

Circuiti del primo ordine

Mauro Forti

June 10, 2020

Risposta libera

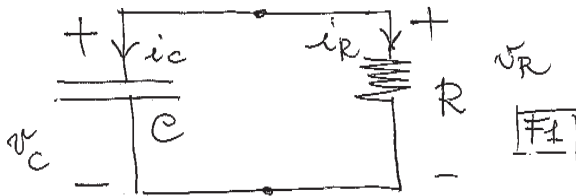
- Scarica di C su R

C carico a $t=0$.

si ha un transitorio di stato, in cui si scarica condensatore

- Consideriamo un circuito elementare RC senza generatori indipendenti; sia $v_C(0) = V_0$; vogliamo determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la tensione su C (v_C) e' la variabile di stato del circuito

tra v_C e i_C la variabile più importante è v_C



- si ha dalla KV: $v_C = v_R$ e dalla KI: $i_R + i_C = 0$, mentre le relazioni costitutive sono $i_C = C dv_C/dt$ e $i_R = v_R/R$; allora

$$v_C = v_R = Ri_R = -Ri_C = -RC \frac{dv_C}{dt}$$

$$\tau \frac{d}{dt} V_C + V_C = 0$$

$$\tau = \tau_{RC} = RC$$

Costante di Tempo
del circuito RC

ci dice quanto è veloce il transitorio
di scarico

- quindi, ponendo $v_C = v$ il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = 0$$

troviamo l'integrale
generale

con condizione iniziale

$$v(0) = V_0$$

- con $\tau = RC$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RC ; si ha $[\tau] = \text{sec}$
- e' un problema di Cauchy che ammette soluzione unica per $t > 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\frac{dV}{dt}(\rho) + \frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC} \quad \mu_2 \quad (1)$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$v(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea spazio vettoriale di dim 1

- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$v(0) = ke^0 = k = V_0$$

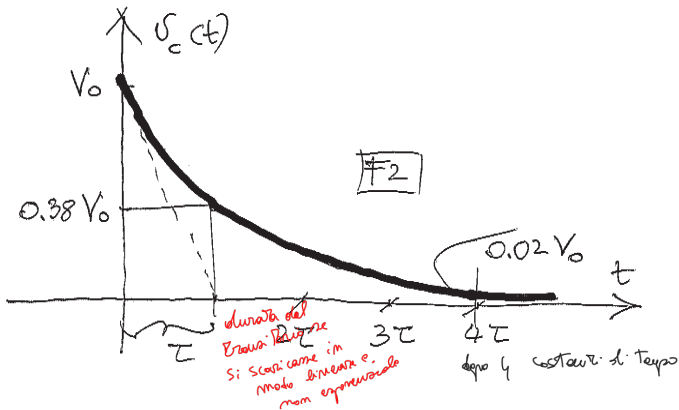
quindi la tensione nel circuito RC vale

Risposta libera

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di C inizialmente carico sul resistore R non c'è source generata
- in figura e' rappresentato l'andamento temporale della scarica; si ha $v(\tau) \simeq 0.38V_0$, cioè dopo τ la tensione si e' ridotta al 38 % del valore iniziale; si ha anche $v(4\tau) = 0.02V_0$, cioè dopo 4τ la tensione si e' ridotta al 2 % della tensione iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ frequenza naturale del circuito ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RC*

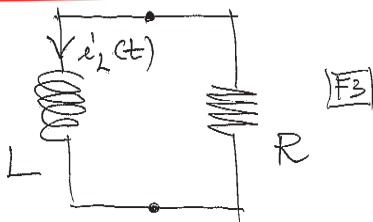
andamento esponenziale



un transitorio pratico dura circa 4 costanti di Tempo

$$\tau_{RC} = RC \quad \tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

- Scarica di L su R
- Consideriamo un circuito elementare RL senza generatori indipendenti; sia $i_L(0) = i_0$; vogliamo determinare $i_L(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la corrente in L (i_L) e' la variabile di stato del circuito



- il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine (ponendo $i_L = i$)

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

con condizione iniziale

$$i(0) = i_0$$

- con $\tau = L/R$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RL ; si ha $[\tau] = \text{sec}$ *T impossibile per elementi reattivi*
- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per $t \geq 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$i(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{tR}{L}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea

- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$i(0) = ke^0 = k = I_0$$

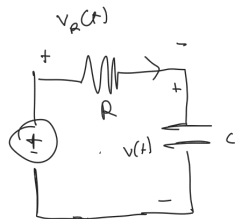
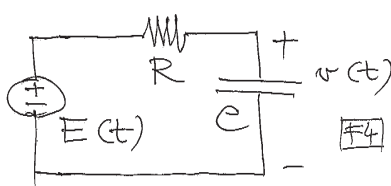
quindi la corrente nel circuito RL vale

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di L inizialmente carico sul resistore R
- si ha $i(\tau) \simeq 0.38I_0$, cioe' dopo τ la corrente si e' ridotta gia' al 38 % del valore iniziale; si ha anche $i(4\tau) = 0.02I_0$, cioe' dopo 4τ la corrente si e' ridotta al 2 % della corrente iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RL*

Risposta forzata

• Consideriamo un circuito RC con un generatore indipendente di tensione $E(t)$; per risposta forzata in corrente si intende la risposta quando e' presente il generatore indipendente e le condizioni iniziali sullo stato sono nulle, cioe' $v(0) = 0$; la risposta forzata e' detta anche risposta allo stato iniziale nullo



• si puo' verificare che il circuito soddisfa all'equazione differenziale del primo ordine di tipo non omogeneo

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E(t), \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(0) = 0$$

- tale problema di Cauchy ha soluzione unica
- dall'analisi sappiamo che

$$v(t) = v_{\text{omogenea}}(t) + \overset{\text{integrale part. col.ve}}{v_{\text{part.affine}}(t)} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \underset{\text{dell'affine}}{v_{\text{part.affine}}(t)}$$

dove $v_{\text{omogenea}}(t) = \overset{\text{trovato prima}}{Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$ e' l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre $v_{\text{part.affine}}(t)$ ^{s. carica di C.W.K} e' un integrale particolare dell'equazione affine

• ovviamente l'integrale particolare dipende dalla forma della eccitazione $E(t)$; puo' essere determinato usando ad esempio l'integrale di convoluzione *convoluzione con eccitaz. e risposta impulsiva*

$$v_{\text{part.affine}}(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\sigma}{\tau}} E(\sigma) d\sigma$$

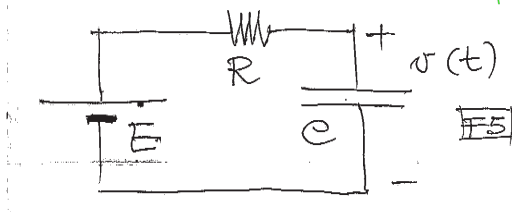
oppure usando il metodo della trasformata di Laplace

• nel seguito vediamo come si determina $v_{\text{part.affine}}(t)$ nel caso importante di eccitazioni costanti o eccitazioni sinusoidali

Circuito RC con Eccitazione Costante es. batteria o poi Eccit. sinusoidale

- determiniamo $v(t)$, risposta forzata, per il circuito RC in figura con eccitazione costante $E(t) = E$

l'integrale particolare zero per questo circuito stabile



- e' naturale cercare un integrale particolare costante, e cioe' 'della stessa forma della eccitazione':

$$v_{\text{part.affine}}(t) = H = \text{costante}$$

- sostituendo ottengo

$$H = E$$

$$\tau \frac{d}{dt} v + v = E = \text{costante}$$

e quindi

$$v(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

k Trovo con condiz. iniziali

- imponendo la condizione iniziale si ha

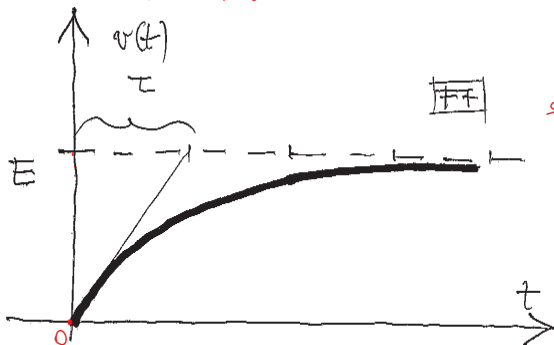
$$v(0) = k + E = 0$$

quindi $k = -E$ e la risposta forzata vale

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

- e' il transitorio di carica di un C inizialmente scarico con una batteria di tensione E ; l'andamento temporale e' mostrato in figura

la resistenza in serie



Tensione va a E

Scorre corrente e il condensatore inizia a caricarsi.

