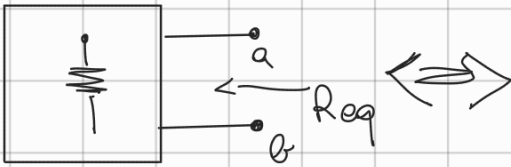
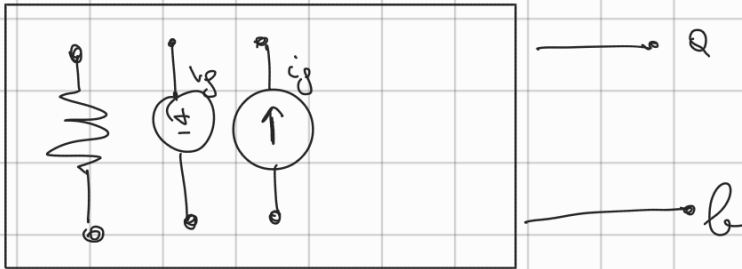


Bipolo omogeneo

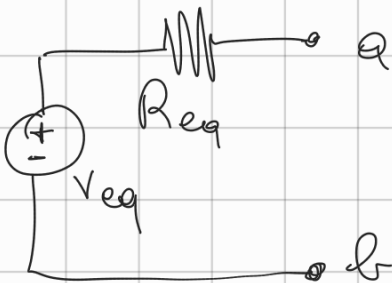


no gen vi indipendenti di v o i

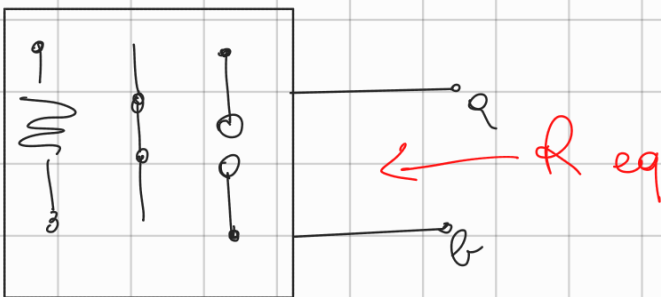


Bipolo senza memoria
è lineare
 non singolare
 contiene generatori indipendenti

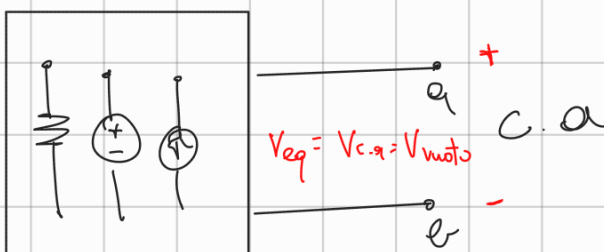
Stessa Relaz. costitutiva



① Misura di R_{eq} , spegno i generatori



Bipolo ausiliario associato



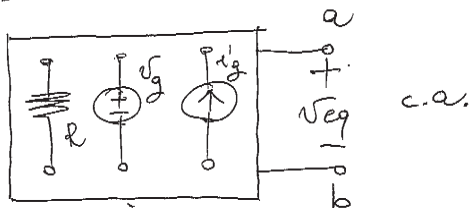
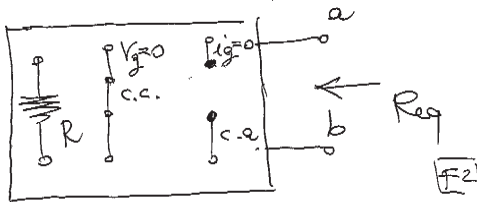
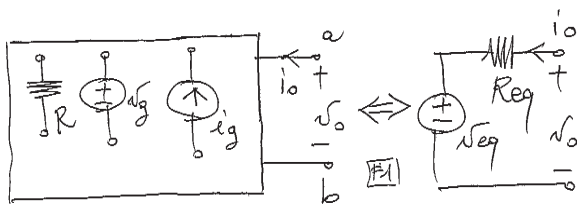
- Teorema di Thevenin e di Norton
- I teoremi permettono di ottenere una rappresentazione molto utile di bipoli lineari non omogenei che contengono resistori lineari e generatori indipendenti di tensione o corrente

