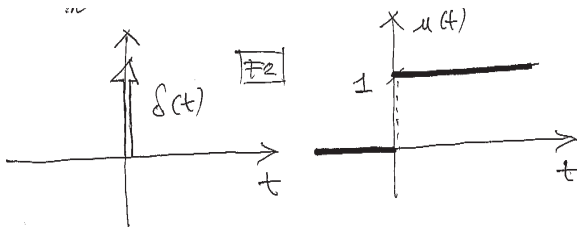
dove $F_n(t)$ e' mostrata in figura; passando al limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(t) = \frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \right) = \frac{d}{dt} u(t)$$

dove $u(t) = 1, t > 0$; $u(t) = 0, t < 0$ e' la funzione gradino unitario

- la funzione (discontinua!) gradino unitario e' quindi derivabile nel senso delle funzioni impulsive e si ha

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$



- per mezzo della δ e' possibile calcolare la derivata generalizzata (nel senso delle funzioni impulsive) di funzioni che hanno discontinuita' di prima specie (di salto)

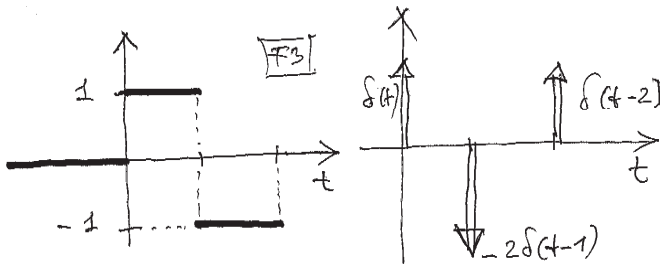
- **Proprieta':** Sia $f(t)$ derivabile (nel senso delle funzioni ordinarie) eccetto che in un numero finito di istanti t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dove vi sono discontinuita' di prima specie (esistono finiti $f(t_i^-)$, $f(t_i^+)$); allora

$$\frac{d}{dt}f = f' + \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)]\delta(t - t_i)$$

dove f' e' la derivata nel senso delle funzioni ordinarie, d/dt la derivata nel senso delle funzioni impulsive, $\sigma_i = f(t_i^+) - f(t_i^-)$ e' il salto di f in t_i e $\delta(t - t_i)$ e' la funzione δ traslata in t_i

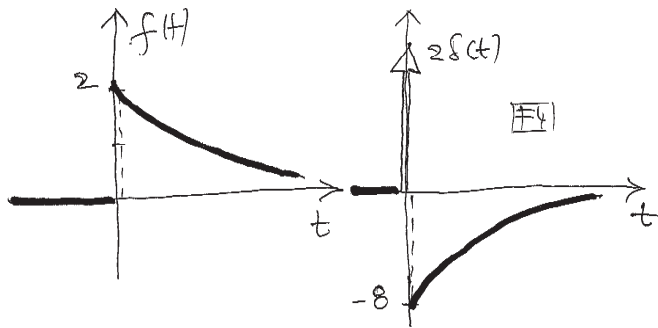
Esempio. Per la funzione in figura si ha, considerando che $f'(t) = 0$ per q.o. t

$$\frac{df}{dt} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$



Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(t) = 2e^{-4t}u(t)$$



- si ha $f'(t) = -8e^{-4t}u(t)$ e quindi

$$\frac{df}{dt} = f'(t) + [f(0^+) - f(0^-)]\delta(t) = -8e^{-4t}u(t) + 2\delta(t)$$

Richiami su trasformata di Laplace

- **Trasformata di Laplace di funzioni ordinarie**

- sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; si definisce Trasformata di Laplace di f la funzione di variabile complessa

$$L[f] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove $s = \sigma + j\omega$ e' la variabile complessa (o di Laplace)

- *Funzioni ordinarie trasformabili secondo Laplace*

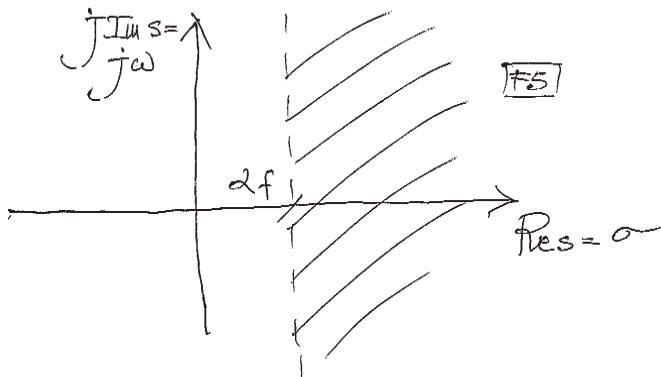
- si considerano nel seguito funzioni ordinarie f di classe $\mathcal{L}$ e cioe'

1) continue a tratti (f ha al piu' discontinuita' di prima specie, cioe' per ogni t esistono finiti $f(t^+)$, $f(t^-)$)

2) di ordine esponenziale, cioe' esistono $M, \beta > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

- in tali ipotesi esiste $\alpha_f \geq 0$ (ascissa di convergenza) tale che $F(s)$ e' ben definita per ogni $\text{Re}[s] = \sigma > \alpha_f$; inoltre $F(s)$ e' analitica per $\text{Re}[s] > \alpha_f$



Trasformata di Laplace di funzioni elementari



$$f(t) = u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

▶ per $s_0 \in \mathbb{C}$

$$f(t) = e^{s_0 t} u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s - s_0}$$

