

Metodo simbolico di Laplace

Mauro Forti

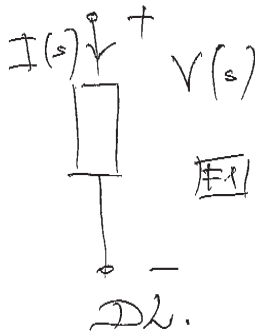
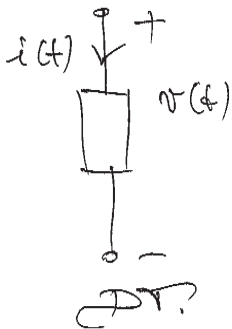
April 25, 2020

Metodo simbolico di Laplace

- E' un metodo applicabile a circuiti lineari e tempo invarianti (LTI). Consiste di due passi:
 - i) trovo le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio di Laplace (DL)
 - ii) determino le leggi di Kirchhoff nel dominio di LaplaceOttengo in questo modo un circuito simbolico nel DL che e' senza memoria e puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

Relazioni costitutive nel DL

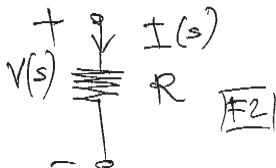
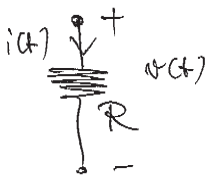
- Consideriamo un bipolo nel dominio del tempo (DT) a cui è applicata $v(t)$ e in cui fluisce $i(t)$; supponiamo $v(t)$ e $i(t)$ trasformabili secondo Laplace; consideriamo poi un bipolo ai cui morsetti è applicato simbolicamente $V(s) = L[v(t)]$ e in cui fluisce $I(s) = L[i(t)]$; per relazione costitutiva nel DL si intende la relazione che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$



- *Resistore ideale*: nel DT soddisfa alla legge di Ohm
 $v(t) = Ri(t)$; per la linearita' della trasf.ta di Laplace si ottiene

$$V(s) = RI(s)$$

quindi un resistore continua a essere definito da una resistenza nel DL



- *Condensatore ideale*: nel DT soddisfa a $i(t) = Cdv(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

$$I(s) = C(sV(s) - v(0^-)) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

- nel DL il condensatore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico
- *C scarico* a $t = 0^-$. Se $v(0^-) = 0$ allora si ha

$$I(s) = sCV(s); \quad V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

- definiamo

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad Ohm$$

impedenza di C nel DL e

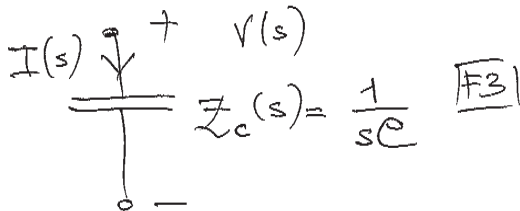
$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = sC \quad Ohm^{-1}$$

ammettenza di C nel DL

- allora un C scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_C(s) = 1/sC$ oppure una ammettenza $Y_C(s) = sC$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_C(s)}; \quad I(s) = Y_C(s)V(s)$$

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



- C carico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

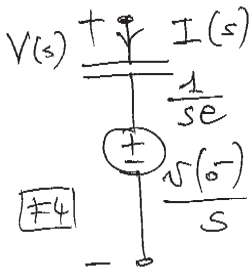
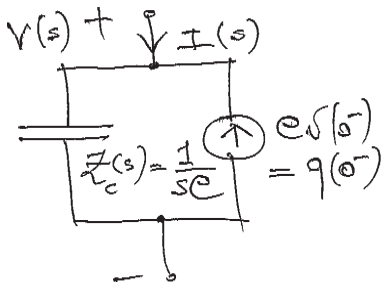
$$I(s) = \frac{V(s)}{\frac{1}{sC}} - Cv(0^-)$$

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- altrimenti possiamo scrivere

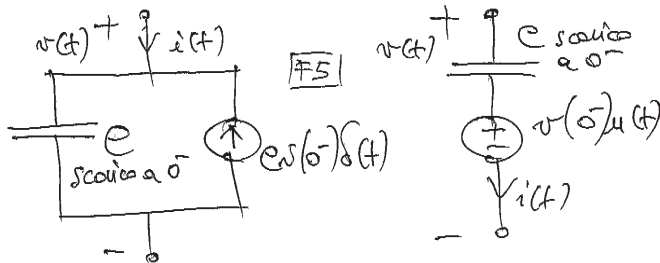
$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



