

Metodo simbolico di Laplace

Mauro Forti

April 25, 2020

Fasori: regime sinusoidale con eccitaz. sinusoidale

Laplace: qualsiasi eccitazione, trova anche risposta libera, forzata, transiente

introduco un vincolo simbolico in Laplace, come con i Fasori

Metodo simbolico di Laplace

il circuito diventa senza memoria

- E' un metodo applicabile a circuiti lineari e tempo invarianti (LTI). Consiste di due passi:

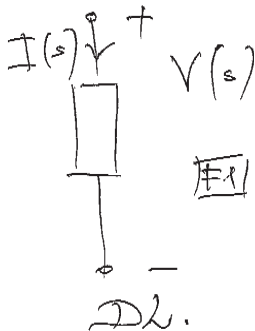
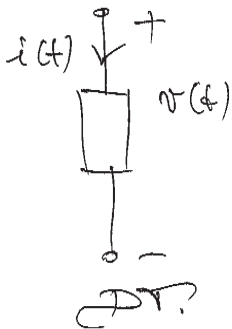
i) trovo le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio di Laplace (DL)

ii) determino le leggi di Kirchhoff nel dominio di Laplace

Otengo in questo modo un circuito simbolico nel DL che e' senza memoria e puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

Relazioni costitutive nel DL *Dominio Laplace*

• Consideriamo un bipolo nel dominio del tempo (DT) a cui e' applicata $v(t)$ e in cui fluisce $i(t)$; supponiamo $v(t)$ e $i(t)$ trasformabili secondo Laplace; consideriamo poi un bipolo ai cui morsetti e' applicato simbolicamente $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ e in cui fluisce $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$; per relazione costitutiva nel DL si intende la relazione che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$



*Non posso dire
che un
terminale e'
a potenziale
piu' alto
di questo.
E' simbolico*

- *Resistore ideale*: nel DT soddisfa alla legge di Ohm

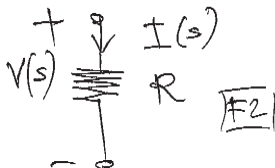
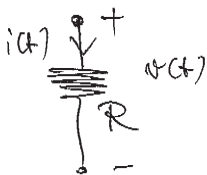
$v(t) = Ri(t)$; per la linearita' della trasf.ta di Laplace si ottiene

che dimensioni ha la Trasformatrice?

$$V(s) = RI(s)$$

Funzione sempre Trasformatrice Lineare

quindi un resistore continua a essere definito da una resistenza nel DL



$V(s)$ è l'integrale di $v(t)$, integrale in $dt \int v \cdot dt$
 e' $V \cdot s$ Vell per second.

la variabile di Laplace s sono $\frac{1}{\text{Secondi}}$

- *Condensatore ideale*: nel DT soddisfa a $i(t) = Cdv(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

$$I(s) = C(sV(s) - v(0^-)) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

- nel DL il condensatore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico

caso 1) • *C scarico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) = 0$ allora si ha* ed. nelle risposte diventa scarico

$$I(s) = sCV(s); \quad V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Tensione prop. a corrente

- definiamo

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad \text{Ohm}$$

impedenza in DL del condensatore

impedenza di C nel DL e

$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = sC \quad \text{Ohm}^{-1}$$

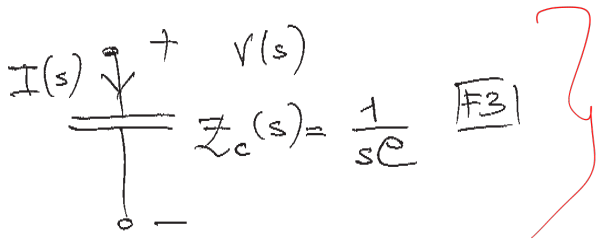
ammettenza di C nel DL

e' un'impedenza se e' scarica

- allora un C scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_C(s) = 1/sC$ oppure una ammettenza $Y_C(s) = sC$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_C(s)}; \quad I(s) = Y_C(s)V(s)$$

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



Caso 2, C e' carico a $T = 0^-$

- C carico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{\frac{1}{sC}} - C v(0^-)$$

impedenza di un condensatore
di parte della condiz. iniziale
condiz. iniziale

C ha una storia, a $t=0^-$ è carico

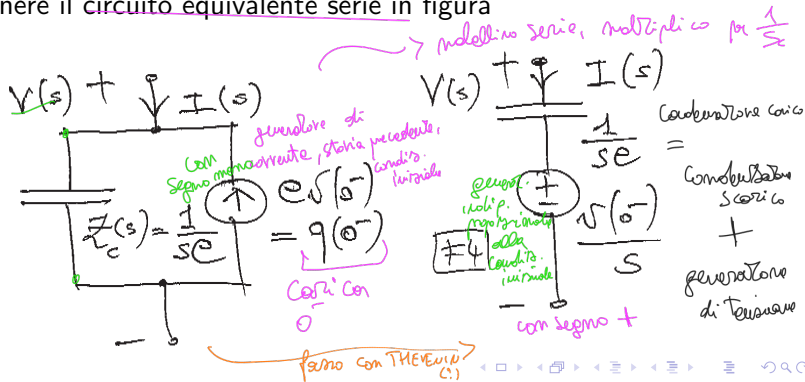
termino costante

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- altrimenti possiamo scrivere

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

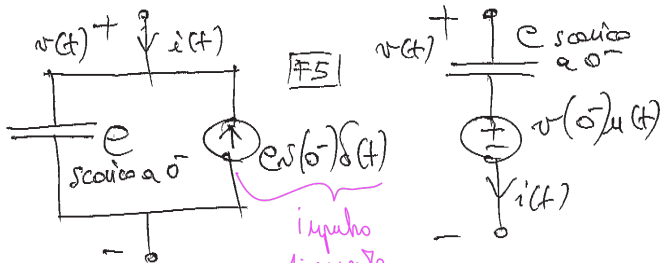
e ottenere il circuito equivalente serie in figura



