

Circuiti del secondo ordine

Mauro Forti

April 21, 2020

Circuiti del Secondo Ordine *descritti da eq. diff. del 2° ordine*

- Sono circuiti che contengono due elementi reattivi; il caso più interessante è 1 C e 1 L; li analizziamo prima nel DT e poi nel DL

- DT: risposta in evoluzione continua per $t \geq 0$; libera, forzata a eccitazioni costanti o sinusoidali, completa; transitori che conseguono ad un evento critico a $t = 0$; la trattazione estende quella vista per i circuiti del primo ordine

- DL: verifica con T. Laplace e *nel dominio trasformata* estensione a eccitazioni più generali

*non solo ecc
sinusoidali ecc*

2 induttori, 2 condensatori, o induttore e condensatore

→ Difficoltà è nel frase l'autotrasformata

Caso parallelo conviene usare conduttanza equiv.



Var. stato = tensione nei condensatori, corrente negli induttori

↓ scrivo k_i al posto

come var. di stato per l'equaz. diff.,

posso scegliere i_L per serie

per parallelo uso v_c

ordinamento -
ovvero equaz. -
integraz. diff.

controllo automatico

$$i_c + i_L + i_G = i_s, \quad t \geq 0 \quad \text{in evoluzione continua}$$

$$\Rightarrow C \frac{d}{dt} v + i_L + G_p v = i_s$$

$$v = L \frac{d}{dt} i_L$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_p L \frac{d i_L}{dt} + i_L = i_s$$

$t \geq 0$

Divido per LC

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G_p}{C} \frac{d i_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_s$$

$$P_n = \omega^2 i_s$$

$$\alpha = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$$

$\hookrightarrow$ fattore di smorzamento per il circuito

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec} \quad \text{è la pulsaz. di risonanza}$$

$\Rightarrow$ fattore di smorzamento è legato alle perdite nel circuito

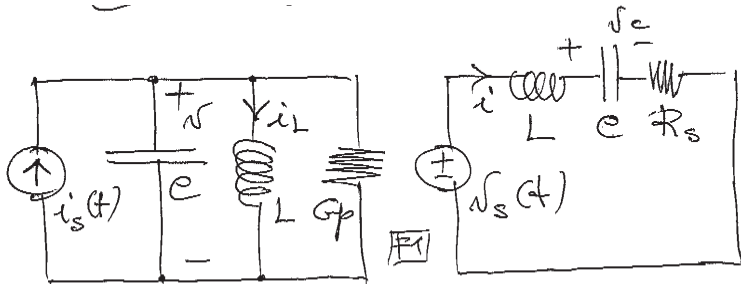
nel caso parallelo p. esempio. Se perdite le ho sulla conduttanza, dato che

caso serie le perdite sono $r_s \cdot i_s$

Seo una specie di attrito nei nostri circuiti.

Circuiti RLC del Secondo Ordine (DT) nel dominio del tempo

• Prendiamo in considerazione i due circuiti RLC parallelo e serie e cerchiamo di farne una trattazione unificata nel DT



• per il circuito parallelo ($\parallel$), usando come variabile i_L possiamo scrivere $i_C + i_L + i_G = i_s$, quindi

$$C \frac{dv}{dt} + i_L + G_p v = i_s$$

e, considerando che $v = L di_L / dt$

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_p L \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s, \quad t \geq 0$$

- dualmente, per il circuito serie (Σ), usando come variabile v_C

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R_s C \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s, \quad t \geq 0$$

- entrambe le equaz. diff. affini del secondo ordine sono riconducibili alla forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f, \quad t \geq 0$$

- nel caso ||

$$\alpha = \alpha_p = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 i_s$$

e' il termine forzante

- nel caso Σ

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 v_s$$

e' il termine forzante

Risposta Libera di circuiti RLC

- E' la risposta quando i generatori indipendenti sono disattivati e gli elementi reattivi sono carichi *no gen. indipendenti*

- Passo 1. troviamo la forma matematica della risposta libera (integrale generale dell'omogenea) *associata $\rightarrow$ dipende da due costanti (?)*

- Passo 2. imponiamo le condizioni iniziali

spengo generatori, ho equos. diff. omogenea

- consideriamo l'eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0$$

e l'equazione caratteristica associata

$$p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

- le radici caratteristiche valgono

Soluzione

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \underline{\text{rad/sec}}$$

"BIFREQUENZA"

e sono dette anche frequenze naturali in quanto caratterizzano il tipo di risposta naturale di un circuito RLC

- consideriamo separatamente i tre casi $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, $\Delta = 0$

e $\Delta < 0$ *radici complesse*

radici reali *radice reale*
"PREDITECCE, smorz. alto, il circuito non oscilla"

- notare che le perdite crescono se cresce α ($G_p v^2$ W nel caso $\parallel$, $R_s i^2$ nel caso Σ)

oscillazioni smorzate in un certo sistema, non possibili in un sistema del primo ordine

$$G_c \stackrel{\text{per}}{\underset{\text{efficiency}}{=}} \frac{G_p}{2c} \quad 2^{-1}$$

$$R_c \stackrel{\text{per}}{=} \frac{R_s}{2k} \quad 2$$

- $\Delta > 0$. Caso sovrasmorzato *caso ideale $\alpha = 0$, ϕ pendente, non realizable*
- per un $RLC \parallel$ si ha *non ha oscillazione*