τ costante di tempo per cost. corri

Scomposizione della risposta forzata

- scriviamo la risposta forzata ad una eccitazione costante del circuito RC nella forma

$$v_{\text{forzata}}(t) = \underbrace{-Ee^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Parte transitoria della risposta forzata}} + \underbrace{(E)}_{\substack{\text{integrale part. ch.} \\ \text{TENSIONE A REGIME} \\ \text{STAZIONARIA} \\ \text{cio' che resta dopo il} \\ \text{transitorio}}}$$

dove

$$E = v_{\text{part.affine}} = v_{\text{regime stazionario}}$$

e' cio' che resta per $t \rightarrow +\infty$ ed e' della stessa forma della eccitazione; invece $-Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ si dice parte transitoria della risposta forzata ed e' una soluzione dell'omogenea associata

- abbiamo ottenuto la scomposizione:
- Forzata = Transitorio + Regime Stazionario
- oppure $F = T + R$

Circuito RL con eccitazione costante

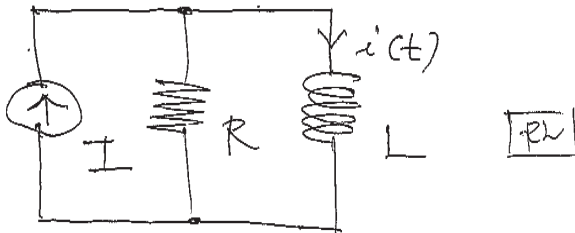
- Mostrare che la risposta forzata in corrente del circuito RL in figura e' data da

*arriva asintoticamente
a I*

$$i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

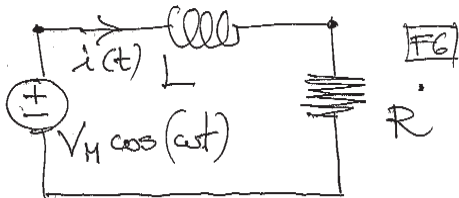
con $\tau = L/R$

- anche adesso vale la scomposizione $F = T + R$



Risposta forzata ad eccitazioni sinusoidali

- Circuito RL con eccitazione sinusoidale



- Determinare $i(t)$, risposta forzata *c'è il generatore, ma l'induttore deve essere scaricato a $t=0$*
 $i(0)=0$
- Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy
 i var. stabile

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t)$$

con condizione iniziale nulla sullo stato

$$i(0) = 0$$

• si ha anche in questo caso $F = T + R$, dove T e' una soluzione dell'omogenea associata mentre R e' un integrale particolare dell'affine che corrisponde alla risposta in regime sinusoidale; si ha allora

dove $\gamma =$

$$i(t) = \underbrace{ke^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{transiente}} + i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$$

integrale particolare della nostra forz. dell'eccitazione

quindi

integrale particolare: oscillazioni forzate, scriviamo corrente forzata

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_M \text{ asinusoide}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{\omega L}{R})) \phi_z$$

• imponiamo adesso la condizione iniziale

$\omega t = \phi$

$$i(0) = 0 = k + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

e quindi

costante in regime sinusoidale (?)

$$k = -\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

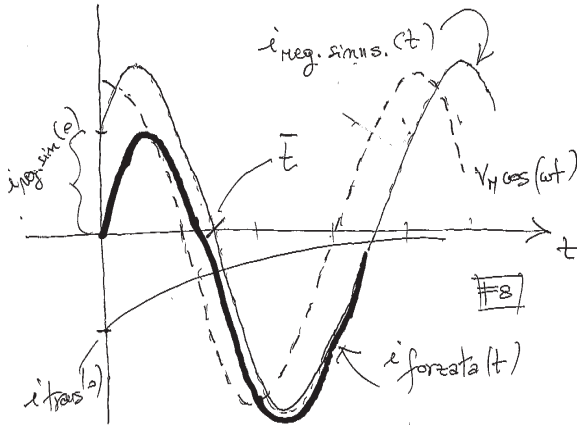
integrale particolare

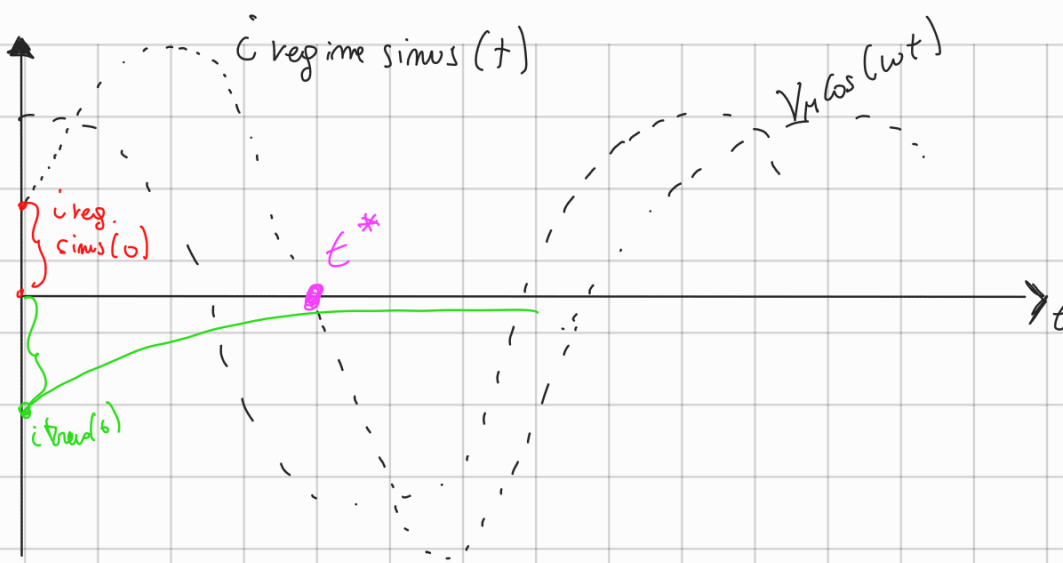
ora devo prendere quella che prima per

- da $i(0) = 0$ si ha che *impongo una la condizione iniziale*

$$i_{\text{transitoria}}(0) = -i_{\text{regime sinusoidale}}(0)$$

- la seguente figura riporta gli andamenti della tensione del generatore, di $i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$, di $i_{\text{transitoria}}(t)$ e di $i(t)$ risposta forzata





parte transitoria di ampiezza uguale e opposta.

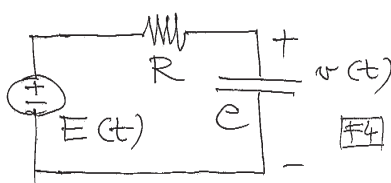
i transienti per le risposte forzate devono contribuire la parte di regime

Se collegami il circuito in questo t^* non avrei transitorio

Risposta completa *2 cause dei fenomeni esterni: vale sovrapp. effetti*

- Consideriamo un circuito RC con un generatore di tensione $E(t)$.

