

Circuiti del secondo ordine

Mauro Forti

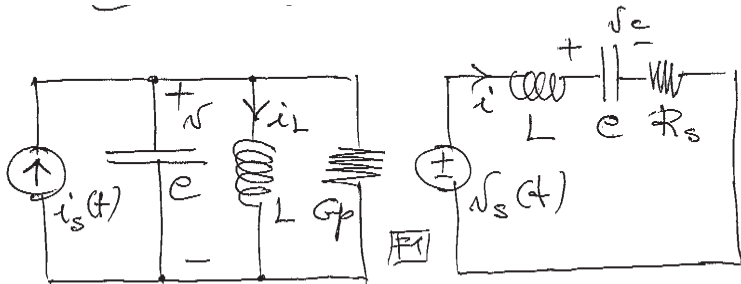
April 21, 2020

Circuiti del Secondo Ordine

- Sono circuiti che contengono due elementi reattivi; il caso più interessante è 1 C e 1 L; li analizziamo prima nel DT e poi nel DL
- DT: risposta in evoluzione continua per $t \geq 0$; libera, forzata a eccitazioni costanti o sinusoidali, completa; transitori che conseguono ad un evento critico a $t = 0$; la trattazione estende quella vista per i circuiti del primo ordine
- DL: verifica con T. Laplace e estensione a eccitazioni più generali

Circuiti RLC del Secondo Ordine (DT)

- Prendiamo in considerazione i due circuiti RLC parallelo e serie e cerchiamo di farne una trattazione unificata nel DT



- per il circuito parallelo ($\parallel$), usando come variabile i_L possiamo scrivere $i_C + i_L + i_G = i_s$, quindi

$$C \frac{dv}{dt} + i_L + G_p v = i_s$$

e, considerando che $v = L di_L / dt$

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_p L \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s, \quad t \geq 0$$

- dualmente, per il circuito serie (Σ), usando come variabile v_C

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R_s C \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s, \quad t \geq 0$$

- entrambe le equaz. diff. affini del secondo ordine sono riconducibili alla forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f, \quad t \geq 0$$

- nel caso ||

$$\alpha = \alpha_p = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 i_s$$

e' il termine forzante

- nel caso Σ

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 v_s$$

e' il termine forzante

Risposta Libera di circuiti RLC

- E' la risposta quando i generatori indipendenti sono disattivati e gli elementi reattivi sono carichi
- Passo 1. troviamo la forma matematica della risposta libera (integrale generale dell'omogenea)
- Passo 2. imponiamo le condizioni iniziali

- consideriamo l'eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0$$

e l'equazione caratteristica associata

$$p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

- le radici caratteristiche valgono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{rad/sec}$$

e sono dette anche *frequenze naturali* in quanto caratterizzano il tipo di risposta naturale di un circuito *RLC*

- consideriamo separatamente i tre casi $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$
- notare che le perdite crescono se cresce α ($G_p v^2$ W nel caso $\parallel$, $R_s i^2$ nel caso Σ)

- $\Delta > 0$. Caso *sovrasmorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff G_p > G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

con G_c *conduttanza critica* in Ohm^{-1}

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \frac{R_s}{2L} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff R_s > R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

con R_s *resistenza critica* in Ohm

- le due radici caratteristiche sono *reali negative distinte*

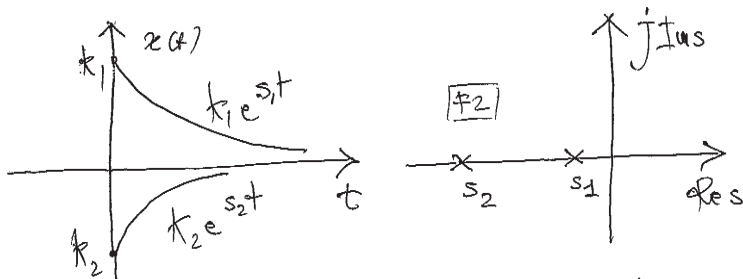
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- $\Delta = 0$. Caso *criticamente smorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p = \omega_0 \iff G_p = G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \omega_0 \iff R_s = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- le due radici caratteristiche sono *reali negative coincidenti*

