

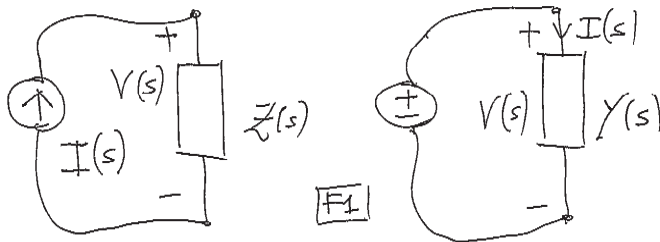
Reti due porte

Mauro Forti

April 30, 2020

- **Bipoli RLC**

- Consideriamo un bipolo LTI nel DL contenente un certo numero di condensatori C_i e induttori L_i . Supponiamo C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$; la *relazione costitutiva nel DL* e' il legame che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$



- ci sono solo due possibili rappresentazioni (relazioni costitutive) del bipolo
- se il bipolo e' controllabile in corrente; alimento in corrente ($I(s)$, causa) e trovo la tensione $V(s)$ (effetto); ottengo cosi' la rappresentazione impedenza

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

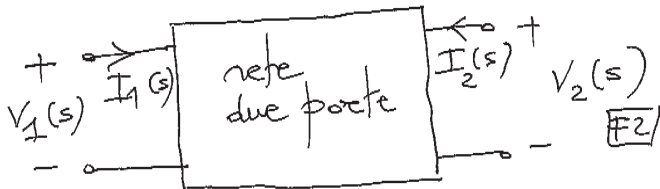
- dualmente, se il bipolo e' controllabile in tensione, ottengo la rappresentazione ammettenza

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

- se esistono entrambe le rappresentazioni, sono legate da

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

- Consideriamo adesso una rete due porte LTI nel DL contenente C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$



- relazioni costitutive: 2 legami che la rete stabilisce fra le 4 grandezze di porta $V_1(s)$, $V_2(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$
- abbiamo varie possibilita' per scrivere le relazioni costitutive; ad esempio, scegliendo come cause I_1, I_2 e come effetti V_1, V_2 ottengo la rappresentazione a parametri z della rete due porte

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s)$$

che generalizza la rappresentazione impedenza di un bipolo

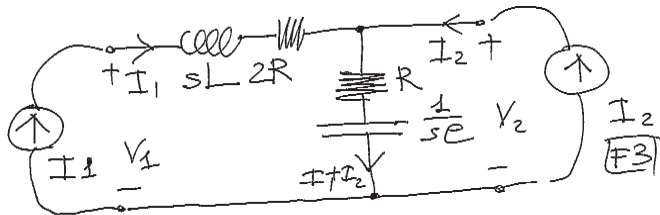
- scegliendo come cause I_1, V_2 e come effetti V_1, I_2 ottengo la rappresentazione a parametri h della rete due porte

$$V_1(s) = h_{11}(s)I_1(s) + h_{12}(s)V_2(s)$$

$$I_2(s) = h_{21}(s)I_1(s) + h_{22}(s)V_2(s)$$

- complessivamente, in base alla scelta della coppia di variabili indipendenti, abbiamo 6 diverse possibili rappresentazioni di una rete due porte; essendo rappresentazioni della stessa rete due porte, sono legate fra di loro (nota una rappresentazione posso ottenerne un'altra con opportune formule di trasformazione)

Esempio. Determinare parametri z e h della rete due porte in figura



• si ha

$$V_1 = (sL + 2R)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = \left(R + \frac{1}{sC}\right)(I_1 + I_2)$$

quindi

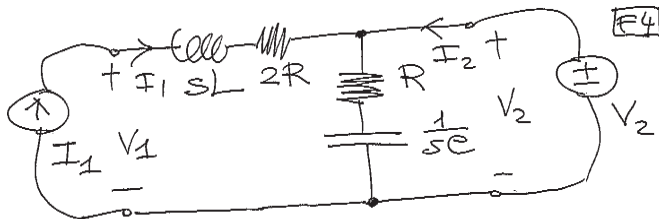
$$V_1 = \left(sL + 3R + \frac{1}{sC}\right)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_2$$

$$V_2 = \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_2$$

- inoltre

$$V_1 = (sL + R)I_1 + V_2$$

$$I_2 = -I_1 + \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} V_2$$



- **Parametri z (a circuito aperto)**
- Scegliamo I_1, I_2 come grandezze indipendenti; V_1, V_2 come dipendenti; si ha