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff \boxed{G_p > G_c} = 2\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \begin{array}{l} \text{conduttanza} \\ \text{CRITICA} \end{array}$$

con G_c conduttanza critica in Ohm^{-1}

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \frac{R_s}{2L} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff \boxed{R_s > R_c} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \begin{array}{l} \text{RESISTENZA} \\ \text{CRITICA} \end{array}$$

con R_s resistenza critica in Ohm

- le due radici caratteristiche sono *reali negative distinte*

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

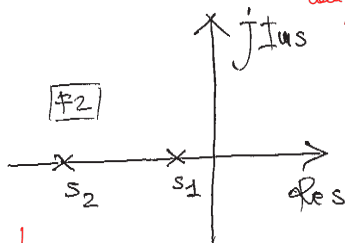
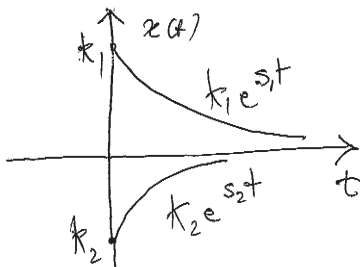
*parametri variabili k_1 e k_2
delle variabili le
soluzioni, nelle
gradi delle soluzioni*

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

non ci sono oscillazioni

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali

piano complesso, qui piano delle frequenze naturali.



es. $k_1 > 0, k_2 < 0$

↓
il transitorio più veloce è quello più lontano dall'asse immaginario, s_2

- $\Delta = 0$. Caso *criticamente smorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p = \omega_0 \iff G_p = G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

conduttanza parallela
= *conduttanza Critica*

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \omega_0 \iff R_s = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

anch'ora il Δ

- le due radici caratteristiche sono *reali negative coincidenti*

$$s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 \text{ rad/sec}$$

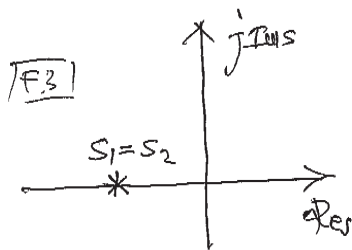
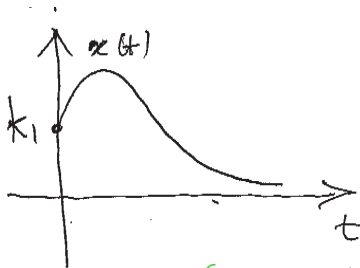
radici doppie

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} + \underbrace{k_2 t e^{-\alpha t}}_{2^a \text{ fun. indep.}}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie) *indipendente da t , per $e^{-\alpha t}$*

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



Summa esponenziale e $t \cdot$ esponenziale

Se abbiamo ancora le perdite abbiamo $G_p = R_s$?

Come sistema massa molla attrito, se c'è tanto attrito, non oscilla. Se non c'è attrito, oscilla all'infinito

- $\Delta < 0$. Caso sottosmorzato
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p < \omega_0 \iff G_p < G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s < \omega_0 \iff R_s < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale negativa*

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &\quad \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \text{ di segno } \pm \text{ variabile} \\ &= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ &= -\alpha \pm j\beta \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

dove

$$0 < \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

3 parametri: α , ω_0 , β

β positivo quando $\omega_0 > \alpha$

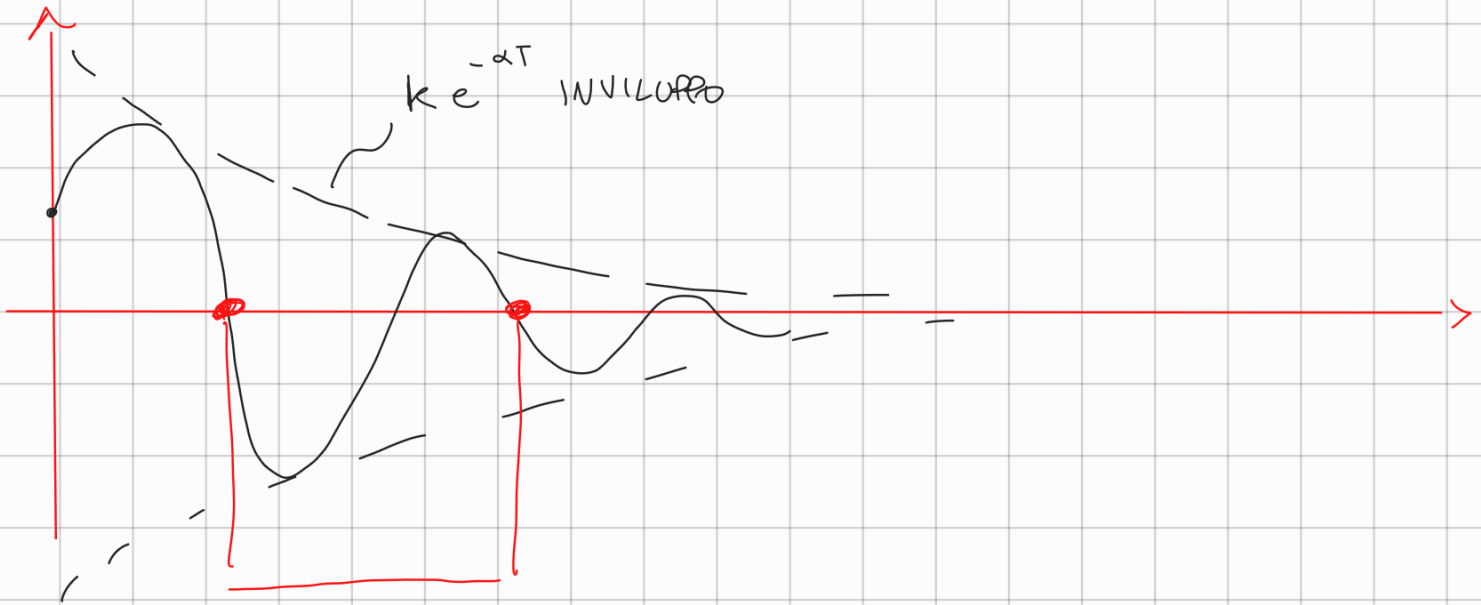
e' la *pulsazione naturale di oscillazione* in rad/sec

