

Il 'memristor': elemento circuitale dimenticato, promettente realtà di oggi

Mauro Forti

June 28, 2018

Il memristor ('memory resistor') è stato introdotto teoricamente dal Professor Leon Chua in un lavoro pubblicato nel 1971 come il **quarto elemento circuitale passivo fondamentale** in aggiunta al resistore, condensatore e induttore (L. Chua, 'Memristor-The missing circuit element', IEEE Trans. Circuit Theory, 1971)

Memristor—The Missing Circuit Element

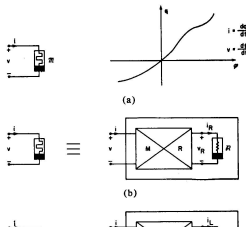
LEON O. CHUA, SENIOR MEMBER, IEEE

Abstract—A new two-terminal circuit element—called the *memristor*—characterized by a relationship between the charge $q(t) \equiv \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ and the flux-linkage $\phi(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ is introduced as the fourth basic circuit element. An electromagnetic field interpretation of this relationship in terms of a quasi-static expansion of Maxwell's equations is presented. Many circuit-theoretic properties of memristors are derived. It is shown that this element exhibits some peculiar behavior different from that exhibited by resistors, inductors, or capacitors. These properties lead to a number of unique applications which cannot be realized with RLC networks alone.

Although a physical memristor device without internal power supply has not yet been discovered, operational laboratory models have been built with the help of active circuits. Experimental results are presented to demonstrate the properties and potential applications of memristors.

I. INTRODUCTION

THIS PAPER presents the logical and scientific basis for the existence of a new two-terminal circuit element called the *memristor* (a contraction for *memory resistor*) which has every right to be as basic as the three



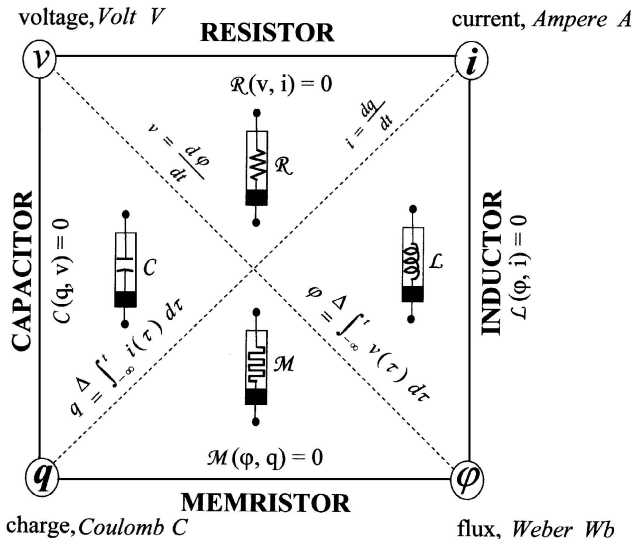
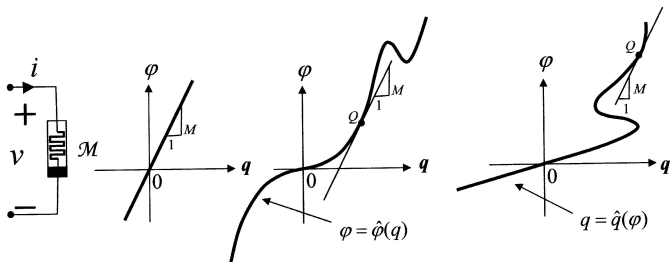


Figure: Quadrilatero ai cui vertici vi sono le 4 grandezze elettriche fondamentali, le loro relazioni, e i 4 elementi circuitali passivi fondamentali.

Un **memristor** è un elemento a due terminali definito da una relazione fra flusso $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ e carica $q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

$$\mathcal{M}(\varphi(t), q(t)) = 0$$



- un **memristor controllato in carica** soddisfa alla relazione costitutiva

$$\varphi = \hat{\varphi}(q)$$

e si caratterizza con una curva nel piano φ -versus- q

- la **relazione fra tensione e corrente** è data da

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \hat{\varphi}'(q(t)) \frac{dq(t)}{dt} = \hat{\varphi}'(q(t)) i(t) = M(q(t)) i(t)$$

dove

$$M(q(t)) = \hat{\varphi}'(q(t)) = \hat{\varphi}' \left(\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \right)$$

ha dimensioni di Ohm ed è detta **memristenza**

- il memristor è un **elemento dinamico non lineare** caratterizzato da una **legge di Ohm dipendente dallo stato**

$$v(t) = M(q(t))i(t)$$

dove la memristenza

$$M(q(t)) = \hat{\varphi}'(q(t)) = \hat{\varphi}' \left(\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \right)$$

dipende dalla carica e quindi dalla storia della corrente

- la carica $q(t)$ è la **variabile di stato**. Il flusso $\varphi(t)$ è la variabile di stato nel caso di un memristor controllato in flusso
 $q(t) = \hat{q}(\varphi(t))$

- **nel caso lineare** $\varphi(t) = Mq(t)$ un memristor equivale ad un resistore ideale di resistenza M . Nella teoria dei circuiti lineari non c'è quindi bisogno di introdurre il memristor

Alcune proprietà di base

- un memristor è **passivo** se e solo se $\hat{\phi}'(q) \geq 0$ per ogni q e cioè la sua caratteristica carica-flusso è monotona crescente
- un memristor non può mai immagazzinare energia e nel caso passivo non può fornire energia
- applicando una **tensione sinusoidale** si ottiene una **curva di isteresi passante per l'origine (pizzicata, 'pinched')** nel piano i -versus- v . Questa è una delle 'firme' principali di un memristor. Le curve di isteresi dipendono dalla frequenza del segnale applicato e si schiacciano al crescere della frequenza

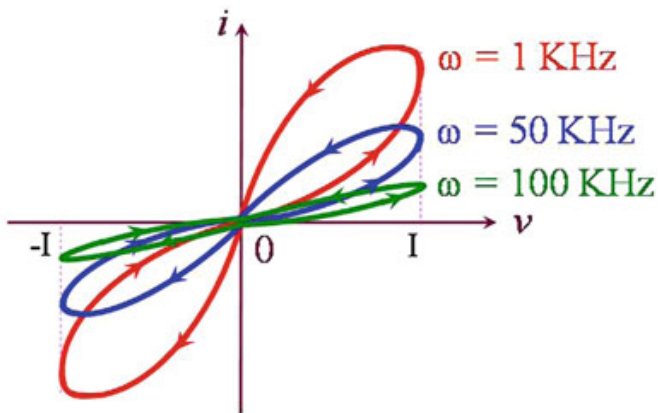


Figure: Isteresi passante per l'origine nel piano i -versus- v .