$$V_1 = z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

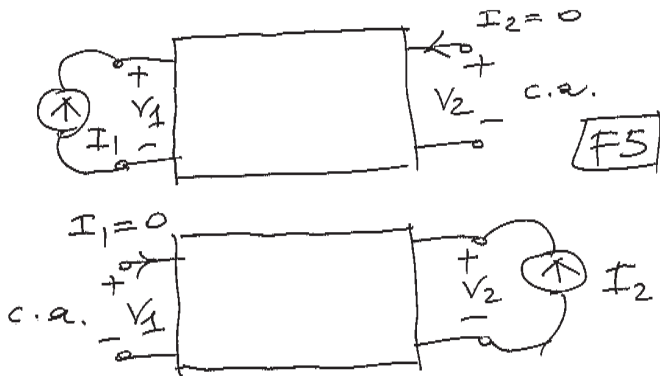
oppure

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- *Definizione operativa*: si ha

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_1 sulla porta 1 e lasciando a circuito aperto la porta 2



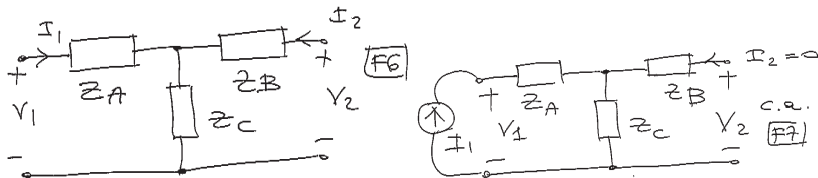
- operativamente z_{11} e' l'impedenza alla porta 1 quando la porta 2 e' a circuito aperto; z_{21} e' l'impedenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' a circuito aperto

- analogamente si ha

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}; \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_2 sulla porta 2 e lasciando a circuito aperto la porta 1
- operativamente z_{22} e' l'impedenza alla porta 2 quando la porta 1 e' a circuito aperto; z_{12} e' l'impedenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 e' a circuito aperto

- **Esempio.** Parametri z di rete a T



• si ha $z_{11} = Z_A + Z_C$, $z_{21} = Z_C$ inoltre $z_{22} = Z_B + Z_C$,
 $z_{12} = Z_C$, quindi

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_A + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_B + Z_C \end{pmatrix}$$

• notare che la matrice $\mathbf{Z}$ di una rete a T e' *simmetrica*

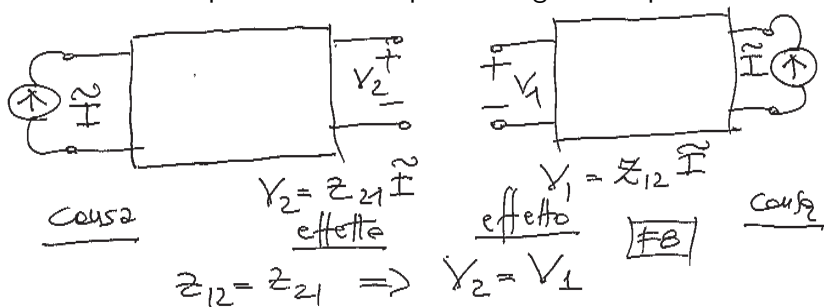
Reciprocita' di una rete due porte.

- Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri z ; la rete si dice *reciproca* se $\mathbf{Z}$ e' simmetrica, cioe'

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

- quindi *una rete due porte e' reciproca se e solo se le due impedenze di traferimento z_{21} e z_{12} coincidono*

- consideriamo per una rete reciproca il seguente esperimento



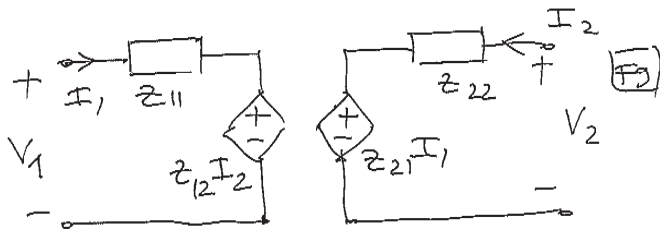
- ne consegue che: *in una rete reciproca l'effetto non cambia se si scambiano fra di loro posizione di causa e effetto*
- si può dimostrare che: *una rete due porte che contiene solo bipoli è reciproca*