Per *risposta completa* in corrente si intende la corrente quando e' presente $E(t)$ e il condensatore e' carico a $v(0) = V_0 \neq 0$



- vi sono quindi due cause: la causa 1 e' il generatore indipendente (sorgente esterna di energia); la causa 2 e' l'energia elettrica immagazzinata inizialmente in C ($\frac{1}{2}CV_0^2$)
- vale la seguente forma del principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta completa (C) e' data dalla risposta libera (L) piu' la risposta forzata (F); quindi $C = L + F$

- facciamo una verifica per il circuito elementare RC ; la risposta completa e' l'unica soluzione del problema di Cauchy

v_{com} = risposta completa

$$\tau \frac{dv_{com}}{dt} + v_{com} = E(t)$$

$$v(0) = V_0$$

- la risposta libera e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{lib}}{dt} + v_{lib} = 0$$

$$v_{lib}(0) = V_0 \quad \text{condiz. iniz.}$$

- la risposta forzata e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{for}}{dt} + v_{for} = E(t)$$

$$v_{for}(0) = 0 \quad \text{condiz. iniz.}$$

- sommando ottengo

Somma le equazioni, la derivata e' libera

$$\tau \frac{d(v_{lib} + v_{for})}{dt} + (v_{lib} + v_{for}) = E(t)$$

$$(v_{lib} + v_{for})(0) = V_0$$

• quindi, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy iniziale si ottiene che

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t)$$

• **Esempio.** Nel caso di un circuito RC con eccitazione costante E otteniamo

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

• **Scomposizione in parti significative:** si ha $C = L + F$ e $F = T + R$; ma L e T sono soluzioni dell'omogenea; si definisce transitorio completo $TC = L + T$; nel caso in questione

$$L = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; F = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); T = -E e^{-\frac{t}{\tau}}; R = E$$

$$TC = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

generatore

carica e

scarica non

interferiscono

nei circuiti lineari

completo lib. + forzato

transitorio + regime (staz. o cost.)

transitorio Lib. + forzato

transitorio della forzatura

parte di reg. - staz.

transitorio della Forza

transitorio completo

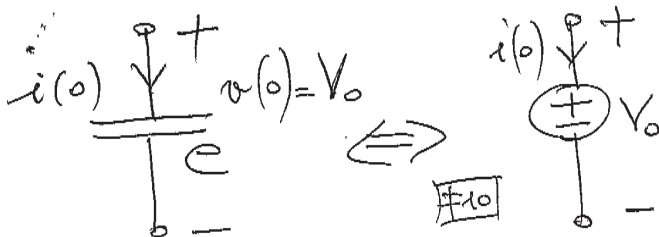
Comportamento a $t = 0$ di L e C

- Consideriamo un condensatore C e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $v(0) = V_0$; allora si ha

*funzionante $V \in$ un
a noi interna $C=0$*

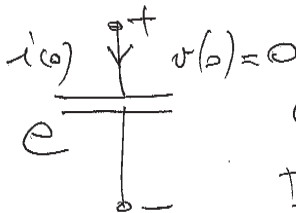
$v(0) = V_0$; $\forall i(0)$ che percorre il ramo condensatore
ma questa è una relaz. costitutiva di un gen. indep. di tensione

quindi all'istante iniziale $t = 0$ il condensatore equivale a un generatore di tensione ideale V_0



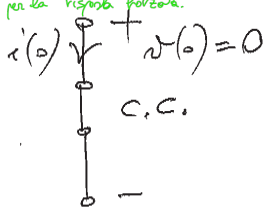
- se il condensatore e' scarico a $t = 0$, cioe' $v(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un corto circuito

un condensatore scarico a $t(0)$ e' come un cortocircuito utile per la risposta forzata.



(=)

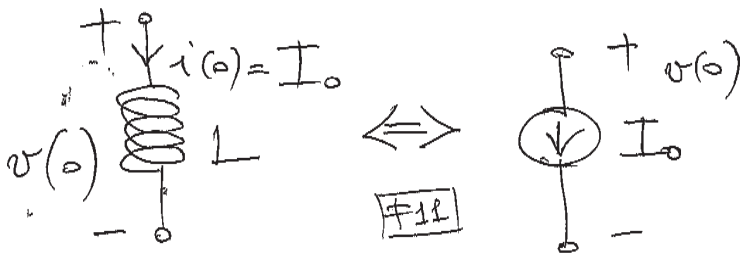
F12



- Consideriamo un induttore L e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $i(0) = I_0$; allora si ha

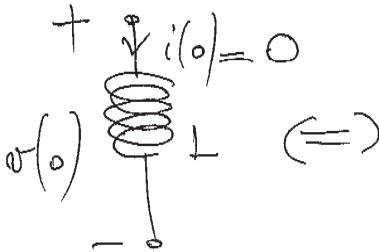
$$i(0) = I_0; \quad \forall v(0) \quad \text{tensione al morsetto}$$

quindi all'istante iniziale $t = 0$ l'induttore equivale a un generatore di corrente ideale I_0

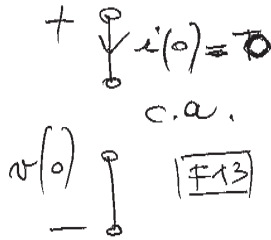


- se l'induttore e' scarico a $t = 0$, cioe' $i(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un circuito aperto

ripete forzate, $t=0 =$ c.a.



$(\Rightarrow)$



elementi reattivi, elementi senza memoria in $t=0$ (0 in un istante t)

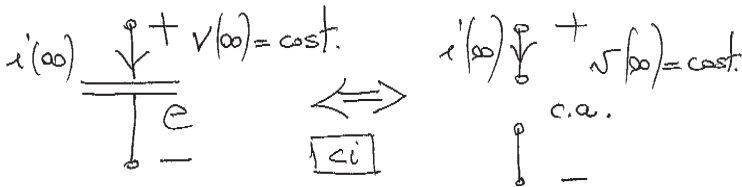
Comportamento per $t \rightarrow \infty$ di L e C

- interessano i due casi: a) il circuito raggiunge un regime stazionario dove tutte le tensioni e correnti divengono costanti per $t \rightarrow \infty$; *tensioni e correnti divengono costanti*
b) ~~il circuito raggiunge un regime sinusoidale dove tutte le tensioni e correnti divengono sinusoidali a pulsazione ω per $t \rightarrow \infty$~~
a) C in regime stazionario: si ha *generatore costante*

$$i(\infty) = 0; \quad \forall v(\infty) = \text{costante}$$

usando relaz. costitutiva C

quindi C equivale ad un circuito aperto



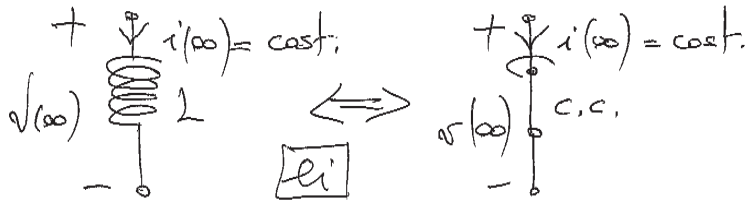
↓
il condensatore
diventa un
circuito
aperto

Se studio risposta forzata: $t=0 \Rightarrow C.C.$
 $t \rightarrow \infty \Rightarrow C.C.$

L in regime stazionario: si ha *ie duole*

$$v(\infty) = 0; \quad \forall i(\infty) = \text{costante}$$

quindi L equivale ad un corto circuito



per risposta forata
 $t=0$ circuito aperto
 $t \rightarrow \infty$ c.c.

b) • C in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$

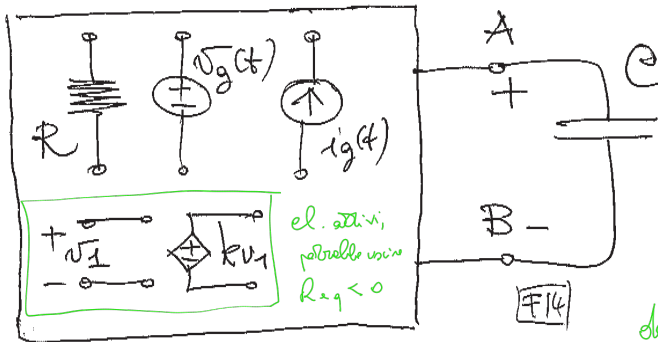
avrei la sua
impedenza, allora
usare i fasori