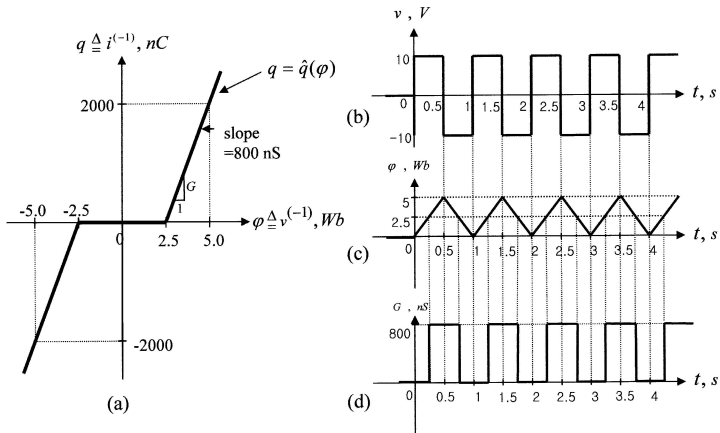
Impiego di un memristor come memoria non volatile

- Consideriamo la legge di Ohm per un memristor

$$i(t) = W(\varphi(t))v(t), \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = v(t)$$

- **qualunque valore del flusso φ_e è un punto di equilibrio stabile**
- un memristor può memorizzare in modo **non volatile** un qualunque valore del flusso e della memristenza. In ogni punto di equilibrio tensione, corrente e potenza sono nulle
- è possibile memorizzare un dato **indefinitamente spendendo energia solo quando lo stato del memristor è 'scritto' oppure è 'letto'**
- fondamentalmente diverso da un condensatore in una DRAM, che si scarica rapidamente non appena l'alimentazione viene disattivata

- nelle **applicazioni digitali** un memristor deve presentare solo due valori sufficientemente diversi della memristenza o memduttanza (**resistive RAM, 'ReRam'**)



- supponiamo che la caratteristica di un memristor controllato in flusso sia

$$\hat{q}(\varphi) = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3$$

- la memduttanza

$$\hat{q}'(\varphi) = 1 + \varphi^2$$

ha un 'continuum' di valori nell'intervallo $[1, +\infty)$

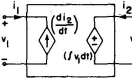
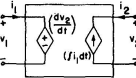
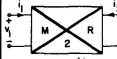
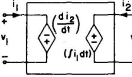
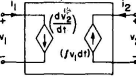
- tale memristor, che può memorizzare un 'continuum' di valori diversi della memduttanza, può essere utilizzato per implementare una **memoria analogica non volatile**. E' potenzialmente utile per implementare **sinapsi** adattative (legge di Hebb, algoritmi di apprendimento in sistemi neuromorfi)

- Sah, M. P., Kim, H. and Chua, L. O. Brains are made of memristors, IEEE Circuits and Systems Magazine, 2014

Il memristor della Hewlett Packard

Nel lavoro del 1971 Chua ha proposto un **emulatore di memristor** implementato per mezzo di circuiti attivi (un mutatore connesso a un resistore non lineare). Tale implementazione richiede un elevato numero di transistor e amplificatori operazionali

TABLE I
CHARACTERIZATION AND REALIZATION OF *M-R*, *M-L*, AND *M-C* MUTATORS

	TYPE	SYMBOL AND CHARACTERIZATION	TRANSMISSION MATRIX $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$	BASIC REALIZATIONS USING CONTROLLED SOURCES	
M - R MUTATOR	1	$(q, \varphi) \longleftrightarrow (i_R, v_R)$  $v_1 = \frac{dv_2}{dt}$ $i_1 = -\frac{di_2}{dt}$	$T_{MR1}(p) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$	REALIZATION 1 	REALIZATION 2 
	2	$(q, \varphi) \longleftrightarrow (v_R, i_R)$  $v_1 = -\frac{di_2}{dt}$ $i_1 = \frac{dv_2}{dt}$	$T_{MR2}(p) = \begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix}$	REALIZATION 1 	REALIZATION 2 

- Chua ha notato quanto segue nel lavoro del 1971: *"Although no physical memristor has yet been discovered in the form of a physical device without internal power supply, a monotonically increasing $\varphi - q$ curve could be invented, if not discovered accidentally. It is perhaps not unreasonable to suppose that such a device might already have been fabricated as a laboratory curiosity but was improperly identified! After all, a memristor with a simple $\varphi - q$ curve will give rise to a rather peculiar-if not complicated hysteretic- $v - i$ curve when erroneously traced in the current-versus-voltage plane. Perhaps, our perennial habit of tracing the $v - i$ curve of any new two-terminal device has already misled some of our device-oriented colleagues and prevented them from discovering the true essence of some new device, which could very well be the missing memristor"*

- D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart and R. S. Williams, 'The missing memristor found', *Nature*, vol. 453, n. 7191, p. 80-83, 2008

LETTERS

The missing memristor found

Dmitri B. Strukov¹, Gregory S. Snider¹, Duncan R. Stewart¹ & R. Stanley Williams¹

Anyone who ever took an electronics laboratory class will be familiar with the fundamental passive circuit elements: the resistor, the capacitor and the inductor. However, in 1971 Leon Chua reasoned from symmetry arguments that there should be a fourth fundamental element, which he called a memristor (short for memory resistor)¹. Although he showed that such an element has many interesting and valuable circuit properties, until now no one has presented either a useful physical model or an example of a memristor. Here we show, using a simple analytical example, that memristance arises naturally in nanoscale systems in which solid-state electronic and ionic transport are coupled under an external bias voltage. These results serve as the foundation for understanding a

propose a physical model that satisfies these simple equations. In 1976 Chua and Kang generalized the memristor concept to a much broader class of nonlinear dynamical systems they called memristive systems^{2,3}, described by the equations

$$v = \mathcal{R}(w, t)i \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dt} = f(w, t) \quad (4)$$

where w can be a set of state variables and $\mathcal{R}$ and f can in general be explicit functions of time. Here, for simplicity, we restrict the discussion to current-controlled, time-invariant, one-port devices. Note

- **Struttura di base di un memristor HP con TiO_2**

"Here we show, using a simple analytical example, that memristance arises naturally in nanoscale systems in which solid-state electronic and ionic transport are coupled under an external bias voltage"

- sottile strato semiconduttore di spessore D fra due contatti metallici in platino
- vi sono due regioni, la prima costituita da un semiconduttore TiO_2 e l'altra da semiconduttore drogato TiO_{2-x} con presenza di lacune (ioni, cariche positive). La parte drogata ha una bassa resistenza $\mathcal{R}_{\text{ON}}$, mentre la parte non drogata ha una resistenza molto più elevata $\mathcal{R}_{\text{OFF}}$. La resistenza totale è determinata da due resistori variabili collegati in serie
- applicando una tensione $v(t)$ al dispositivo è possibile 'muovere' la frontiera di separazione fra le due regioni (drogata e non drogata) dando luogo di conseguenza a una variazione della resistenza totale

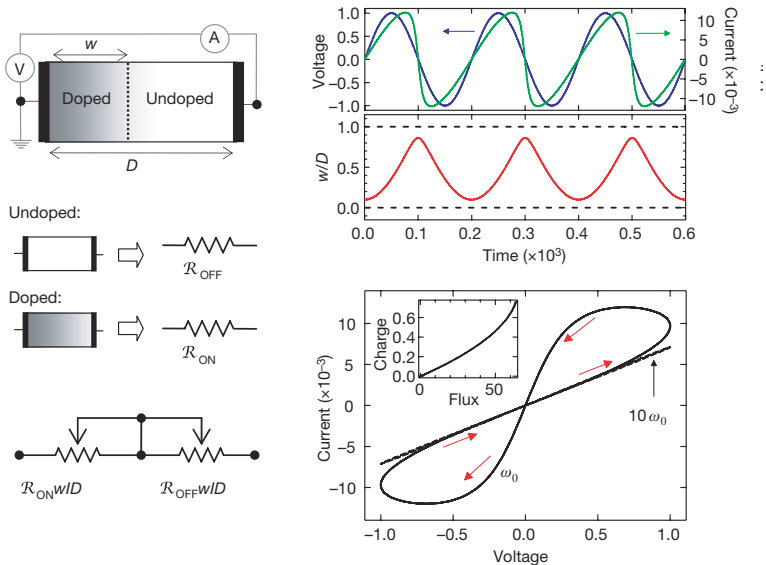


Figure: Modello schematico di un memristor HP

- **Modello con 'drift' lineare**

Legge di Ohm quasi statica

$$v(t) = \left(\mathcal{R}_{\text{ON}} \frac{w(t)}{D} + \mathcal{R}_{\text{OFF}} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t)$$