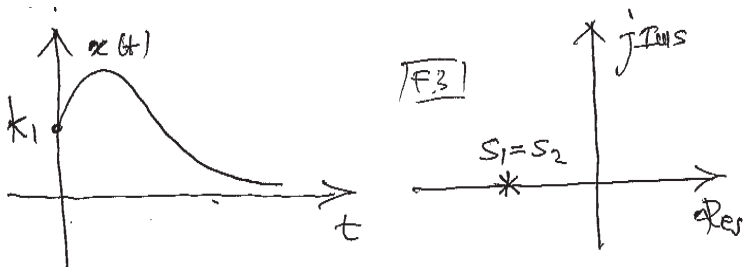
$$s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- $\Delta < 0$. Caso *sottosmorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p < \omega_0 \iff G_p < G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s < \omega_0 \iff R_s < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale negativa*

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ &= -\alpha \pm j\beta \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

dove

$$0 < \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

e' la *pulsazione naturale di oscillazione* in rad/sec

- l'integrale generale dell'omogenea e'

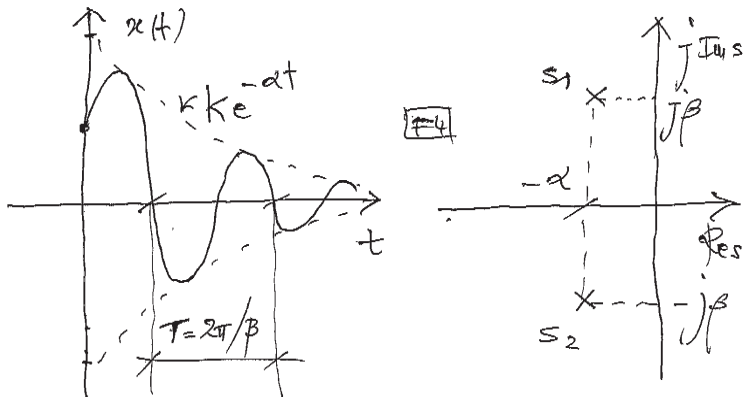
$$x(t) = ke^{-\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *oscillatorio smorzato*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- notare che $\alpha = |\text{Re}[s_1]|$ determina quanto velocemente tende a 0 l'involuppo
- $\text{Im}[s_1] = \beta$ individua la pulsazione effettiva di oscillazione all'interno dell'involuppo

- Caso ideale *senza perdite*
- per un $RLC \parallel$ si ha $G_p = 0$ e quindi

$$\alpha_p = 0$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha $R_s = 0$ e quindi

$$\alpha_s = 0$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale nulla*

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

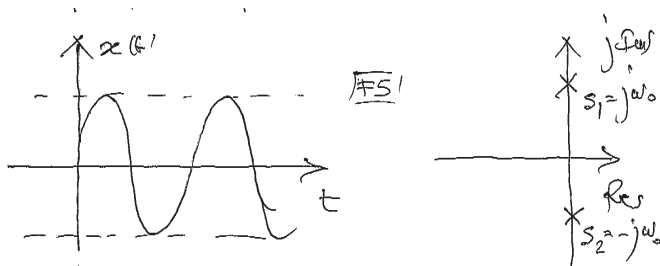
$$x(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è una *oscillazione alla pulsazione di risonanza ω_0 che non si smorza nel tempo*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- come detto le frequenze naturali sono immaginarie pure.