- per un C carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di C a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un C carico a $t = 0^-$ del DT

antitrasformo $\frac{1}{s} i'(t)$



impulso di corrente,

lo carica a quella tensione

antitrasformo, A_{Teg} con S

$C V(0^-)$ area sotto diagramma tensione corrente

- *Induttore ideale*: nel DT soddisfa a $v(t) = L di(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo anche lui senza memoria nel DL

$$V(s) = L(sI(s) - i(0^-)) = sLI(s) - Li(0^-)$$

- nel DL l'induttore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico
- L scarico a $t = 0^-$. Se $i(0^-) = 0$ allora si ha Caso 1

$$V(s) = sLI(s); \quad I(s) = \frac{1}{sL} V(s) \quad \text{Tension prop. à courant}$$

- definiamo

$$Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad \Omega$$

impedenza di L nel DL e

$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL} \text{ Ohm}^{-1}$$

Dimensional analysis

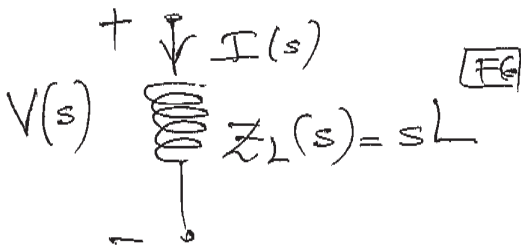
ammettenza di L nel DL

induttore L unico soddisfa legge di Ohm simbolica

• allora un L scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_L(s) = sL$ oppure una ammettenza $Y_L(s) = 1/sL$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L(s)}; \quad I(s) = Y_L(s)V(s)$$

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura

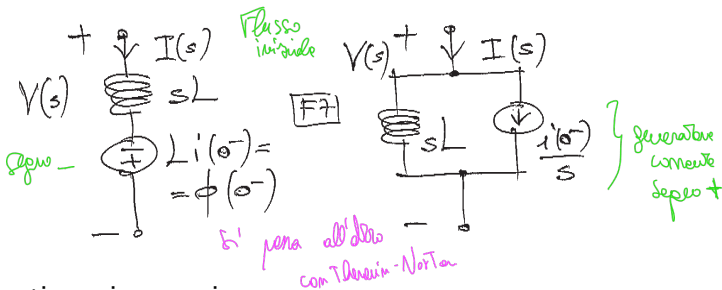


- L carico a $t = 0^-$. Se $i(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$V(s) = sLI(s) - \underbrace{Li(0^-)}_{\text{generatore Tensione}}$$

compone Tensione
dipendente da condiz.
iniziale

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



- altrimenti possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

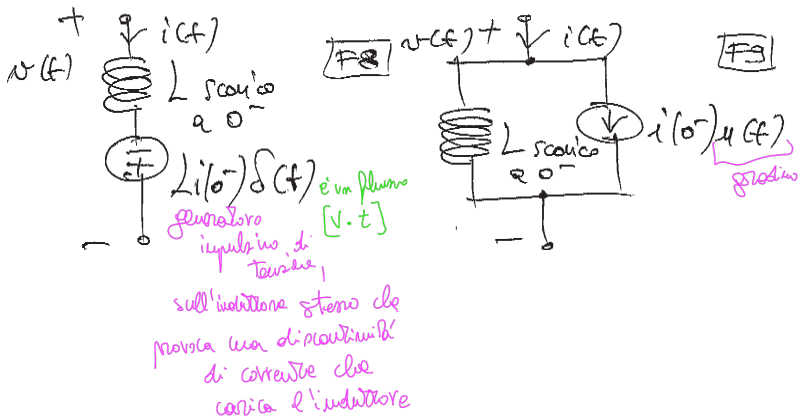
modello parallelo

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- per un L carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di L a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

autotrasform

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un L carico a $t = 0^-$ del DT



Leggi di Kirchhoff nel DL *valgono anche per DL*

- Consideriamo la KV lungo una maglia di un circuito

maglia con 4 dipoli

$$v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0, \quad t \geq 0$$

- se le tensioni sono trasformabili secondo Laplace, per la linearita' della Trasf. di Laplace otteniamo

$$V_1(s) - V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) = 0$$

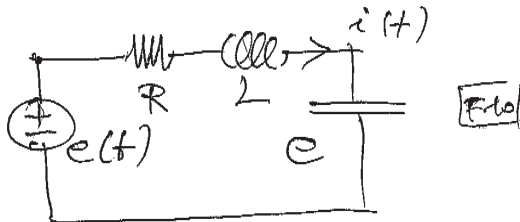
*tutte le tensioni in
funzione di s*
*= 0, conservando un
significato
fisico*

quindi *le trasformate di Laplace delle tensioni soddisfano alla KV*

- analogamente *le trasformate di Laplace delle correnti soddisfano alla KI*
- illustriamo di seguito con degli esempi come si applica il metodo simbolico di Laplace per l'analisi di circuiti LTI.