Circuito equivalente a parametri z : supponiamo siano assegnati i parametri z di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri z); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

$$V_1 = z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2$$

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura



- **Parametri y (di corto circuito)**
- Scegliamo V_1, V_2 come grandezze indipendenti; I_1, I_2 come dipendenti; si ha

$$I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV}$$

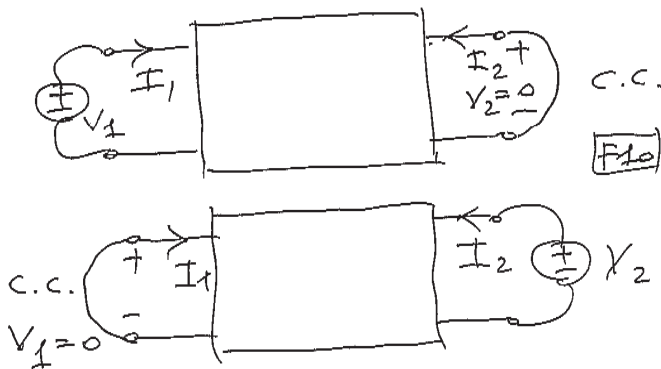
oppure

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- *Definizione operativa*: si ha

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}; \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_1 sulla porta 1 e mettendo in corto circuito la porta 2



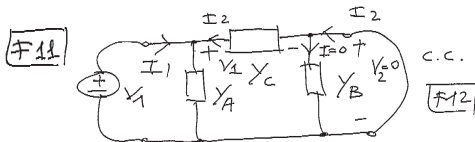
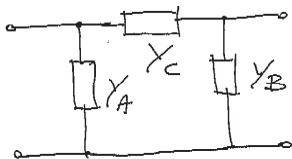
- operativamente y_{11} e' l'ammettenza alla porta 1 quando la porta 2 e' in corto circuito; y_{21} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' in corto circuito

- analogamente si ha

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}; \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_2 sulla porta 2 e mettendo in corto circuito la porta 1
- operativamente y_{22} e' l'ammettenza alla porta 2 quando la porta 1 e' in corto circuito; y_{12} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 e' corto circuito

- **Esempio.** Parametri y di rete a Π



- si ha $y_{11} = Y_A + Y_C$, $y_{21} = -Y_C$ inoltre $y_{22} = Y_B + Y_C$, $y_{12} = -Y_C$, quindi

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_A + Y_C & -Y_C \\ -Y_C & Y_B + Y_C \end{pmatrix}$$

- notare che la matrice $\mathbf{Y}$ di una rete a Π e' *simmetrica*

Reciprocita' di una rete due porte.

- Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri y ; la rete si dice *reciproca* se $\mathbf{Y}$ e' simmetrica, cioe'

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

- quindi rete due porte reciproca se e solo se le due ammettenze di traferimento y_{21} e y_{12} coincidono
- verificare che se una rete ammette sia i parametri z che i parametri y allora si ha

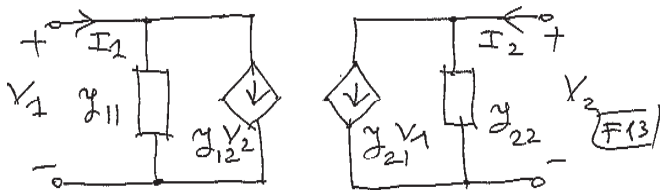
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$$

Circuito equivalente a parametri y : supponiamo siano assegnati i parametri y di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri y); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

$$I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2$$

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura



Parametri ibridi h

- Scegliamo I_1, V_2 come grandezze indipendenti; V_1, I_2 come dipendenti; si ha

$$V_1 = h_{11}(s)I_1 + h_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = h_{21}(s)I_1 + h_{22}(s)V_2$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- definizione operativa dei parametri h e legame con altri parametri; si ha

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{\left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}} = \frac{1}{y_{11}}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{\left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}} = \frac{1}{z_{11}}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{i_2}{V_1} \right|_{v_2=0} \frac{V_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{i_1=0} = \cdots = \frac{z_{12}}{z_{22}}$$

• **Reciprocita'.** Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri h se e solo se

$$h_{21} = -h_{12}$$

• **Esempio.** Determinare i parametri z in funzione dei parametri h

Assegnate le relazioni costitutive

$$V_1 = h_{11}i_1 + h_{12}V_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}V_2$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$V_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

- si ottiene

$$V_1 = h_{11}I_1 - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}}I_2$$

$$V_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{1}{h_{22}}I_2$$

e quindi

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

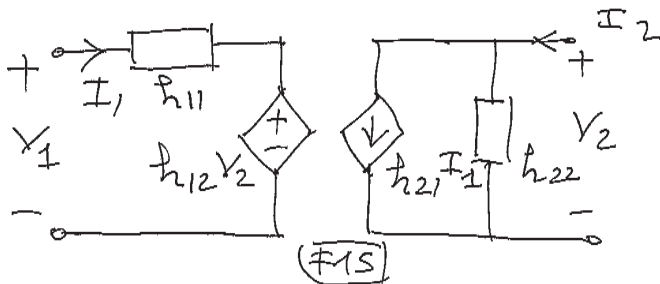
- notare che se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha $z_{21} = z_{12}$, quindi $h_{21} = -h_{12}$