Determinazione delle costanti arbitrarie

- Determiniamo adesso le costanti arbitrarie imponendo le condizioni iniziali sullo stato $v_C(0) = V_0$ e $i_L(0) = I_0$
- illustriamo per un circuito RLC || nel caso sovrasmorzato dove

$$x(t) = i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

- dobbiamo risolvere un problema di Cauchy con le condizioni iniziali $i_L(0) = I_0$ e $\frac{di_L}{dt}(0) = ?$; la seconda è una 'condizione iniziale derivata' che dobbiamo trovare usando l'informazione $v_C(0) = V_0$; per un circuito RLC || si ha $v_L(0) = L \frac{di_L}{dt}(0) = v_C(0)$, quindi

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

- allora, riassumendo, abbiamo il problema di Cauchy con una unica soluzione

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

$$i_L(0) = I_0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

- quindi

$$i_L(0) = I_0 = k_1 + k_2, \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = k_1 s_1 + k_2 s_2$$

e risolvendo

$$k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right); \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right).$$

Esempio. Consideriamo un circuito RLC parallelo con $G_p = 1 \text{ Ohm}^{-1}$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$. Determinare la risposta libera $i_L(t)$ per $i(0) = i_0 = 1 \text{ A}$ e $v_C(0) = V_0 = 1 \text{ V}$

- si ha

$$G_p = 1 < G_c = 2\sqrt{C/L} = 2$$

quindi siamo nel caso sottosmorzato

- $\alpha_p = G_p/2C = 1/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \text{ rad/sec}$ e
 $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}$; le radici caratteristiche sono

$$s_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

quindi

$$i_L(t) = k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + k_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

con

$$i_L(0) = 1 \text{ A}; \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 1 \text{ A/sec}$$

- imponiamo le condizioni iniziali per determinare k_1 e k_2 :

$$i_L(0) = 1 \implies k_1 = 1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies k_2 = \sqrt{3}$$

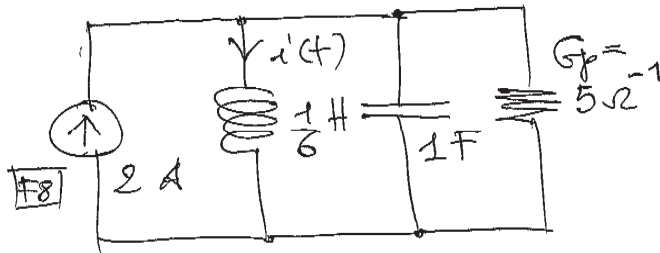
- infine

$$i_L(t) = e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

- puo' anche essere riscritta come (provare!)

$$i_L(t) = 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right), \quad t \geq 0.$$

Esempio. Determinare $i(t)$, risposta forzata, per $t \geq 0$



• la corrente i soddisfa alla eq. diff. non omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 2\omega_0^2$$

con $\alpha = \alpha_p = G_p/2C = 5/2\text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{6}\text{ rad/sec}$

- otteniamo allora il problema di Cauchy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = 12$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = i_{\text{trans}}(t) + i_{\text{regime.staz}}(t)$$

- l'equazione caratteristica per l'omogenea e'

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

e le radici caratteristiche sono $s_1 = -2 \text{ rad/sec}$, $s_2 = -3 \text{ rad/sec}$
(caso sovrasmorzato)

- inoltre si ha

$$i_{\text{part.affine}}(t) = \text{costante} = 2$$

quindi

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + 2$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- imponendo le condizioni iniziali si trova $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, quindi

$$i(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

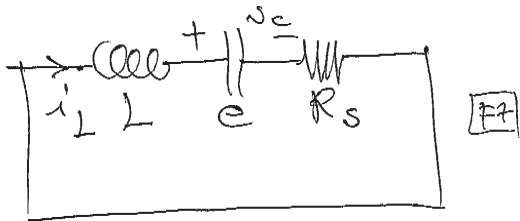
- si ha anche

$$i_{\text{trans}}(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t}, \quad t \geq 0; \quad i_{\text{regime.staz}}(t) = 2, \quad t \geq 0.$$

Osservazione: frequenze naturali

- Consideriamo un circuito RLC serie. In evoluzione libera v_C soddisfa alla eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0, \quad t \geq 0$$



- consideriamo adesso i_L ; si ha da KV

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C + R_s i_L = 0$$

e quindi

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' + R_s i_L = 0$$

- derivando ottengo

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \quad t \geq 0$$

- tutte le grandezze elettriche del circuito soddisfano in evoluzione libera alla stessa eq. diff. omogenea del secondo ordine; sono caratterizzate quindi dalle stesse frequenze naturali.