- si assume un campo elettrico uniforme nel dispositivo. Le lacune (ioni positivi) hanno una mobilità intrinseca e possono muoversi soggette ad un campo elettrico. Assumendo una relazione lineare fra velocità di drift e campo elettrico

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{\mathcal{R}_{\text{ON}}}{D} i(t)$$

dove μ_V è la mobilità media degli ioni

- integrando si ottiene nell'ipotesi realistica $\mathcal{R}_{\text{ON}} \ll \mathcal{R}_{\text{OFF}}$

$$v(t) = M(q(t))i(t)$$

dove la memristenza vale

$$M(q(t)) = \mathcal{R}_{\text{OFF}} \left(1 - \frac{\mu_V \mathcal{R}_{\text{ON}}}{D^2} q(t) \right)$$

- il memristor HP ha una relazione carica flusso

$$\varphi = \hat{\varphi}(q) = \mathcal{R}_{\text{OFF}} q - \frac{1}{2} \frac{\mu_V \mathcal{R}_{\text{ON}} \mathcal{R}_{\text{OFF}}}{D^2} q^2$$

- **le equazioni sono formalmente equivalenti a quelle di un memristor ideale controllato in carica**

- Resistore, legge di Ohm (Georg Ohm, 1827)
- memristor, legge di Ohm con memoria (Leon Chua, 1971)
- perchè ci sono voluti circa 150 anni per introdurre una legge di Ohm con memoria?

- il termine

$$\frac{\mu_V \mathcal{R}_{\text{ON}}}{D^2} q(t)$$

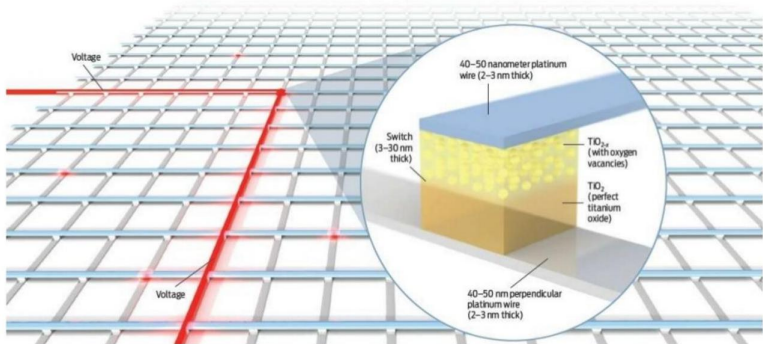
è cruciale per avere una variazione significativa della memristenza in funzione della carica, e cioè della storia della corrente

- tale termine *"becomes larger in absolute value for higher dopant mobilities μ_V and smaller semiconductor film thicknesses D . For any material, this term is 1,000,000 times larger in absolute value at the nanometre scale than it is at the micrometre scale, because of the factor of $1/D^2$, and the memristance is correspondingly more significant. Thus, memristance becomes more important for understanding the electronic characteristics of any device as the critical dimensions shrink to the nanometre scale"*

- è importante notare che il flusso $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ deve essere inteso come l'integrale della tensione applicata al memristor. **Tale flusso non corrisponde al flusso di un campo magnetico effettivamente presente nel memristor**

- *"The fact that the magnetic field does not play an explicit role in the mechanism of memristance is one possible reason why the phenomenon has been hidden for so long; those interested in memristive devices were searching in the wrong places"*

- qualcosa di simile accade quando si simula un induttore per mezzo di un giratore e un condensatore



1 cm^3 memristor = 1 terabit

Figure: Schiera di memristor HP in nanotecnologia ('crossbar array')

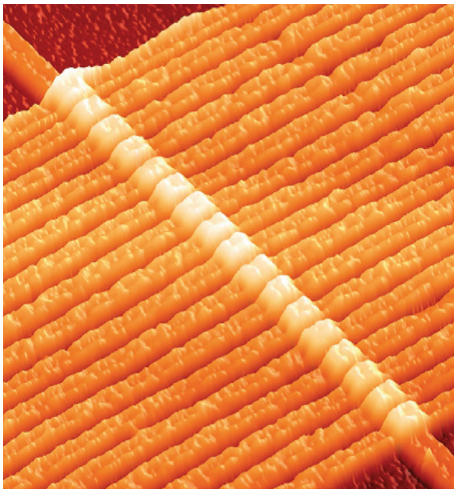
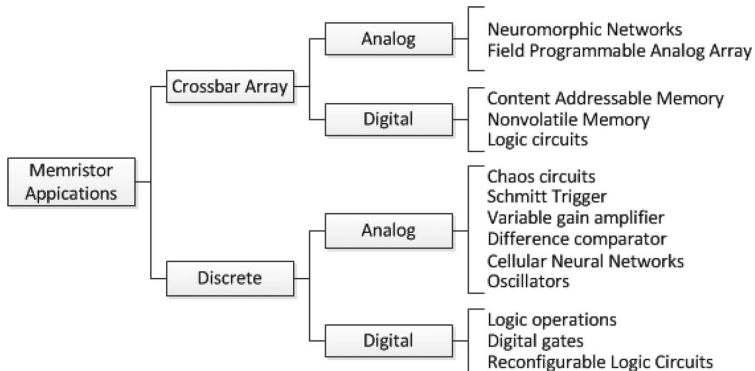


Figure: Schiera di memristor HP.

Dal 2008 enorme interesse a livello mondiale su modellizzazione, analisi di circuiti con memristor e applicazioni



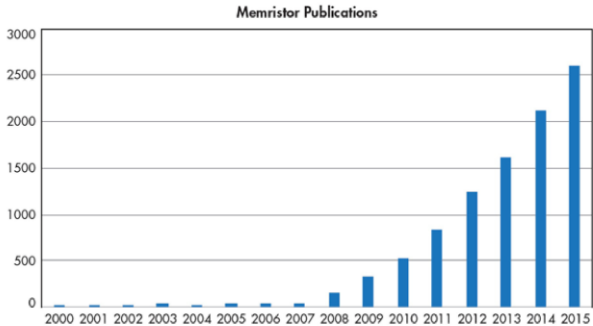
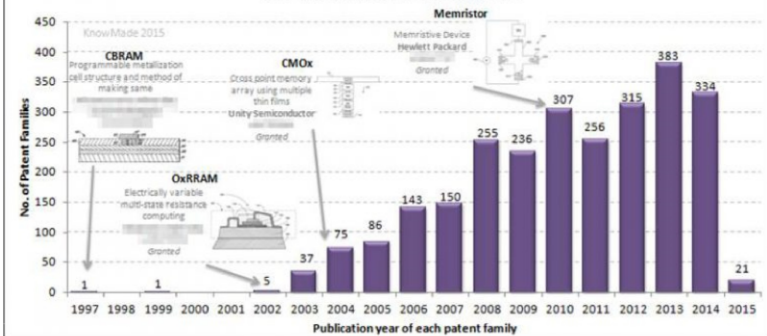
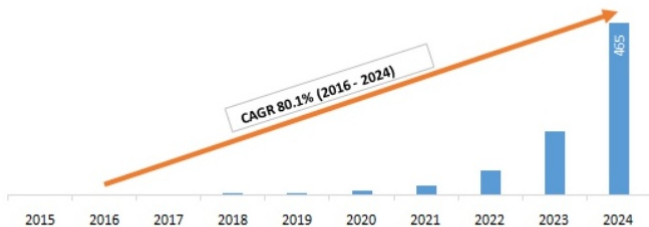


