

Funzioni di rete

Mauro Forti

April 28, 2020

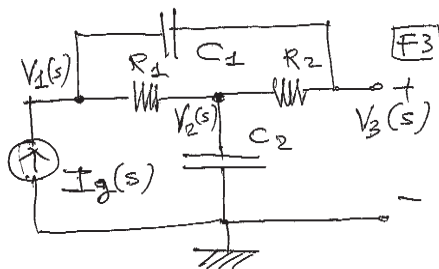
- Il punto di vista ingresso-uscita

Per un circuito lineare e tempo invariante (LTI) con un ingresso (causa, eccitazione) e una uscita (effetto, risposta) definiamo funzione di rete nel dominio di Laplace

$$H(s) = \frac{\text{trasformata di Laplace dell'effetto (risposta forzata)}}{\text{trasformata di Laplace della causa}}$$

- **Esempio.** Determinare la funzione di rete

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)}$$



- consideriamo il circuito simbolico nel dominio di Laplace con gli elementi reattivi scarichi a $t = 0^-$ (risposta forzata)

• analizzando con il metodo dei nodi otteniamo un sistema risolvente del tipo $\mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}(s)$ e cioè'

$$\begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & -sC_1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & -G_2 \\ -sC_1 & -G_2 & G_2 + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• quindi

$$\begin{aligned} V_3(s) &= \frac{\det \begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & I_g(s) \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & 0 \\ -sC_1 & -G_2 & 0 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 \\ -sC_1 & -G_2 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)} I_g(s) \\ &= H(s)I_g(s) \end{aligned}$$

- svolgendo i conti otteniamo

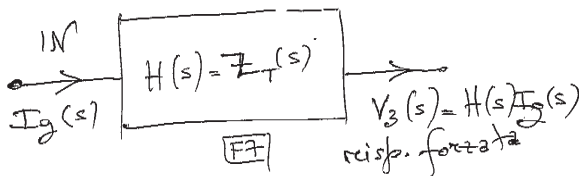
$$H(s) = \frac{s^2 + (\frac{G_1}{C_2} + \frac{G_2}{C_2})s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}{(G_1 + G_2)s^2 + \frac{G_1 G_2}{C_1} s}$$

- nel dominio di Laplace il circuito stabilisce un 'legame di proporzionalita' fra ingresso e uscita (risposta forzata). La 'costante di proporzionalita' e' una funzione $H(s)$ della variabile s detta funzione di rete del circuito
- si puo' dimostrare in generale che per un circuito lineare e tempo invariante

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e' una funzione razionale a coefficienti reali; inoltre $H(s)$ non dipende dalla grandezza impressa dalla eccitazione

- nel caso considerato il circuito puo' essere rappresentato come una scatolina che si caratterizza completamente dal punto di vista ingresso-uscita (risposta forzata) con $H(s)$; se cambia eccitazione ($I_{g1}(s)$), $H(s)$ non cambia e la nuova risposta forzata e' $H(s)I_{g1}(s)$

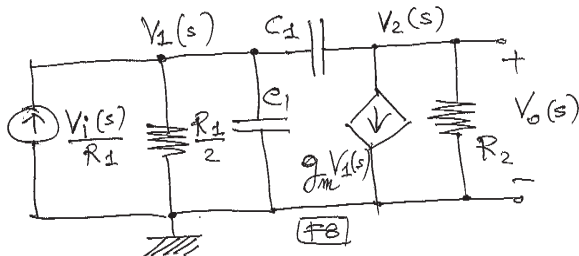


- in questo caso

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)} = Z_T(s)$$

e' detta 'impedenza di trasferimento'.

- **Esempio.** Determinare la funzione di trasferimento in tensione $T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$



- dalle KI ai nodi 1 e 2 otteniamo

$$V_1(s) \left(\frac{2}{R_1} + sC_1 \right) + (V_1(s) - V_2(s))sC_1 = \frac{V_i(s)}{R_1}$$

$$\frac{V_2(s)}{R_2} + (V_2(s) - V_1(s))sC_1 + g_m V_1(s) = 0$$

- sotto forma di sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{R_1} + 2sC_1 & -sC_1 \\ g_m - sC_1 & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_i(s)}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

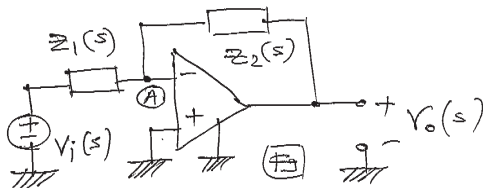
- risolvendo ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{C_1}{R_1} - \frac{g_m}{R_1}}{3C_1^2 s^2 + (\frac{2C_1}{R_1} + C_1 g_m)s + \frac{2}{R_1 R_2}}.$$