• L in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_L = j\omega L$

elementi reattivi Seno della impedenza

Circuiti del primo ordine

- Sono costituiti da un bipolo AB senza memoria che alimenta un C o un L (un solo elemento reattivo)



da fare
il caso dell'
induttore

- consideriamo il caso con un solo C ; supponiamo che il bipolo AB sia controllabile in corrente; consideriamo l'equivalente di Thevenin e supponiamo $R_{eq} > 0$

possiamo
applicare

- ci riconduciamo allora al problema di Cauchy già studiato

Se R_{eq} fosse ∞

$k e^{-\frac{t}{RC}}$
↑
transitori
visibili

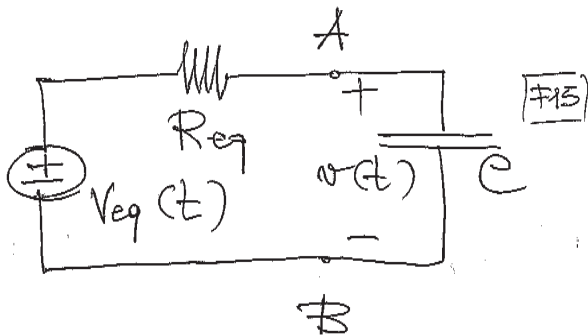
$R > 0$ altrimenti
il "transitorio" non
andrebbe a 0

$$\tau_{eq} \frac{dv}{dt} + v = V_{eq}(t)$$

$$v(0) = V_0$$

dove $\tau_{eq} = R_{eq}C$

Ci siamo ricaduti al caso di prima
in cui $V < V_{eq}(t)$ e non E



- si parla di risposta libera se $V_{eq}(t) = 0$ e $V_0 \neq 0$; forzata se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 = 0$; completa se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 \neq 0$

① Supponiamo che

nella soluzione

$$\begin{aligned}v_g(t) - V_g &= \cos t \\ i_g(t) &= I_g = \cos t\end{aligned}$$

generatori ind.t.
in continua

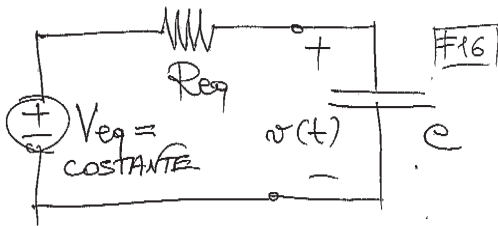
Circuiti del primo ordine con eccitazioni costanti

- Supponiamo che i generatori indipendenti all'interno del bipolo AB imprimano tensioni e/o correnti costanti; in tal caso si ha

(1)

$$V_{eq}(t) = V_{eq} = \text{costante}$$

Se ci sono gen.
costanti $V_{eq} = \text{cost}$
ALTRIMENTI NO!



- così' ci siamo ricondotti a un caso già' studiato; quindi si ha

Libera

$$L : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

Forzata

$$F : v(t) = V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) \quad \text{all'infinito tende a } V_{eq}.$$

$$C = L + F : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

completa =

Scarica che si sovrappone alla carica

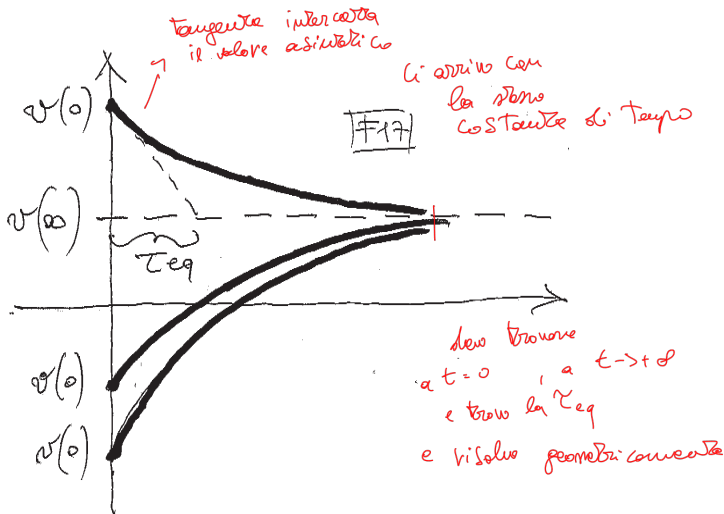
- possiamo scrivere la completa (ma anche la libera e forzata, pensarci!) nella seguente forma

$$\begin{aligned}
 v(t) &= V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) \\
 &= V_{eq} + [V_0 - V_{eq}]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} \\
 &= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}
 \end{aligned}$$

dove $v(\infty) = V_{eq}$

- la completa dipende quindi da tre parametri: il valore all'istante ^① iniziale $t = 0$, ^② il valore in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$ e la ^③ costante di tempo equivalente τ_{eq}
- l'andamento tipico e' riportato nella figura che segue

anche se vogliamo la Forzata. $\rightarrow$ costante iniziale, costante finale
e ci si va con una certa costante
di tempo



- l'analisi di un circuito del primo ordine con eccitazioni costanti e' perciò condotta in tre passi: 1) analisi all'istante iniziale $t = 0$; 2) analisi in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$; 3) determinazione della costante di tempo equivalente

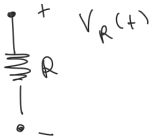
- si puo' dimostrare che anche la libera e la forzata sono 'della stessa forma'; inoltre, e' della stessa forma l'andamento di qualunque altra grandezza elettrica nel circuito; ad esempio, se consideriamo la corrente in un resistore avremo

$$i_R(t) = i_R(\infty) + [i_R(0) - i_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

- notare che τ_{eq} e' la stessa per tutte le grandezze elettriche.

Es. dare un esempio

una volta trovata la costante di tempo e' la stessa



tutte le grandezze elettriche nel circuito
hanno quella forma visto su

$$V_R(t) = V_R(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_R(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

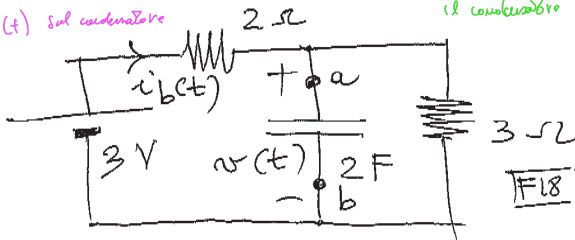
Esempio. Determinare $i_b(t)$ per $t \geq 0$, risposta completa, sapendo che $v(0) = 4 \text{ V}$

circuito del primo ordine, un solo elemento reattivo e circuito costante

il condensatore è uguale a 4V

riassumo tutto lo stato precedente

*variabile di stato è $v(t)$ sul condensatore
Non $i_b(t)$*



- Metodo 1). Determino la variabile di stato $v(t)$ e poi, indirettamente $i_b(t)$ (che non è variabile di stato)
- troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab; si ha $\tau_{eq} = R_{eq}C = 12/5 \text{ s}$; allora la risposta completa in tensione è

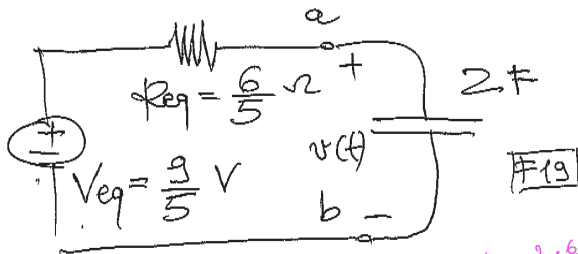
$$v(t) = 4e^{-\frac{5t}{12}} + \frac{9}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{12}}) = \frac{9}{5} + \frac{11}{5}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