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

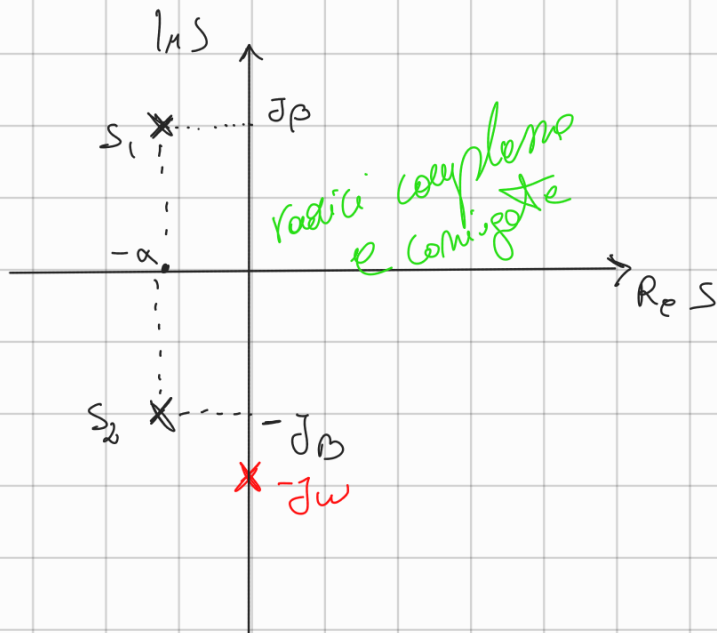
$$x(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi)$$

oppure

$$= k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$



1 periodo $T_D = \frac{2\pi}{\beta}$
 periodo β



parte reale determina l'involuppo.
 più negat. è α , più si smorza
 velocemente

Imag = determina quanto
 oscilli velocemente
 dentro involuppo

- l'integrale generale dell'omogenea e'

oscilla con puls. propria
della L.O.

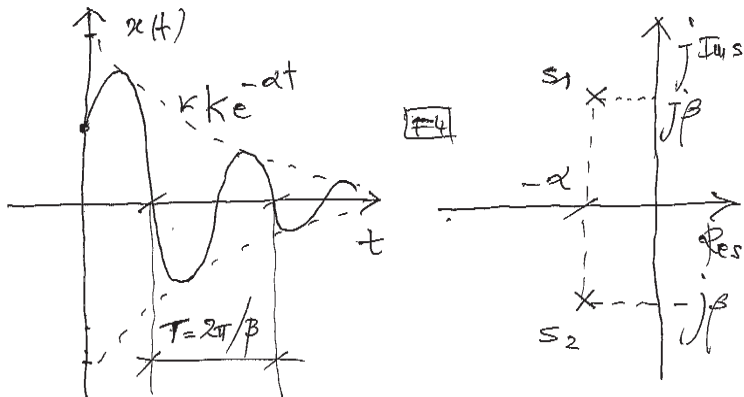
$$x(t) = ke^{-\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *oscillatorio smorzato*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- notare che $\alpha = |\operatorname{Re}[s_1]|$ determina quanto velocemente tende a 0 l'involuppo
- $\operatorname{Im}[s_1] = \beta$ individua la pulsazione effettiva di oscillazione all'interno dell'involuppo

- Caso ideale *senza perdite* *caso limite*
- per un $RLC \parallel$ si ha $G_p = 0$ e quindi

$$\alpha_p = 0$$

non hanno parte reale

- per un $RLC \Sigma$ si ha $R_s = 0$ e quindi

$$\alpha_s = 0$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale nulla*

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t \geq 0$$

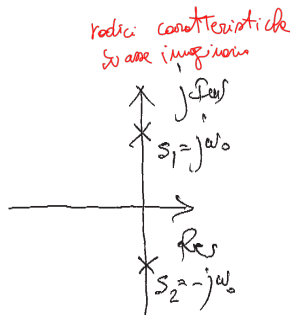
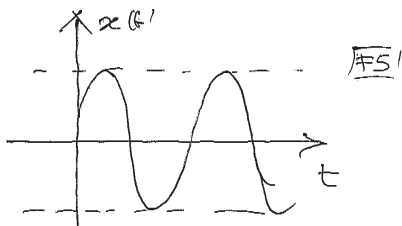
con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

*non c'è
più lo smorzamento,
L e C si scambiano
energia*

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è una oscillazione alla pulsazione di risonanza ω_0 che non si smorza nel tempo; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- come detto le frequenze naturali sono immaginarie pure.