Fattore di qualita'

- Il fattore di qualita' di un circuito RLC e' definito come

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

- nel caso $\parallel$ si ha

$$Q = Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p} = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L} \propto R_p$$

- nel caso Σ si ha

$$Q = Q_s = \frac{1}{\omega_0 C R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s} \propto \frac{1}{R_s}$$

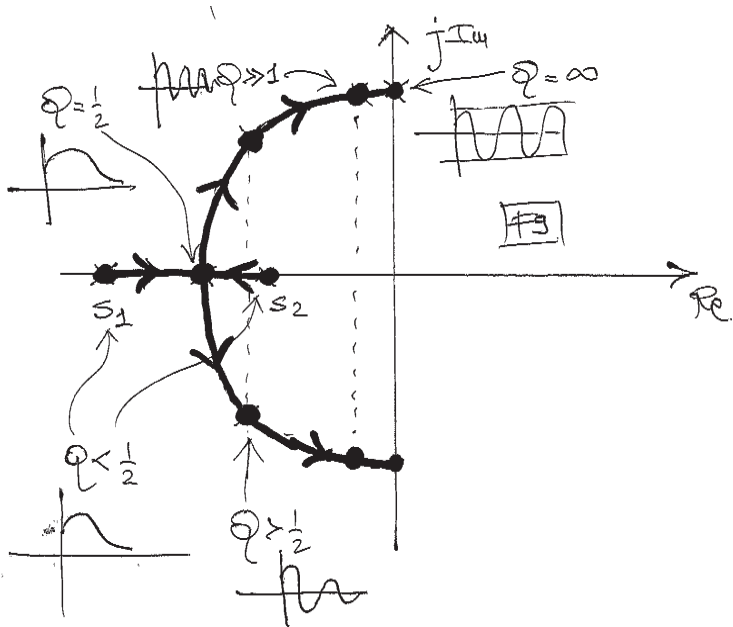
- $Q < 1/2$ caso sovrasmorzato; $Q = 1/2$ caso di morzamento critico; $Q > 1/2$ caso sottosmorzato; $Q \rightarrow +\infty$ caso senza perdite

Luogo delle frequenze naturali

- Le frequenze naturali sono le radici di

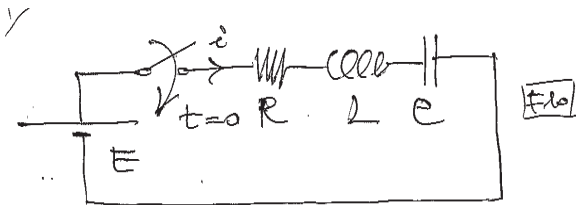
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

- consideriamo un circuito RLC $\parallel$, supponiamo L, C fissi e facciamo crescere R_p , quindi cresce Q_p , decresce α_p (decrescono perdite)
- si ha $s_1 \cdot s_2 = \omega_0^2 = \text{costante}$, mentre $s_1 + s_2 = 2\alpha_p$ decresce
- al variare di R_p le due frequenze naturali descrivono il luogo disegnato in figura; nella figura e' anche riportato qualitativamente il corrispondente andamento delle grandezze in evoluzione libera



Analisi di un circuito RLC in parallelo nel DT e nel DL

- Vogliamo determinare $i(t)$, risposta forzata, prima nel DT e poi nel DL, supponendo di essere nel caso sottosmorzato; per risposta forzata si intende la risposta allo stato iniziale nullo, e cioè' $i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$



- Nel DT procediamo in 2 passi:
i) analisi all'istante critico (0^- , 0^+): dato che il circuito non e' degenere si conservano le variabili di stato, quindi

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0; \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

ii) analisi in evoluzione continua per $t \geq 0$; usando i come variabile si ottiene

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(t') dt' + v_C(0^+) = E, \quad t \geq 0$$