- infine

riciclo nella maglia

$$i_b(t) = \frac{3 - v(t)}{2} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

circuito eq. di Thevenin

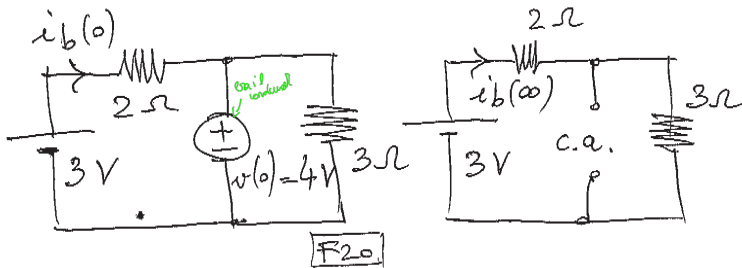


$$\tau = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

- Metodo 2). Per un circuito del primo ordine con eccitazione costante la forma della corrente i_b è del tipo *transitorio a costante di tempo*

$$i_b(t) = i_b(\infty) + [i_b(0) - i_b(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

*Supponi che
la forma è
questa*

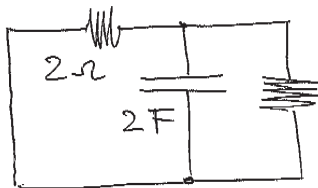


- analisi a $t = 0$; il condensatore e' un generatore di tensione V_0 quindi *con k indifferente(?)*

$$i_b(0) = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

- analisi per $t \rightarrow +\infty$; il condensatore e' un circuito aperto quindi

$$i_b(\infty) = \frac{3}{5} \text{ A}$$



è una pila sol'origine,
cioè risponde libera,
#21 dunque gruppato il
generatore;

- per determinare τ_{eq} si nota che

$$ke^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

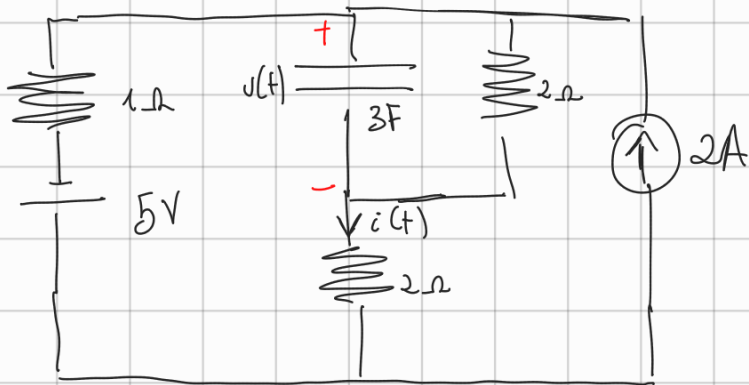
è una soluzione dell'omogenea; studiamo allora il circuito in evoluzione libera disattivando la batteria; noto allora che C si scarica sul parallelo fra 2 Ohm e 3 Ohm; si ha quindi

$$\tau_{eq} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \text{ s}$$

- infine

$$i_b(t) = \frac{3}{5} + \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right] e^{-\frac{5t}{12}} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10} e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0.$$

valore di res. stop.
 trans. completo
 quello incluso sia parte transitoria e l'altro



$$V(0) = 2V$$

$$? i(t) \quad L, F, T, R$$

Lib. Forz. Transp. di regim.

Se avessimo $i(0) = 3A$ non
possa dire niente, non
è variabile di stato,

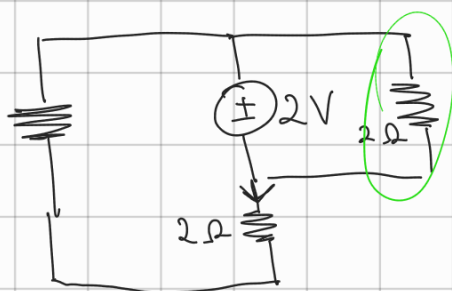
Se ne variabile di stato e tensioni dei generatori indip.

potrei anche semplificare il circuito vedendolo un gen. di corrente che
è in parallelo all'altro

$$i_{lib}(t) = i_{lib}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{lib}(\infty) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}\right) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

condens. carico, un oggetto vuoto a 0, prelevando i generatori
spegno generatori lo carico a tensione...

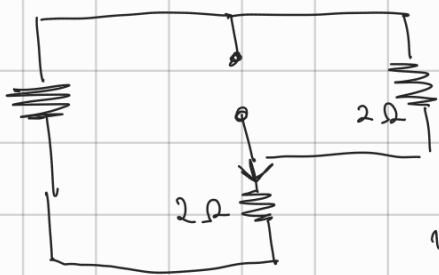
$$i_{lib}(0)$$



estremamente
non conta

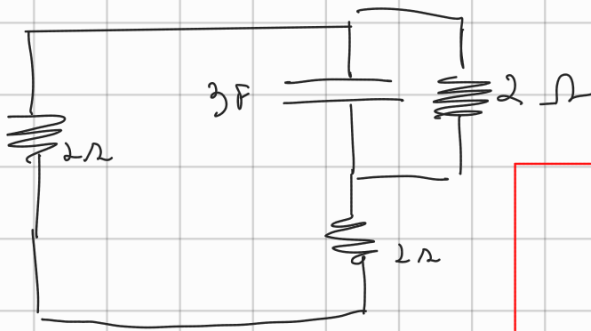
$$i_{lib}(0) = -\frac{2}{3} A$$

$$i_{lib}(\infty)$$



non può scorrere corrente se non c'è tensione

$$i_{lib}(\infty) = 0$$



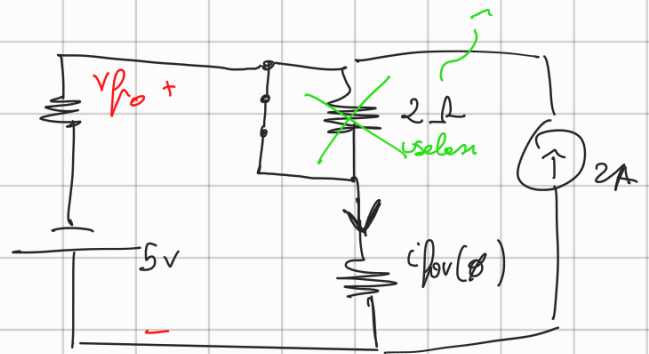
$$R_{eq} = \frac{6}{5} \Omega \quad \tau_{eq} = \frac{18}{5} \text{ sec.}$$

Funktion:

$$i_{hor}(t) = i_{hor}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{hor}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = \text{Konstante}$$

$$t = 0$$

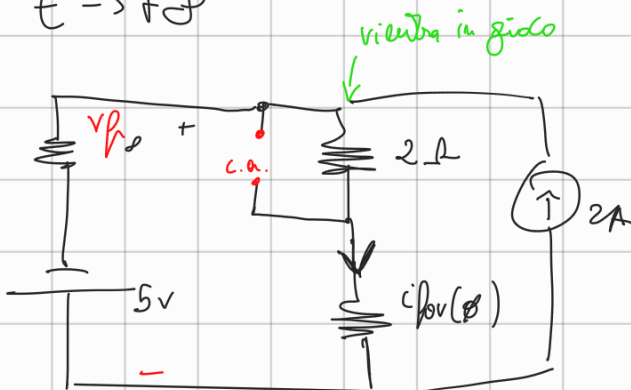
• Thevenin • Millman



$$V_{p0} = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2 \text{ V}$$

$$i_{hor}(0) = \frac{V_{p0}}{2} = -1 \text{ A}$$

$$t \rightarrow +\infty$$



$$V_{p\infty} = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{\frac{5}{4}} = -\frac{12}{5} \text{ V}$$

$$i_{hor}(\infty) = \frac{V_{p\infty}}{4} = -\frac{3}{5} \text{ A}$$

$$\Rightarrow i_{for}(t) = i_{for}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{for}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) =$$

$$= -1 e^{-\frac{5}{18} t} - \frac{3}{5} (1 - e^{-\frac{5}{18} t}) \quad t \geq 0$$