Figure: Fonte: Google-Scholar

Time Evolution of Patent Publications For ReRAM and Memristor



Memristor Market Size and Forecast, 2015 - 2024 (US\$ Million)

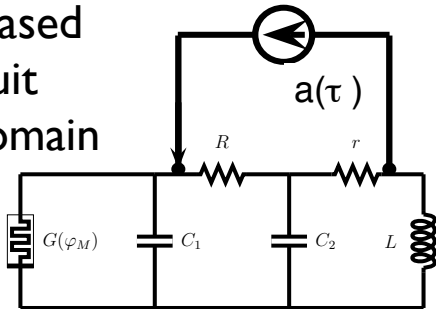


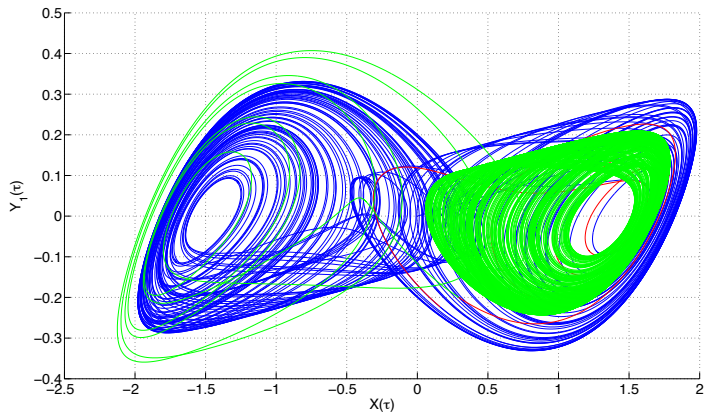
Source: Variant Market Research

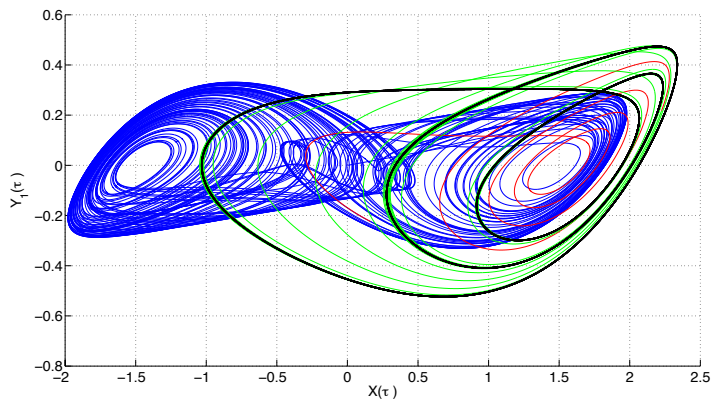
Memristor come elemento dinamico non lineare per applicazioni analogiche

- Circuito di Chua dove il resistore non lineare (diodo) è sostituito da un memristor
- tutti i parametri del circuito sono tenuti fissi
- generatore di corrente applica **impulsi** che permettono di cambiare le condizioni iniziali

memristor-based
Chua circuit
in the (v, i) -domain







- simulazioni e misure sperimentali mostrano che in un circuito di Chua con memristor si ha **coesistenza di molteplici dinamiche diverse** per un **fissato insieme di parametri circuitali**
- è possibile **programmare le diverse dinamiche** applicando opportuni impulsi di corrente o tensione

Nuovo metodo per l'analisi dinamica di circuiti con memristor

- F. Corinto, M. Forti, "Memristor Circuits: Flux-Charge Analysis Method," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 63, n. 11. pp. 1997-2009, Nov. 2016.
- F. Corinto, M. Forti, "Memristor Circuits: Bifurcations without Parameters," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 64, n. 6, pp. 1540-1551, Jun. 2017.
- F. Corinto, M. Forti, "Memristor Circuits: Pulse Programming via Invariant Manifolds," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, Aug. 2017.
- F. Corinto, M. Forti, "Complex Dynamics in Arrays of Memristor Oscillators via the Flux-Charge Method," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2017.
- M. Di Marco, M. Forti, G. Innocenti, A. Tesi, "Harmonic balance method to analyze bifurcations in memristor oscillatory circuits," *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, 2017.
- F. Corinto, M. Forti, "Flux-Charge Description of Circuits with Non-volatile Switching Memristor Devices," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, May 2018.
- M. Di Marco, M. Forti, L. Pancioni, "Stability of Memristor Neural Networks with Delays Operating in the Flux-Charge Domain," *J. Franklin Institute*, June 2018.

Applicazioni a sistemi neuromorfi e reti neurali

- M. Di Marco, M. Forti, L. Pancioni, “Complete stability of feedback CNNs with dynamic memristors and second-order cells,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, 2016.
- M. Di Marco, M. Forti, L. Pancioni, “Convergence and Multistability of Nonsymmetric Cellular Neural Networks with Memristors,” *IEEE Trans. Cybernetics*, 2017.
- M. Di Marco, M. Forti, L. Pancioni, “New Conditions for Global Asymptotic Stability of Memristor Neural Networks,” *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, 2017.
- M. Di Marco, M. Forti, L. Pancioni, “Memristor Standard Cellular Neural Networks Computing in the Flux-Charge Domain,” *Neural Networks*, Sep. 2017.

- Quale è il dominio più conveniente per scrivere le equazioni di un circuito dinamico con memristor? E' il dominio tipico tensione-corrente, oppure un diverso dominio?

Vedremo che la risposta è: il dominio flusso-carica!

- **Vantaggi del metodo di analisi nel dominio (φ, q) rispetto al dominio (v, i) :**
 - **miglior comprensione del comportamento dinamico**
 - **riduzione di ordine**
 - **invarianti del moto (varietà invarianti)**
 - **spiegazione delle diverse dinamiche coesistenti**
 - **l'analisi è ricondotta a quella di un circuito RLC non lineare senza memristor**

Leggi di Kirchhoff nel dominio flusso-carica

- Circuito elementare con un condensatore C e un memristor controllato in flusso $q_M(t) = f(\varphi_M(t))$
- vogliamo analizzare la dinamica per $t \geq t_0$

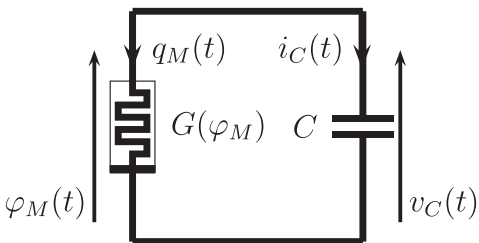
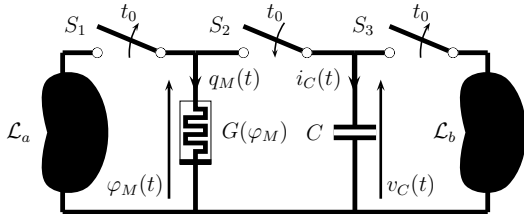


Figure: Circuito $M - C$



- $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b$ sono reti con cui si creano opportune condizioni iniziali a t_0 per C e M
- chiaramente, tramite $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b$, **possiamo creare delle condizioni iniziali indipendenti** $Cv_C(t_0) = q_C(t_0)$ e $\varphi_M(t_0)$ a t_0 . In effetti si tratta di un **circuito del secondo ordine** con 2 variabili di stato indipendenti $v_C(t)$ e $\varphi_M(t)$