Esempio. Riconsideriamo il circuito RLC serie e supponiamo

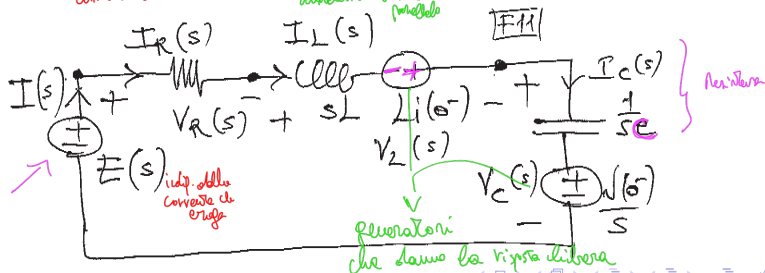
$$i(0^-) = i_0, \quad v(0^-) = v_0$$



• il circuito simbolico di Laplace e' in figura; tale circuito e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti resistive

conv. stil.

modellino serie e parallelo



- si ha

$$KI : I(s) = I_R(s) = I_C(s) = I_L(s); \quad KV : E(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

quindi ottengo

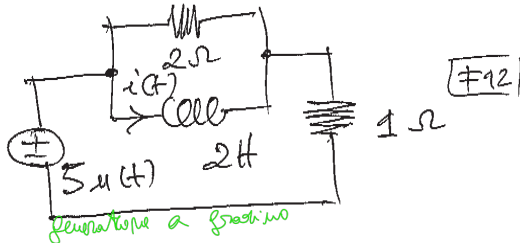
$$E(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

da cui trovo per $I(s)$ lo stesso risultato ottenuto in precedenza scrivendo prima equazione integro differenziale e trasformando tale equazione, cioè'

$$I(s) = \frac{E(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

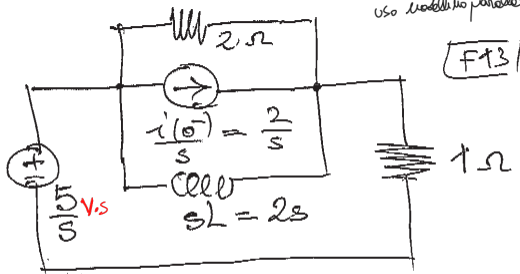
- notare che il generatore indipendente $E(s)$ e' quello che da' luogo alla risposta forzata, mentre i due generatori legati alle condizioni iniziali di L e C danno luogo alla risposta libera.

Esempio. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, usando il metodo simbolico di Laplace; e' noto che $i(0^-) = 2$ A Capacitore 1° ordine



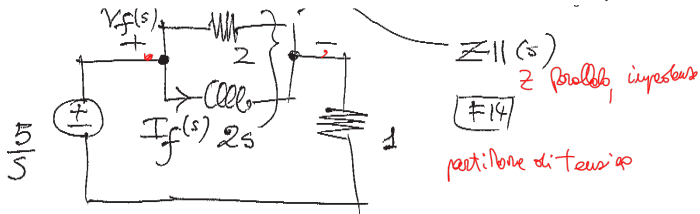
• consideriamo il circuito simbolico che segue dove abbiamo usato il modello parallelo per l'induttore carico

induttore carico a 0-
uso modello parallelo vadem



$i(t)$ e' contenuto
nell'induttore

- forzata: dobbiamo analizzare il seguente circuito, *spiega generatore sconsigliato a 0*



- si ha

$$Z_{||}(s) = 2 \parallel 2s = \frac{2s}{s+1}$$

e dalla regola del partitore di tensione

$$V_f(s) = \frac{5}{s} \frac{Z_{||}}{Z_{||} + 1} = \frac{10}{3s+1}$$

- quindi

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{2s} = \frac{5}{3} \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+\frac{1}{3}}$$

dis...
risposta forzata

- antitrasformando

$$i_f(t) = 5(1 - e^{-t/3})u(t)$$

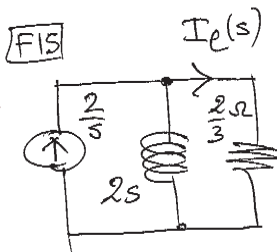
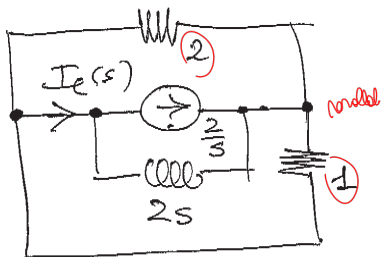
- libera: consideriamo il circuito che segue; dalla regola del partitore di corrente

l'induttore è l'immagine delle corrente + parte libera

$$I_I(s) = \frac{2}{s} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2s}} = \frac{2}{s + \frac{1}{3}}$$

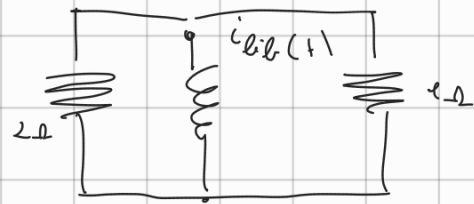
quindi

$$i_I(t) = 2e^{-t/3}u(t) \quad \left. \vphantom{i_I(t)} \right\} \text{parte libera}$$



● Nel dominio del tempo invece DT, circuito 1° ordine

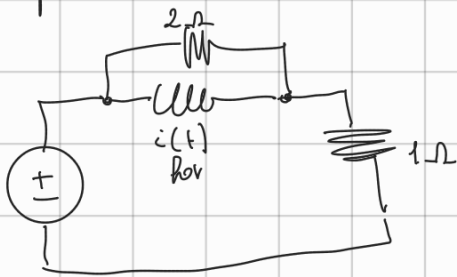
$$i(0^+) = i(0^-) = 2A$$



$$i_L(t) = i(0^+) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} = 2 e^{-\frac{t}{3}} =$$