- il circuito equivalente a parametri h si ottiene dalle relazioni costitutive

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

ed e' mostrato in figura



Parametri ibridi g

- Scegliamo V_1, I_2 come grandezze indipendenti; I_1, V_2 come dipendenti; si ha

$$I_1 = g_{11}(s)V_1 + g_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = g_{21}(s)V_1 + g_{22}(s)I_2$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Parametri di trasmissione

- Scegliamo $V_2, -I_2$ come grandezze indipendenti; V_1, I_1 come dipendenti; si ha

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{T}$ *matrice di trasmissione diretta*

- definizione operativa dei parametri di trasmissione:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}; \quad B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

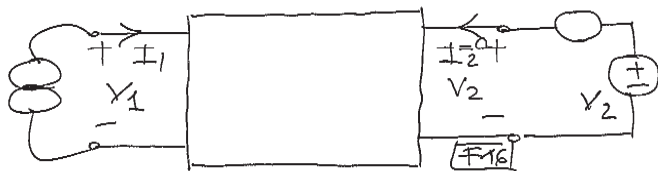
$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}; \quad D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

- tutti e 4 i parametri rappresentano funzioni di trasferimento da porta 2 verso porta 1

- i parametri

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

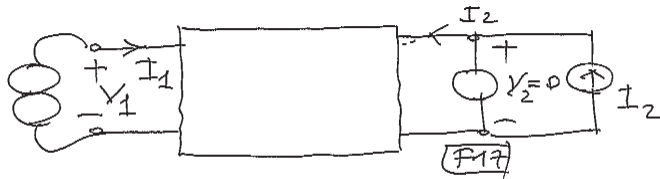
si trovano facendo riferimento al seguente circuito



- i parametri

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

si trovano facendo riferimento al seguente circuito



- **Reciprocita'.** Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri di trasmissione se e solo se

$$\det \mathbf{T} = AD - BC = 1$$

- **Esempio.** Determinare i parametri z in funzione dei parametri di trasmissione

- date le relazioni costitutive

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

- si ha

$$V_2 = \frac{1}{C}I_1 + \frac{D}{C}I_2$$

e quindi

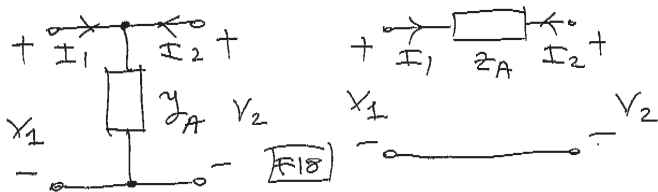
$$V_1 = \frac{A}{C}I_1 + \left(\frac{AD}{C} - B\right)I_2$$

- otteniamo allora

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & \det \mathbf{T} \\ 1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha $z_{21} = z_{12}$ e quindi $\det \mathbf{T} = 1$

Esempio. Determinare i parametri di trasmissione delle reti due porte in figura



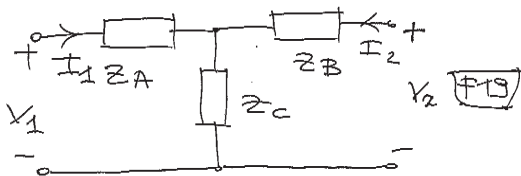
- per la rete di sinistra si ha $V_1 = V_2$ e $I_1 = Y_A V_2 - I_2$, quindi

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_A & 1 \end{pmatrix}$$

- per la rete a destra verificare che

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z_A & 1 \end{pmatrix}$$

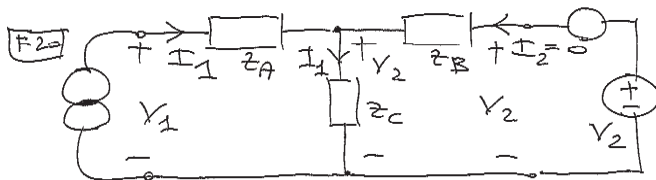
- **Esempio.** Determinare i parametri di trasmissione della rete due porte utilizzando la definizione operativa



- dato che

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

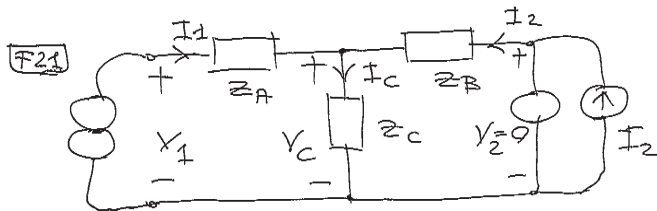
facciamo riferimento a questa rete



- si ha $I_1 = V_2/Z_C$ da cui $C = 1/Z_C$
- inoltre $V_1 = (Z_A + Z_C)I_1 = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C} V_2$, quindi $A = \frac{Z_A}{Z_C} + 1$
- i parametri