- per un C carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di C a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un C carico a $t = 0^-$ del DT



- *Induttore ideale*: nel DT soddisfa a $v(t) = L di(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

$$V(s) = L(sI(s) - i(0^-)) = sLI(s) - Li(0^-)$$

- nel DL l'induttore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico
- *L scarico a $t = 0^-$* . Se $i(0^-) = 0$ allora si ha

$$V(s) = sLI(s); \quad I(s) = \frac{1}{sL} V(s)$$

- definiamo

$$Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad Ohm$$

impedenza di L nel DL e

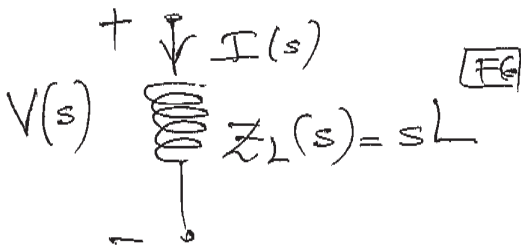
$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL} \quad Ohm^{-1}$$

ammettenza di L nel DL

- allora un L scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_L(s) = sL$ oppure una ammettenza $Y_L(s) = 1/sL$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L(s)}; \quad I(s) = Y_L(s)V(s)$$

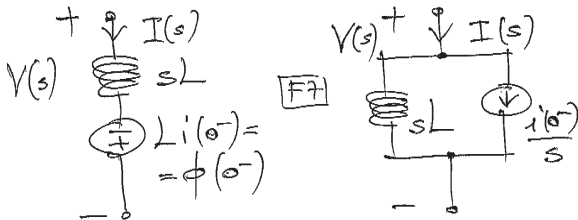
e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



- L carico a $t = 0^-$. Se $i(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



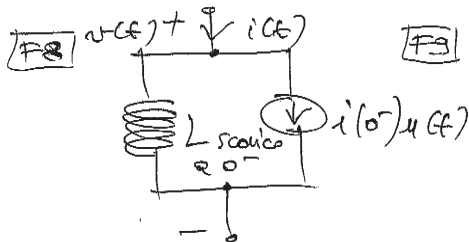
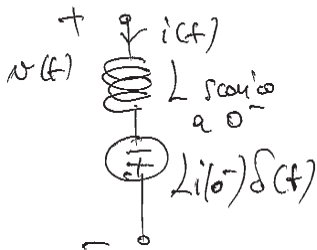
- altrimenti possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- per un L carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di L a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un L carico a $t = 0^-$ del DT



Leggi di Kirchhoff nel DL

- Consideriamo la KV lungo una maglia di un circuito

$$v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0, \quad t \geq 0$$

- se le tensioni sono trasformabili secondo Laplace, per la linearità della Trasf. di Laplace otteniamo

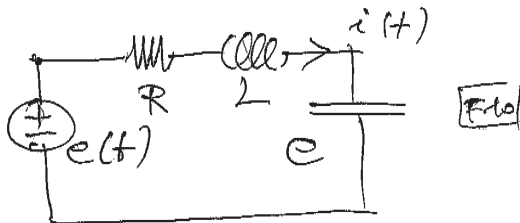
$$V_1(s) - V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) = 0$$

quindi *le trasformate di Laplace delle tensioni soddisfano alla KV*

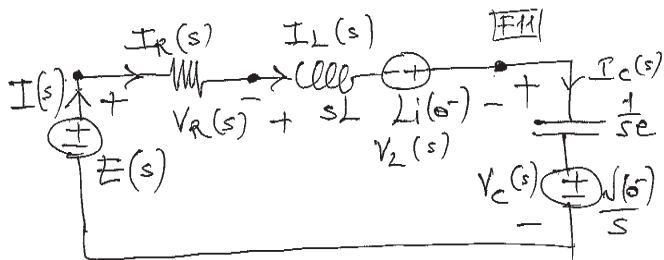
- analogamente *le trasformate di Laplace delle correnti soddisfano alla KI*
- illustriamo di seguito con degli esempi come si applica il metodo simbolico di Laplace per l'analisi di circuiti LTI.