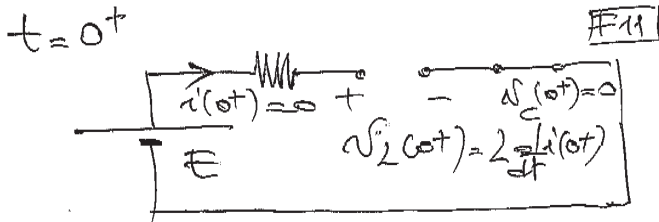
e derivando

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i(0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

dove per trovare la condizione iniziale derivata abbiamo fatto riferimento al circuito a $t = 0^+$ riportato in figura



- nel caso sottosmorzato $s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$ e

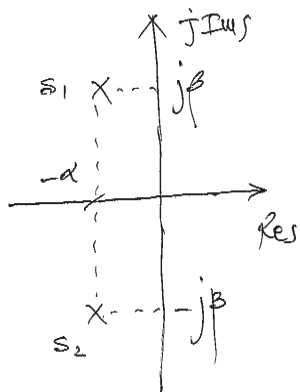
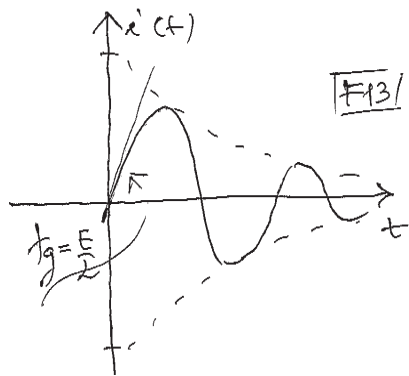
$$i(t) = k_1 e^{-\alpha_s t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

- si ha $i(0^+) = 0$, quindi $k_1 = 0$; inoltre

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \beta k_2 = \frac{E}{L}$$

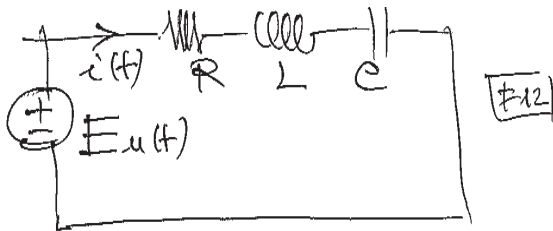
quindi $k_2 = E/\beta L$; concludendo

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0.$$



- Verifichiamo il risultato ottenuto con la TL; consideriamo il seguente circuito a partire da $t = 0^-$ e scriviamo l'equazione integro-differenziale a cui soddisfa i ; si ha

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t') dt' + v_C(0^-) = Eu(t), \quad t > 0^-$$



- trasformando con Laplace ottengo una equazione algebrica in $I(s)$ in cui appaiono esplicitamente le condizioni iniziali sulle variabili di stato a $t = 0^-$

$$L[sI(s) - i(0^-)] + RI(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{s}$$

da cui

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) + I_{\text{lib}}(s) = \frac{\frac{E}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

- risposta forzata ($i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$)

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2}$$

• ne consegue che *i poli di $I(s)$ coincidono con le radici caratteristiche $s_{1,2}$ dell'equazione omogenea*; in questo caso i poli sono complessi coniugati e a parte reale negativa

$$s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$$

- per antitrasformare consideriamo che

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \\
 &= \frac{1}{(s - (-\alpha_s + j\beta))(s - (-\alpha_s - j\beta))} \\
 &= \frac{A}{s - (-\alpha_s + j\beta)} + \frac{B}{s - (-\alpha_s - j\beta)}
 \end{aligned}$$

- dato che $F(s)$ e' razionale e a coefficienti reali, risulta $B = A^*$; allora otteniamo

$$i(t) = \frac{E}{L} \left[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t} + A^* e^{(-\alpha_s - j\beta)t} \right] u(t) = \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t)$$

- calcoliamo il coefficiente A (residuo di F nel polo semplice $-\alpha + j\beta$); si ha

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_s + j\beta} (s - (-\alpha_s + j\beta)) F(s) \\ &= \frac{1}{-\alpha_s + j\beta - (-\alpha_s - j\beta)} \\ &= \frac{1}{j2\beta} = -\frac{j}{2\beta} \end{aligned}$$

- infine otteniamo

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t) \\ &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}\left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t}\right] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re}[-j(\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$