è necessario prestare attenzione nello scrivere le leggi di Kirchhoff

- la legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT) implica

$$v_C(t) = v_M(t), \quad t \geq t_0$$

- **su tale base possiamo concludere che**

$$\varphi_C(t) = \varphi_M(t), \quad t \geq t_0?$$

- tale conclusione **in generale è scorretta!!!**
- in maniera simile, la legge di Kirchhoff per le correnti (LKC) implica

$$i_C(t) + i_M(t) = 0, \quad t \geq t_0$$

- ma **non possiamo** concludere che

$$q_C(t) + q_M(t) = 0, \quad t \geq t_0$$

si ha per $t \geq t_0$

$$\varphi_C(t) = \int_{-\infty}^t v_C(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} v_C(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t v_C(\tau) d\tau$$

$$\varphi_M(t) = \int_{-\infty}^t v_M(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} v_M(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t v_M(\tau) d\tau$$

dato che $v_C(t) = v_M(t)$, $t \geq t_0$, sappiamo solo che

$$\int_{t_0}^t v_C(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t v_M(\tau) d\tau$$

ma a causa degli interruttori e delle reti $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b$ che agiscono per $t < t_0$ su C e M , si ha in generale

$$\int_{-\infty}^{t_0} v_C(\tau) d\tau \neq \int_{-\infty}^{t_0} v_M(\tau) d\tau$$

e quindi

$$\varphi_C(t) \neq \varphi_M(t)!!!$$

- **Leggi di Kirchhoff per flussi e cariche incrementali**

Per ogni elemento a due terminali definiamo **flusso e carica incrementale**

$$\varphi(t; t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$$

$$q(t; t_0) = q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau$$

per $t \geq t_0$

- valgono le seguenti **leggi di Kirchhoff per carica e flusso incrementale**

- lungo ogni maglia si ha (legge di Kirchhoff per flussi incrementali (LK φ))

$$\sum \alpha_i \varphi_i(t; t_0) = 0$$

- per ogni taglio si ha (legge di Kirchhoff per cariche incrementali (LK q))

$$\sum \beta_i q_i(t; t_0) = 0$$

- per un circuito con ℓ elementi a 2 terminali ciò permette di scrivere ℓ vincoli indipendenti di tipo topologico per flussi e cariche incrementali nel dominio (q, φ)

- **Relazioni costitutive in termini di flusso e carica incrementale**

- dato che $LK\varphi$ e LKq sono espresse in termini di flussi e cariche incrementali, è necessario **descrivere ogni elemento a 2 terminali usando la carica incrementale $q(t; t_0)$ e il flusso incrementale $\varphi(t; t_0)$ come variabili elettriche di porta**

- **Condensatore ideale.** Sia C un condensatore ideale descritto da

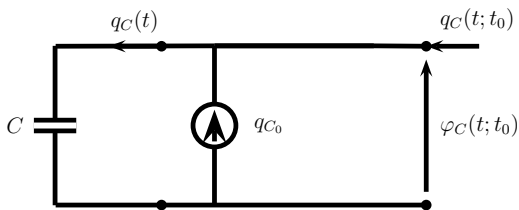
$$q_C(t) = C v_C(t) = C \frac{d\varphi_C(t)}{dt}$$

e sia $q_C(t_0) = q_{C_0} = C v_C(t_0)$ la carica iniziale a t_0

- *la relazione costitutiva di C in termini delle variabili incrementali $q_C(t; t_0)$ e $\varphi_C(t; t_0)$ è data da*

$$q_C(t; t_0) = -q_{C_0} + C \frac{d\varphi_C(t; t_0)}{dt} \quad (1)$$

- circuito equivalente di C nel dominio (φ, q)
- la condizione iniziale q_{C_0} per la variabile di stato di C appare nel circuito equivalente sotto forma di un generatore indipendente di carica



$$q_C(t) = C \frac{d}{dt}(\varphi_C(t))$$

$$q_C(t; t_0) = -q_C(t_0) + C \frac{d}{dt}(\varphi_C(t; t_0))$$

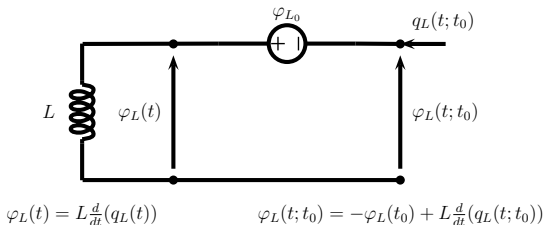
- **Induttore ideale.** Sia L un induttore ideale descritto da

$$\varphi_L(t) = Li_L(t) = L \frac{dq_L(t)}{dt}$$

con flusso iniziale a t_0 dato da $\varphi_L(t_0) = \varphi_{L_0} = Li_L(t_0)$

- la *relazione costitutiva in termini di variabili incrementali* $q_L(t; t_0)$ e $\varphi_L(t; t_0)$ è espressa da

$$\varphi_L(t; t_0) = -\varphi_{L_0} + L \frac{dq_L(t; t_0)}{dt} \quad (2)$$



- **Memristor ideale controllato in flusso**

Consideriamo un memristor ideale controllato in flusso

$$q_M(t) = f(\varphi_M(t))$$

e sia $\varphi_M(t_0) = \varphi_{M_0}$ il flusso iniziale del memristor a t_0 . Ne consegue che la carica iniziale è $q_M(t_0) = q_{M_0} = f(\varphi_{M_0})$

- la *relazione costitutiva di M in termini delle variabili incrementali* $q_M(t; t_0)$ e $\varphi_M(t; t_0)$ è data da

$$q_M(t; t_0) = f(\varphi_M(t; t_0) + \varphi_{M_0}) - q_{M_0} \quad (3)$$

- **il memristor si comporta come un elemento non lineare senza memoria e cioè è l'analogo di un resistore non lineare**

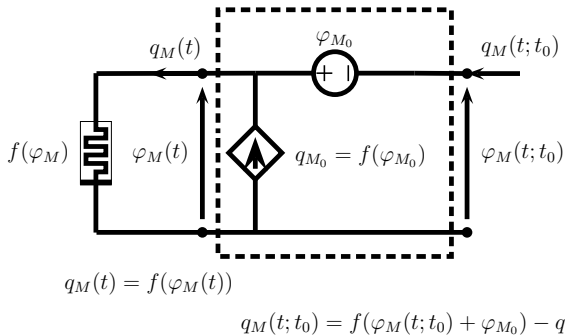
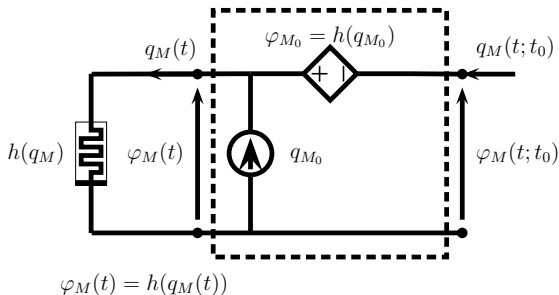


Figure: Circuito equivalente di un memristor ideale controllato in flusso in termini di carica e flusso incrementale. I due generatori di carica e flusso dipendono solo dal flusso iniziale $\varphi_M(t_0) = \varphi_{M_0}$.