Esempio. Riconsideriamo il circuito RLC serie e supponiamo

$$i(0^-) = i_0, \quad v(0^-) = v_0$$



- il circuito simbolico di Laplace e' in figura; tale circuito e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti resistive



- si ha

$$KI : I(s) = I_R(s) = I_C(s) = I_L(s); \quad KV : E(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

quindi ottengo

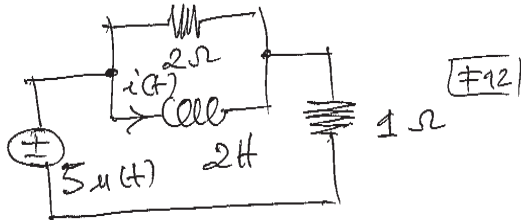
$$E(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

da cui trovo per $I(s)$ lo stesso risultato ottenuto in precedenza scrivendo prima equazione integro differenziale e trasformando tale equazione, cioè'

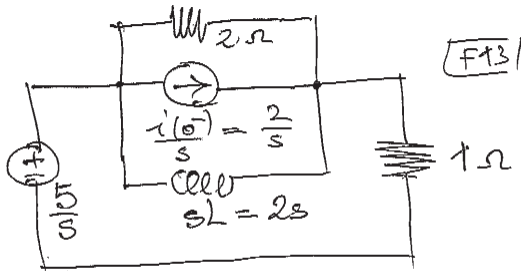
$$I(s) = \frac{E(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

- notare che il generatore indipendente $E(s)$ e' quello che da' luogo alla risposta forzata, mentre i due generatori legati alle condizioni iniziali di L e C danno luogo alla risposta libera.

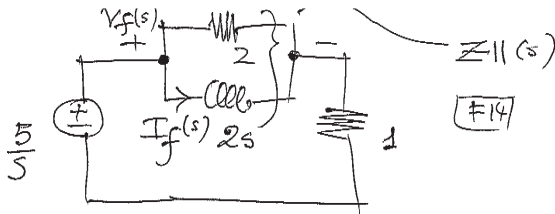
Esempio. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, usando il metodo simbolico di Laplace; e' noto che $i(0^-) = 2 \text{ A}$



- consideriamo il circuito simbolico che segue dove abbiamo usato il modello parallelo per l'induttore carico



- forzata: dobbiamo analizzare il seguente circuito



- si ha

$$Z_{||}(s) = 2 \parallel 2s = \frac{2s}{s+1}$$

e dalla regola del partitore di tensione

$$V_f(s) = \frac{5}{s} \frac{Z_{||}}{Z_{||} + 1} = \frac{10}{3s+1}$$

- quindi

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{2s} = \frac{5}{3} \frac{1}{s} \frac{1}{s + \frac{1}{3}} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s + \frac{1}{3}}$$

- antitrasformando

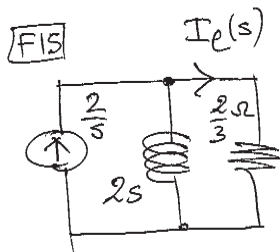
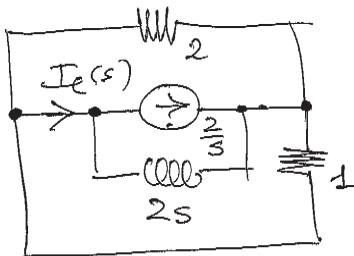
$$i_f(t) = 5(1 - e^{-t/3})u(t)$$

- libera: consideriamo il circuito che segue; dalla regola del partitore di corrente

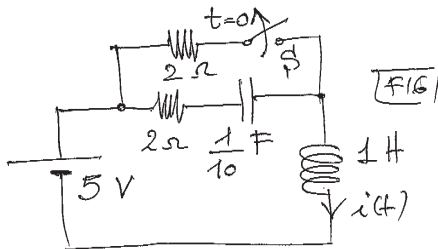
$$I_I(s) = \frac{2}{s} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2s}} = \frac{2}{s + \frac{1}{3}}$$

quindi

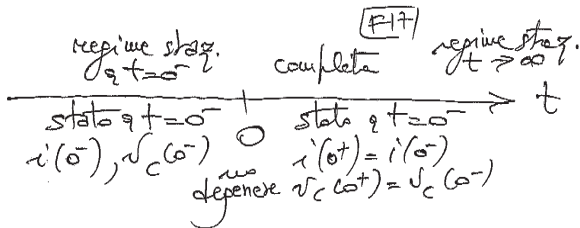
$$i_I(t) = 2e^{-t/3}u(t)$$



Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$. Determinare $i(t)$, $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel DT. Verificare il risultato ottenuto a partire da $t = 0^-$ usando il metodo simbolico di Laplace