$$\tau_{eq} = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \text{ sec}$$

Risposta Forzata $t > 0$

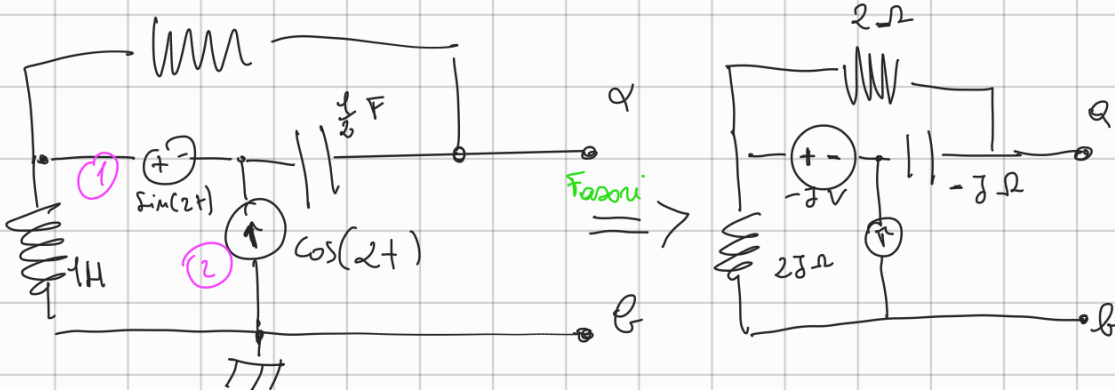


inoltre è un
circuitino

$$i(t) = \cancel{i(0^+)} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = 5(1 - e^{-\frac{t}{3}})$$

•
•
•

ORA esercizi Random



$$\omega = 2 \text{ rad/sec} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

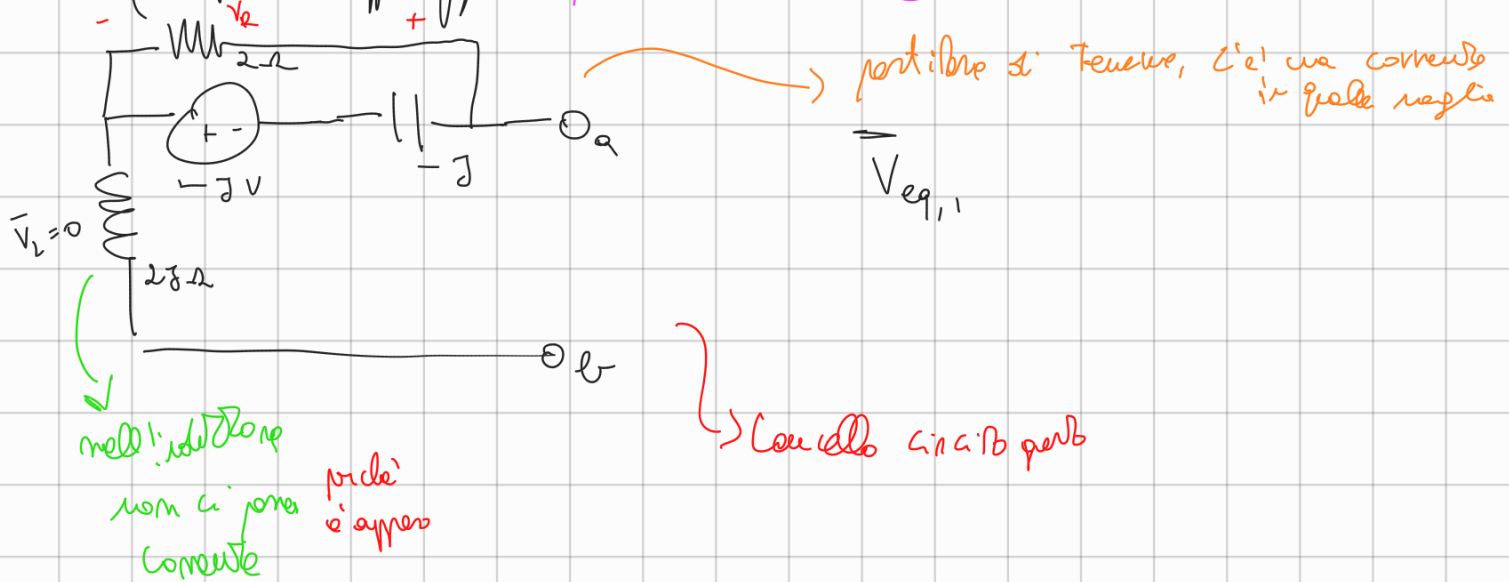
$$X_L = 2 \Omega =$$

$\Rightarrow E_q$ Thevenin

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \text{c'altro generati} = \text{resistor} -j \parallel 2 + 2j = \frac{-2j}{2-j} + 2j \\ &= \frac{-2j + 2j(2-j)}{2-j} = \frac{-2j + 4j + 2}{2-j} = \frac{2j + 2}{2-j} = \frac{6}{5}j + \frac{2}{5} \Omega = \bar{Z}_{eq} \\ &\quad \uparrow \text{carico} \end{aligned}$$

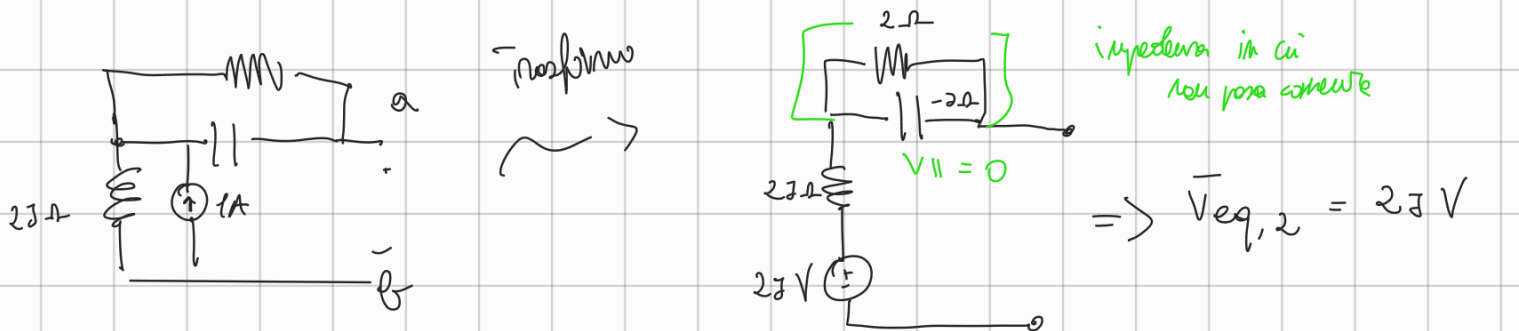
$$\bar{Z}_v = \bar{Z}_{eq} = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}j \Omega$$

