

Vedi da Sos. 10 per appunti

Potenza in regime sinusoidale

Mauro Forti

October 21, 2020

Potenza in regime sinusoidale

- Valore efficace di una grandezza sinusoidale
- Data $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$, il suo valore quadratico medio e'

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = V_M^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{V_M^2}{2}$$

dove la media e' calcolata sul periodo $T = 2\pi/\omega$ della sinusoide

- il valore efficace ('root mean square (rms)') e' definito come

$$V_{\text{rms}} = V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 V_M$$

- e' utile per esprimere potenze in regime sinusoidale
- se $V_M = 310 \text{ V}$ si ha $V = 220 \text{ V}$

Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C

• Resistore Ideale

- Consideriamo un resistore ideale R soggetto a $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e quindi attraversato da $i(t) = V_M \cos(\omega t)/R$
- la potenza istantanea assorbita in regime sinusoidale in Watt e'

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \geq 0$$

- consideriamo adesso la *potenza media assorbita da R in un periodo T*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

quindi

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{V^2}{R} = R I^2 = V I > 0$$

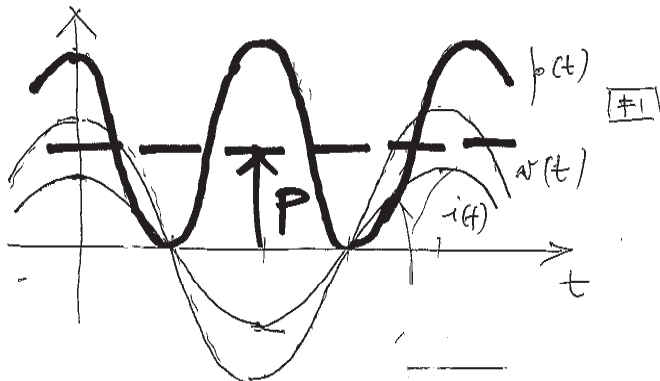
- la quantità P e' detta *potenza attiva e si misura in Watt*

- si ha

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt = E = \text{energia in Joule}$$

- quindi E in Joule e' l'energia elettrica assorbita dal resistore in un periodo; tale energia e' trasformata in altre forme di energia dal resistore (ad esempio, calore, luce, etc.)
- se conosco la potenza attiva posso trovare quindi l'energia elettrica trasferita al bipolo in modo irreversibile; la potenza attiva viene anche detta potenza reale o potenza utilizzata
- consideriamo ad esempio una stufa da 1 kW alimentata alla frequenza $f = 50$ Hz. Il periodo e' $T = 20$ msec. L'energia assorbita dalla stufa e trasformata integralmente in calore in un periodo a' pari a $1000 \times 20 \times 10^{-3} = 20$ Joule. L'energia assorbita in un secondo vale $50 \times 20 = 1000$ joule e quella assorbita in un'ora e' $3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6$ Joule, che corrisponde per definizione a 1 kWh (chilowattora)

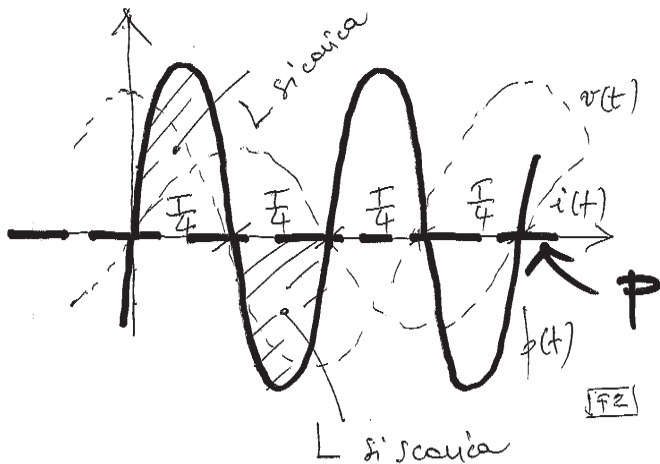
- la figura che segue riporta i diagrammi di $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ e la quantità P .



- **Induttore ideale**

- Sia ancora $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che
 $i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{V_M^2}{2\omega L} \sin(2\omega t) \text{ W}$$



after pause

Induttore ideale, conservativo

L ideale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

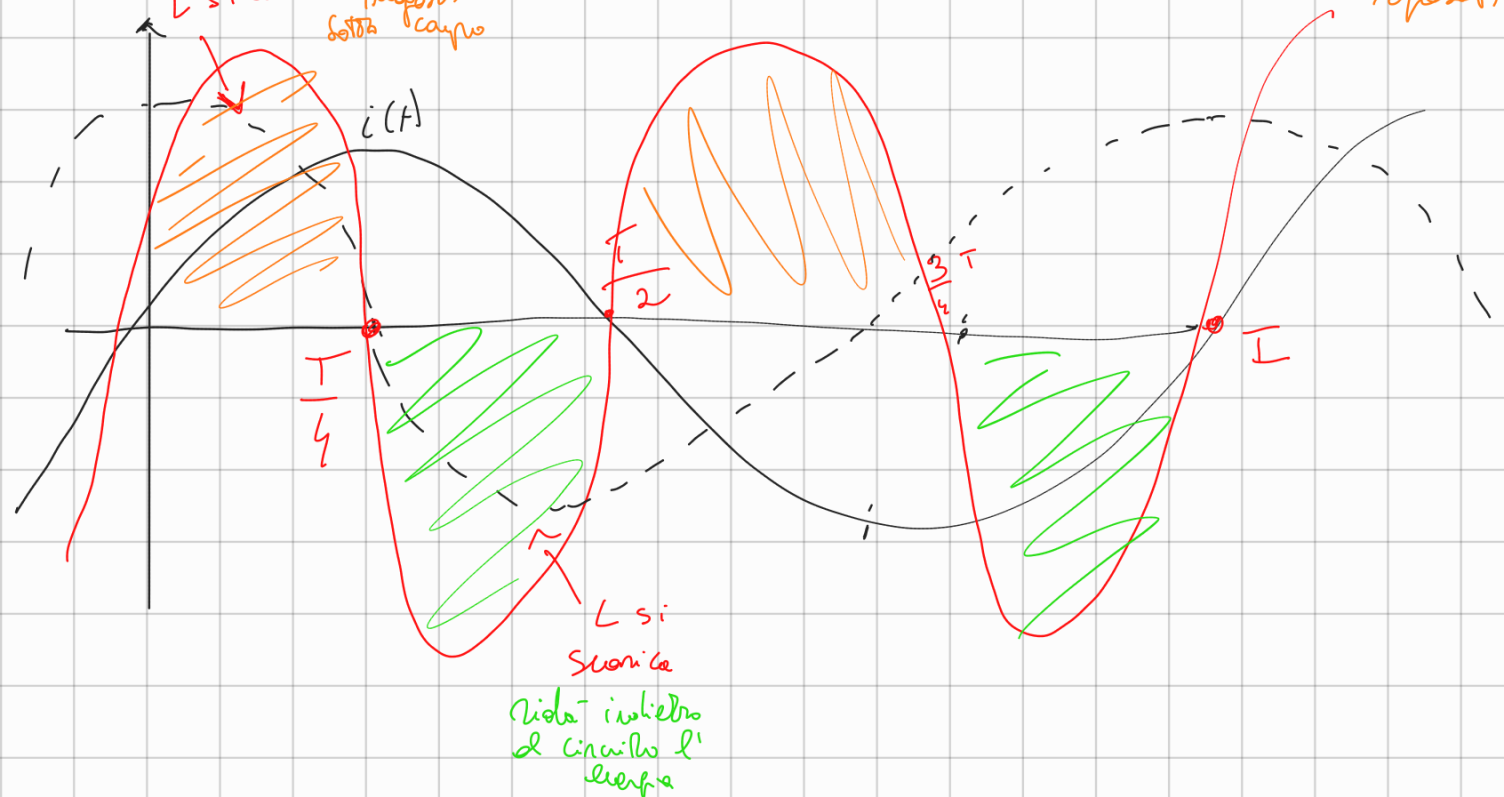
$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} \sin(2\omega t) \neq 0$$

applico tensione tipo coseno

L si carica immaginando sotto campo

picchi di tensione o corrente sfasati.



Valore medio della potenza è 0

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ watt}$$

"galleggia"
energia

Potenza attiva 0 W

Scambio REVERSIBILE di energia a media nulla su T fra generatore e campo magnetico
 l'energia scambiata però va misurata

- La potenza REATTIVA di L

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \text{ VAR}$$

" misura convenzionale dello scambio reversibile "

Var = Volt - ampere Reattivi

Più scalo e più

aumenta corrente nel circuito

Cioè trattasi di potenza scambiata ma NON utilizzata

VAR = potenza scambiata reversibilmente
 WATT = pot scambiata irreversibilmente

$$Q = 2\omega \bar{E}_L^{\text{media}}$$

← energia media su un periodo

$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \text{ VAR}$$

$$\bar{E}_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i^2(t) dt = \text{Sostituisco}$$

$$= \frac{1}{2} L \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt = \boxed{\frac{1}{4} L I_m^2} \quad \checkmark$$