LC si accumulano energia. appena mette resistenza, tutto si smorza se ne può alla fine se aumento troppo resistenza, non c'è più oscillazione

Determinazione delle costanti arbitrarie

Come imporre le condizioni iniziali

- Determiniamo adesso le costanti arbitrarie imponendo le condizioni iniziali sullo stato $v_C(0) = V_0$ e $i_L(0) = I_0$] Sono 2 glr stati iniziali perche' qui ci serve del 2° ordine
- illustriamo per un circuito RLC || nel caso sovrasmorzato dove

$$x(t) = i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

- dobbiamo risolvere un problema di Cauchy con le condizioni iniziali $i_L(0) = I_0$ e $\frac{di_L}{dt}(0) = ?$; la seconda e' una 'condizione iniziale derivata' che dobbiamo trovare usando l'informazione $v_C(0) = V_0$; per un circuito RLC || si ha $v_L(0) = L \frac{di_L}{dt}(0) = v_C(0)$, quindi

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

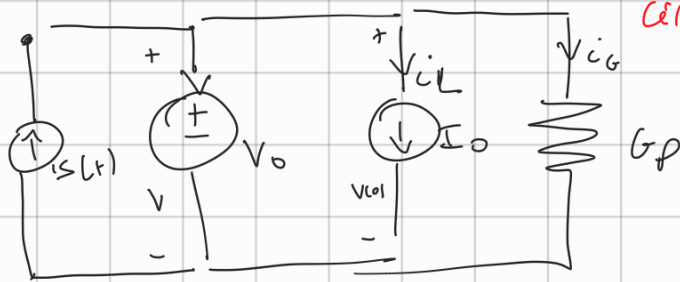
- allora, riassumendo, abbiamo il problema di Cauchy con una unica soluzione

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

$$i_L(0) = I_0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

$$1 \frac{d}{dt} i_L = \left|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$



condizione all'istante $t=0$

$$t=0 \quad V(0) = V_0 = L \frac{d}{dt} i_L \Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow k_1 + k_2 = I_0$$

$$k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

se mettiamo ~~s(t)~~ s_1, s_2 per la forma vettoriale

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ \frac{V_0}{L} \end{pmatrix}$$

Ma risolvere una
perché $s_1 \neq s_2$
e dopo il calcolo...

↓ dunque per sostituzione

- quindi

$$i_L(0) = I_0 = k_1 + k_2, \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = k_1 s_1 + k_2 s_2$$

e risolvendo

$$k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right); \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right).$$

• **Esempio.** Consideriamo un circuito RLC parallelo con $G_p = 1$ *conduttanza parallela*
 Ohm^{-1} , $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$. Determinare la risposta libera $i_L(t)$ per

condiz. iniz. $i(0) = i_0 = 1 \text{ A}$ e $v_C(0) = V_0 = 1 \text{ V}$ *1° vediamo in che caso siamo e in base a quello scriviamo la formula della soluz.*

- si ha

$$G_p = 1 < G_c = 2\sqrt{C/L} = 2$$

quindi siamo nel caso sottosmorzato

- $\alpha_p = G_p/2C = 1/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \text{ rad/sec}$ e
 $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}$; le radici caratteristiche sono

$$s_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

quindi

$$i_L(t) = k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + k_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

con

$$i_L(0) = 1 \text{ A}; \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 1 \text{ A/sec}$$

$$G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}} = 2\Omega^{-1}$$

$$G_p = 1\Omega^{-1} < G_c \rightarrow \text{caso sottosmorzato}$$

$$S_{1,2} = -\alpha p \pm j\beta \quad \alpha p = \frac{G_p}{2C} = \frac{1}{2} \text{ rad/sec}$$

$$\alpha p < \omega_0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \text{ rad/sec}$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha p^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

$$\Rightarrow S_{1,2} = -\alpha p \pm j\beta = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

$$\begin{cases} X(t) = i(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \geq 0 \\ \left. \begin{aligned} i_L(0) &= 1A \\ V_C(0) &= \frac{V_0}{2L} = 1V \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} i_L(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt} i_L(0) &= \frac{V_0}{L} = 1A/\text{sec} \end{aligned}$$

$$i_L(0) = K_1 = 1 \quad i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\frac{d}{dt} i_L \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} + K_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1A/\text{sec}$$

$$K_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow K_2 = \sqrt{3}$$

- imponiamo le condizioni iniziali per determinare k_1 e k_2 :

$$i_L(0) = 1 \implies k_1 = 1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies k_2 = \sqrt{3}$$