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

si trovano facendo riferimento al seguente circuito



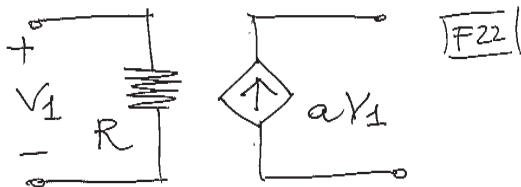
- si ha $V_C = -Z_B I_2$ e $I_C = V_C/Z_C = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2$;
 - $I_1 = I_C - I_2 = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2 - I_2$ e quindi $D = 1 + \frac{Z_B}{Z_C}$
 - infine $V_1 = Z_A I_1 - Z_B I_2 = -\frac{Z_A Z_B}{Z_C} I_2 - Z_A I_2 - Z_B I_2$ e perciò'
- $$B = Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C}$$

- riassumendo

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{Z_A}{Z_C} + 1 & Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C} \\ \frac{1}{Z_C} & 1 + \frac{Z_B}{Z_C} \end{pmatrix}$$

- e' facile verificare che $\det \mathbf{T} = 1$ e quindi la rete e' reciproca.

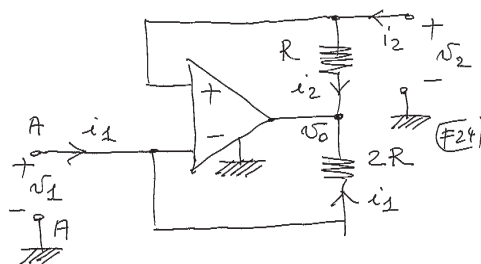
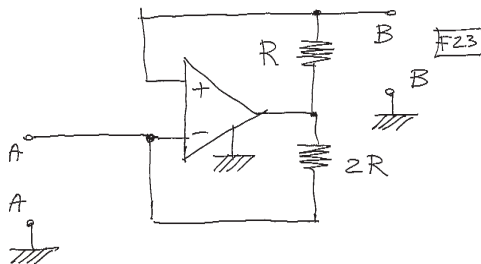
- **Esempio.** Determinare, se esistono, i parametri z, y, h, g e ABCD della seguente rete due porte in figura



- si ha $v_1 = Ri_1$ e $i_2 = -av_1 = -aRi_1$; quindi i_1 e i_2 sono dipendenti e non esistono gli z ; anche v_1 e i_2 sono dipendenti, per cui non esistono i g
- gli altri parametri esistono e sono dati da

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ -aR & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{aR} \end{pmatrix}$$

- **Esempio.** Determinare i parametri z , y e ABCD della rete due porte AA-BB. Verificare la reciprocita' della rete



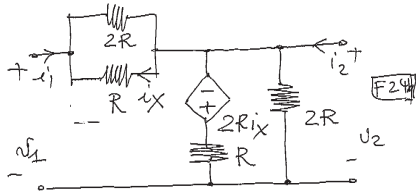
- si ha $v_1 = v_2$; inoltre, $v_1 = 2Ri_1 + v_0$, $v_2 = Ri_2 + v_0$, quindi $i_1 = i_2/2$; non esistono perciò né gli z né gli y

- esistono gli ABCD e si ha

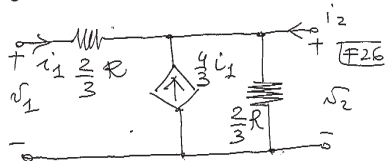
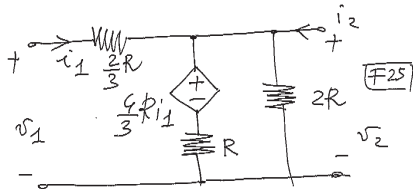
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

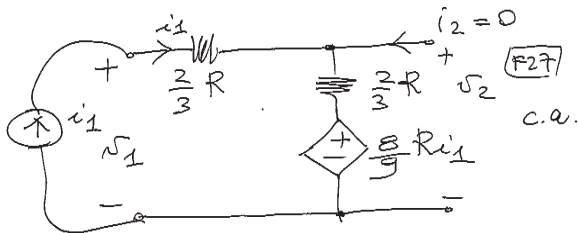
- la rete due porte non e' reciproca

Esempio. Determinare i parametri $z_{11}, z_{21}, h_{11}, h_{21}$ della rete



- notiamo che $i_x = -\frac{2}{3}i_1$ e che la rete due porte puo' essere trasformata in questo modo