La potenza reattiva ^{imp} è l'energia reattiva in un periodo, e dipende da ω

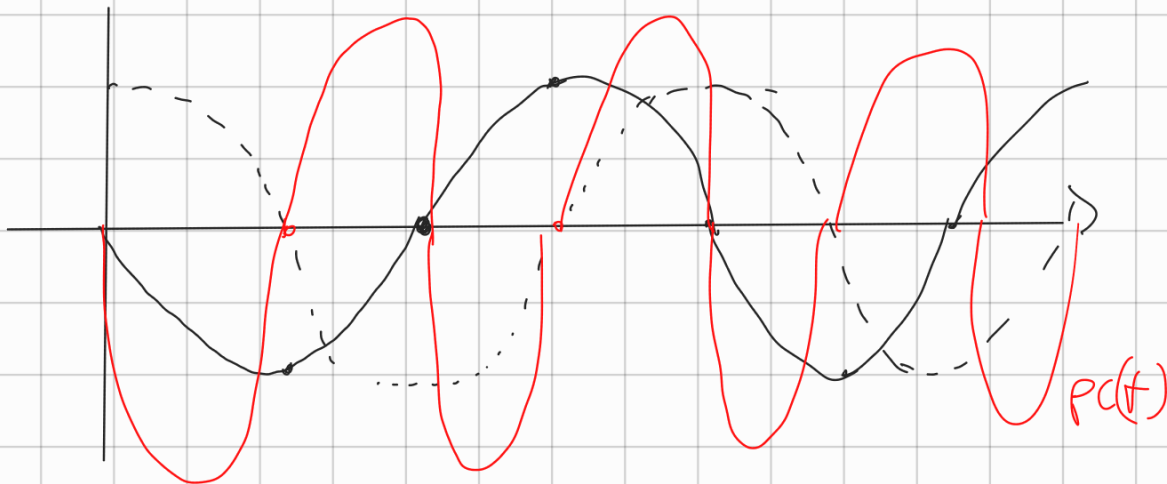
• C ideale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) \\ = -\omega C V_M \sin(\omega t)$$

$$p_c(t) = v(t) i(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t)$$

VIA
O



$$P_e = 0 \text{ W}$$

L e C Scambiano energia con generatore
con **Fasi spostate**

Se il condensatore si scarica, l'induzione Φ usa per creare un campo magnetico

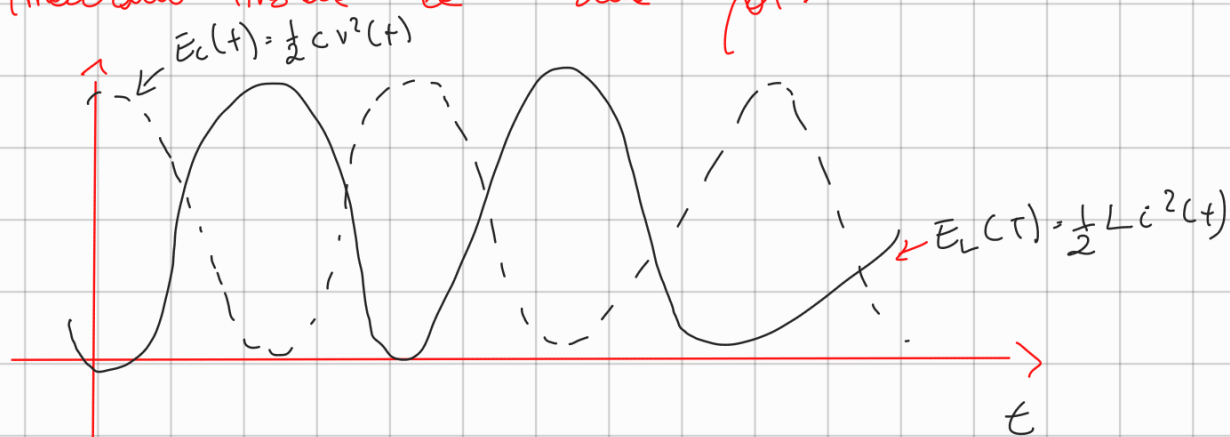
Se c'è un circuito, l'induzione ha bisogno di potenza induttiva, e la prende da condensatori e/o da generatori. I condensatori sono sorgenti di energia, di potenza reattiva

$$P_c = 0 \text{ W}$$

$$Q_C = \frac{1}{2} V_M I_M \text{ VAR}$$

- convenzionalmente vediamo il condensatore come sorgente di potenza reattiva
- convenzionalmente C ha potenza reattiva negativa, ...
e' una sorgente di potenza reattiva

mettiamo insieme le due pot.



anche per un condensatore vale

$$Q_C = -2\omega E_C \text{ media}$$

l'energia e' sempre positiva,
il - dipende dal fatto che Q_C e'
negativa

// Se dove esserci un trasferimento di energia in
altre forme dove per farcela esserci un'azione
perde induttore e condensatore si "alleggeriano"
energia.

- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ l'induttore assorbe energia ($p(t) \geq 0$) ma nel secondo quarto dà indietro tutta l'energia assorbita nel primo quarto ($p(t) \leq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- la potenza attiva assorbita da L vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M^2}{2\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta L e campo magnetico di L ; tecnicamente è importante misurare tale scambio energetico; ciò viene fatto introducendo la *potenza reattiva* dell'induttore

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M = VI = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi)

Recap

$$p(t) = v(t) i(t) \quad \checkmark \quad \text{pot. istantanea}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \checkmark \quad \text{Pot Attiva} = \text{potenza media in un periodo}$$

/ Pot. reale

se la moltiplico per un periodo T , ottengo un'energia, o. l'energia assorbita dal resistore in un periodo, e'

Pot attiva, energia elettrica trasformata in altro tipo di energia

Induttore: ^{non assorbe energia} pot. attiva nulla, palleggia energia al generatore

Potenza Reattiva = potenza scambiata reversibilmente
proporzionale al ω

Condensatore: duale. $\text{Pot. attiva} = 0$
Pot. reattiva, convenzionalmente negativa
come se fosse sorgente

Se considero e induttore insieme, si palleggiano energia

- si può mostrare che

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$$

dove

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt$$

è l'energia media del campo magnetico di L ; quindi Q_L è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} E_L^{\text{media}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{4} LI_M^2 \text{ Joule} \end{aligned}$$

mentre, come visto, $Q_L = \frac{1}{2} \omega LI_M^2$.

- possiamo pensare a Q_L come una misura convenzionale della potenza che si deve impegnare per creare il campo magnetico dell'induttore

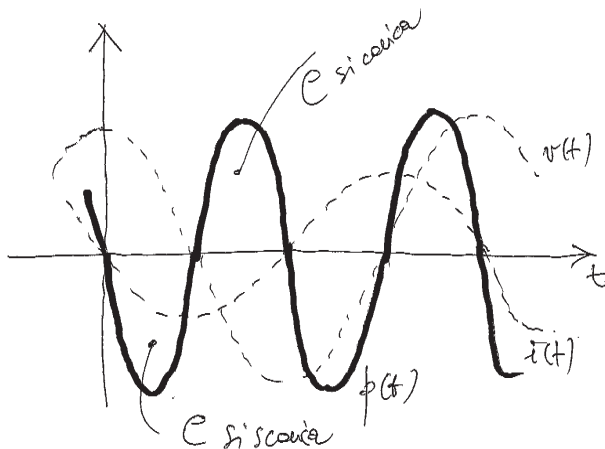
- **Condensatore ideale**

- Vale una trattazione duale rispetto a quella dell'induttore. Sia

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che

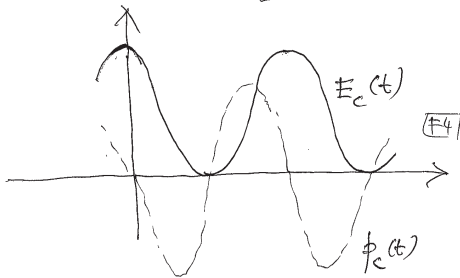
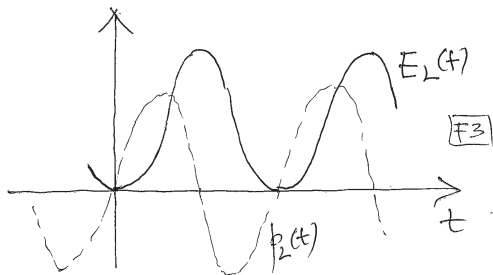
$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_M \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t) \text{ W}$$



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ il condensatore eroga energia ($p(t) \leq 0$) mentre nel secondo quarto assorbe una quantità di energia pari a quella erogata nel primo quarto ($p(t) \geq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- notare che L e C scambiano energia con il generatore con fasi esattamente opposte

- cio' e' confermato dai diagrammi che seguono che mostrano la potenza istantanea assorbita da L ($p_L(t)$), quella assorbita da C ($p_C(t)$) e l'energia $E_L(t)$ e $E_C(t)$



- la potenza attiva assorbita da C vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi e' uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta C e campo elettrico di C ; tale scambio energetico viene misurato convenzionalmente con la *potenza reattiva* del condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -VI = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unita' di misura i VAR (volt-ampere reattivi)
- notare che si attribuisce convenzionalmente segno negativo a Q_C ; in effetti in un circuito gli induttori hanno bisogno di impegnare (assorbire) potenza reattiva per creare il loro campo magnetico, mentre i condensatori funzionano da sorgenti (erogano) potenza reattiva

- si ha

$$Q_C = -2\omega E_C^{\text{media}}$$

dove

$$E_C^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \quad \text{Joule}$$

e' l'energia media del campo elettrico di C ; quindi Q_C e' proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo elettrico in T e dipende anche dalla velocita' con cui tale scambio avviene.

Potenza in regime sinusoidale per un bipolo generico

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{W} \quad \text{Pot. istantanea}$$

Pot. attiva $\equiv$ Potenza media su un periodo T della sinusoidale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{W} \quad P \cdot T = \int_0^T p(t) dt \quad \text{Joule}$$

Se in un periodo assorbe 1 Joule,
in 10 periodi... 10 Joule

Energia assorbita dal Bipolo
in un intervallo T

$\rightarrow$ energia UTILIZZATA e trasformata in altre forme di
 $\uparrow$ TRASFERIMENTO IRREVERSIBILE energia (calore, energ. luminosa, meccanica)

SINONIMI di Pot ATTIVA $\Rightarrow$ Pot. MEDIA / Pot REALE

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Componente resistiva

Fosse solo un resistore
ci sarebbe solo

$\vec{I}_a$

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi} \vec{v} \quad \text{Fase } \emptyset$$

parte reale ipso. positiva

Bipolo attivo - induttivo
anche parte imag.



