

# Derivazione del metodo dei fasori dal metodo simbolico di Laplace

Mauro Forti

June 4, 2021

- **Comportamento asintotico anti-trasformata di Laplace**
- Sia  $F(s)$  una funzione razionale e  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

se e solo se tutti i poli di  $F(s)$  sono a parte reale negativa.

- **Teorema del regime sinusoidale**
- Consideriamo la funzione di rete

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

di un circuito LTI ( $E(s)$  e' la trasformata dell'eccitazione  $e(t)$  e  $U(s)$  e' la trasformata dell'uscita  $u(t)$ , risposta forzata).

Supponiamo che

- 1) il circuito sia asintoticamente stabile rispetto a  $H(s)$  (tutti i poli di  $H(s)$  sono a parte reale negativa)
- 2) l'eccitazione  $e(t)$  sia sinusoidale a pulsazione  $\omega$  con fasore associato  $\bar{E}$ .

Allora, esaurita una fase transitoria, la risposta  $u(t)$  e' sinusoidale alla stessa pulsazione  $\omega$  della eccitazione. Inoltre, il fasore  $\bar{U}$  della risposta in regime sinusoidale e' dato da

$$\bar{U} = H(s)|_{s=j\omega} \bar{E} = H(j\omega) \bar{E}.$$

- Se scriviamo  $H(j\omega)$  in forma esponenziale

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

allora il modulo  $A(\omega)$  di  $H(j\omega)$  e' la **risposta in ampiezza** mentre l'argomento  $\varphi(\omega)$  di  $H(j\omega)$  e' la **risposta in fase** del circuito

- Verifica. Possiamo scrivere

$$e(t) = \frac{1}{2}(\bar{E}e^{j\omega t} + \bar{E}^*e^{-j\omega t})$$

e quindi

$$E(s) = \frac{1}{2}\bar{E}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\bar{E}^*\frac{1}{s+j\omega}$$

e

$$U(s) = H(s)\frac{1}{2}[\bar{E}\frac{1}{s-j\omega} + \bar{E}^*\frac{1}{s+j\omega}]$$

- Allora

$$U(s) = \frac{1}{2}\bar{U}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\bar{U}^*\frac{1}{s+j\omega} + U_{\text{trans}}(s)$$

dove  $U_{\text{trans}}(s)$  e' la parte della scomposizione in fratti semplici corrispondente a poli di  $U(s)$  a parte reale negativa

- Quindi

$$u(t) = u_{\text{regime}}(t) + u_{\text{trans}}(t)$$

dove per quanto detto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{\text{trans}}(t) = 0$$

mentre

$$u_{\text{regime}}(t) = \frac{1}{2}(\bar{U}e^{j\omega t} + \bar{U}^*e^{-j\omega t}) = \text{Re}[\bar{U}e^{j\omega t}]$$

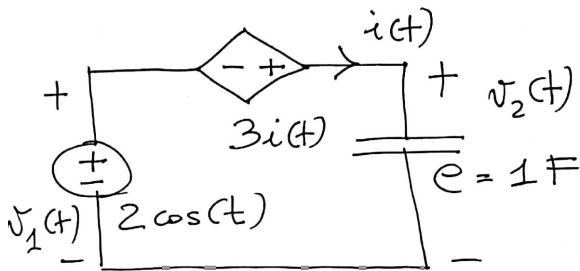
e' una sinusoide a pulsazione  $\omega$  con fasore associato  $\bar{U}$

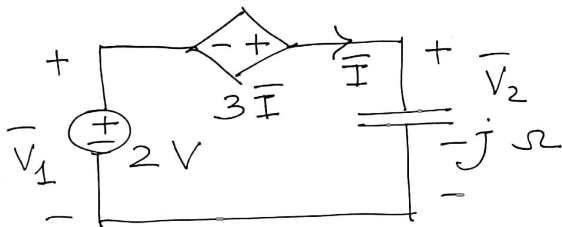
- valutiamo adesso il fasore  $\bar{U}$ . Si ha

$$\begin{aligned}\bar{U} &= 2\text{Res}[H(s)E(s), j\omega] \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)H(s)E(s) \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s) \left[ \frac{1}{2}\bar{E} + \frac{1}{2}\bar{E}^* \frac{s - j\omega}{s + j\omega} \right] \\ &= H(j\omega)\bar{E}\end{aligned}$$

dove per calcolare il residuo abbiamo sfruttato il fatto che il polo  $j\omega$  e' semplice (dato che il circuito e' asintoticamente stabile e quindi  $H(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa).

- Esempio. Determinare la risposta in regime permanente sinusoidale  $v_2(t)$ .





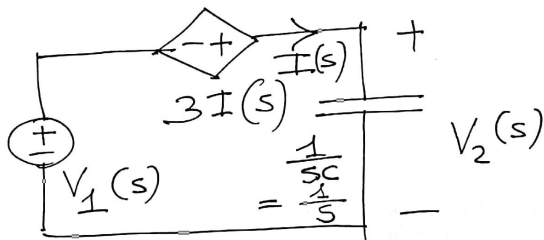
• Usando il metodo dei fasori ottengo il circuito in figura per il quale dalla KV si ha  $2 = -3\bar{I} - j\bar{I}$  e quindi  $\bar{I} = -2/(3 + j)$  e

$$\bar{V}_2 = -j\bar{I} = \frac{2j}{3+j} = \frac{2j(3-j)}{10} = \frac{2}{10}(1+3j) = \frac{2}{\sqrt{10}}e^{j\arctan(3)}$$

da cui

$$v_{2,\text{regime}}(t) = \frac{2}{\sqrt{10}} \cos(t + \arctan(3)) \text{ V.}$$

- !!!? Fisicamente che senso ha  $v_{2,\text{regime}}(t)$ ?
- e' osservabile in pratica solo se il circuito e' asintoticamente stabile!!!
- La stabilita' non si puo' pero' valutare con il metodo dei fasori. Bisogna invece usare Laplace
- Con i fasori non si vede niente di sospetto ... pero' adesso vediamo con Laplace che il circuito e' instabile



- Con Laplace consideriamo il circuito in figura per il quale

$$V_1(s) = -3I(s) + \frac{1}{s}I(s) = \frac{1-3s}{s}I(s)$$

da cui  $I(s) = \frac{s}{1-3s}V_1(s)$  e

$$v_2(s) = \frac{1}{s} \frac{s}{1-3s} = \frac{1}{1-3s}V_1(s)$$

- la funzione di rete vale

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 - 3s}$$

- il circuito e' quindi instabile dato il polo di  $H(s)$  in  $s = 1/3$ . La risposta  $v_2(t)$  e' allora data da

$$v_2(t) = ke^{\frac{1}{3}t} + \frac{2}{\sqrt{10}} \cos(t - \arctan(3)) \quad V$$

quindi il regime permanente non e' in pratica osservabile.