- infine

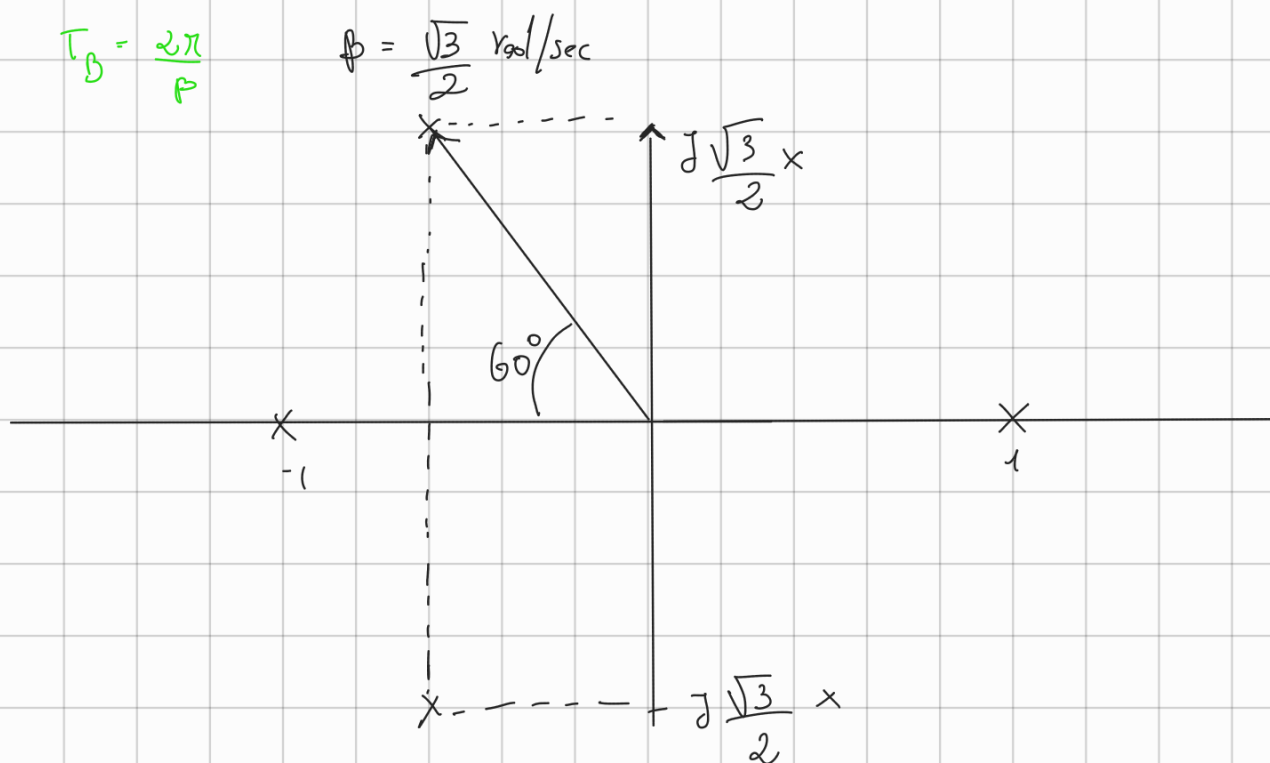
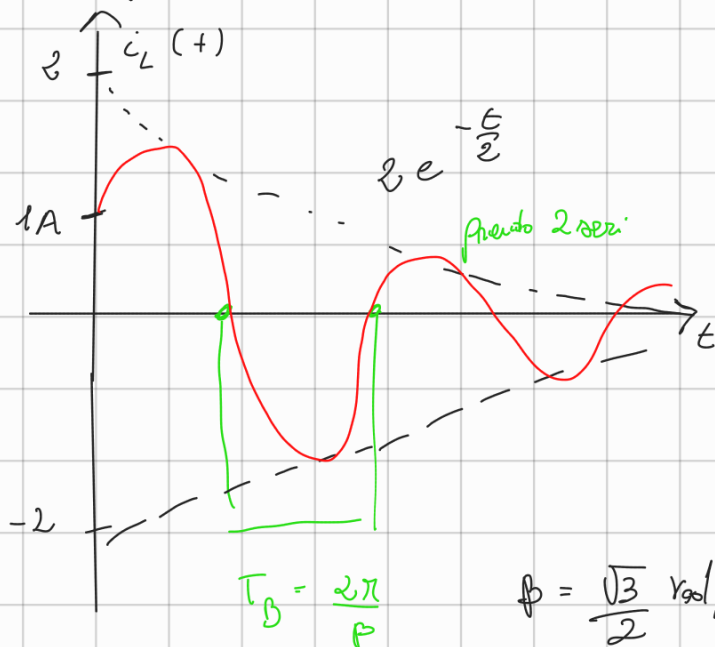
$$i_L(t) = e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

- puo' anche essere riscritta come (provare!)