PROIETTO

Componente
reattiva

in media essa non trasporta energia

$$P = P_a + P_r =$$

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$$

$$i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) \\ = I_{rM} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt$$

P_a = Potenza attiva Proporzionale alla componente di corrente in fase
con la Tensione

P_r = Potenza attiva Proporzionale alla componente in quadratura

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{aM} + \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) dt$$

valore efficace

$$= P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0$$

V in fase / I in fase

W

Componente in
fase

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt = 0$$

Indipendentemente dalla sua apertura, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva (almeno in media) quindi

I_r = corrente reattiva oriosa / suattiva

$$P_r = 0 \text{ Watt}$$

I_r corrisponde ad uno scambio reversibile tra conduttori, induttori e generatori nel dipolo

MISURA CONVENZIONALE SCAMBIO REVERSIBILE di

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_{r,m} = V I_r$$

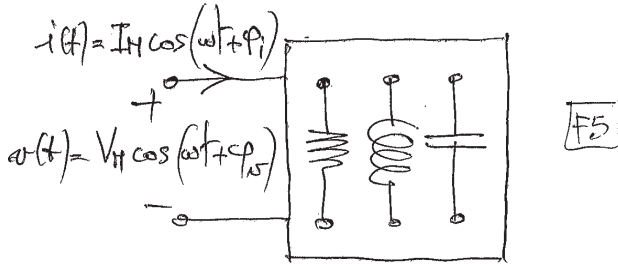
energia a media nulla
su T fra generatore
e campi magnetici del
dipolo

$$[Q] = \text{VAR}$$

Volts-ampere
reattivi

energia scambiata ma
non utilizzata

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente coordinata secondo la convenzione degli utilizzatori; vogliamo studiare la potenza in regime sinusoidale che viene assorbita dal bipolo



- la *potenza istantanea assorbita dal bipolo in regime sinusoidale* vale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \quad W$$

- siamo interessati alla *potenza media* su un periodo $T = 2\pi/\omega$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

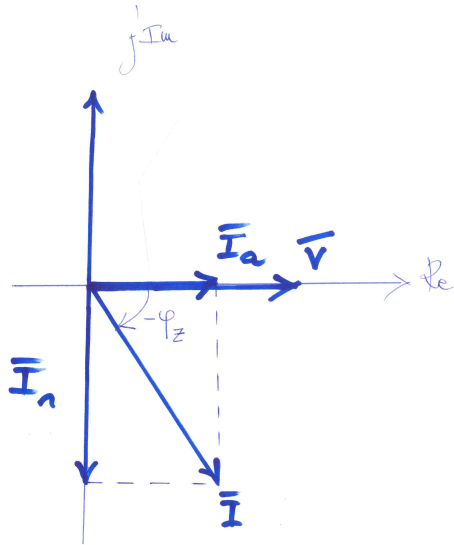
- la *potenza media*, misurata in Watt, e' detta anche *potenza attiva* o *potenza reale* e ha, come per il resistore, un importante significato fisico; infatti

$$PT = \int_0^T p(t) dt = E$$

dove E e' l'energia elettrica in Joule che viene trasferita irreversibilmente e assorbita dal bipolo in un periodo T ; se conosciamo la *potenza attiva* siamo quindi capaci di trovare l'energia utilizzata dal bipolo in T , energia che viene trasformata in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)

Espressione della potenza attiva e reattiva di un bipolo generico

- Consideriamo un bipolo di tipo ohmico-induttivo di impedenza $\bar{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$. Applichiamo $v(t) = V_M \cos(\omega t)$, quindi $\bar{V} = V_M$ e' un vettore diretto lungo l'asse orizzontale. Come noto la corrente $\bar{I}$ e' in ritardo di un angolo $-\varphi_Z$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione
- proiettiamo $\bar{I}$ lungo una direzione parallela a $\bar{V}$ e una direzione ortogonale a $\bar{V}$. Otteniamo $\bar{I}_a$, detta componente di $\bar{I}$ in fase con $\bar{V}$ (o *componente attiva della corrente*), e $\bar{I}_r$, detta componente di $\bar{I}$ ortogonale a $\bar{V}$, o in ritardo rispetto a $\bar{V}$ di $\pi/2$ (o *componente reattiva della corrente*)



- si ha $\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_r$ e quindi $i(t) = i_a(t) + i_r(t)$, dove $i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$ and $i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) = I_{rM} \sin(\omega t)$
- si ha inoltre

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = P_a + P_r \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_r(t)dt \end{aligned}$$

dove P_a e' la potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione e P_r e' la potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura

- valutiamo P_a ; si ha

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_M I_{aM} + \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) \right] dt \end{aligned}$$

- quindi

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0 \quad W$$

- quindi *la componente attiva della corrente trasporta potenza attiva (e quindi energia utile al carico)*
- valutiamo adesso P_r ; si ha

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{rM} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{rM} \sin(2\omega t) dt \end{aligned}$$

quindi

$$P_r = 0 \quad W$$

- *indipendentemente dalla sua ampiezza, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva al carico; quindi ad essa non e' associato un trasferimento di energia utile al carico*

- la componente reattiva della corrente e' detta anche *corrente oziosa* o *corrente swattata*
- da un punto di vista fisico la corrente reattiva modella uno scambio reversibile di energia, a media nulla su un periodo, fra generatore che alimenta il bipolo e campi elettrici e magnetici all'interno del bipolo (vedremo meglio con teorema di Boucherot)
- come misura convenzionale di tale scambio reversibile a media nulla si introduce la *potenza reattiva*

$$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r > 0 \quad \text{VAR}$$

- la potenza reattiva corrisponde a *potenza scambiata ma non utilizzata*; per tale motivo Q viene misurata in VAR
- la trattazione nel caso ohmico capacitivo e' analoga; si attribuisce pero' segno negativo alla potenza reattiva, cioe'

$$Q_r = -\frac{1}{2} V_M I_{rM} = -V I_r < 0 \quad \text{VAR}$$

Conclusione

- Lo stato relativo al trasferimento energetico in regime sinusoidale verso il bipolo consta di due contributi:

1) Trasferimento irreversibile di energia elettrica (energia utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza attiva

$\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$
sfasamento
trasmissione corrente

$$P = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a = V I \cos(\varphi_z) = V I \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad W$$

2) vi è sovrapposto uno scambio reversibile di energia elettrica a media nulla su un periodo (energia scambiata ma non utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza reattiva

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r = V I \sin(\varphi_z) = V I \sin(\varphi_v - \varphi_i) \quad VAR$$

quando corrente è quasi in fase con tensione, ho molta
potenza attiva e poca potenza reattiva
al contrario se non sono in fase ho molta
potenza reattiva

Potenza apparente : Tiene conto di potenza attiva e reattiva

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = V I$$

val. $\cdot I$ efficace

$[A] = \text{Volt-ampere VA}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$P^2 + Q^2 = \left(\frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_z) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} V_M I_M \sin(\varphi_z) \right)^2$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{VA}$$

← Condizioni della Sire

$$P = A \cos(\varphi_z)$$

$$Q = A \sin(\varphi_z)$$

$$P > 0 \quad |Q| > 0$$

$$A > P, |Q|$$

- Si introduce la *potenza apparente*

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = VI \quad \text{VA}$$

che si misura convenzionalmente in volt-ampere (VA)

- si ha

$$P = A \cos(\varphi_z), Q = A \sin(\varphi_z)$$

e

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

cioe' la potenza apparente e' una combinazione di potenza attiva e reattiva

- notare che se $P, Q \neq 0$ allora si $A > P, Q$

Espressioni della potenza istantanea

altre espressioni per la pot. istantanea

- Si ha

$$\begin{aligned}
 p(t) = v(t)i(t) &= V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_i)$ $\frac{1}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_i)$
 termine costante $+\frac{1}{2} \cos(\varphi_v + \varphi_i)$ $\frac{1}{2} \cos(\varphi_v + \varphi_i)$
 parte variabile della pot. istantanea, pot. Apparente

e quindi

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

- $p(t)$ ha un termine costante P pari alla potenza attiva e un termine variabile a pulsazione 2ω con ampiezza pari alla potenza apparente
- il termine variabile della potenza istantanea può causare problemi; p. es. un alternatore richiede una coppia pulsante per funzionare a frequenza costante; inoltre, lo stesso termine origina vibrazioni meccaniche indesiderabili

- **Esempio** Consideriamo un bipolo dato da L in serie R

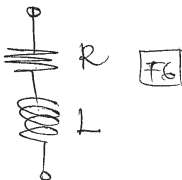
Esercizio
simpatico

tipo motore, c'è una variazione
e induttore. Resistenza p_{ATTIVA}
e ha bisogno di un campo magnetico