uso principio sovrapposizione, causa (1) e (2)



$$V_R = -(-j) \frac{2}{2-j} = \frac{2j}{2-j} = \frac{2j(2+j)}{5} = \frac{4j-2}{5} = V_{eq,1}$$

ora gruppo generatori di tensione



$$\Rightarrow \bar{V}_{eq,2} = 2jV$$

$$\bar{V}_{eq} = \bar{V}_{eq,1} + \bar{V}_{eq,2} = \frac{-2}{5} + \frac{4}{5}j + 2j = \frac{-2}{5} + \frac{14}{5}j V$$

$$\Rightarrow P_{max} = \frac{V_{eq}^2}{8R_v} = \frac{\frac{200}{25}}{8 \cdot \frac{2}{5}} = R_v + X_v j = \frac{8}{8 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5}{2} W$$

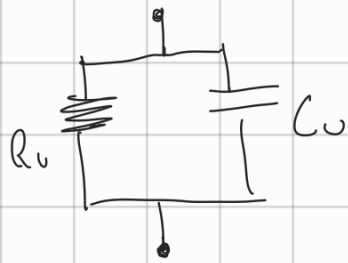
$$V_{eq} = \sqrt{\frac{4+14^2}{5}} = \frac{\sqrt{200}}{5}$$

ona random

Provando per avere il massimo Trasferimento

Lavoro con Ammettenze

gruppo R, N, C
che può
essere anche



$$\overline{Y}_u = \frac{1}{Z_u} = \frac{1}{\frac{2-6j}{5}} = \frac{5}{2-6j} = \frac{5(2+6j)}{4+36} = \frac{10+30j}{40}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j \Omega^{-1}$$

• $\frac{1}{R_u} \parallel j\omega C_u$

$$= \frac{1}{R_u} + 2jC_u$$

$\frac{3}{4}j = 2j \cdot C_u$

$C_u = \frac{1}{\omega C_u} = j\omega C_u$ *questo è il valore di un condensatore*

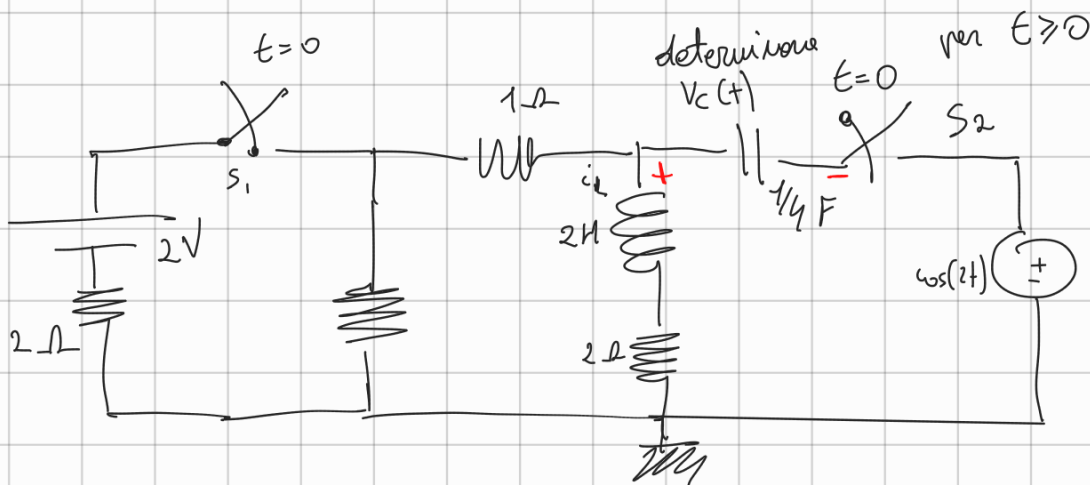
$$\Rightarrow \frac{1}{R_u} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_u = 4 \Omega$$

$$C_u = \frac{3}{8} F$$

Impedenza e il coniugato

perché è questo il
caso che assorbe
la massima potenza??

Si elimina qualcosa...



vor. di stato $i_L(0^-)$ e $V_C(0^-)$ che si conservano

neg. sinusoidale

Libera + Forzata

L + F

neg. stazionario

Stato a 0⁻

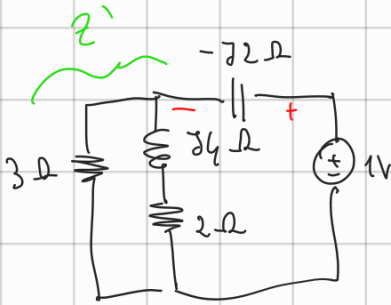
$i_L(0^-)$

$v_L(0^-)$

$t = 0$

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$

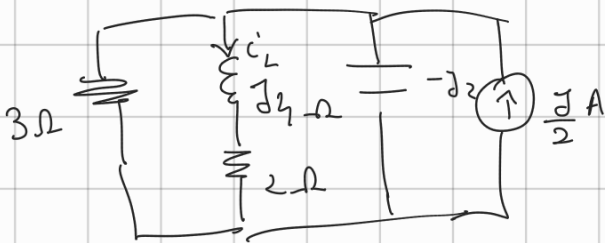
$v_L(0^-) = v_L(0^+)$



$$(2 + j4) \parallel 3\Omega = \frac{(2 + j4) \cdot 3}{2 + j4 + 3} = \frac{6 + j12}{5 + j4} = \frac{6(1 + j2)(5 - j4)}{41} =$$