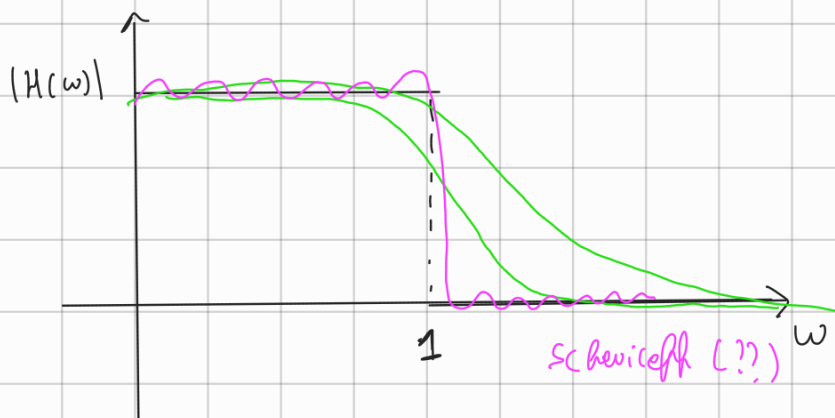
$$i_L(t) = 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right), \quad t \geq 0.$$

per passare a questa forma, molto a partire come i termini ecc...

Dunque



approssimas. di Vantale Rott (??)

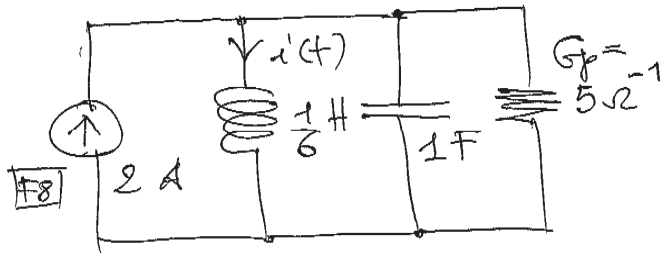


segue monotona decrescente

- Se i poli più vicini all'asse immaginario, da modo a una risposta.
- Se i poli sono lontani dall'asse immag. la risposta è più grossa.

Le perdite degli induttori fanno allontanare i poli dall'asse immaginario.

Esempio. Determinare $i(t)$, risposta forzata, per $t \geq 0$



• la corrente i soddisfa alla eq. diff. non omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 2\omega_0^2$$

con $\alpha = \alpha_p = G_p/2C = 5/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{6} \text{ rad/sec}$

- otteniamo allora il problema di Cauchy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = 12$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = i_{\text{trans}}(t) + i_{\text{regime.staz}}(t)$$

- l'equazione caratteristica per l'omogenea e'

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

e le radici caratteristiche sono $s_1 = -2 \text{ rad/sec}$, $s_2 = -3 \text{ rad/sec}$
(caso sovrasmorzato)

- inoltre si ha

$$i_{\text{part.affine}}(t) = \text{costante} = 2$$

quindi

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + 2$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- imponendo le condizioni iniziali si trova $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, quindi

$$i(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

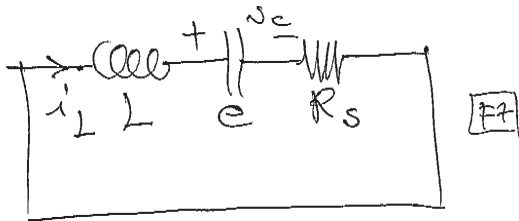
- si ha anche

$$i_{\text{trans}}(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t}, \quad t \geq 0; \quad i_{\text{regime.staz}}(t) = 2, \quad t \geq 0.$$

Osservazione: frequenze naturali

- Consideriamo un circuito RLC serie. In evoluzione libera v_C soddisfa alla eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0, \quad t \geq 0$$



- consideriamo adesso i_L ; si ha da KV

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C + R_s i_L = 0$$

e quindi

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' + R_s i_L = 0$$

eq. integro-diff

- derivando ottengo

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \quad t \geq 0$$

- tutte le grandezze elettriche del circuito soddisfano in evoluzione libera alla stessa eq. diff. omogenea del secondo ordine; sono caratterizzate quindi dalle stesse frequenze naturali.

Fattore di qualita'

- Il fattore di qualita' di un circuito RLC e' definito come

adimensionale $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$ *rapporto tra i due coeff*

- nel caso $\parallel$ si ha
parallelo

$\alpha \parallel = ?$

$$Q = Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p} = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L} \propto R_p$$

- nel caso Σ si ha

Q tiene conto delle perdite

$$Q = Q_s = \frac{1}{\omega_0 C R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s} \propto \frac{1}{R_s}$$

*inversamente
proporzionale a R_s*

- $Q < 1/2$ caso sovrasmorzato; $Q = 1/2$ caso di smorzamento critico; $Q > 1/2$ caso sottosmorzato; $Q \rightarrow +\infty$ caso senza perdite

Q < 1/2

Luogo delle frequenze naturali

radici eq. caratteristica

Studiamo risposta libera

- Le frequenze naturali sono le radici di

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

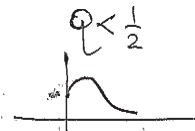
$\frac{1}{LC}$

- consideriamo un circuito RLC ||, supponiamo L, C fissi e facciamo crescere R_p , quindi cresce Q_p , decresce α_p (decrescono perdite)