$$P_R > 0$$

$$Q_L > 0$$

$$A = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2} > P_R, Q_L$$



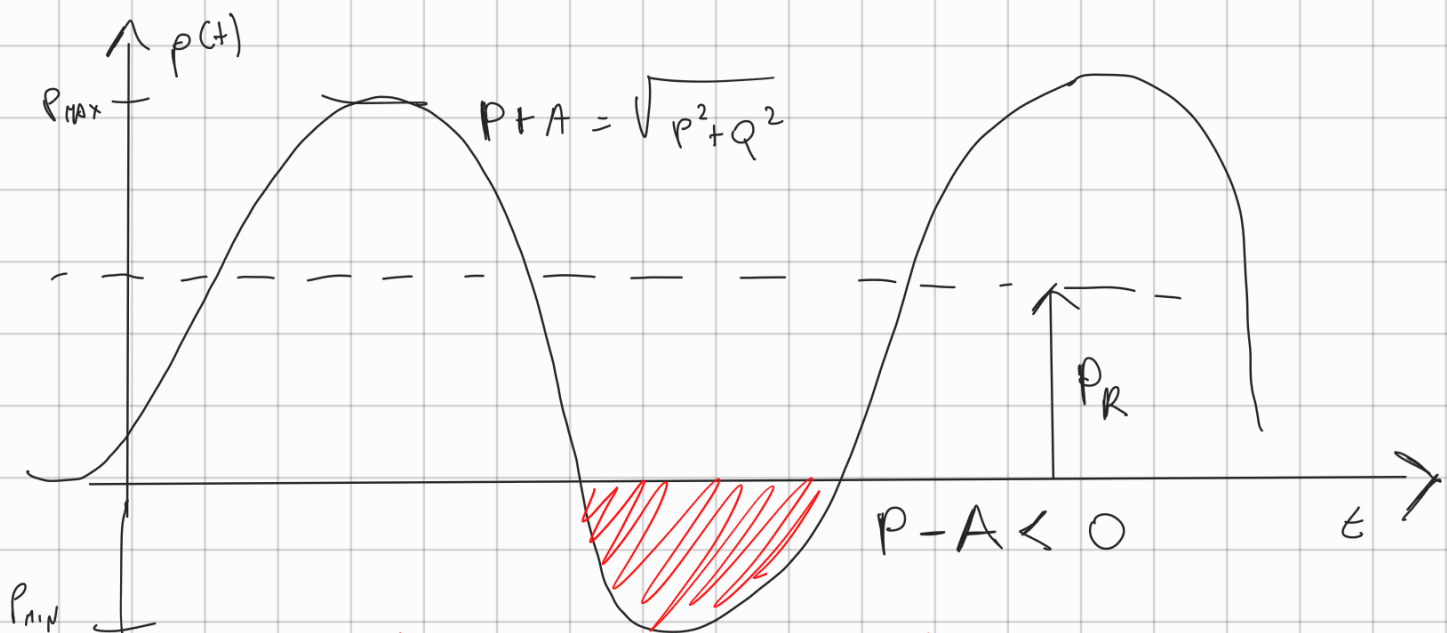
- in questo caso $P = P_R > 0$, $Q = Q_L > 0$ e $A > P, Q$;
l'andamento qualitativo della potenza istantanea $p(t)$ e' riportato in figura
- si noti che $p(t)$ varia fra un massimo

$$p_{\max} = P + A = P + \sqrt{P^2 + Q^2} \quad W$$

e un minimo

$$p_{\min} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0 \quad W$$

- ci sono intervalli di tempo in cui $p(t) < 0$; interpretare fisicamente cosa accade in tali intervalli



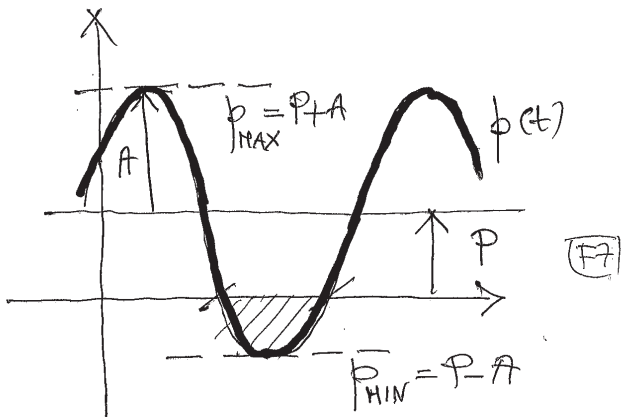
c'è sempre un intervallo in cui la potenza ritorna obliquo al generatore, c'è potenza reattiva

Il picco della potenza istantanea, $P_{MAX} = P + A$

Se aumenta la potenza reattiva, Q aumenta, il picco è più grande.

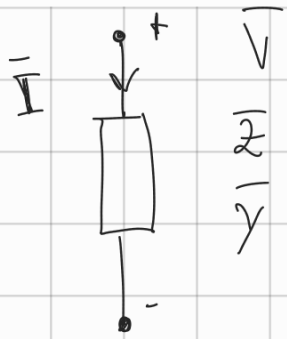
Carichi molto reattivi, rimangono molto vicino la potenza.

Grande potenza reattiva, cresce comunque di poco



Espressioni della potenza attiva e reattiva

usando i fasori



$$\bar{z} = R + jX \quad \text{impedenza}$$

$$\bar{y} = G + jB \quad \text{ammettenza}$$

$$I_m e^{j\varphi_i} = \bar{I}$$

$$V_m e^{j\varphi_v} = \bar{V}$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_z)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{I}^*]$$

con i angoli
del fasore
della corrente

le potenze sono dei numeri reali
ma i complessi non si può fare
 $\bar{V} \bar{I}$, ma $\bar{V} \bar{I}^*$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{z}] I_m^2$$

$$= \frac{1}{2} R I_m^2 \quad \text{Watt}$$

↳ parte reale impedenza
del dipolo

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{y}] V_m^2 \quad \text{Watt}$$

↑
ammettenza

Verifica Formula

$$\frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} V_m e^{j\varphi_v} I_m e^{j\varphi_i}$$

con i angoli
con $j\varphi_i$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

uso ora Formula
eulero

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{z} \bar{I} \bar{I}^*]$$

numero complesso · coniugato =
campione al quadrato

$$= \frac{1}{2} I_m^2 \operatorname{Re} [\bar{z}]$$

Per ammettenza

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} (\bar{V} \bar{y})^*]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{V}^* \bar{y}^*]$$

↑
 V_m^2

$$= \frac{1}{2} V_m^2 \operatorname{Re} [\bar{y}^*] \quad \checkmark$$

- Consideriamo un bipolo di impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e ammettenza $\bar{Y} = G + jB$. Siano $\bar{V}$ e $\bar{I}$ i fasori di tensione e corrente coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori. La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere espressa in una delle seguenti forme equivalenti

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 \end{aligned}$$

- verifica: si ha

$$\bar{V} \bar{I}^* = V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_M I_M e^{j\varphi_z}$$

- inoltre

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z} \bar{I} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} I_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Z}]$$

e

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} (\bar{Y} \bar{V})^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Y}^*]$$

- analogamente, per la potenza reattiva assorbita dal bipolo si ha

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} V_M I_M \sin \varphi_z = \frac{1}{2} \text{Im}[\bar{V} \bar{I}^*] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Im}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 \\
 &= \underbrace{-\frac{1}{2} \text{Im}[\bar{Y}]}_B V_M^2 = -\frac{1}{2} B V_M^2
 \end{aligned}$$

*le parti
 immaginarie e di
 conduttanza e impedenza
 sono
 opposte*

dove l'asterisco denota il complesso coniugato

Potenza Complessa

- Definiamo la potenza complessa

Potenza complessa sul
numero Biele

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \quad \text{VA} \quad \text{volt-Aspre}$$

- si ha

$$\bar{P} = P + jQ$$

Parte reale = Potenza attiva
Parte imm = Pot. reattiva

- inoltre *le sono in forma esponenziale*

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

e quindi

$$\bar{P} = A e^{j\varphi_z} \quad \text{VA}$$

pot. apparente
argomento impedenza

in un colpo solo ha
tutto

- riassumendo: la potenza complessa ha come parte reale la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva; ha come modulo la potenza apparente e come argomento l'argomento dell'impedenza

Piano complesso come Piano delle potenze complessive

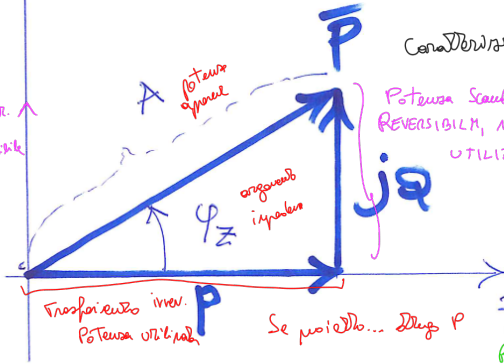
Potenza
Reattiva

jQ
(VAR)

lo usiamo per fare bilanci
della potenza

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

pot. scambiata
in modo
reversibile



Considerando complessando
il trasferimento di
energia in regime
sinusoidale

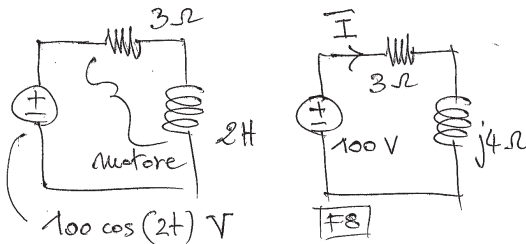
Potenza Scambiata
REVERSIBILI, NON
UTILIZZATA

Se possibile... lungo P

P (W)
potenza attiva

- il trasferimento di potenza in regime sinusoidale può essere caratterizzato in modo completo riportando nel piano complesso $\bar{P}$, P , Q , A e φ_z . Otteniamo così il triangolo delle potenze (che è simile a quello delle impedenze)
- in questo contesto il piano complesso è inteso come piano delle potenze. La potenza attiva P (Watt) è sull'asse reale e rappresenta una cessione irreversibile di energia al carico; la potenza reattiva Q (VAR) è sull'asse immaginario e rappresenta uno scambio reversibile di energia con i campi elettrici e magnetici del carico
- ricordiamoci anche che la potenza attiva è il tramite con cui si trasforma energia elettrica in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)
- si noti in particolare che il triangolo rettangolo P, Q, A rappresenta geometricamente la nota relazione $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Esempio. Determinare la potenza istantanea, attiva e reattiva fornita dal generatore al motore.



- Consideriamo il circuito simbolico per il quale si ha

$$P = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

- si ha

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = 12 - j16 \text{ A}$$

quindi

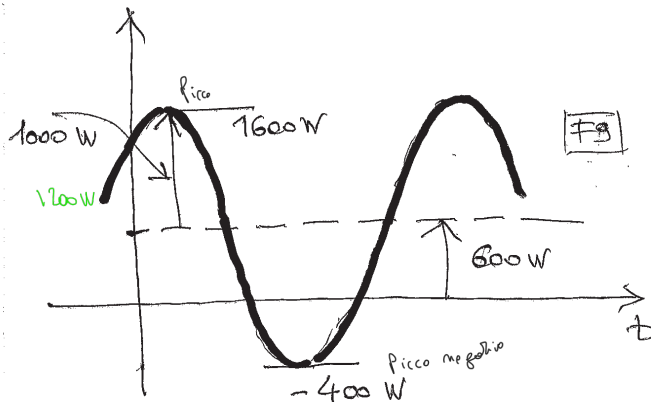
$$P = \frac{1}{2} 100(12 + j16) = 600 + j800 \text{ VA}$$

- allora $P = 600 \text{ W}$, $Q = 800 \text{ VAR}$
- si ha inoltre $A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA}$ e
 $\varphi_z = \arctan(4/3) \simeq 53^\circ$; allora

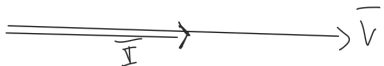
$$\psi = \varphi_v - \varphi_z$$

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v^0 + \varphi_z) = 600 + 1000 \cos(4t - 53^\circ) \text{ W}$$

- notare che $p(t)$ varia fra un massimo $p_{\max} = P + A = 1600 \text{ W}$ e un minimo $p_{\min} = P - A = -400 \text{ W}$.