$$= \frac{78 + j36}{41} = Z_1$$

per trovare i_L facciamo un partitore di corrente



$$\bar{I}_L = \frac{\frac{j}{2} \cdot \frac{1}{2 + j4}}{\frac{j}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 + j4}} = A + jB$$

partitore
di Tensione

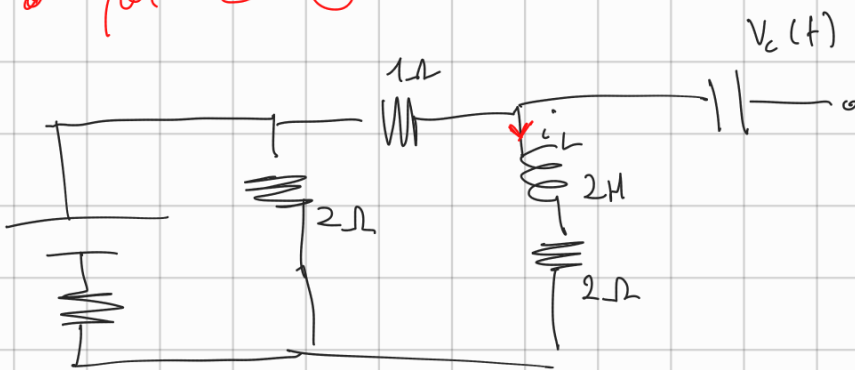
$i_L(0^-) = A$, parte reale del fasore

$$\bar{V}_C = \frac{(2 + j4) \parallel 3}{(2 + j4) \parallel 3 - j2} = C + jD$$

$$v_C(0^-) = C$$

al cambio dell'interazione,
la rete non è degenera,

• per $t > 0$



$$i_L(0^+) = A \quad t > 0$$

$$V_C(0^+) = C$$

• 0^+ Conduttori e induttori carichi, sono percorsi

È un circuito del secondo ordine,

perché il condensatore è aperto, e dunque
è del 1° ordine.

Tensione condensatore per $t > 0$

$V_C(t)$, non dipende corrente, rimane costante

perché isolato

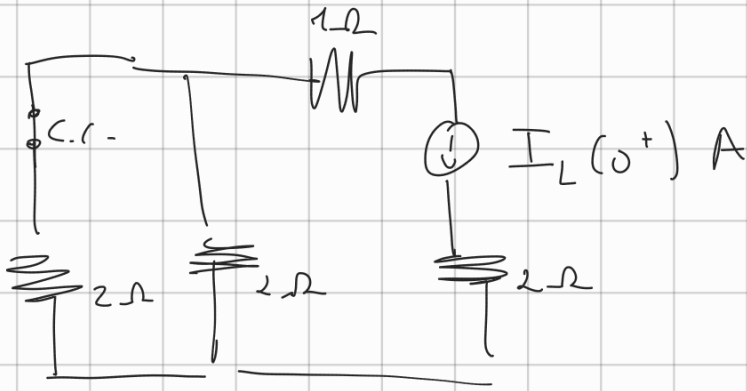
$$i_C(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

$$C \frac{dV(t)}{dt} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{dopo} \\ V \text{ rimane} \\ \text{costante} \end{array}$$

Conduttori rimangono carichi,
a si mette una resistenza in
parallelo per scaricarli.

↓ Tdgo condensador 0^+

Scorica



$$i_L(0^-) = A \quad V_C(0^-) = C$$

Buono τ_{eq}

$$2 \parallel 2 + 3 = 4 \Omega$$

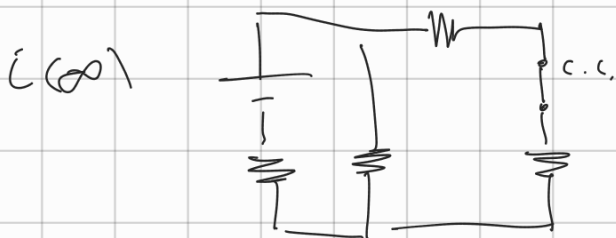
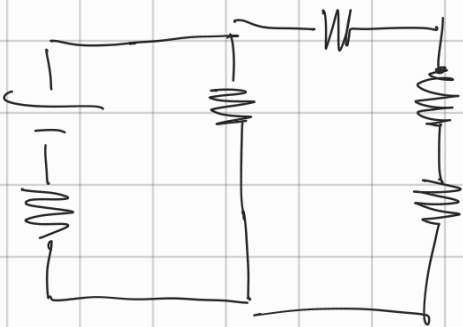
$$\tau_{eq} = \frac{2H}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} s$$

Scorica del condensatore

$$I_{L(B)}(t) = I_L(0^+) e^{-2t}$$

↓
FORZATA

$$i_{forz.}(t) = i_{for}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

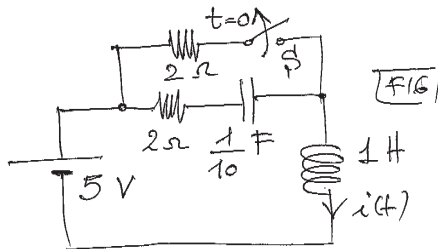


=> partibile - corrente

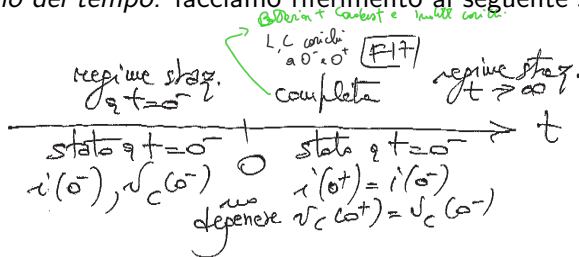


$$\Rightarrow \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = i_{for}(\infty)$$

Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.
 Determinare $i(t)$, $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel DT. Verificare il risultato ottenuto a partire da $t = 0^-$ usando il metodo simbolico di Laplace 29/09/23

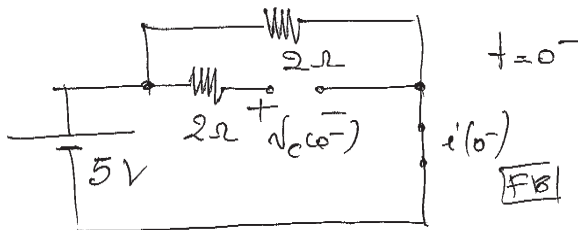


- **Dominio del tempo:** facciamo riferimento al seguente schema



- lo stato a $t = 0^-$ in regime stazionario si determina con il seguente circuito; si ha Condensatore c.c., induttore c.c..