- Memristor ideale controllato in carica



$$\varphi_M(t) = h(q_M(t))$$

$$\varphi_M(t; t_0) = h(q_M(t; t_0) + q_{M_0}) - \varphi_{M_0}$$

Figure: Circuito equivalente di un memristor ideale controllato in flusso in termini di carica e flusso incrementale. I due generatori di carica e flusso dipendono solo dal flusso iniziale $q_M(t_0) = q_{M_0}$.

- nel dominio (φ, q) solo induttori e condensatori sono elementi dinamici, mentre resistori e memristor sono elementi senza memoria
- il circuito equivalente di C , L e M contiene dei generatori carica e flusso che dipendono dalle condizioni iniziali delle variabili di stato nel dominio (v, i)
 - una volta che ogni elemento è descritto nel dominio (φ, q) tramite flusso e carica incrementali ai suoi morsetti, ogni circuito è ottenuto connettendo gli elementi circuitali tramite tali terminali. Ciò permette di applicare $LK\varphi$ e LKq nel modo usuale come vincoli di tipo topologico
 - se consideriamo le analogie

$$v(t) \rightarrow \varphi(t) \quad (4)$$

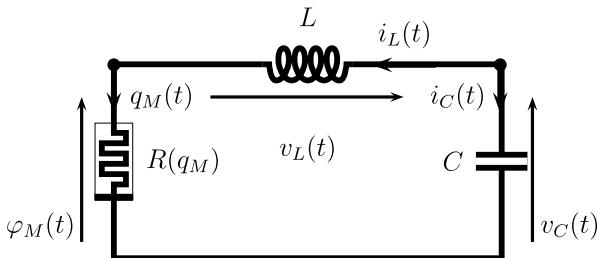
$$i(t) \rightarrow q(t) \quad (5)$$

allora **un circuito $M - L - C$ è l'analogo nel dominio (φ, q) di un circuito non lineare $R - L - C$ nel dominio (v, i)**

- **Oscillatore a rilassamento $M - L - C$**
- consideriamo un memristor controllato in carica e localmente attivo

$$\varphi_M(t) = h(q_M(t)) = -aq_M(t) + bq_M^3(t)$$

con $a, b > 0$



- nel dominio (v, i) è un **circuito del terzo ordine**
- le **variabili di stato** sono $v_C(t)$, $i_L(t)$ e $q_M(t)$.
- le **equazioni di stato** sono

$$C \frac{d}{dt} v_C(t) = -i_L(t) \quad (6a)$$

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) = v_C(t) - h'(q_M(t)) i_M(t) \quad (6b)$$

$$\frac{d}{dt} q_M(t) = i_M(t) \quad (6c)$$

dove $v_C(t_0) = v_{C_0}$, $i_L(t_0) = i_{L_0}$, $q_M(t_0) = q_{M_0}$

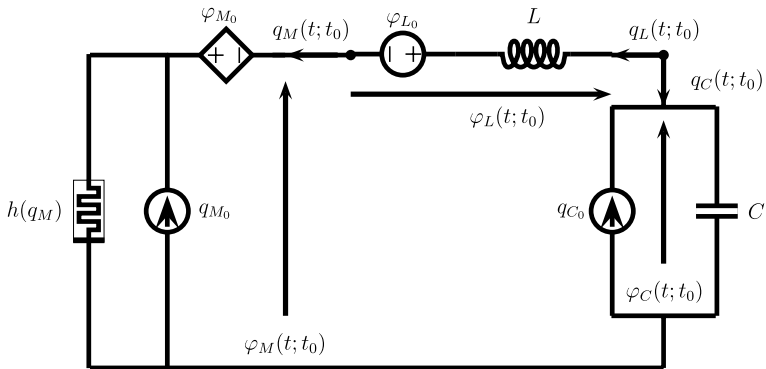


Figure: Circuito equivalente nel dominio (φ, q) del circuito $M-L-C$.

- $LK\varphi$, LKq e relazioni costitutive

$$\varphi_C(t; t_0) = \varphi_L(t; t_0) + \varphi_M(t; t_0) \quad (7a)$$

$$q_L(t; t_0) = -q_C(t; t_0) \quad (7b)$$

$$q_L(t; t_0) = q_M(t; t_0) \quad (7c)$$

$$q_C(t; t_0) = -q_{C_0} + C \frac{d}{dt} \varphi_C(t; t_0) \quad (7d)$$

$$\varphi_L(t; t_0) = -\varphi_{L_0} + L \frac{d}{dt} q_L(t; t_0) \quad (7e)$$

$$\varphi_M(t; t_0) = -h(q_{M_0}) + h(q_M(t; t_0) + q_{M_0}) \quad (7f)$$

- le variabili di stato nel dominio (φ, q) sono $\varphi_C(t; t_0)$ e $q_L(t; t_0)$
- nel dominio (φ, q) si ha un **sistema del secondo ordine**

$$C \frac{d}{dt} \varphi_C(t; t_0) = -q_L(t; t_0) + q_{C_0} \quad (8a)$$

$$L \frac{d}{dt} q_L(t; t_0) = \varphi_C(t; t_0) - h(q_L(t; t_0) + q_{M_0}) + h(q_{M_0}) + \varphi_{L_0} \quad (8b)$$

- le condizioni iniziali sono

$$\varphi_C(t_0; t_0) = 0, \quad q_L(t_0; t_0) = 0$$

- nel dominio (v, i) abbiamo un sistema risolvibile del terzo ordine, mentre nel dominio (φ, q) abbiamo un sistema risolvibile del secondo ordine
- come è possibile spiegare questo apparente paradosso?

- il cambio di variabili $y(t) = q_M(t)$, $x(t) = \varphi_L(t) + h(q_M(t))$ permette di ottenere

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{-y(t) + Q_0}{C} \quad (9a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{x(t) - h(y(t))}{L} \quad (9b)$$

dove

$$Q_0 = q_{C_0} + q_{M_0} \quad (10)$$

è un termine che **dipende dalle condizioni iniziali** per le variabili di stato v_{C_0} e q_{M_0} nel dominio (v, i)

- se $Q_0 = 0$ il sistema del secondo ordine (9) coincide con quello che descrive un oscillatore di Van der Pol
- se $Q_0 \neq 0$, si ha un oscillatore di Van der Pol con un termine forzante costante Q_0 che dipende dalle condizioni iniziali

- **Varietà invarianti.** LKq implica la **conservazione della carica incrementale**

$$q_C(t; t_0) + q_M(t; t_0) = 0$$

e quindi

$$q_C(t) + q_M(t) = q_{C_0} + q_{M_0} = Q_0, \quad t \geq t_0$$

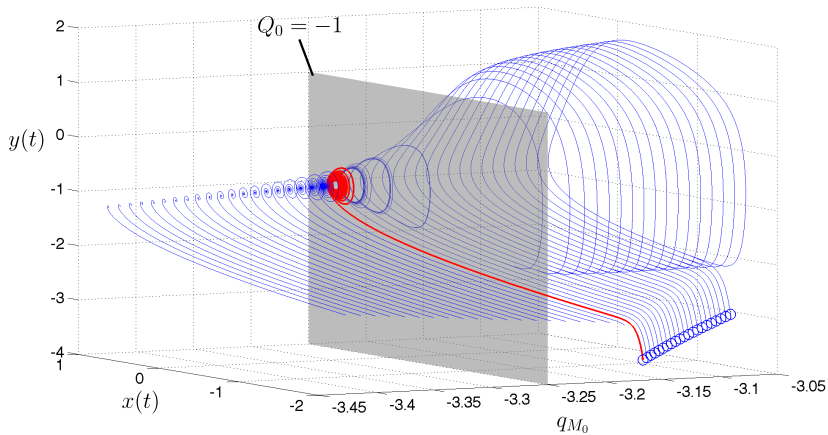
- consideriamo la superficie nello spazio degli stati nel dominio (v, i)