parte corrente vincente $\neq$

Regime
Stazionario

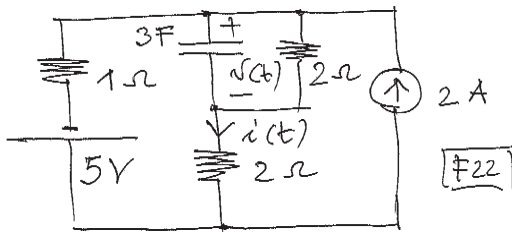
$$= -\frac{3}{5} A$$

Transitorio = $\frac{-2}{5} e^{-\frac{5}{18} t} A$

// $i_b(t)$ non è $\emptyset$. la forzata partiva da $\emptyset$, e qui

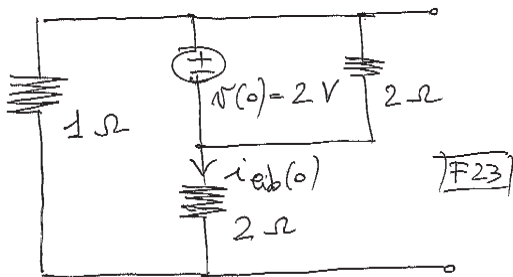
i nel resistore NON È variabile di stato quindi a $t=0$ il valore può essere diverso da $\emptyset$ per la risposta forzata

- **Esempio.** Determinare $i(t)$, parte libera, forzata, transitoria e di regime; si ha $v_C(0) = 2\text{ V}$



- per la libera si ha

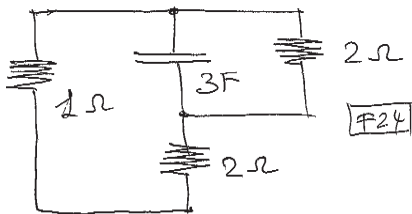
$$i_{\text{lib}}(t) = i_{\text{lib}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{lib}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$



- dalla 'istantanea del circuito a $t = 0$ ', dove C e' un generatore di tensione $v_C(0) = 2 \text{ V}$, si ha

$$i_{\text{lib}}(0) = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

mentre $i_{\text{lib}}(\infty) = 0$



- infine

$$\tau_{eq} = 3 \times \frac{6}{5} = \frac{18}{5} \text{ s}$$

- quindi

$$i_{lib}(t) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

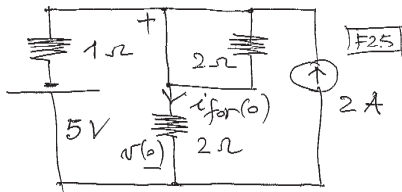
- la forzata puo' essere scritta come

$$i_{\text{for}}(t) = i_{\text{for}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{for}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$

- istantanea a $t = 0$ (C e' scarico a $t = 0$): si ha

$$v(0) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = -2 \text{ V}$$

quindi $i_{\text{for}}(0) = -1 \text{ A}$



- **Transitori che conseguono ad un evento critico** *apertura e chiusura di interruttori*
- Finora abbiamo studiato risposta libera, forzata, completa per $t > 0$ in evoluzione continua; vogliamo adesso studiare i transitori che conseguono ad un evento critico
 - *Evento critico*: apertura o chiusura di uno o più interruttori oppure discontinuità sulla tensione o corrente impressa da uno o più generatori indipendenti di tensione e/o corrente
 - cominciamo studiando alcune proprietà delle variabili di stato *tensione ai condensatori = risposta a trovare - corrente in induttori = bravo la corrente immaginata* (tensioni sui condensatori e correnti negli induttori)
 - **Proprietà**: Se la corrente $i_C(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la tensione $v_C(t)$ è continua in (t_a, t_b) ; analogamente, se la tensione $v_L(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la ~~tensione~~ ^{corrente} $i_L(t)$ è continua in (t_a, t_b)
 - cenno alla verifica: sia $t_0 \in (t_a, t_b)$ e $\epsilon > 0$ piccolo; si ha *è suff. piccolo*

$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| = \left| \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} i_C(t') dt' \right| \leq \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} |i_C(t')| dt'$$

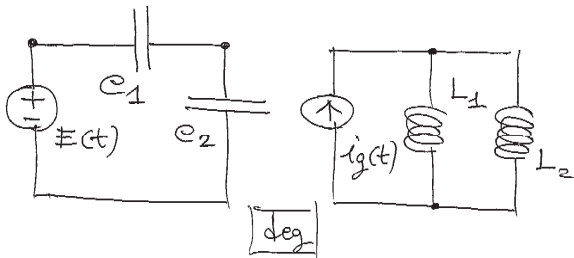
supponiamo per assurdo che v sia discontinua

quindi essendo $|i_C| \leq M$ *per ipotesi i_C è limitata* $\Rightarrow$ per proprietà di MONOTONIA dell'integrale

$\hookrightarrow$ *Quindi la differenza è infinitesimale* $|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| \leq (2M\epsilon)/C \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$, *faccio la differenza e si annulla*

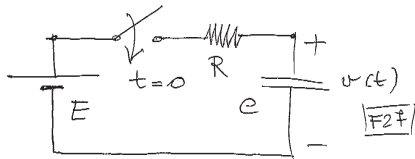
- **Rete RLC degenere:** e' una rete che contiene una maglia di soli condensatori e/o generatori indipendenti ideali di tensione, oppure un taglio di soli induttori e/o generatori indipendenti ideali di corrente

- ad esempio *appena applico una distinzione, (V di tensione)
↓
tutte e due saranno
distinzione*



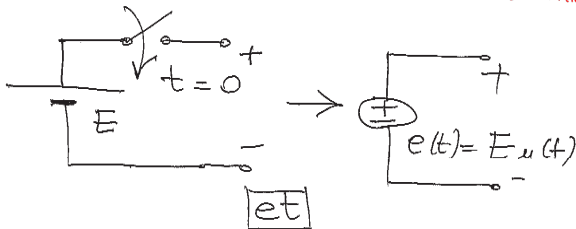
- Proprieta' di continuita' delle variabili di stato:** in una rete *non degenera* ^{non maglie e di condensatori e/o topologia di induttori} le variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti degli induttori) sono continue in presenza di eventi critici
- tale proprieta' deriva dal fatto che in una rete non degenera le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono funzioni limitate in corrispondenza di eventi critici *es. condensatore, secondo circuito, la corrente sara' limitata, la tensione continua*
 - nel seguito studiamo transitori supponendo che vi sia un evento critico all'istante critico $t = 0$

- Consideriamo un circuito elementare RC ; supponiamo C scarico per $t < 0$; l'interruttore si chiude a $t = 0$; vogliamo determinare $v_C(t) = v(t)$ per $t \geq 0$



- si noti che chiudere l'interruttore equivale a applicare una tensione a gradino $e(t) = Eu(t)$ con $u(t) = 0$ per $t < 0$ e $u(t) = 1$ per $t > 0$

Chiedere interruttore = come applicare tensione discontinua

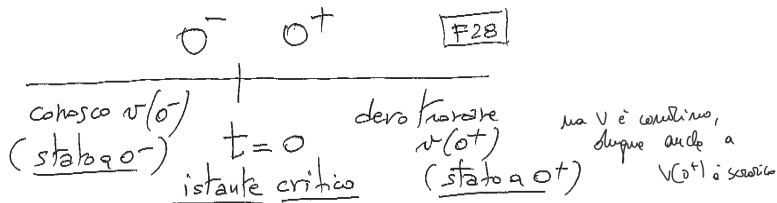


- per $t > 0$ il circuito soddisfa alla nota equazione

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

Conosco $v(0^-)$ per cui ora
scrivo la
condizione

$$v(0^+) = ?$$



- notare che conosciamo lo stato a $t = 0^-$, cioè $v_C(0^-) = 0$;
però per risolvere l'equazione differenziale devo conoscere lo stato
a $t = 0^+$! A tal fine uso il fatto che il circuito *non è degenere* e
quindi lo stato si conserva all'istante critico, quindi
 $v(0^+) = v(0^-) = 0$ e