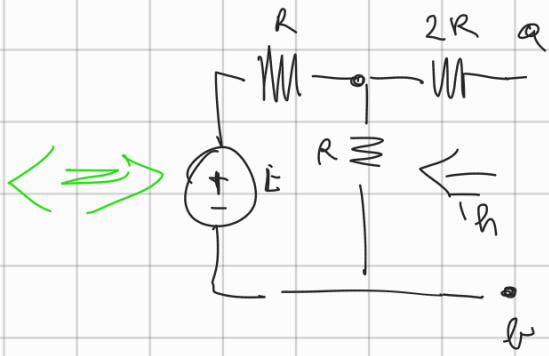
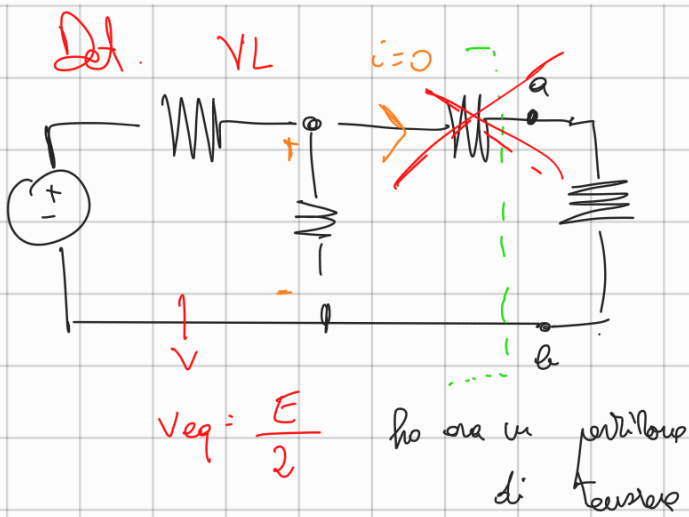
• **Teorema di Thevenin.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Il bipolo e' equivalente a una resistenza equivalente R_{eq} in serie a un generatore di tensione equivalente v_{eq} cosi' definiti:

- R_{eq} : resistenza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- v_{eq} : tensione ai morsetti ab quando sono lasciati a circuito aperto

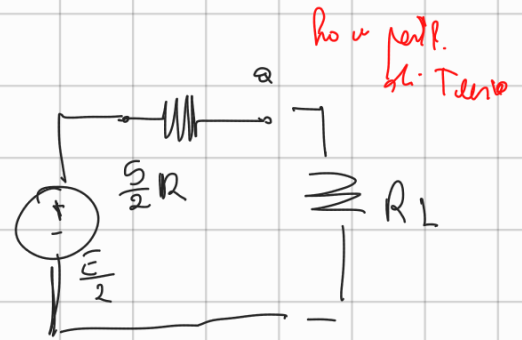
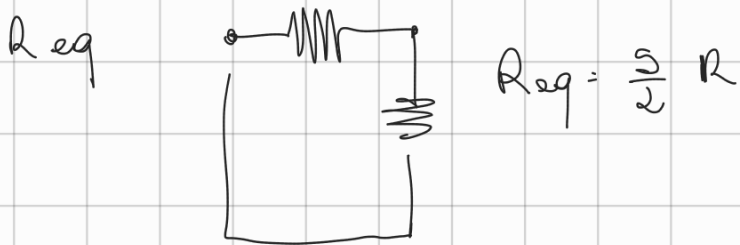
$$v_{eq} = v_{c.a.} = v_{vuoto} \quad \text{Tensione a vuoto}$$