Funzioni di rete di circuiti con amplificatori operazionali

Esempio. Per il circuito in figura, scrivendo una KI al nodo A ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



- se $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = R_2$, si ha $T_v(s) = -R_2/R_1$ (amplificatore invertente)
- se $Z_1(s) = R$, $Z_2(s) = 1/sC$, si ha

$$T_v(s) = -\frac{1}{sRC}$$

che corrisponde ad un integratore invertente

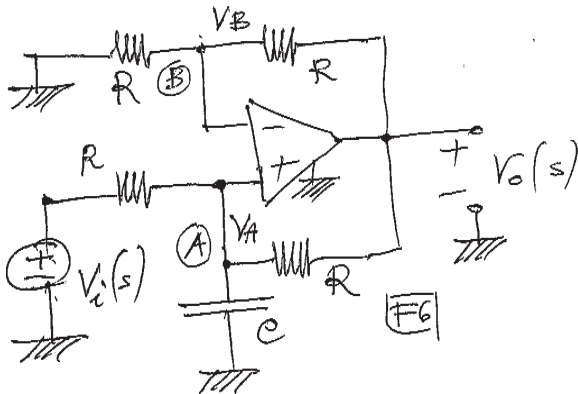
Esempio. Per il circuito in figura si ha $V_B(s) = V_0(s)/2 = V_A(s)$ e

$$\frac{V_0(s)}{2} \left(\frac{2}{R} + sC \right) - \frac{V_i(s)}{R} - \frac{V_0(s)}{R} = 0$$

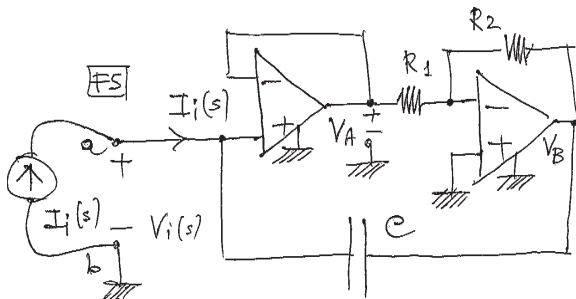
dalle quali ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{sCR}$$

- e' un integratore non invertente (integratore di Deboo).



Esempio. Moltiplicatore di capacita'. Determinare l'impedenza $Z_i(s)$ del bipolo ab in figura



- alimento con un generatore di corrente I_i ; si ha $V_A = V_i$, e $V_B = -(R_2/R_1)V_A = -(R_2/R_1)V_i$; allora

$$I_i = (V_i - V_B)sC = [V_i + V_i \frac{R_2}{R_1}]sC$$

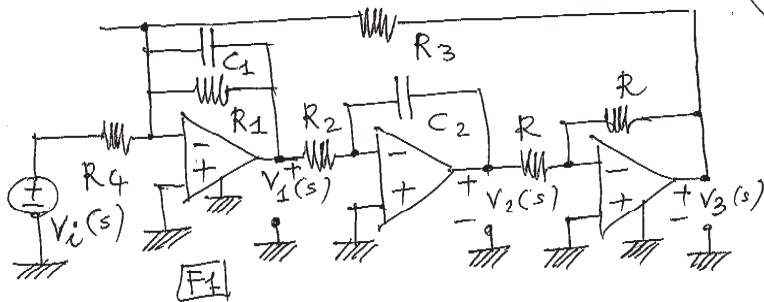
e

$$Z_i(s) = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})sC} = \frac{1}{sC_{eq}}$$

- il bipolo equivale un condensatore di capacita' $C_{eq} = (1 + \frac{R_2}{R_1})C$.

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_3(s)/V_i(s)$$



- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$
- scriviamo 3 KI ai nodi di ingresso degli ao; per il secondo ao si ha

$$V_2 = -\frac{1}{sR_2C_2}V_1$$

mentre per il terzo ao

$$V_3 = -V_2$$

- infine per il primo ao

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + V_1\left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) = 0$$

- allora

$$V_2 = -V_3; \quad V_1 = -sR_2C_2V_2 = sR_2C_2V_3$$

quindi

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + sR_2C_2V_3\left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{R_4} &= -V_3\left[\frac{1}{R_3} + s^2R_2C_1C_2 + s\frac{R_2C_2}{R_1}\right] \\ &= -V_3\frac{R_1 + s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2}{R_1R_3} \end{aligned}$$

- quindi

$$\frac{V_3}{V_i} = -\frac{1}{R_4} \frac{R_1R_3}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + R_1}$$