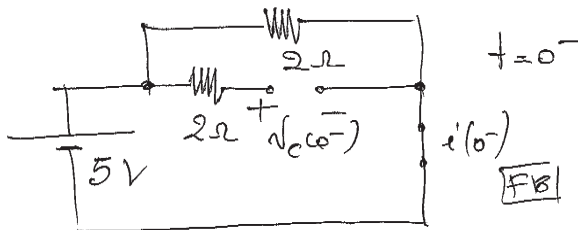


- *Dominio del tempo:* facciamo riferimento al seguente schema



- lo stato a $t = 0^-$ in regime stazionario si determina con il seguente circuito; si ha

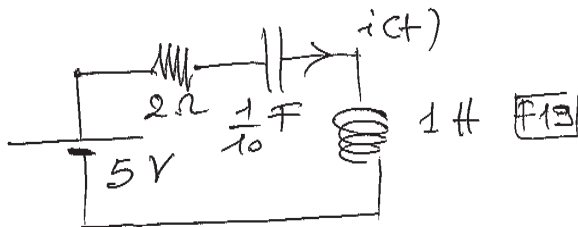
$$v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$



- il circuito non e' degenero per cui

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^+) = i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$

- per $t > 0$ si ottiene il circuito RLC serie che segue per il quale si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$



- si ha

$$R_s = 2 < R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{10}$$

quindi siamo in un caso sottosmorzato; inoltre

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} = 1 \text{ rad/sec}; \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 3 \text{ rad/sec}$$

e quindi le frequenze naturali valgono

$$s_{1,2} = -1 \pm j3 \text{ rad/sec}$$

- allora

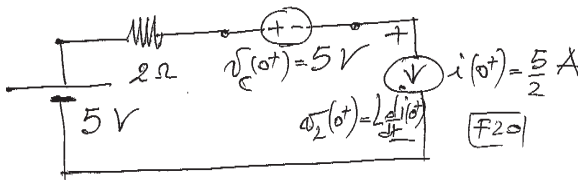
$$TC : i_{tc} = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

- si ha poi evidentemente

$$i_{\text{reg.staz}}(t) = 0$$

- condizioni iniziali per il problema di Cauchy: si ha $i(0^+) = 5/2$ A; per determinare $di(0^+)/dt$ considero l'istantanea del circuito a $t = 0^+$; si ottiene dalla KV

$$5 = 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + v_L(0^+); \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -5 \text{ A/sec}$$



- la completa soddisfa quindi al problema

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

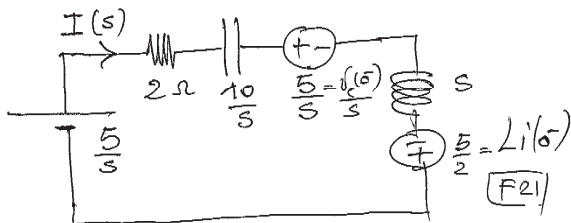
$$i(0^+) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -5$$

- imponendo le condizioni iniziali ottengo $A = 5/2$ e $B = -5/6$.
- Riassumendo

$$i(t) = \frac{5}{2}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0.$$

- *Dominio di Laplace*: tenendo conto delle condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato otteniamo il circuito simbolico che segue



- dalla KV si ha

$$\frac{5}{s} = 2I(s) + \frac{10}{s}I(s) + \frac{5}{s} + sI(s) - \frac{5}{2}$$

da cui

$$I(s) = \frac{5}{2} \frac{s}{s^2 + 2s + 10}$$

- i poli di $I(s)$ sono $s_{1,2} = -1 \pm j3$ rad/sec e coincidono con le frequenze naturali del circuito

- per antitrasformare scomponiamo $I(s)$ in fratti semplici

$$I(s) = \frac{K}{s - (-1 + j3)} + \frac{K^*}{s - (-1 - j3)}$$

con

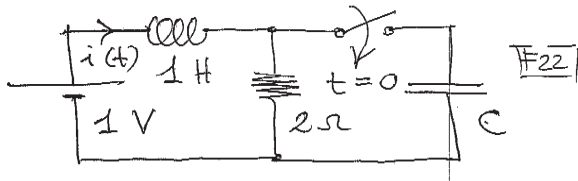
$$K = \lim_{s \rightarrow -1 + j3} (s - (-1 + j3))I(s) = \frac{5}{12}(3 + j)$$