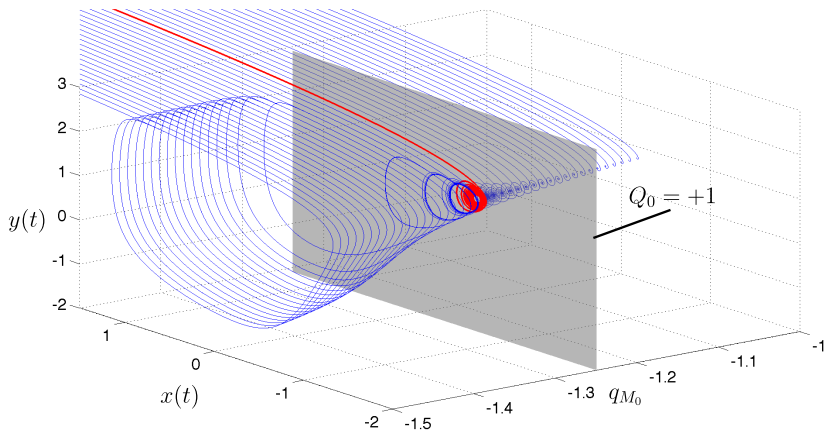
$$\mathcal{M}(Q_0) = \{(v_C(t), i_L(t), q_M(t)) \in \mathbb{R}^3 : C v_C(t) + q_M(t) = Q_0\}$$

- vi sono infinite superfici $\mathcal{M}(Q_0)$, ottenute variando Q_0 in $\mathbb{R}$, che sono **invarianti per la dinamica del circuito** $M - L - C$

- in questo modo abbiamo ottenuto una **foliazione dello spazio degli stati** $(v_C(t), i_L(t), q_M(t))$ in infinite superfici invarianti $\mathcal{M}(Q_0)$ e su ogni superficie la dinamica è descritta nel dominio (φ, q) dal sistema del secondo ordine (9)
- per il circuito $M - L - C$ vi è perciò coesistenza di infinite dinamiche diverse del secondo ordine

- il campo vettoriale che definisce (9) **dipende dai parametri circuitali** (a, b, L, C) ma anche da Q_0 . Ricordiamo che Q_0 dipende dalle condizioni iniziali v_{C_0} e q_{M_0} per le variabili di stato nel dominio (v, i)
- Possiamo individuare vari tipi di biforcazioni del comportamento dinamico
 - ▶ se Q_0 è fisso (*varietà fissa*), si possono avere biforcazioni solo se i parametri circuitali (a, b, L, C) vengono modificati (**biforcazioni standard**). Se $Q_0 = 0$ lo scenario delle biforcazioni è simile a quello del ben noto *oscillatore di Van der Pol*
 - ▶ se si cambiano le condizioni iniziali, Q_0 , e la varietà su cui evolve la dinamica, le biforcazioni possono avvenire anche se i parametri circuitali (a, b, L, C) sono tenuti fissi (**biforcazioni senza parametri**)
 - ▶ in particolare si ha una **biforcazione di Hopf senza parametri** per $Q_0 = -\sqrt{a/3b}$ e $Q_0 = \sqrt{a/3b}$

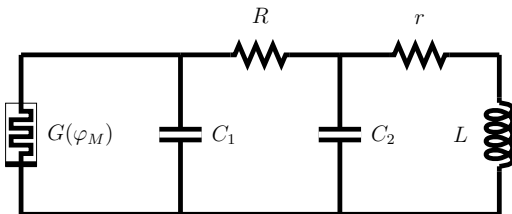




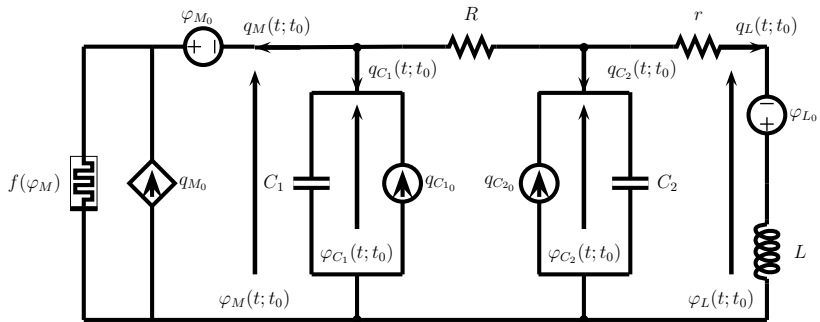
- **Circuito caotico di Chua con memristor.** Consideriamo ancora un memristor localmente attivo e controllato in flusso

$$q_M(t) = -a\varphi_M(t) + b\varphi_M^3(t)$$

con $a, b > 0$



- Circuito corrispondente nel dominio (φ, q)



- è un circuito del **quarto ordine** nel dominio (v, i)
- è del **terzo ordine** nel dominio (φ, q) . In tale dominio le variabili di stato sono $\varphi_{C_1}(t; t_0)$, $\varphi_{C_2}(t; t_0)$ e $q_L(t; t_0)$ e le equazioni di stato per $t \geq t_0$ sono

$$C_1 \frac{d\varphi_{C_1}(t; t_0)}{dt} = \frac{1}{R}(\varphi_{C_2}(t; t_0) - \varphi_{C_1}(t; t_0)) \quad (11a)$$

$$- f(\varphi_{C_1}(t; t_0) + \varphi_{M_0}) + f(\varphi_{M_0}) + q_{C_{1_0}} \quad (11b)$$

$$C_2 \frac{d\varphi_{C_2}(t; t_0)}{dt} = -\frac{1}{R}(\varphi_{C_2}(t; t_0) - \varphi_{C_1}(t; t_0)) \quad (11c)$$

$$+ q_L(t; t_0) + q_{C_{2_0}} \quad (11d)$$

$$L \frac{dq_L(t; t_0)}{dt} = -rq_L(t; t_0) - \varphi_{C_2}(t; t_0) - \varphi_{L_0} \quad (11e)$$

con condizioni iniziali $\varphi_{C_1}(t_0; t_0) = 0$, $\varphi_{C_2}(t_0; t_0) = 0$, $q_L(t_0; t_0) = 0$

- equazioni di stato in forma adimensionale ($n(x(t)) = Rf(x(t))$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha [-x(t) + y(t) - n(x(t)) + X_0] \quad (12a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) + z(t) \quad (12b)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\beta y(t) - \gamma z(t) \quad (12c)$$

$$X_0 = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \varphi_{M_0} - \frac{\beta}{\beta + \gamma} Li_{L_0} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} RC_2 v_{C_{2_0}} + n(\varphi_{M_0}) + RC_1 v_{C_{1_0}}$$

è un termine che dipende dalle condizioni iniziali per le variabili di stato $v_{C_{1_0}}$, $v_{C_{2_0}}$, i_{L_0} e φ_{M_0} nel dominio (v, i)

- **quando $X_0 = 0$, (12) coincide con le equazioni che descrivono il ben noto oscillatore canonico di Chua**