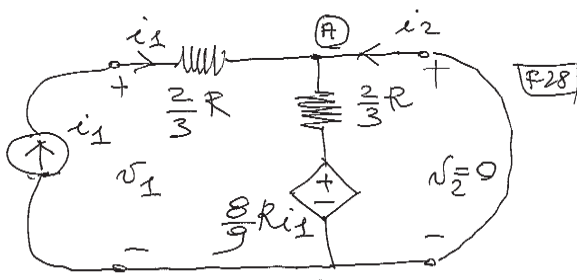


- alimentiamo con i_1 e lasciamo la porta 2 a circuito aperto; allora $v_1 = \frac{4}{3}Ri_i + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{20}{9}R$$

- inoltre $v_2 = \frac{2}{3}Ri_1 + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \big|_{i_2=0} = \frac{14}{9} R$$



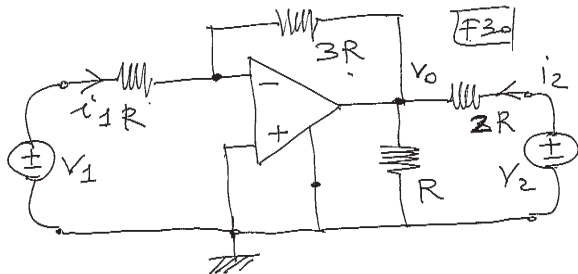
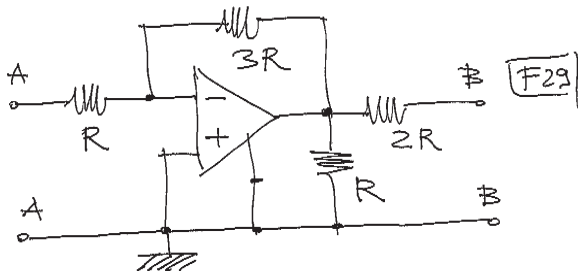
• adesso alimentiamo con i_1 e chiudiamo la porta 2 in corto circuito; si ha evidentemente

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{2}{3}R$$

inoltre, dalla KI al nodo A otteniamo $i_2 = -\frac{7}{3}i_1$, quindi

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} = -\frac{7}{3}R.$$

- **Esempio.** Determinare i parametri y della rete due porte AA-BB



- si ha

$$i_1 = \frac{v_1}{R}$$

- inoltre

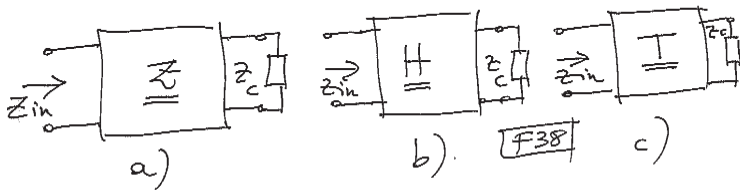
$$i_2 = \frac{v_2 - v_0}{2R} = \frac{v_2 + 3v_1}{2R} = \frac{3}{2R}v_1 + \frac{1}{2R}v_2$$

- quindi

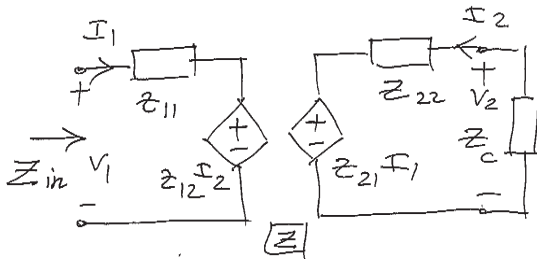
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{3}{2R} & \frac{1}{2R} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte non e' reciproca.

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo nei tre casi indicati in figura



- nel caso a) sostituisco il circuito equivalente a parametri z ottenendo



- si ha $I_2 = -z_{21}I_1/(z_{22} + z_c)$ e da KV alla maglia di sinistra

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1 - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}I_1$$

quindi

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}$$

- nel caso b) si puo' procedere in modo analogo dimostrando che

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22} + y_c}$$

- consideriamo il caso c); si ha

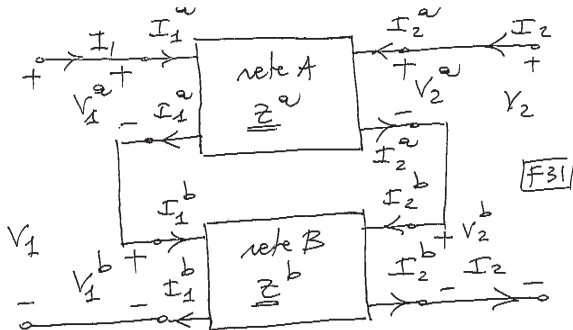
$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

e quindi

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A \frac{V_2}{-I_2} + B}{C \frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{Az_c + B}{Cz_c + D}.$$