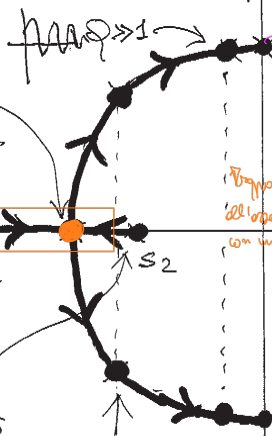
L, C fissi ω_0 costante

- si ha $s_1 \cdot s_2 = \omega_0^2 = \text{costante}$, mentre $s_1 + s_2 = 2\alpha_p$ decresce
- al variare di R_p le due frequenze naturali descrivono il luogo disegnato in figura; nella figura e' anche riportato qualitativamente il corrispondente andamento delle grandezze in evoluzione libera

vedi negativo
coincidente.



s_1, s_2 vedi negativo
distinte



$Q \gg 1$

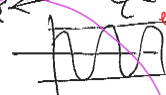
$Q > \frac{1}{2}$



osc. lib. smorzata

vedi in anexo,
più smorzata è l'oscillazione.

quando le
cond. τ_e, L e C
 $Q = \infty$: all'infinito
energia, senza
smorzamento



Per quanto
in sintonia
doppio ω_0
centrato
nell'origine

regno vicini
all'asse immaginario
con un filtro passivo



filtra instabile;
senza sfatare l'instabilità

Filtro passivo, valori
frequenze naturali vicini
all'asse immaginario

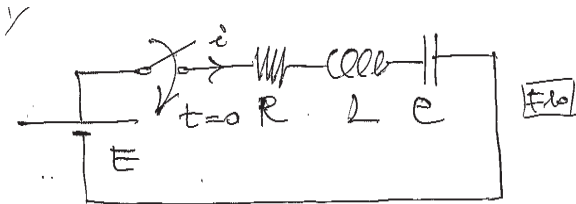
formazione ideale non si può;
cerco di compensare
la perdita con dei
filtri attivi

• Analisi di un circuito RLC in parallelo nel DT e nel DL 29/05/23

- Vogliamo determinare $i(t)$, risposta forzata, prima nel DT e poi nel DL, supponendo di essere nel caso sottosmorzato; per risposta forzata si intende la risposta allo stato iniziale nullo, e cioè $i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$

si parte a 0^-

2 var. di stato
ci dà invarianza e V.S.U.
come sempre



- Nel DT procediamo in 2 passi:
i) analisi all'istante critico (0^- , 0^+): dato che il circuito non è degenere si conservano le variabili di stato, quindi

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0; \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

perché prima corrente di valore finito

ii) analisi in evoluzione continua per $t \geq 0$; usando i come variabile si ottiene *chiuso interruttore*

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(t') dt'}_{\text{Tensione su condensatore}} + v_C(0^+) = E, \quad t \geq 0$$

V su R e R i *Somma Tensioni lungo una maglia*

e derivando *KV*

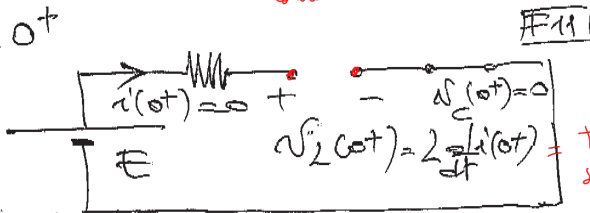
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{2 cond. s.} \\ \text{iniziali} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} \end{array}$$

derivata corrente, faccio analisi a 0^+ per non avere soluzione costante a 0^-

dove per trovare la condizione iniziale derivata abbiamo fatto riferimento al circuito a $t = 0^+$ riportato in figura

$t = 0^+$



Tensione sul generatore

Abbiamo ridotti eq. dff.

- nel caso sottosmorzato $s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$ e *parte reale dell'autovalore*

$$i(t) = k_1 e^{-\alpha_s t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

impongo condiz. iniziali

- si ha $i(0^+) = 0$, quindi $k_1 = 0$; inoltre *termine coseno è 0*

*integrando
generale
dell'omogenea*

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \beta k_2 = \frac{E}{L}$$

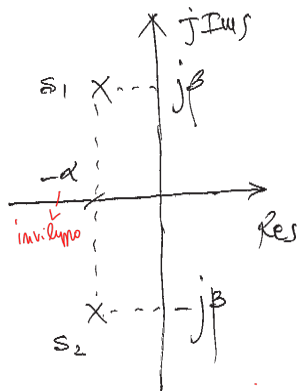
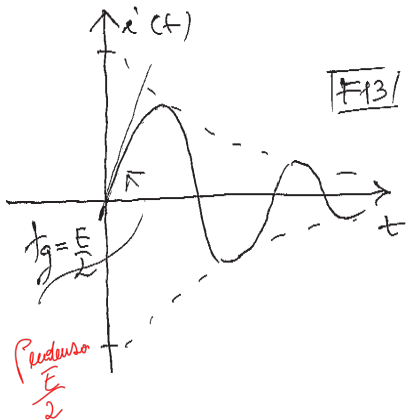
quindi $k_2 = E/\beta L$; concludendo