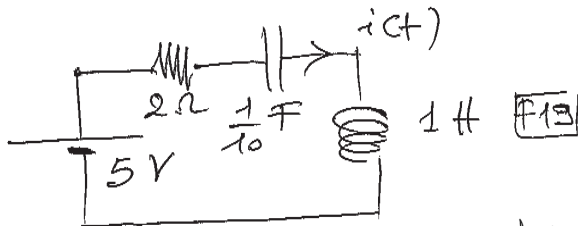
$$v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$



- il circuito non e' degenero per cui

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^+) = i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$

- per $t > 0$ si ottiene il circuito RLC serie che segue per il quale si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$



- si ha risposta complessa = libera + forzata

transiente

stazionario

$$R_s = 2 < R_c = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{10}$$

serie

critico

Regime staz., $\rightarrow t \rightarrow \infty$

C e in C.a. non sono
connessi

Regime stazionario

quindi siamo in un caso sottosmorzato; inoltre

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} = 1 \text{ rad/sec}; \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 3 \text{ rad/sec}$$

e quindi le frequenze naturali valgono

$$s_{1,2} = -1 \pm j3 \text{ rad/sec}$$

- allora

$$TC : i_{tc} = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

causale

- si ha poi evidentemente

$$i_{reg.staz}(t) = 0$$

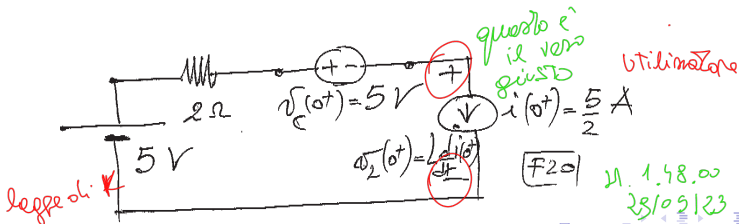
- condizioni iniziali per il problema di Cauchy: si ha $i(0^+) = 5/2$ A; per determinare $\boxed{di(0^+)/dt}$ considero l'istantanea del circuito a $t = 0^+$; si ottiene dalla KV

condensatore = gen tensione

induttore: gen corrente

$$5 = 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + v_L(0^+); \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -5 \text{ A/sec}$$

meglio trovare
 $\frac{di(0^+)}{dt}$
o/c



- la completa soddisfa quindi al problema

ho le costanti
iniziali

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

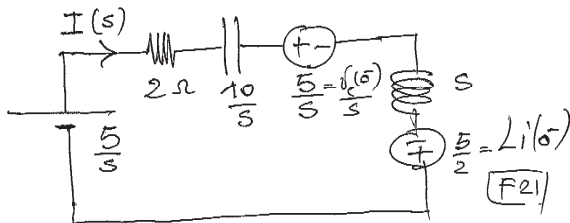
$$i(0^+) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -5$$

- imponendo le condizioni iniziali ottengo $A = 5/2$ e $B = -5/6$.
- Riassumendo

$$i(t) = \frac{5}{2}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0.$$

- *Dominio di Laplace*: tenendo conto delle condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato otteniamo il circuito simbolico che segue



- dalla KV si ha

$$\frac{5}{s} = 2I(s) + \frac{10}{s}I(s) + \frac{5}{s} + sI(s) - \frac{5}{2}$$

da cui

$$I(s) = \frac{5}{2} \frac{s}{s^2 + 2s + 10}$$

poli coincidenti alle
frequenze naturali.
Risposta pulita

- i poli di $I(s)$ sono $s_{1,2} = -1 \pm j3$ rad/sec e coincidono con le frequenze naturali del circuito

- per antitrasformare scomponiamo $I(s)$ in fratti semplici

$$I(s) = \frac{K}{s - (-1 + j3)} + \frac{K^*}{s - (-1 - j3)} \quad \begin{array}{l} \frac{5}{2} \frac{s}{s+2} \\ \approx \frac{\frac{5}{2}s}{2(-1+j3)+2} \end{array}$$

con

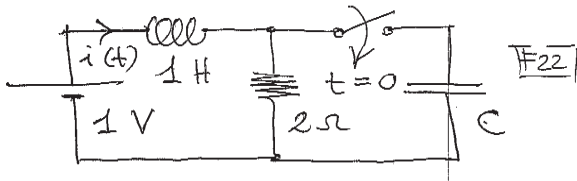
$$K = \lim_{s \rightarrow -1+j3} (s - (-1 + j3)) I(s) = \frac{5}{12}(3 + j)$$

- allora

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1+j3)t}u(t) + \frac{5}{12}(3 - j)e^{(-1-j3)t}u(t) \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1+j3)t}\right]u(t) \\ &= \frac{5}{6}e^{-t}\operatorname{Re}[(3 + j)(\cos(3t) + j\sin(3t))]u(t) \\ &= \frac{5}{2}e^{-t}\cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t}\sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Esempio. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, per $t \geq 0$, con una analisi del DT.