- Collegamento serie fra reti due porte
- E' il collegamento mostrato in figura



- si ha

$$\underline{Z} = \underline{Z}^a + \underline{Z}^b$$

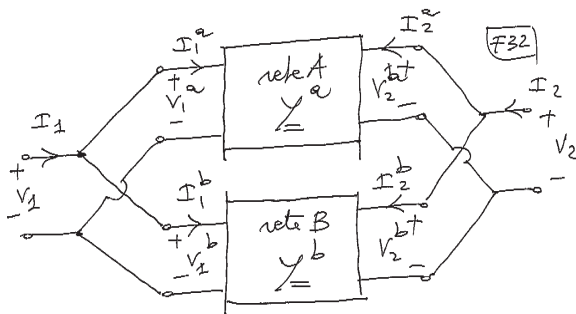
- verifica: si ha $I_1 = I_1^a = I_1^b$; $V_1 = V_1^a + V_1^b$; inoltre $I_2 = I_2^a = I_2^b$; $V_2 = V_2^a + V_2^b$; allora

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a + V_1^b = z_{11}^a I_1^a + z_{12}^a I_2^a + z_{11}^b I_1^b + z_{12}^b I_2^b \\ &= (z_{11}^a + z_{11}^b) I_1 + (z_{12}^a + z_{12}^b) I_2 \end{aligned}$$

- quindi $z_{11} = z_{11}^a + z_{11}^b$, $z_{12} = z_{12}^a + z_{12}^b$
- in maniera simile si dimostra che $z_{21} = z_{21}^a + z_{21}^b$, $z_{22} = z_{22}^a + z_{22}^b$

- **Collegamento parallelo fra reti due porte**

- E' il collegamento mostrato in figura



- si ha

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b$$

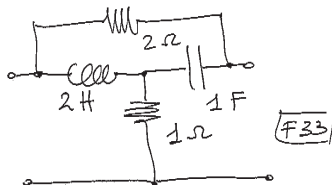
- verifica: si ha $V_1 = V_1^a = V_1^b$; $I_1 = I_1^a + I_1^b$; inoltre $V_2 = V_2^a = V_2^b$; $I_2 = I_2^a + I_2^b$; allora

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a + I_1^b = y_{11}^a V_1^a + y_{12}^a V_2^a + y_{11}^b V_1^b + y_{12}^b V_2^b \\ &= (y_{11}^a + y_{11}^b) V_1 + (y_{12}^a + y_{12}^b) V_2 \end{aligned}$$

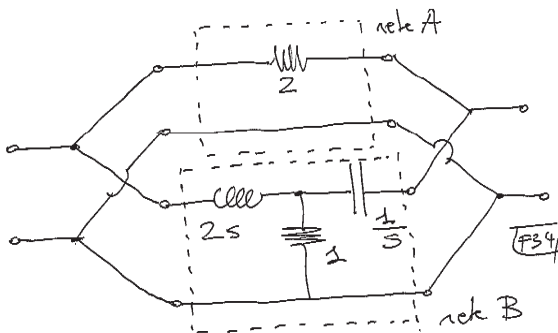
quindi $y_{11} = y_{11}^a + y_{11}^b$, $y_{12} = y_{12}^a + y_{12}^b$

- in maniera simile si dimostra che $y_{21} = y_{21}^a + y_{21}^b$, $y_{22} = y_{22}^a + y_{22}^b$

- **Esempio.** Determinare i parametri y della rete a 'T pontato'



- scomponiamo la rete in due reti in parallelo



- si ha $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b$ con

$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

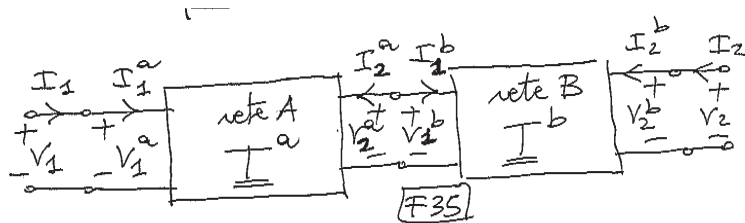
- inoltre

$$\mathbf{Z}^b = \begin{pmatrix} 2s+1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{s}+1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{Y}^b = [\mathbf{Z}^b]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{s}+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Z}_b}$$

Collegamento in cascata fra reti due porte



- le variabili di porta soddisfano a: $V_1 = V_1^a$, $I_1 = I_1^a$; $V_2^a = V_1^b$, $I_2^a = -I_1^b$, $V_2^b = V_2$, $I_2^b = I_2$
- allora si ha