Potenza complessa degli elementi fondamentali



$$\bar{P}_R = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P_R + jQ_R = \frac{1}{2} R \bar{I} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R I_m^2 + j\phi$$

Resistenza puramente
reattiva

$$P_R = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} G V_m^2 = R I^2 = G V^2 \text{ W}$$

$$Q_R = 0 \text{ VAR}$$

- Resistore ideale
- si ha

$$\bar{P}_R = P_R + jQ_R = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R \bar{I} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R I_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_R = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 = R I^2 = G V^2 \quad \text{W}$$

e

$$Q_R = 0 \quad \text{VAR}$$

- un resistore ideale assorbe solo potenza attiva, mentre la potenza reattiva impegnata e' nulla (non vi e' energia scambiata)

Induttore

$\bar{V}$

$$\bar{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} j\omega L \bar{I} \bar{I}^* = 0 + \frac{1}{2} j\omega L I_M^2$$

$$\Rightarrow P_L = 0 \text{ W}$$

$$Q_L = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} X_L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{X_L} = \frac{V^2}{X_L} \quad \text{VAR}$$

- Induttore ideale
- si ha

$$\bar{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} j \omega L \bar{I} \bar{I}^* = j \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \quad VA$$

quindi

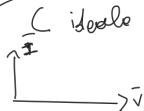
$$P_L = 0 \quad W$$

e

$$Q_L = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad VAR$$

- un induttore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

coning mod = mod coning



$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P_c + jQ_c = \frac{1}{2} \bar{V} (j \omega C \bar{V})^* = \frac{1}{2} \bar{V} \omega C (-j) \bar{V}^* = \\ &= -j \frac{1}{2} \omega C V_M^2 \end{aligned}$$

$$P_c = 0 \quad W$$

$$Q_c = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = \dots = \frac{-V^2}{X_c} = \text{v. eff.}^2 \quad \text{Condensatore e' sorgente di pot. reattiva}$$

- Condensatore ideale
- si ha

Es. se ho gen. ideale può erogare qualsiasi P e Q

$$\bar{P}_C = P_C + jQ_C = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{V} (j\omega C \bar{V})^* = -j \frac{1}{2} \omega C V_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_C = 0 \quad \text{W}$$

e

$$Q_C = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{I_M^2}{\omega C} = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \quad \text{VAR}$$

- un condensatore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

- mettiamo anche in evidenza che un induttore ha una potenza reattiva positiva. *richiamata per generare il campo magnetico* Tale potenza e' impegnata per creare il campo magnetico dell'induttore
- invece un condensatore ha una potenza reattiva negativa, e' cioe' una sorgente di potenza reattiva (una sorgente di potenza magnetizzante)
- quando L e C sono presenti in uno stesso circuito, la potenza reattiva necessaria a L puo' essere in parte, o completamente, fornita da C ; discuteremo ulteriormente questo fatto in relazione al problema del rifasamento di carichi industriali

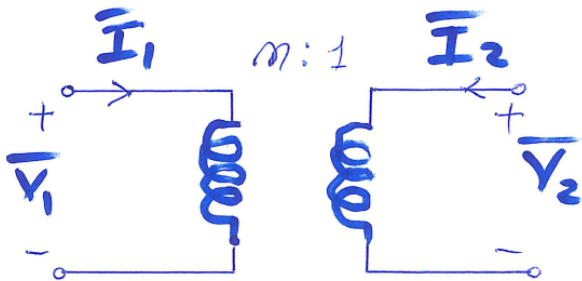
- Trasformatore ideale *Spina di Trasparenza alla potenza inalterata*
- consideriamo un trasformatore ideale e cioè, una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = nv_2(t)$$

e

$$i_1(t) = -\frac{1}{n}i_2(t)$$

dove $n = N_1/N_2$ e' il rapporto di trasformazione (N_1 e N_2 sono le spire del primo e secondo avvolgimento)



- sappiamo che $p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t)(-\frac{1}{n}i_2(t)) + v_2(t)i_2(t) = 0$ per ogni t , quindi il trasformatore ideale e' trasparente alla potenza istantanea

- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = n\bar{V}_2, \bar{I}_1 = -\frac{1}{n}\bar{I}_2$$

nel dominio dei fasori

- la potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned}\bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{I}_1^* + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2}n\bar{V}_2(-\frac{1}{n}\bar{I}_2^*) + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* = 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$V_1 = nV_2 \quad I_1 = -\frac{1}{n}I_2$$

la pot. ass. complessa e' 0

- quindi un trasformatore ideale e' trasparente sia alla potenza attiva che alla potenza reattiva

non si scalano...

quello reale pero'...

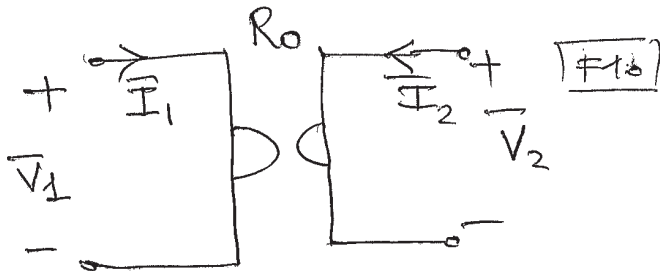
- Giratore ideale *rete passiva ... non assorbe pot. attiva ma assorbe pot. reattiva*
- consideriamo un giratore ideale e cioè una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = -R_0 i_2(t)$$

e

$$v_2(t) = R_0 i_1(t)$$

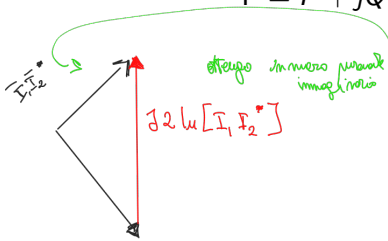
dove R_0 in Ohm e' il rapporto di girazione



- sappiamo che anche il giratore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = -R_0 \bar{I}_2, \bar{V}_2 = R_0 \bar{I}_1$$

- la potenza complessa assorbita vale



$$\begin{aligned}
 \bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\
 &= \frac{1}{2} \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* \\
 &= -\frac{1}{2} R_0 \bar{I}_2 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} R_0 \bar{I}_1 \bar{I}_2^* \\
 &= \frac{1}{2} R_0 [\bar{I}_1 \bar{I}_2^* - \bar{I}_1^* \bar{I}_2] \\
 &= jR_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \text{ VA}
 \end{aligned}$$

stesso numero reale immaginario

sono l'uno il coniugato dell'altro

- quindi un giratore ideale e' trasparente alla potenza attiva ($P = 0$); non e' invece trasparente alla potenza reattiva che vale

$$Q = R_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \text{ VAR.}$$

Valgono nel caso stazionario.

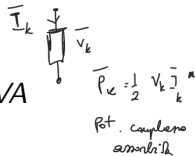
Teorema di Boucherot (conservazione della potenza attiva, reattiva e complessa)

L'apparente non si conserva, perché sono moduli;
non si possono salvare i moduli dei vettori
complessi.

- Consideriamo una rete con ℓ bipoli in regime sinusoidale a pulsazione ω . Utilizziamo per ogni bipolo k la convezione degli utilizzatori per coordinare i fasori $\bar{V}_k$ e $\bar{I}_k$. Si ha allora (teorema di Boucherot)

conserv. v. p. i. nodi

$$\sum_{k=1}^{\ell} \bar{P}_k = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \sum_{k=1}^{\ell} (\underline{P_k} + j\underline{Q_k}) = 0 \quad \text{VA}$$



vale cioè' la conservazione della potenza complessa

- ne consegue che vale anche la conservazione di potenza attiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} P_K = 0 \quad W$$

se prendiamo le parti reali

e della potenza reattiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_K = 0 \quad \text{VAR}$$

se prendiamo le parti immaginarie

Vale un principio di conservazione

- in un circuito in cui sono presenti R, L, C e un certo numero di generatori di tensione e/o corrente possiamo scrivere *il Teo di Boudet in*

$$\sum_{\text{gen.ri}} P_{s,i} = \sum_{\text{resistori}} P_{R_i} = \sum_{\text{resistori}} R_i I_i^2 \quad W$$

Potenza attiva erogata dal generatore i-esimo

gli unici dp assorbono pot. attiva sono i resistori

e

$$\begin{aligned} \sum_{\text{gen.ri}} Q_{s,i} &= \sum_{\text{induttori}} Q_{L_i} + \sum_{\text{condensatori}} Q_{C_i} \\ &= \sum_{\text{induttori}} \omega L_i I_i^2 + \sum_{\text{condensatori}} (-\omega C_i V_i^2) \\ &= 2\omega \left[\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} - \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}} \right] \quad \text{VAR} \end{aligned}$$

Sono reattivi di $Q_{s,i}$

vanno su gli induttori o condensatori

negativa

dove $P_{s,i}$ (risp., $Q_{s,i}$) e' la potenza attiva (risp., potenza reattiva) erogata dal generatore i -esimo

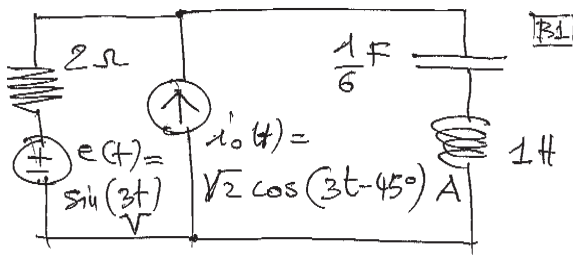
Potenza reattiva = $2 \omega E_{L_i}^{\text{media}}$... (?)