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0$$

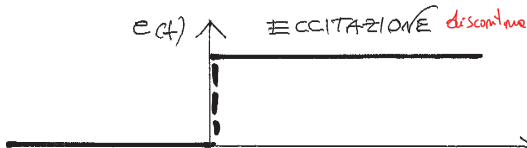
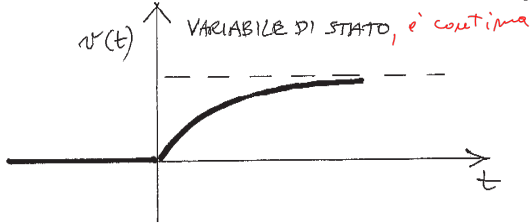
- si tratta quindi di una risposta forzata per cui

$$v(t) = \underbrace{E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}, \quad t > 0$$

- si ha inoltre

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{red circle}} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

- lo scenario e' quindi rappresentabile come in figura: l'eccitazione $e(t) = Eu(t)$ e' discontinua in $t = 0$, la variabile di stato $v(t)$ e' continua in $t = 0$ mentre $i_C(t)$, che non e' variabile di stato, e' discontinua in $t = 0$; questo e' lo scenario tipico che possiamo aspettarci in una rete non degenera in corrispondenza di un istante critico.



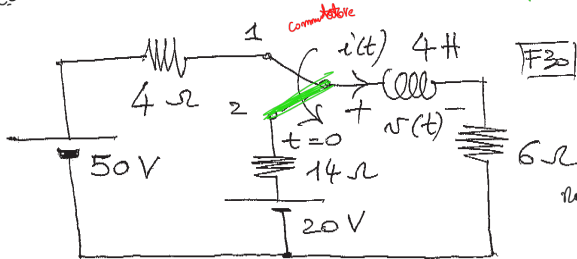
V per C e I per L ←

applica variabile di stato solo alla grandezza che lo sono...

Esempio. L'interruttore, da lungo tempo nella posizione 1, viene commutato a $t = 0$ nella posizione 2. Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$

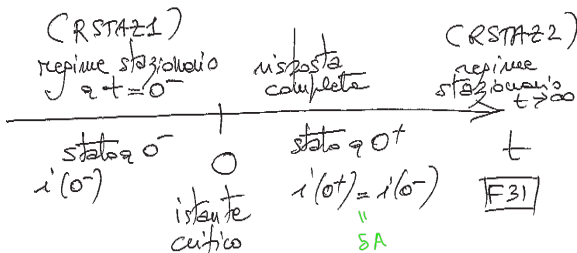
regime staz = induttore a CC.

Prima l'induttore è in regime stazionario
Dopo commutazione, transitorio



Note non degenerate,
lo stato si conserva

- consideriamo il seguente schema



- determiniamo lo stato a $t = 0^-$ considerando che il circuito ha raggiunto un regime stazionario e quindi L e' un corto circuito a $t = 0^-$; si ha

$$i(0^-) = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

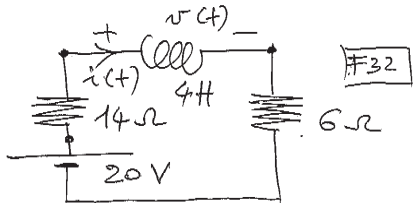
- il circuito non e' degenere per cui lo stato si conserva fra 0^- e 0^+ :

$$i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

- per $t > 0$ analizziamo il seguente circuito in evoluzione continua; si ha

$$\tau = \frac{1}{5} \text{ s}$$

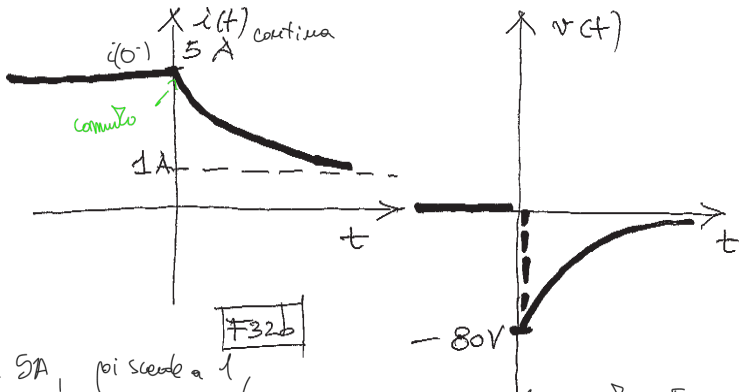
$$i(t) = i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} + \overset{\substack{\text{regime} \\ \text{staz.}}}{i(\infty)}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 5e^{-5t} + \overset{i(\infty)}{1} - e^{-5t} = 1 + 4e^{-5t}, \quad t > 0$$



- per $t > 0$ si ha anche

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -80e^{-5t} \text{ V}$$

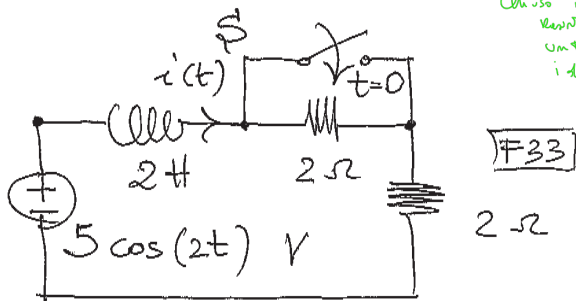
- gli andamenti di $i(t)$ e $v(t)$ sono riportati in figura; notare che $v(t)$ e' discontinua all'istante critico



Corrente 5 A , poi scende a 1 ,

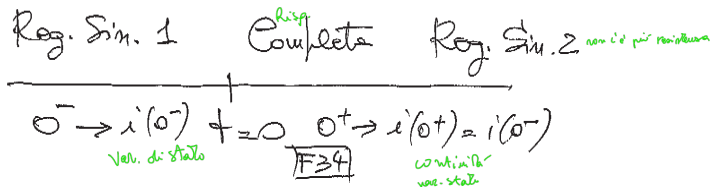
Pressione tende ad opporsi alla diminuzione di corrente, Forza controelettrica.

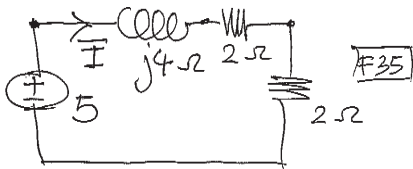
Esempio. L'interruttore S, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, $t > 0$, risposta completa.



Chiuso interruttore,
resistenza in CC, o sono
un transistor, che raccorda
i due diversi regimi

- vale il seguente schema





- determiniamo lo stato $i(0^-)$; dal circuito nel dominio dei fasori ottengo

$$\bar{I} = \frac{5}{4 + j4} = \frac{5}{8}(1 - j) \text{ A}$$

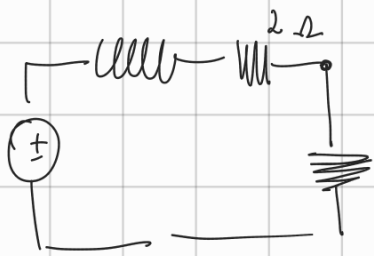
quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}e^{j0}] = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A}$$

- il circuito non e' degenere per cui

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{5}{8} \text{ A}$$

$t = 0^-$ reg. sin 1



$$\bar{I} = \frac{5}{4+j} = \frac{5}{4} \frac{1}{1+j} \stackrel{\text{moltiplica per coniugato}}{=} \frac{5}{4} \frac{1-j}{2} = \frac{5}{8} (1-j)$$

$$i(t) = \text{Re} [\bar{I} e^{j2t}]$$

$$i(0^-) = \text{Re} [\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A} \stackrel{\text{continuità - var. stato}}{=} i(0^+) \quad \checkmark$$