*✓
sostituisco*

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0.$$

*Verifico con
laplace, trasformata*

andamento della soluzione



se $-\alpha$ si avvicina a zero (maggiore),
l'inviluppo più piccolo

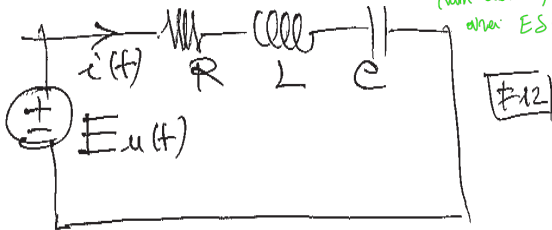
• Verifichiamo il risultato ottenuto con la TL; consideriamo il seguente circuito a partire da $t = 0^-$ e scriviamo l'equazione integro-differenziale a cui soddisfa i ; si ha

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t') dt' + v_C(0^-) = Eu(t), \quad t > 0^- \quad t > E^-$$

Trasformato Laplace

Tensione su condensatore

non derivo, altrimenti avrei: $ES(t)$, un coseno...



• trasformando con Laplace ottengo una equazione algebrica in $I(s)$ in cui appaiono esplicitamente le condizioni iniziali sulle variabili di stato a $t = 0^-$

$$L[sI(s) - i(0^-)] + RI(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{s}$$

Trasformata di una costante

da cui

però a destra

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) + I_{\text{lib}}(s) = \frac{\frac{E}{s}}{\underbrace{sL + R + \frac{1}{sC}}_{\text{duplice da eq. forzata}}} + \frac{\cancel{Li(0^-)} - \frac{v_C(0^-)}{s}}{\cancel{sL + R + \frac{1}{sC}}}$$

Tiene conto delle condiz. iniziali

- risposta forzata ($i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$)

moltiplico num e den per s

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2}$$

i poli coincidono con le radici caratteristiche del caso sottosmorzato

- ne consegue che i poli di $I(s)$ coincidono con le radici caratteristiche $s_{1,2}$ dell'equazione omogenea; in questo caso i poli sono complessi coniugati e a parte reale negativa

$$s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$$

aut. trasformata poli complessi

- per antitrasformare consideriamo che

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \\
 &\stackrel{\substack{\text{anti-trasf.} \\ \text{reale}}}{=} \frac{1}{(s - (-\alpha_s + j\beta))(s - (-\alpha_s - j\beta))} \\
 &= \frac{A}{s - (-\alpha_s + j\beta)} + \frac{B}{s - (-\alpha_s - j\beta)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{scopriamo i residui} \\ \text{semplici} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

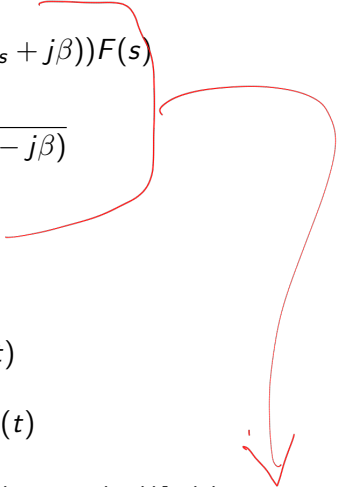
- dato che $F(s)$ e' razionale e a coefficienti reali, risulta $B = A^*$;
 allora otteniamo

$$i(t) = \frac{E}{L} \left[\underbrace{A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}}_{\substack{\text{residuo} \\ \text{complesso}}} + \underbrace{A^* e^{(-\alpha_s - j\beta)t}}_{\substack{\text{complesso coniugato} \\ \text{della } f \text{ complesso}}} \right] u(t) = \frac{2E}{L} \text{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t)$$

$\alpha_s \text{ reale} \quad \omega_0 \text{ reale} \Rightarrow B = A^*$
 risultato deve essere reale

Se siamo la parte complessa, porta qui si cancella e dopo 2 volte la parte reale

- calcoliamo il coefficiente A (residuo di F nel polo semplice $-\alpha + j\beta$); si ha

$$\begin{aligned} \bullet \quad A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_s + j\beta} (s - (-\alpha_s + j\beta)) F(s) \\ &= \frac{1}{-\alpha_s + j\beta - (-\alpha_s - j\beta)} \\ &= \frac{1}{j2\beta} = -\frac{j}{2\beta} \end{aligned}$$


- infine otteniamo

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t) \\ &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}\left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t}\right] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re}[-j(\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{2E}{L} \operatorname{Re} \left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t} \right] v(t)$$

$$\frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re} [-j e^{j\beta t}] v(t) \quad \begin{matrix} \sim \text{sinusiale} \\ \text{e. funks.} \end{matrix}$$

$\downarrow$ zu aut. Bas. funktionale

$$\frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t) v(t) \quad \rightarrow \text{oppure aut. Bas. funkt.}$$

• Verifika

$$\operatorname{Resid} [F_s - \alpha_s + j\beta] = \frac{1}{2s + 2\alpha_s} \Big|_{s = -\alpha_s + j\beta} =$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{1}{-2\alpha_s + j2\beta + 2\alpha_s} \quad \checkmark$$