- notare che, nel complesso, i generatori non hanno bisogno di erogare potenza reattiva al circuito se L e C si compensano, cioè l'energia media di tipo elettrico è pari a quella di tipo magnetico

$$\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} = \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}}$$

- ciò accade ad esempio in condizioni di risonanza.

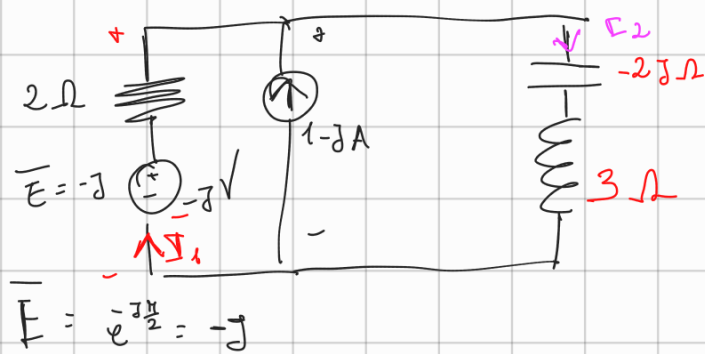
Esempio. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura



- consideriamo il circuito simbolico associato e usiamo il teorema di Millmann per determinare $\bar{V}$; si ha

$$\bar{V} = \frac{-\frac{j}{2} + 1 - j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}} = \frac{8 + j}{5} \text{ V}$$

Rapp. forziato



$$\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - j$$

$$\frac{1}{6} F \rightarrow X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{6}} = 2 \Omega$$

$$X_L = \omega L = 3 \Omega$$

$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \frac{\frac{-j}{2} + (1-j)}{\frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3j-2j} \right)}_{\text{serie inductance condensatore}}} = \frac{\frac{-j}{2} + (1-j)}{\frac{1}{2} - j} = \frac{\frac{-3}{2}j + 1}{\frac{1}{2} - j} \\
 &= \frac{\left(\frac{-3}{2}j + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + j \right)}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{-3}{4}j + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + j}{\frac{5}{4}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}j + 2}{\frac{5}{4}} = \frac{j+8}{5} \bar{V}
 \end{aligned}$$

⇒ Potenza complessa erogata dal generatore

$$\begin{aligned}
 P_{\text{gen. erog.}} &= \frac{1}{2} \bar{V} (1-j)^* = \frac{1}{2} \left(\frac{j+8}{5} \right) (1+j) = \frac{1}{2} \left(\frac{j}{5} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5} + \frac{8}{5}j \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5}j + \frac{7}{5} \right) = \frac{8}{\omega} j + \frac{7}{\omega} \text{ VA} \\
 &= \frac{7}{\omega} + \frac{8}{\omega} j \text{ VA}
 \end{aligned}$$

una kV per $\bar{I}_1$, $\frac{j+8}{5} = -2\bar{I}_1 - j \Rightarrow \frac{j+8+5j}{5} = -2\bar{I}_1$

$$\Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{6j+8}{-10} = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}j \text{ A}$$

$$P_{\text{gen. tens. erog.}} = \frac{1}{2} (-j) \cdot \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j \right) = -\frac{j}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} j \right) =$$

$$= \frac{4j}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} j \text{ V.A}$$

$$P_{\text{ASS. RES}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{25} + \frac{8}{25} \right) = 1 \text{ W}$$

$$\bullet \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + (1-j) = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j + 1 - j = \frac{1}{5} - \frac{8}{5} j \text{ A}$$

$$\bullet Q_L = \frac{1}{2} \cdot \overset{\text{reattanza}}{(3)} \cdot \left(\overset{\text{quadrato}}{\frac{1}{25} + \frac{64}{25}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{65}{25} = \frac{195}{50} = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

$$\bullet Q_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{64}{25} \right) = -\frac{65}{25} = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

ora lo sono tutte

$$\frac{39}{10} - \frac{26}{10} = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} - \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

• rifaccio il circuito e elevo per trovare
calcolo le potenze ASS / erogate.

↙ ora es. via via Parte 2

$$\text{Bipolo Negativo sinusoidale} \quad \bar{P} = 5 + j8 \text{ VA}$$

$$\bar{P} = 5 + j8 \text{ VA} = A e^{j\varphi_2} \quad \text{Pot. istantanea di picco media?}$$

$$P = 5 \text{ W}$$

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

$$P_{\text{MAX}} = P + A$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{25 + 64} = 8,43$$

$$P_{\text{MAX}} = 5 + 8,43 = 13,43$$

$$P_{\text{MIN}} = 5 - 8,43 = -3,43$$

$$\varphi_v - \varphi_i = \varphi_2$$

$$\text{in questo caso, } \varphi_v = 0 \Rightarrow \varphi_i = -\varphi_2$$

$$\bar{P} = A e^{j\varphi_2} = 8,43 e^{j \arctg(\frac{8}{5})} = A e^{j58^\circ}$$

$p(t)$ dunque ...

un bipolo reale 10 kVA (pot. apparente) con

Fattore di potenza = 0,8 = $\cos(\varphi_2)$ è di tipo induttivo in ritardo

Tensione sul bipolo vale 220 Veff, ricavare

Potenza attiva, reattiva, complessa della corrente e
impedenza complessa del bipolo

$$A = |V| \Rightarrow I = \frac{A}{V} = \frac{10 \cdot 10^3}{220} = 45,45 \text{ A}$$

$$I_M = \sqrt{2}(45,45) = 64,3 \text{ A}$$

$$P_{\text{ATIVA}} = P_{\text{app}} \cdot \cos(\varphi_2) =$$

$$= A \cdot \cos(\varphi_2) = 10 \cdot 10^3 (0,8) = 8 \text{ kW}$$

$$Q = A \sin(\varphi_2) = 10 \cdot 10^3 (0,6) = 6 \text{ KVAR}$$

impedância? P real e P_{im} • Módulo e argumento.

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_2} = Z e^{j(36,87^\circ)}$$

$$\varphi_2 = 36,87^\circ$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220}{45,45} \simeq 4,84 \Omega$$

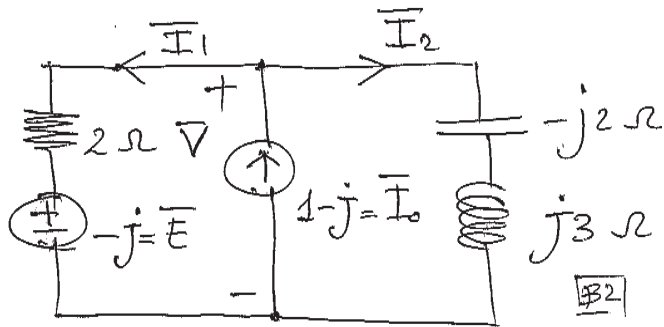
$$\bar{Z} = 4,84 e^{j(36,87)} = 3,87 + j2,98 \Omega$$

Prove com a fórmula

$$P = \text{Re}[\bar{Z}] \cdot I_{\text{eff}}^2 = 3,87 \cdot (45,45)^2 = 8 \text{ kW (!)}$$

$$Q = \text{Im}[\bar{Z}] \cdot I_{\text{eff}}^2 = 2,9 \cdot (45,45)^2 = 6 \text{ k []}$$

Sum 8 mag 2023
Fime



• allora

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V} + j}{2} = \frac{4 + j3}{5} \text{ A}$$

e

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 - \bar{I}_1 = \frac{1 - j8}{5} \text{ A}$$

- la potenza *erogata* dal generatore di corrente vale

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}_0^* = \frac{7 + j9}{10} \text{ VA}$$

e quella erogata dal generatore di tensione

$$\bar{P}_e = -\frac{1}{2} \bar{E} \bar{I}_1^* = \frac{3 + j4}{10} \text{ VA}$$

- inoltre la potenza assorbita dal resistore vale

$$P_R = \frac{1}{2} 2 I_{1M}^2 = 1 \text{ W}$$

quella assorbita da L vale

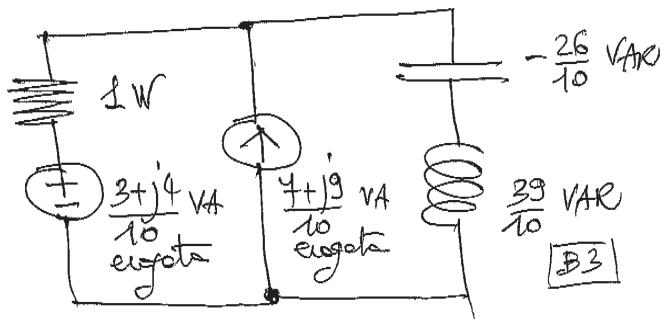
$$Q_L = \frac{1}{2} 3 I_{2M}^2 = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

e quella assorbita da C

$$Q_C = -\frac{1}{2} 2 I_{2M}^2 = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

- e' verificato il teorema di Boucherot

- conviene riportare quanto ottenuto in una figura



Forare corrente

- $$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} \quad A \quad \bar{V} = \dots \quad V$$

- a volte utilizzeremo negli esercizi questa notazione

$$\bar{I} = I_{\text{rms}} e^{j\varphi_i} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi_i} = I e^{j\varphi_i} \quad \text{Aeff}$$

dove il modulo del fasore corrisponde al valore efficace; per evitare ambiguità va esplicitamente indicata l'unità di misura, e cioè Ampere efficaci

- con la seconda notazione si ha ad esempio che la potenza complessa è semplicemente espressa da

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}^* \quad VA$$

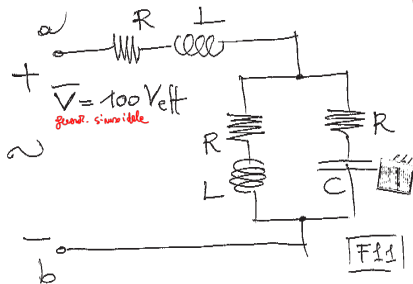
Esempio. Determinare potenza attiva e reattiva assorbita dal bipolo ab (in regime sinusoidale a pulsazione ω); verificare inoltre la validita' del teorema di Boucherot; e' noto che $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ Ohm}$

ω non è necessario per i conti per le potenze

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \Omega$$

quanto assorbe il dipolo?