Verificare il risultato a partire da $t = 0^-$ con il metodo simbolico di Laplace. Per $t > 0$ la pulsazione di risonanza e' pari a 2 volte il fattore di smorzamento. Il condensatore e' scarico a $t = 0^-$



- DT: per $t > 0$, *in evoluzione libera*, si tratta di un circuito RLC parallelo; allora per le prime di che circuito di RLC, abbiamo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{C}} = 2\alpha_p = 2\frac{G_p}{2C} = 2\frac{1}{2} \frac{1}{2C}$$

quindi $\sqrt{C} = 1/2$ e $C = \boxed{1/4 \text{ F}}$ o caratterizzare il circuito

- inoltre

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} = 1 \text{ rad/sec}; \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

perché?
volendo in
evoluzione
libera, cioè
superare il
pennatore

- per $t > 0$ le frequenze naturali sono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ rad/sec
 - si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$, con $i_{\text{reg.staz.}}(t) = 1/2 \text{ A}$; *questo valore*
- allora

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$

ritornando a 0^-

- analisi a $t = 0^-$; si ha $i(0^-) = 1/2 \text{ A}$, $v_C(0^-) = 0 \text{ V}$, quindi, dato che il circuito e' non degenero

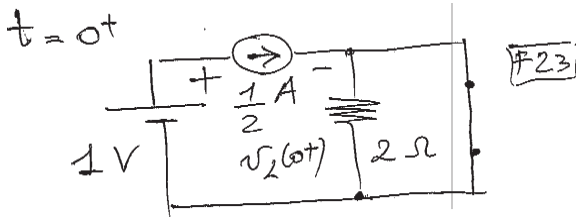
$$i(0^+) = i(0^-) = 1/2 \text{ A}; \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

soluzione generale $\frac{di}{dt}$ che e' la tensione sull'induttore

- a $t = 0^+$ otteniamo

$$v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{di(0^+)}{dt} = 1 \text{ V}$$

e ora quella sul generatore di corrente



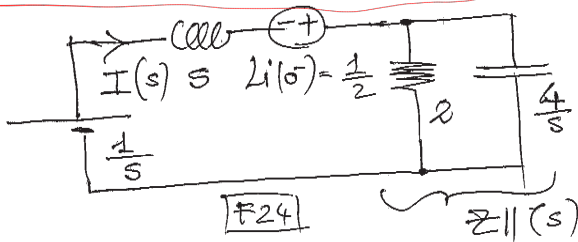
- quindi dobbiamo risolvere

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \\ i(0^+) &= \frac{1}{2} \\ \frac{di(0^+)}{dt} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

da cui ottengo $A = 0$ e $B = \sqrt{3}/3$, quindi *nel dominio del tempo*

$$i(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}, \quad A; \quad t \geq 0.$$

DL: il circuito simbolico e' rappresentato in figura



- si ha $Z_{||}(s) = 2 \parallel (4/s) = 4/(s+2)$ Ohm, quindi KV implica

$$\frac{1}{s} = sI(s) - \frac{1}{2} + \frac{4}{s+2}I(s)$$

- risolvendo si ottiene

$$I(s) = \frac{1}{2s} \frac{s^2 + 4s + 4}{s^2 + 2s + 4} \quad \text{po in 0}$$

i cui poli sono $s = 0$, $s = -1 \pm j\sqrt{3}$; quindi

$$I(s) = \frac{K}{s} + \frac{H}{s - (-1 + j\sqrt{3})} + \frac{H^*}{s - (-1 - j\sqrt{3})}$$

teorema del valore
finale

• si ha

$$\left\{ K = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \frac{1}{2}; H = \lim_{s \rightarrow -1+j\sqrt{3}} (s - (-1+j\sqrt{3}))I(s) = \frac{1}{j2\sqrt{3}} \right\}$$

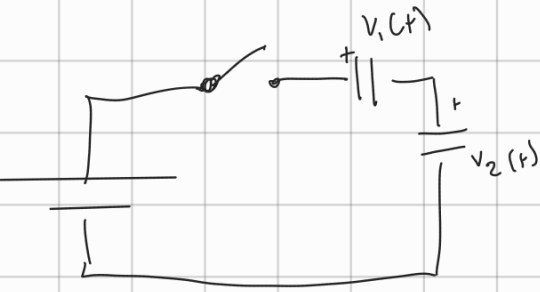
e quindi

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{j2\sqrt{3}}e^{(-1+j\sqrt{3})t}u(t) + \frac{1}{-j2\sqrt{3}}e^{(-1-j\sqrt{3})t}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t} \frac{e^{j\sqrt{3}t} - e^{-j\sqrt{3}t}}{j2} u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)u(t), \quad A. \end{aligned}$$

alzo esercizio

"partitore capacitivo"

analisi elementare di circuito deve essere
 la stessa tensione che emerge come quella
 della batteria



C_1 e C_2 scarichi a $t=0^-$ tensione costante a $t=0^+$
 non fossero separati; rimarrebbero entrambi scarichi

$$t=0^+ \quad V_1(0^+) + V_2(0^+) = E$$

$$i_1(t) = i_2(t) = i(t) \quad \text{una maglia.}$$

$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} = i_2(t) = C_2 \frac{dV_2(t)}{dt}$$

Integro... Analisi all'istante critico

$$\int_{0^-}^{0^+} C_1 \frac{dV_1(t)}{dt} dt = \int_{0^-}^{0^+} C_2 \frac{dV_2(t)}{dt} dt$$

$$C_1 [V_1(0^+) - \underbrace{V_1(0^-)}_{0}] = C_2 [V_2(0^+) - \underbrace{V_2(0^-)}_{0}]$$

eq. in due incognite

$$\begin{cases} C_1 V_1(0^+) = C_2 V_2(0^+) \\ V_1(0^+) + V_2(0^+) = E \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{V_1(0^+) = E - V_2(0^+)}}$$

$$V_2(0^+) = \frac{E \cdot C_1}{C_1 + C_2}$$

$$V_1(0^+) = \frac{E \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Regole Partitore Capacitivo
 Reti separati, non connesse

usare le variabili: si-
stato

•