Varietà invarianti

- lo spazio degli stati nel dominio (v, i) può essere decomposto in ∞ varietà invarianti

$$\mathcal{M}(X_0) = \{(v_{C_1}(t), v_{C_2}(t), i_L(t), q_M(t)) \in \mathbb{R}^4 :$$

$$\frac{\beta}{\beta + \gamma} \varphi_M(t) - \frac{\beta}{\beta + \gamma} L i_L(t) + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} R C_2 v_{C_2}(t) \quad (13)$$

$$+ n(\varphi_M(t)) + R C_1 v_{C_1}(t) = X_0\} \quad (14)$$

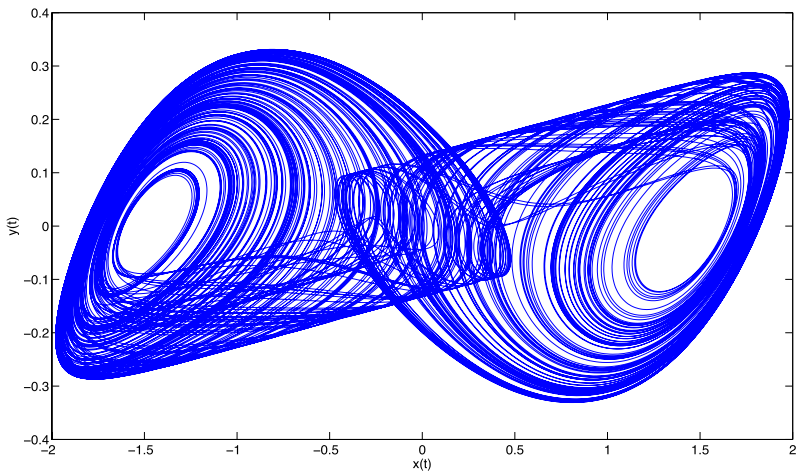
e ogni varietà è individuata da $X_0 \in \mathbb{R}$

- **Biforcazioni su un manifold fisso**

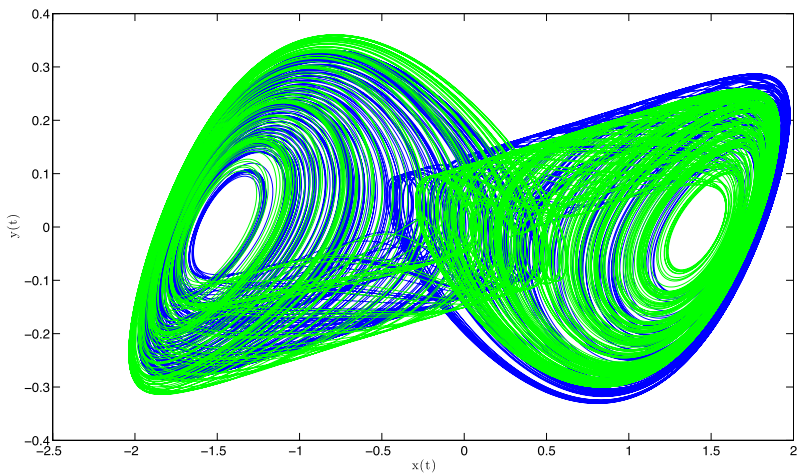
- sul manifold fisso $\mathcal{M}(0)$ si hanno al variare del parametro circuitale α le stesse biforcazioni del circuito canonico di Chua

- **Biforcazioni senza parametri**

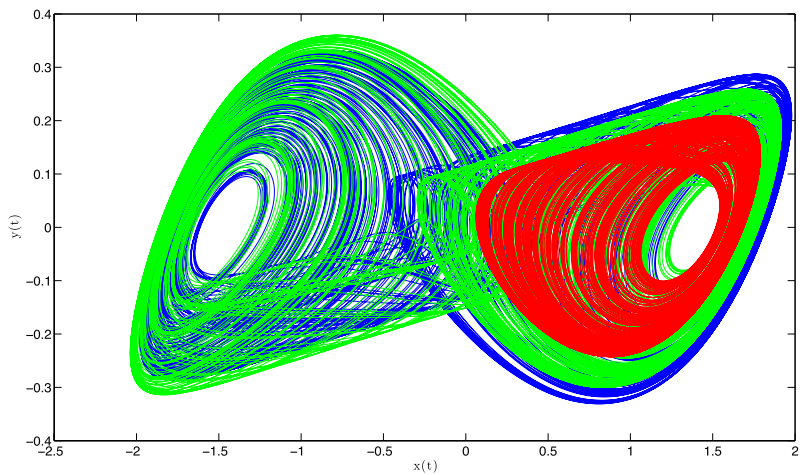
- sia $\alpha = 9.5$, caso in cui il circuito origina un attrattore caotico di tipo 'double scroll' (doppia spirale) per $X_0 = 0$. Le figure che seguono mostrano come il 'double scroll' per $X_0 = 0$ (curva blu) si trasforma in un diverso attrattore 'double-scroll' per $X_0 = -0.0103$ (curve verde) e poi in un attrattore 'single scroll' (a singola spirale) per $X_0 = -0.0281$



$$X_0 = 0$$



$$X_0 = -0.0103$$



$$X_0 = -0.0281$$

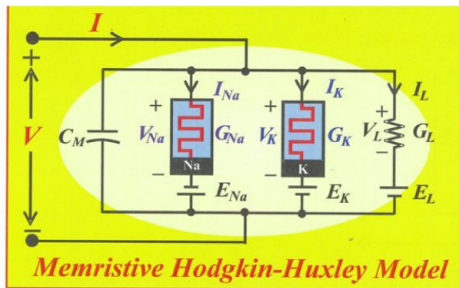
Dinamiche caotiche in circuiti con memristor per elaborazione di segnali in tempo reale

- S. K. Moore, "Memristor-Driven Analog Compute Engine Would Use Chaos to Compute Efficiently", IEEE Spectrum, 2017
- Kumar, S. and Strachan, J. P. and Williams, R. S., "Chaotic dynamics in nanoscale NbO₂ Mott memristors for analogue computing", Nature, 2017. **Caos programmabile** e impiego per la soluzione di **problemi di ottimizzazione in tempo reale (simulated annealing)**

Memristor per modellare neuroni e sinapsi

- Sah, M. P., Kim, H. and Chua, L. O., "Brains are made of memristors", IEEE Circuits and Systems Magazine, 2014
- A. Silver, "New Memristor Circuit Mimics Synapses in the Brain", IEEE Spectrum, 2016
- Modello di Hodgkin-Huxley di un neurone. Sinapsi adattative (legge di Hebb)
- R. S. Williams, "How We Found the Missing Memristor", IEEE Spectrum, 2008

Leon Chua's Version of the Hodgkin-Huxley Model



Biased at the
'Edge of Chaos'!

Brains are finely tuned to
operate right at the line
that separates chaos from
epilepsy.

Is this the key to creativity
and intuition?

Hewlett-Packard
Enterprise

L. Chua et al., "Hodgkin-Huxley Axon is made of Memristors,"
International Journal of Bifurcation and Chaos 22 (2012) art. # 1230011.

Figure: Modello di Hodgkin-Huxley di un neurone.

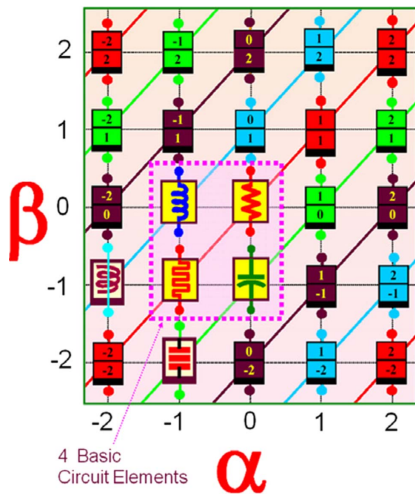


Figure: Tavola periodica elementi circuitali.