(ovviamente la pot. attiva va ai resistori)



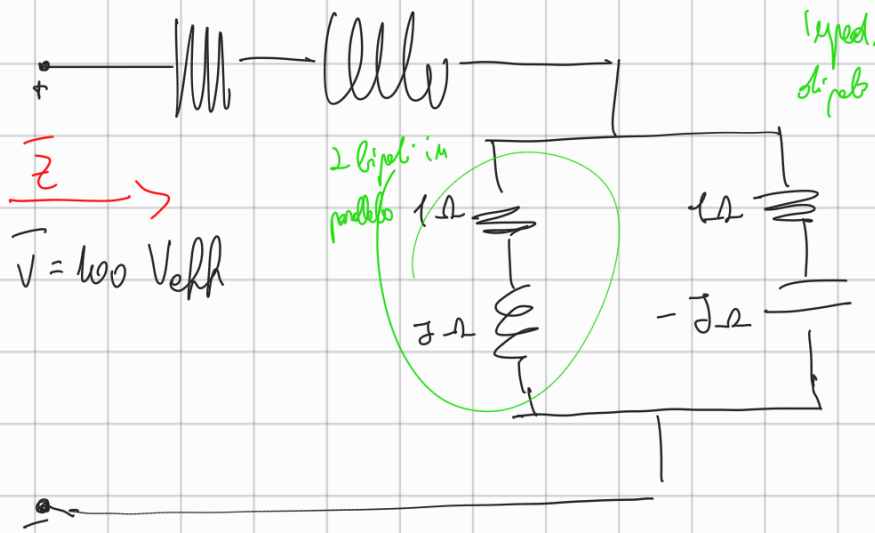
Facile vedere che la somma delle potenze pass - 0 attive e reattive

- consideriamo il circuito simbolico associato, per quale

$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = 2 + j \text{ Ohm}$$

e

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2 + j} = 40 - j20 \text{ Aeff}$$



Circuito Simbolo: ω

Imped. dipolo

Domio ammettevole

$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}}$$

$$= 1 + j + \frac{1}{1-j + 1+j}$$

$$= 2 + j2$$

Prova la parte induttiva

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2+j} \cdot \frac{(2-j)}{(2-j)} = \frac{100}{5} (2-j) = 40 - j20 \text{ A eff}$$

Trick?

$$P = \bar{V} \bar{I}^* = 100 \times (40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

$$\bar{I} = 40 - j20 \text{ A eff.}$$

Grande potenza attiva e reattiva

efficienza in un sistema

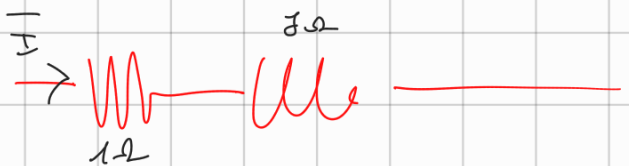
$$\rightarrow P_R = R \bar{I}_R^2 \quad \text{WATT}$$

$$Q_L = X_L \bar{I}_L^2 \quad \text{VAR}$$

$$Q_C = -X_C \bar{I}_C^2 \quad \text{VAR}$$

valore eff
conv

$$\bar{I}^2 = 2000 \text{ A eff}$$

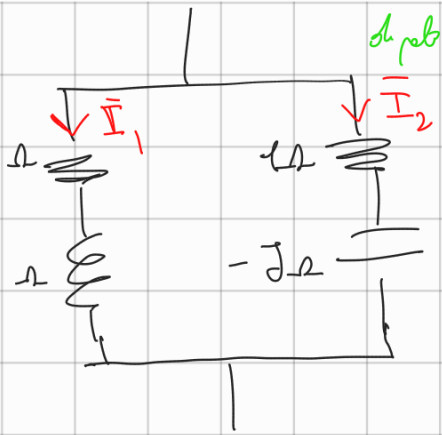


$\rightarrow 2 \text{ kW}$ potenza attiva resistiva

$\rightarrow 2 \text{ kVAR}$ P. attiva induttiva

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}}$$

senza ammettevole

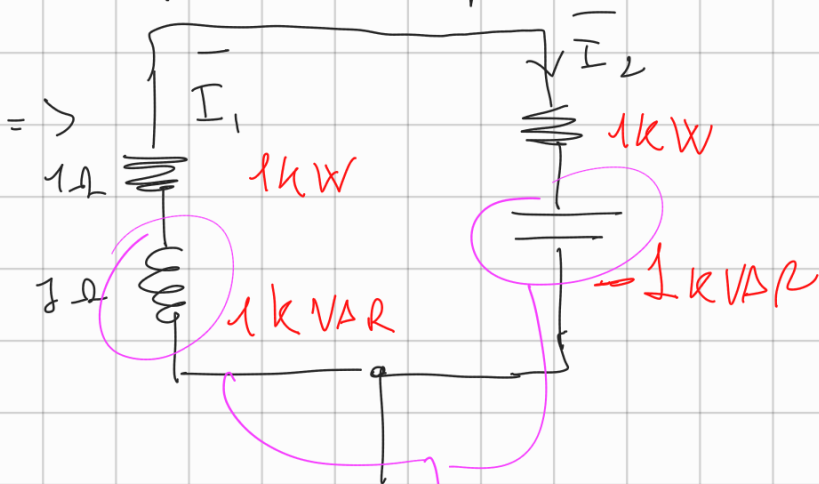


$$= \frac{(40 - j20)}{1 + j} \cdot \frac{1}{\frac{2}{2}}$$

$$= \frac{(40 - j20)(1 - j)}{2} = \frac{40 - 20 - j40 - j20}{2}$$

$$= 10 - j30 \text{ A eff}$$

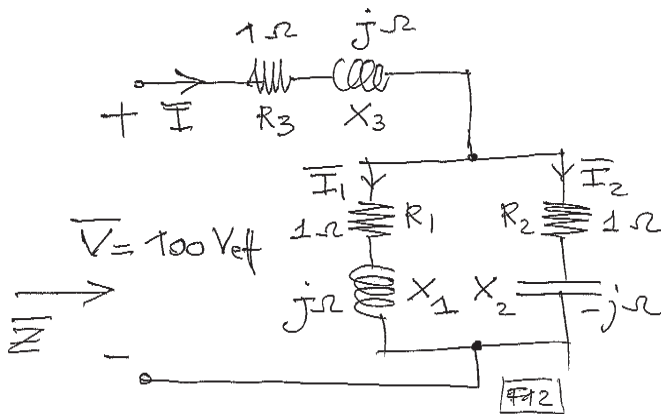
• $I_1^2 = 1000 \text{ A eff}$



$\frac{0}{2} \text{ Brown}$
 $I_2 \text{ come } I - I_1$

Senza bilanciati, il condensatore sta
 energia reattiva all'induttore, il
 generatore non interviene





• allora

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}^* = 100(40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

e quindi

$$P = 4 \text{ kW}; \quad Q = 2 \text{ kVAR}$$

- verifichiamo adesso Boucherot; si ha dalla regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = (40 - j20) \frac{1-j}{2} = 10 - j30 \text{ Aeff}$$

e quindi

$$\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 30 + j10 \text{ Aeff}$$

- valutiamo potenze attive e reattive assorbite dai bipoli R, L, C ; si ha $I_1^2 = 1000$, $I_2^2 = 1000$ e $I^2 = 2000$; quindi

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1 \text{ kW}; P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1 \text{ kW}; P_{R3} = R_3 I_3^2 = 2 \text{ kW}$$

e

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = P = 4 \text{ kW}$$

- inoltre

$$Q_{X1} = X_1 I_1^2 = 1 \text{ kVAR}; Q_{X2} = -X_2 I_2^2 = -1 \text{ kVAR}$$

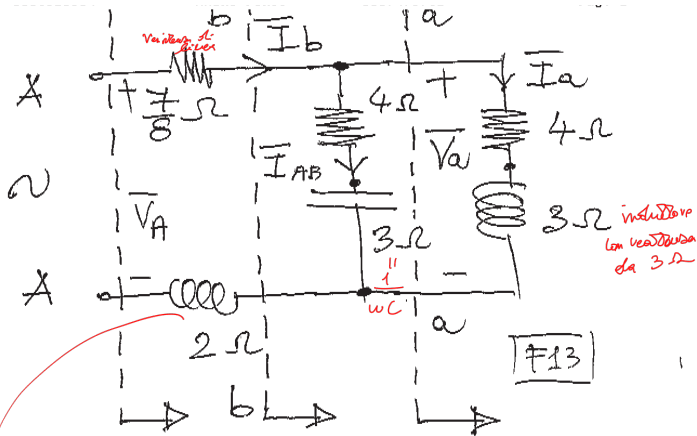
$$Q_{X3} = X_3 I_3^2 = 2 \text{ kVAR}$$

e quindi

$$Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3} = Q = 2 \text{ kVAR}$$

- il teorema di Boucherot e' verificato.