▶ per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$

$$f(t) = \cos(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

▶ per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$

$$f(t) = \sin(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

▶ per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

- per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

- per $n = 1, 2, \dots$

$$f(t) = t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- per $n = 1$

$$f(t) = t u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

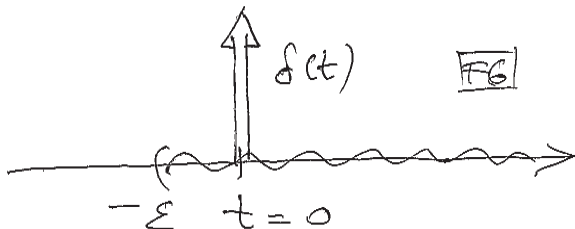
- per $\alpha \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$

$$f(t) = e^{-\alpha t} t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

Trasformata di Laplace di funzioni impulsive

- Si definisce in termini euristici

$$L_{0-}[\delta(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$



- dato che l'integrazione inizia da un attimo prima di 0, con l'integrale riusciamo a 'catturare' la δ ; in pratica la $\delta(t)$ 'campiona' la funzione e^{-st} in $t = 0$, quindi si ha

$$L_{0-}[\delta(t)] = [e^{-st}]|_{t=0} = 1$$

- per funzioni ordinarie L_{0-} e L coincidono; nel seguito useremo implicitamente L_{0-} quando abbiamo a che fare con funzioni impulsive

Proprietà' della T. Laplace

- 1) Linearità': $f, g \in \mathcal{L}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ implica $af + bg \in \mathcal{L}$ e $L[af + bg] = aL[f] + bL[g]$
- 2) Vediamo l'importante *regola di derivazione*; si ha

$$L_{0-} \left[\frac{df}{dt} \right] = sL_{0-}[f] - f(0^-) = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$$

dove d/dt e' la derivata nel senso delle funzioni impulsive e $f(0^-)$ e' il limite sinistro della f in $t = 0$

- *Osservazione importante.* Una operazione differenziale nel dominio del tempo (d/dt) diventa una operazione algebrica ($s \times$) nel dominio trasformato di Laplace

Esempio. Sappiamo che $\delta(t) = du(t)/dt$; dalla regola di derivazione otteniamo

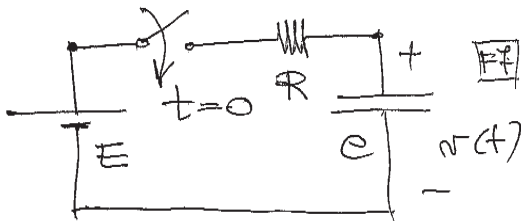
$$L_{0-}[\delta(t)] = sL_{0-}[u(t)] - u(0^-) = sL[u(t)] - u(0^-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1$$

3) regola di integrazione: si ha

$$L\left[\int_{0^-}^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

Transitorio in circuito del primo ordine

- Vogliamo analizzare il transitorio in un circuito RC del primo ordine in parallelo nel dominio del tempo (DT) e nel dominio di Laplace (DL)
- *DT*. Consideriamo il circuito in figura e supponiamo $v(0^-) = V_0$; vogliamo trovare $v(t)$, $t > 0$, con una analisi nel DT; l'analisi consiste di 2 passi



i) analisi all'istante critico (0^- , 0^+); conosco lo stato a $t = 0^-$ ma per risolvere l'equazione differenziale ho bisogno dello stato a $t = 0^+$; si usa il fatto che il circuito e' non degenerare per scrivere

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0$$

ii) analisi in evoluzione continua per $t > 0$; si ha

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$
$$v(0^+) = V_0$$

- abbiamo quindi una completa e si ha

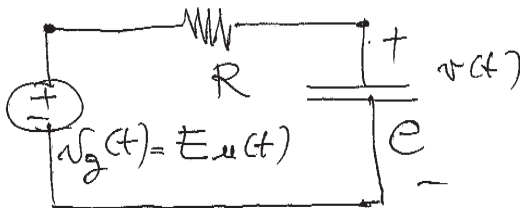
$$v(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = V_0 e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0$$

con $\tau = RC$

- DL. Considero il circuito a partire da $t = 0^-$ sottoposto a una eccitazione discontinua $v_g(t) = Eu(t)$ e scrivo l'equazione differenziale per $t > 0^-$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_g(t) = Eu(t), \quad t > 0^-$$

$$v(0^-) = V_0$$



- trasformiamo entrambi i membri con Laplace

$$\int_{0^-}^{+\infty} (RC \frac{dv}{dt} + v) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} v_g(t) dt$$

- usando il teorema di derivazione allo 0^-

$$RC[sV(s) - v(0^-)] + V(s) = \frac{E}{s}$$

- quindi nel DL l'equazione differenziale si e' trasformata in una equazione algebrica; inoltre usando il teorema di derivazione allo 0^- sono state automaticamente introdotte le condizioni iniziali sullo stato a $t = 0^-$, $v(0^-) = V_0$ (quelle che conosco)
- risolvendo ottengo

$$V(s) = V_{\text{lib}}(s) + V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{sRC + 1} + \frac{RCV_0}{sRC + 1}$$

- libera:

$$V_{\text{lib}}(s) = \frac{V_0}{s + 1/RC} \longrightarrow v_{\text{lib}}(t) = V_0 e^{-t/RC} u(t)$$

- forzata: si ha

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{\tau} F(s)$$

con

$$F(s) = \frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

- quindi

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}} \longrightarrow v_{\text{for}}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t).$$