Chiudo ora circuito
 $t \geq 0$

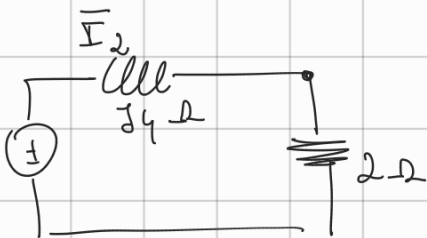
$$C = \underbrace{L + F}_{\text{Transit. Compless}} = L + T + \text{Regime sin 2} = \text{T.C.} + \text{Regime sin 2} \quad \text{soluzione dell'equazione}$$

$$i(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + I_{R2} \cos(2t + \varphi_{i2})$$

$$\tau = \frac{L}{R} = 1 \text{ sec} \quad t \geq 0$$

K si trova sempre per ultimo, fa tornare le condiz. iniziali, il regime è indipendente dalle condiz. iniziali
contorno in modo che non ci sia discontinuità in corrente

$t \rightarrow \infty$ reg. sin 2



$$\bar{I}_2 = \frac{5}{2+j4} = \frac{5}{2} \frac{1}{1+j2} = \frac{5}{2} \frac{1-j2}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j 63.4^\circ} \text{ A}$$

$$k e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ)$$

trovo k, Condiz. iniziali, C. i. $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ) \Rightarrow k \approx 0.125$$

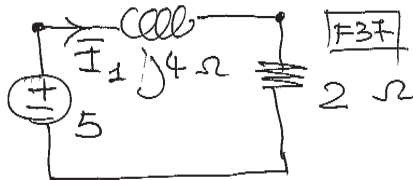
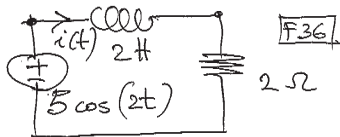
$$i(t) = 0.125 e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A} \quad t > 0$$

sol. unica dell'eq. diff.

- per $t > 0$ il circuito diventa quello in figura; si ha $C = L + F$, oppure $C = TC + R$ (regime sinusoidale), quindi

$$i(t) = ke^{-t/\tau} + I_M \cos(2t + \varphi_i)$$

con $\tau = L/R = 1$ sec



- per il secondo regime sinusoidale

$$\bar{I}_1 = \frac{5}{2 + j4} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(63.4^\circ)}$$

- quindi

$$i(t) = ke^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}$$

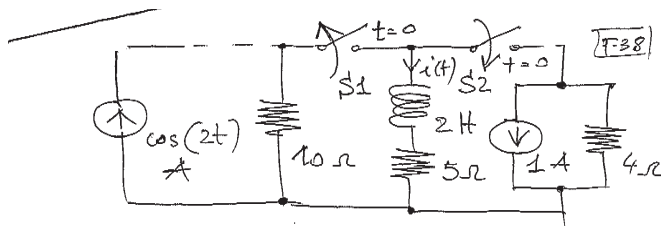
- infine determiniamo k con le condizioni iniziali

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ)$$

da cui $k \simeq 0.125$. Riassumendo

$$i(t) = 0.125e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}, \quad t > 0.$$

Esempio. L'interruttore S1, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$, mentre S2, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, per $t \geq 0$

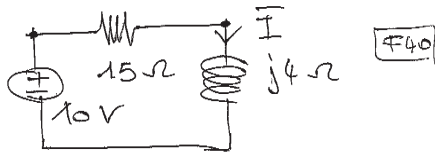
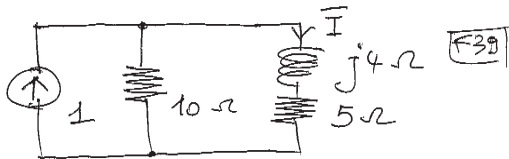


- troviamo lo stato in regime sinusoidale a $t = 0^-$; si ha

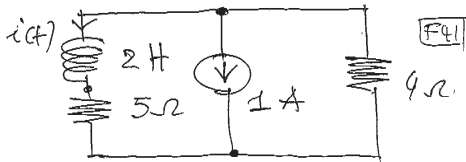
$$\bar{I} = \frac{10}{15 + j4} = \frac{10(15 - j4)}{241} \text{ A}$$

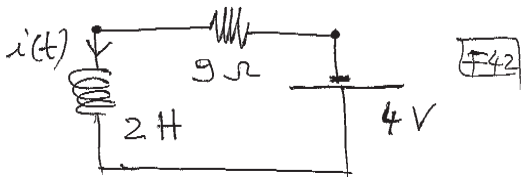
quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{150}{241} \text{ A}$$



- per $t > 0$ il circuito diviene





- quindi $\tau_{eq} = L/R_{eq} = 2/9$ sec e

$$i_{lib}(t) = i(0^+)e^{-9t/2} = i(0^-)e^{-9t/2} = \frac{150}{241}e^{-9t/2}, \text{ A}; \quad t \geq 0$$

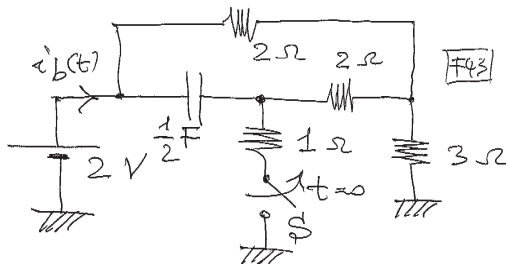
- inoltre

$$i_{for}(t) = i_{for}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{eq}})$$

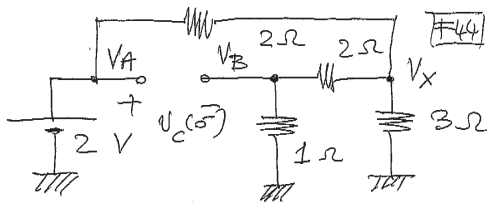
quindi

$$i_{for}(t) = -\frac{4}{9}(1 - e^{-9t/2}) \text{ A}; \quad t > 0.$$

Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.
 Determinare $i_b(t)$, per $t \geq 0$, risposta completa



- consideriamo il circuito in regime stazionario a $t = 0^-$



- si ha $v_C(0^-) = V_A - V_B$, inoltre

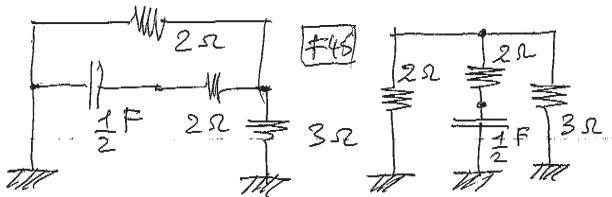
$$V_x = 2 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7} \text{ V}; \quad V_B = \frac{V_x}{3} = \frac{2}{7} \text{ V}$$

quindi $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12/7 \text{ V}$ (rete non degenere)

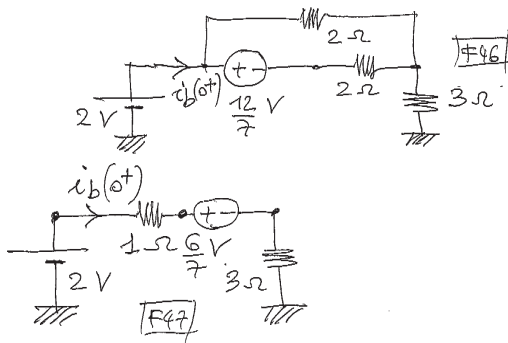
- per $t > 0$ si ha

$$i_b(t) = i_b(0^+)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_b(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- per τ_{eq} considero il seguente circuito, per cui $\tau_{eq} = 8/5 \text{ sec}$



- si ha $i_b(\infty) = 2/5$ A (... disegnare il circuito per $t > 0$ e verificare)
- per $i(0^+)$ considero l'istantanea a 0^+



- allora dalla KV ottengo $2 = 4i_b(0^+) + 6/7$, quindi $i_b(0^+) = 2/7$
- A. Riassumendo

$$i_b(t) = \frac{2}{7}e^{-\frac{5t}{8}} + \frac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{8}}) \text{ A}; \quad t > 0.$$