Esempio. Il bipolo AA e' in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Sulla figura sono indicate resistenze e reattanze dei bipoli alla ω considerata. E' noto che $I_a = 20$ Aeff. Calcolare per via energetica (utilizzando il teorema di Boucherot) potenza attiva e reattiva ai morsetti AA



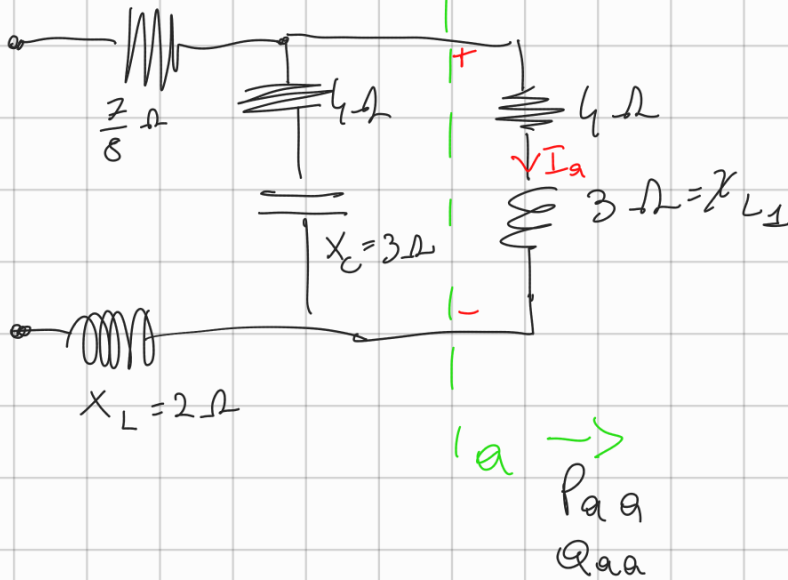
$\therefore 2A = 2L$ non so cos'è A o L , ma la relazione è per $2A$

Conosco la corrente, sono vicino alle potenze fino alle sezioni di ingresso

.... senza usare fasori

Per via energetica con
Boucléot, no FASOM,
non ho neanche i dati
necessari

1a sez.



$$I_a = 20 \text{ A eff}$$

trovo le pot. attive
e reattive delle varie
sezioni

$$P_{aa} = 4 \times I_a^2 = 1600 \text{ W}$$

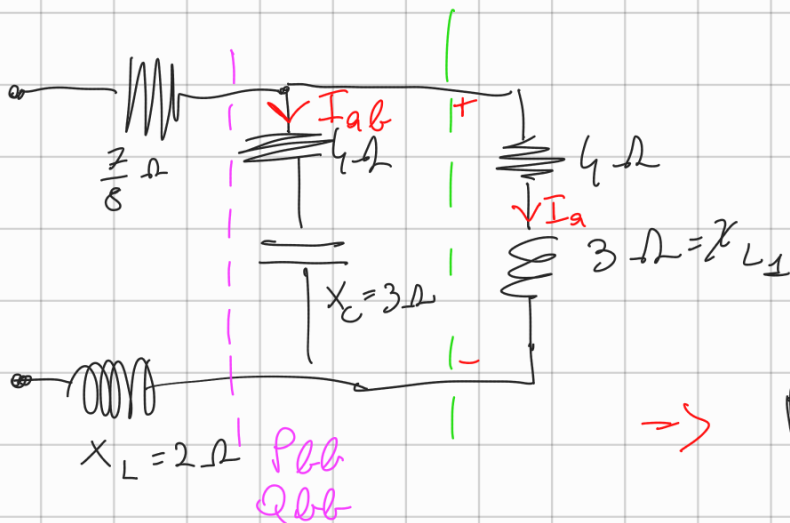
$$Q_{aa} = 3 \cdot I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

> voluta pot. apparente sezione
per trovare la tensione
della rete

$$A_{aa} = \sqrt{P_{aa}^2 + Q_{aa}^2} = 2000 \text{ VA}$$

$$= V_a I_a$$

$$\Rightarrow V_a = 100 \text{ V eff}$$



$$I_{ab} = \frac{V_a}{Z} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A eff}$$

$$Z = 4 - j3$$

NON 4+3!

me faccio il modulo ed e' 5

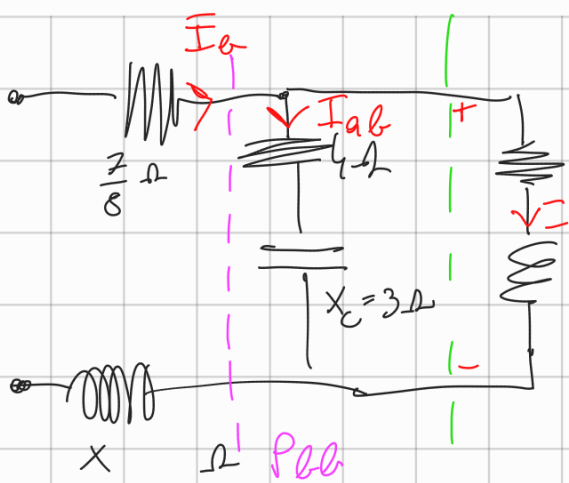
$$\Rightarrow P_{bb} = P_{aa} + 4 \times I_{AB}^2 = 3200 \text{ W}$$

Condensatore

$$\leftarrow Q_{bb} = Q_{aa} - 3 I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

solo in risonanza

piu' preciso ho usato A per trovare
V, ora lo uso per trovare I



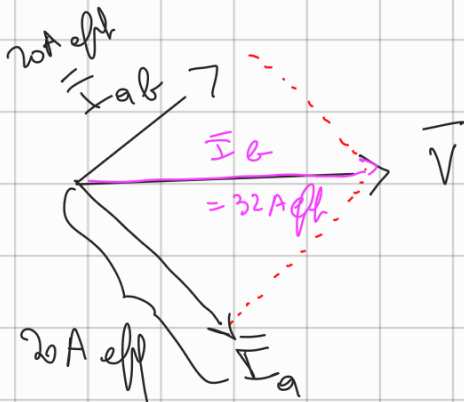
$$\Rightarrow A_{AB} = \sqrt{P_{AB}^2 + Q_{AB}^2} = 320 \text{ V.A}$$

$$= V I_b$$

$$\bullet I_b = 32 \text{ A eff}$$

$$I_b + I_{AB} + I_a$$

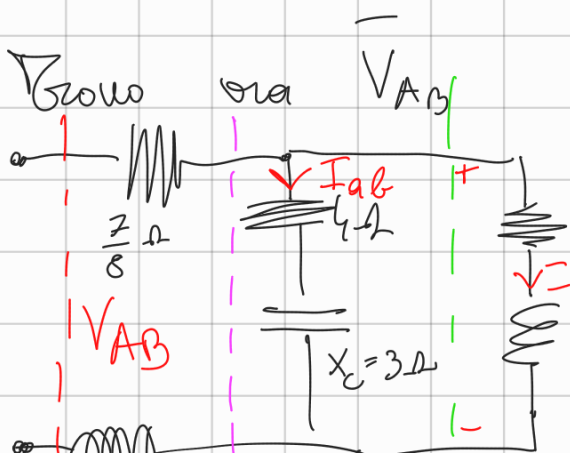
NON POSSO Sommare valori
efficaci, sto sommando
i moduli.



Verifico ora Bouche

$$P_{AB} = P_{bb} + \frac{Z}{8} \times I_b^2 = 4096 \text{ W}$$

$$Q_{AB} = Q_{bb} + 2 \times I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$



(posso per la pot. apparente)

$$A_{AB} = \sqrt{P_{AB}^2 + Q_{AB}^2} = 4580$$

$$= \frac{I_b}{32} V_{AB}$$

mai sommare

somma dei valori
efficaci di
grandezze sinusoidali,
in quanto sono moduli.

$$\rightarrow V_{AB} = 143 \text{ V.}$$

$\Rightarrow$ rifasamento ora a 0,85

condensatore collegato tra morsetti A e B

$$\omega = 314 \text{ rad/sec} \\ = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$$

$$C_{\text{corr}} = \frac{P \tan \varphi_z - P \tan \varphi_{\text{corr}}}{\omega V_{AB}^2}$$

$$= \frac{2048 - 4096 \tan(\varphi_{\text{corr}})}{\omega V_{AB}^2} = \frac{2048 - 1311}{314 \cdot 143^2}$$

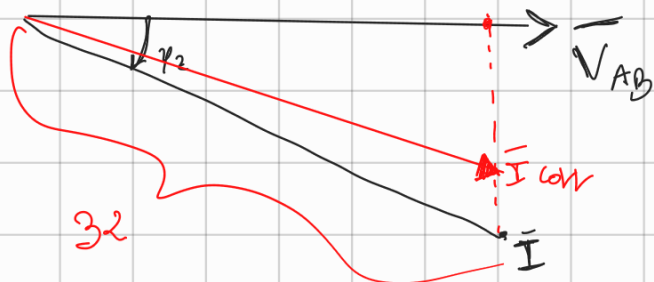
$$= 1,19 \cdot 10^{-4} = 119 \mu\text{F}$$

ci manca
l'angolo per

$$\tan \varphi_z = \frac{Q_{AB}}{P_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{2} = 27^\circ$$

e' costante



? I_{corr}

Bravo Papparella mare

$$P_{\text{app. min}} = V \cdot I_{\text{min}} \\ P_{\text{app. stop}} = V \cdot I_{\text{corr}}$$

- Analizziamo il circuito iniziando dalla sezione aa e poi procedendo verso le sezioni a monte
- sezione aa):

$$P_a = 4I_a^2 = 1600 \text{ W}; Q_a = 3I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

- allora

$$A_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} = 2000 = V_a I_a = 20 V_a \text{ VA};$$

da cui $V_a = 100 \text{ Veff}$. Inoltre

$$I_{AB} = \frac{V_a}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{V_a}{5} = 20 \text{ Aeff}$$

- sezione bb): dal teorema di Boucherot

$$P_b = P_a + 4I_{AB}^2 = 3200 \text{ W}; Q_b = Q_a - 3I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

- quindi

$$A_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} = 3200 = V_a I_b = 100 I_b \text{ VA}$$

da cui $I_b = 32 \text{ Aeff}$

- sezione di ingresso AA): si ha

$$P_A = P_b + \frac{7}{8}I_b^2 = 4096 \text{ W}; Q_A = Q_b + 2I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$

- si ha anche

$$A_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 4580 = V_A I_b = 36 V_A \text{ VA}$$

da cui $V_A = 143 \text{ V}$.

- *Osservazione importante:* si ha da KV $\bar{I}_b = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_a$, pero'

$$I_b = 36 \neq I_{AB} + I_a = 20 + 20 = 40 \text{ A}$$

- **non si possono sommare i valori efficaci di grandezze sinusidali**

- interpretare usando un diagramma fasoriale.