- infine

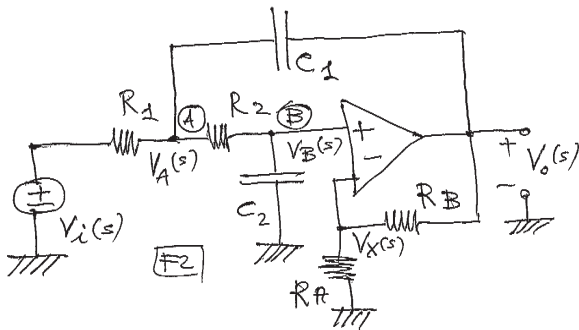
$$T_v(s) = \frac{V_3}{V_i} = -\frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

- e' un filtro passa passo del secondo ordine

$$T_v(s) = -k \frac{1}{s^2 + as + b}.$$

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$$



- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_A(s)$, $V_B(s)$, $V_0(s)$; scriviamo 3 KI ai nodi A, B e X
- dalla KI al nodo X si ha

$$V_x = \frac{V_0}{k}; \quad k = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

- da KI al nodo B ($V_B = V_X$) si ottiene

$$V_A = V_B(1 + sR_2C_2) = \frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2)$$

- infine dalla KI al nodo A

$$\frac{V_A - V_i}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + (V_A - V_0)sC_1 = 0$$

- sostituendo ottengo

$$V_A \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_B}{R_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

e quindi

$$\frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_0}{kR_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

- svolgendo i conti ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{k}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

Esempio. La risposta forzata di un circuito LTI a $e(t) = u(t)$ vale $y(t) = (3 - e^{-3t})u(t)$. Determinare la risposta forzata a $e_1(t) = \cos(2t)u(t)$.

- Si ha $E(s) = 1/s$ e

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+3}$$

quindi

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = 3 - \frac{s}{s+3} = \frac{2s+9}{s+3}$$

- inoltre $E_1(s) = s/(s^2 + 4)$ e allora

$$Y_1(s) = H(s)E_1(s) = \frac{2s+9}{s+3} \frac{s}{s^2+4} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-j2} + \frac{B^*}{s+j2}$$

- i coefficienti della scomposizione in fratti semplici sono

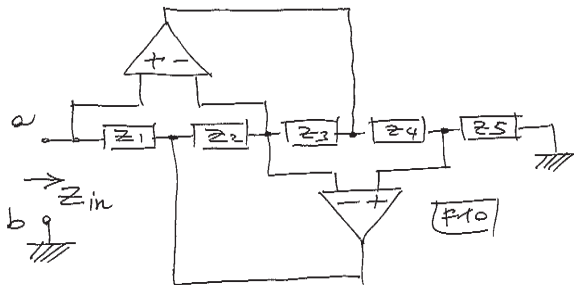
$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)Y_1(s) = -\frac{9}{13}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow j2} (s-j2)Y_1(s) = \frac{35-j6}{26}$$

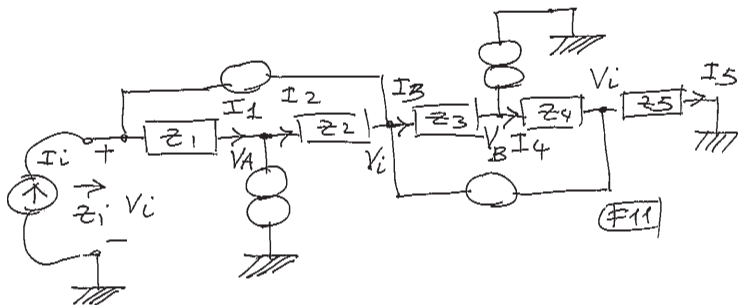
- allora

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Ae^{-3t}u(t) + Be^{j2t}u(t) + B^*e^{-j2t}u(t) \\&= Ae^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}[Be^{j2t}]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}\left[\frac{35-j6}{26}(\cos(2t) + j\sin(2t))\right]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + \frac{35}{13}\cos(2t)u(t) + \frac{6}{13}\sin(2t)u(t).\end{aligned}$$

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo ab



- usiamo la rappresentazione con nullatore e noratore degli ai



- possiamo scrivere $I_5 = V_i/Z_5$ e, essendo $I_4 = I_5$,

$$V_B = V_i + Z_4 I_5 = V_i \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

- inoltre

$$I_3 = \frac{V_i - V_B}{Z_3} = \frac{1}{Z_3} \left(-V_i \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

e essendo $I_2 = I_3$

$$V_A = V_i + Z_2 I_2 = V_i \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right)$$

- quindi

$$I_i = \frac{V_i - V_A}{Z_1} = V_i \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5}$$