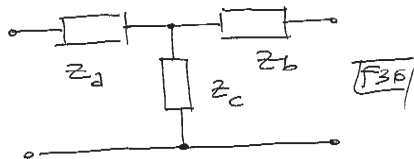
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_1^a \\ I_1^a \end{pmatrix} = \mathbf{T}^a \begin{pmatrix} V_2^a \\ -I_2^a \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{T}^a \begin{pmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{pmatrix} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b \begin{pmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- quindi

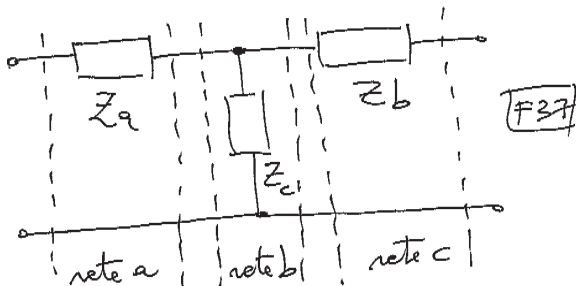
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b$$

cioe' la matrice di trasmissione di due reti in cascata e' pari al prodotto delle matrici di trasmissione delle singole reti

- **Esempio.** Determinare la matrice di trasmissione della rete due porte a T in figura



- scomponiamo la rete in tre reti due porte in cascata



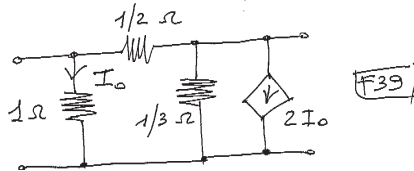
- allora

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b) \mathbf{T}^c$$

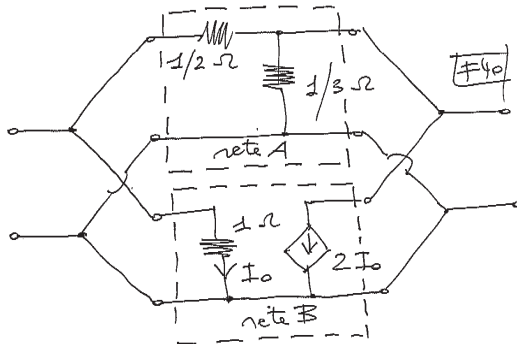
con

$$\mathbf{T}^a = \begin{pmatrix} 1 & Z_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^b = \begin{pmatrix} 1 & Z_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio. Determinare i parametri y della rete due porte in figura pensandola come parallelo fra due reti due porte



- scomponiamo come richiesto la rete in due sottoreti in parallelo



- si ottiene

$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- inoltre per la rete in basso e' facile vedere che si ha

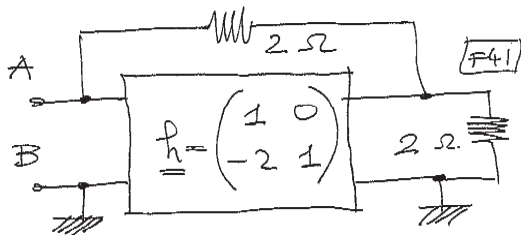
$$\mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- allora

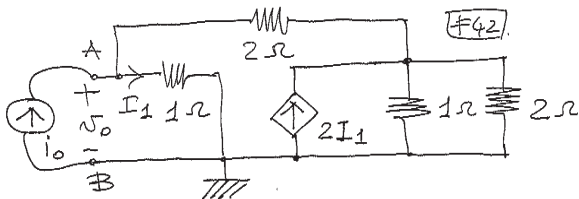
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

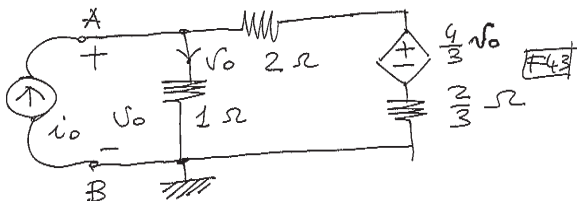
- la rete due porte e' non reciproca.

Esempio. Determinare la resistenza equivalente del bipolo AB



• sostituisco il circuito equivalente a parametri h e alimento il bipolo con un generatore di corrente i_0 ; si ha $i_1 = v_0$, quindi trasformando ottengo





- per Millmann

$$v_0 = \frac{i_0 + \frac{4}{3} \frac{3}{8} v_0}{1 + \frac{3}{8}}$$

- risolvendo ottengo

$$\frac{7}{11} v_0 = \frac{8}{11} v_0$$

e quindi

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = \frac{8}{7} \text{ Ohm}$$