- allora

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1+j3)t}u(t) + \frac{5}{12}(3 - j)e^{(-1-j3)t}u(t) \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1+j3)t}\right]u(t) \\ &= \frac{5}{6}e^{-t}\operatorname{Re}[(3 + j)(\cos(3t) + j\sin(3t))]u(t) \\ &= \frac{5}{2}e^{-t}\cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t}\sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Esempio. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, per $t \geq 0$, con una analisi del DT.

Verificare il risultato a partire da $t = 0^-$ con il metodo simbolico di Laplace. Per $t > 0$ la pulsazione di risonanza e' pari a 2 volte il fattore di smorzamento. Il condensatore e' scarico a $t = 0^-$



• DT: per $t > 0$, *in evoluzione libera*, si tratta di un circuito RLC parallelo; allora

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{C}} = 2\alpha_p = 2\frac{G_p}{2C} = 2\frac{1}{2} \frac{1}{2C}$$

quindi $\sqrt{C} = 1/2$ e $C = 1/4$ F

• inoltre

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} = 1 \text{ rad/sec}; \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

- per $t > 0$ le frequenze naturali sono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ rad/sec
- si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$, con $i_{\text{reg.staz.}}(t) = 1/2 \text{ A}$;
allora

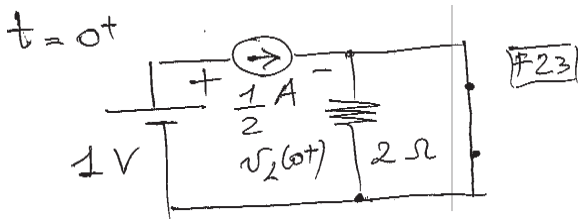
$$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$

- analisi a $t = 0^-$; si ha $i(0^-) = 1/2 \text{ A}$, $v_C(0^-) = 0 \text{ V}$, quindi, dato che il circuito e' non degenero

$$i(0^+) = i(0^-) = 1/2 \text{ A}; \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

- a $t = 0^+$ otteniamo

$$v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{di(0^+)}{dt} = 1 \text{ V}$$



- quindi dobbiamo risolvere

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$

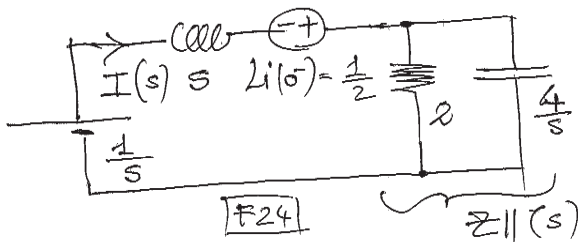
$$i(0^+) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 1$$

da cui ottengo $A = 0$ e $B = \sqrt{3}/3$, quindi

$$i(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}, \quad A; \quad t \geq 0.$$

DL: il circuito simbolico e' rappresentato in figura



- si ha $Z_{||}(s) = 2 \parallel (4/s) = 4/(s+2)$ Ohm, quindi KV implica

$$\frac{1}{s} = sI(s) - \frac{1}{2} + \frac{4}{s+2}I(s)$$

- risolvendo si ottiene

$$I(s) = \frac{1}{2s} \frac{s^2 + 4s + 4}{s^2 + 2s + 4}$$

i cui poli sono $s = 0$, $s = -1 \pm j\sqrt{3}$; quindi

$$I(s) = \frac{K}{s} + \frac{H}{s - (-1 + j\sqrt{3})} + \frac{H^*}{s - (-1 - j\sqrt{3})}$$

- si ha

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \frac{1}{2}; H = \lim_{s \rightarrow -1+j\sqrt{3}} (s - (-1+j\sqrt{3}))I(s) = \frac{1}{j2\sqrt{3}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{j2\sqrt{3}}e^{(-1+j\sqrt{3})t}u(t) + \frac{1}{-j2\sqrt{3}}e^{(-1-j\sqrt{3})t}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\frac{e^{j\sqrt{3}t} - e^{-j\sqrt{3}t}}{j2}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)u(t), \quad A. \end{aligned}$$