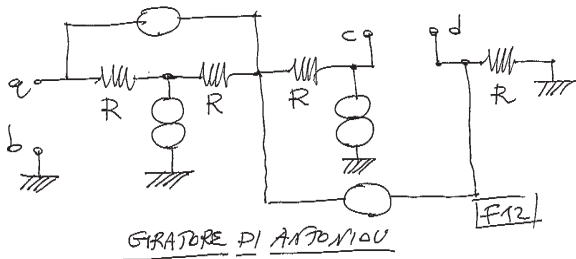
- infine

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

- ad esempio, se $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R$ e $Z_4 = 1/sC$ si ha

$$Z_{\text{in}}(s) = sR^2C = sL_{\text{eq}}$$

- corrisponde ad un giratore con resistenza di girazione R chiuso su un condensatore (giratore di Antoniou)



- se $Z_1 = Z_3 = 1/sC$, $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$, si ottiene

$$Z_{in}(s) = \frac{1}{RC^2 s^2}$$

e per $s = j\omega$

$$Z_{in}(j\omega) = -\frac{1}{RC^2 \omega^2}$$

che corrisponde a un resistore negativo dipendente dalla frequenza (FDNR; 'frequency dependent negative resistor').



Cenni su Stabilità di Circuiti

- Consideriamo la funzione di rete di un circuito LTI

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono polinomi a coefficienti reali nella variabile s

- Il circuito è asintoticamente stabile (AS) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} < 0$
- il circuito è stabile (marginalmente) (S) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} \leq 0$ e inoltre quelli con $\text{Re} = 0$ sono semplici (di molteplicità 1)
- il circuito è instabile (INST) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ in tutti i casi rimanenti

Circuiti Passivi: contengono solo bipoli e reti due porte (e mutiporta) passivi; contengono in particolare solo elementi dissipatori e/o accumulatori

- si può dimostrare che la *stabilità è una proprietà intrinseca di ogni circuito passivo*; ne consegue questo risultato fondamentale

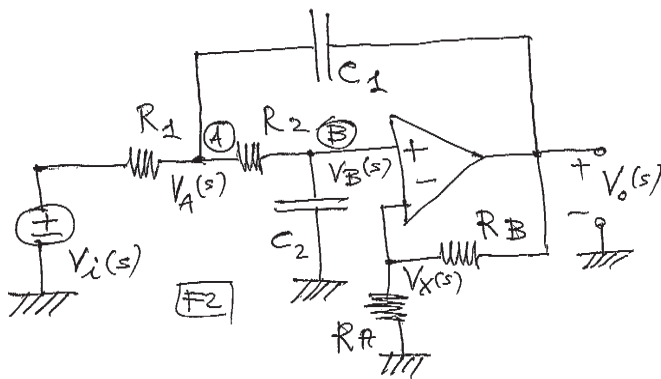
- *Proprietà*: sia $H(s)$ la funzione di rete di un circuito LTI passivo. Allora i poli di $H(s)$ possono essere dei seguenti tipi:

- 1) poli a $\text{Re} < 0$ (anche multipli)
- 2) poli a $\text{Re} = 0$ (necessariamente semplici)
- 3) polo per $s = \infty$ (necessariamente semplice)

Circuiti Passivi: contengono oltre a bipoli dissipatori e accumulatori anche elementi attivi (BJT, generatori controllati, ao)

- per i circuiti attivi la stabilita' non e' una proprieta' intrinseca; e' invece una proprieta' che va garantita in fase di progetto del circuito

Esempio consideriamo ancora il circuito attivo con un ao in figura



- abbiamo visto che la funzione di rete

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{V_o}{V_i} \\
 &= \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{k}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}
 \end{aligned}$$

dove il parametro $k = 1 + R_B/R_A$

- si tratta di un filtro passa basso del secondo ordine; per poter essere utilizzato come filtro è necessario che sia AS
- studiamo la stabilità al variare di k ; si ha quanto segue; il denominatore di $H(s)$ è della forma $D(s) = s^2 + 2\alpha(k)s + \omega_0^2$; sia

$$k_{\max} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}}{\frac{1}{R_2 C_2}}$$

il valore per cui si annulla $\alpha(k)$; si ha

- 1) $k < k_{\max}$ implica $\alpha(k) > 0$, quindi $D(s)$ ha due radici a $\text{Re} < 0$; il circuito è AS
- 2) $k = k_{\max}$ implica $\alpha(k) = 0$; $D(s)$ ha due radici semplici a $\text{Re} = 0$ dati da $s_{1,2} = \pm j\beta$ con $\beta = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$; il circuito è S
- 3) $k > k_{\max}$ implica $\alpha(k) < 0$, quindi $D(s)$ ha due radici a $\text{Re} > 0$; il circuito è INST

- il luogo dei poli di $H(s)$ al variare di k e' riportato in figura