- Usando uno schema a blocchi





$$V_{eq} = V_{c.a.}$$

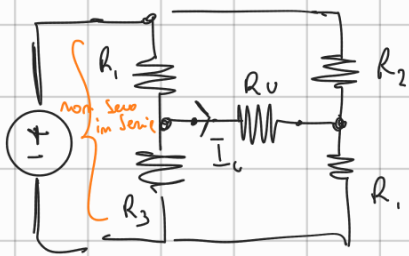


$$V_L = \frac{E}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{5}{2} R}$$

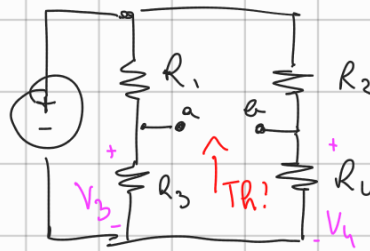
after para

Altro esempio

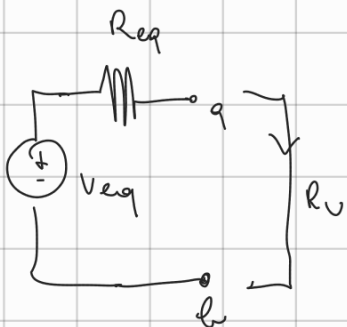
Rv e a ponte



I_u



*interruppo e due
maglie, non
è più un circuito
a ponte*



$$I_u = \frac{V_{eq}}{R_{eq} + R_v}$$

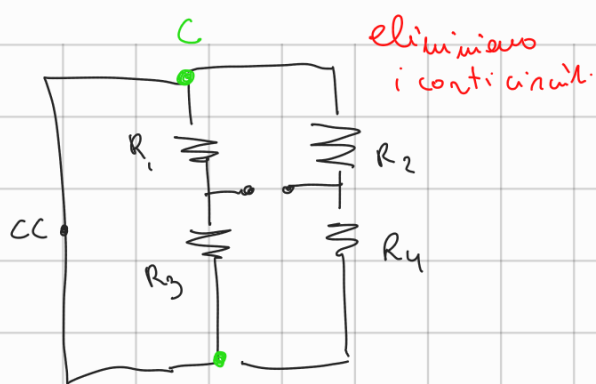
$$= V_{eq} + V_3 - V_4 = 0$$

$$V_{eq} = V_3 - V_4$$

R1 e R3 in serie as partitore Tensione

$$\begin{cases} V_3 = E \frac{R_3}{R_1 + R_3} \\ V_4 = E \frac{R_4}{R_2 + R_4} \end{cases}$$

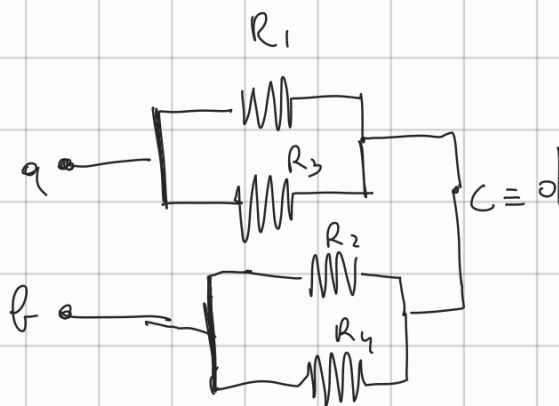
$$V_{eq} = E \left[\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right]$$



$C \equiv D$, collegati con corto circuito

eliminazione di CC

$\Rightarrow$



$$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

Ponte Bilanciato Se $I_0 = 0$

$$I_0 = \frac{V_{eq}}{R_{eq} + R_0}$$

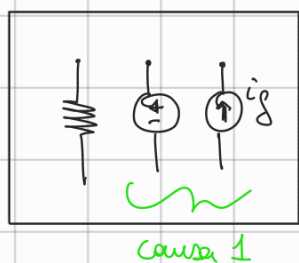
$$\Downarrow V_{eq} = 0 \Leftrightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3$$

$$V_{eq} = e [R_3(R_2 + R_4) - R_4(R_1 + R_3)] = e R_2 R_3 - R_1 R_4$$

es.

$\nearrow$ Questo un potenziometro e non è bilanciato. $I_0 \neq 0$
cioè ponte sbilanciato.

C'è una dimostrazione!!!



Applico un generatore di corrente

essendo il circuito lineare, uso PSE per trovare V_0

Le cause sono i generatori indip. Rappresento le cause interne

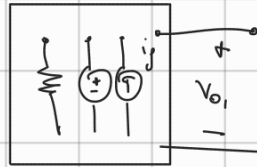
Causa 1: gen. indep interni al dipolo

Causa 2: gen. esterno

$$V_o = V_{o1} + V_{o2}$$

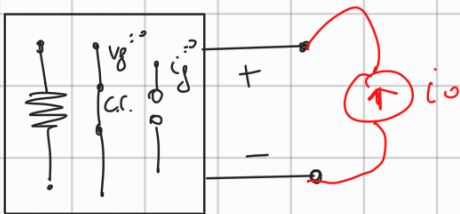
eff. gen. interni *eff. gen. esterno*

$V_{o1} =$ *spengo il gen. esterno* $= V_{eq}$



$$V_{o1} = V_{eq} = V_{C.A.}$$

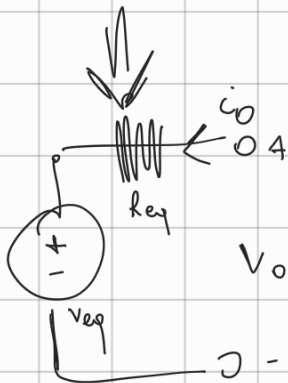
Spengo gen. interni



Dipolo aperto associato

$$V_{o2} = R_{eq} i_o$$

$$\Rightarrow V_o = V_{eq} + R_{eq} i_o$$



$$V_o = R_{eq} i_o + V_{eq}$$

deve essere valida la linearità

*↓
Fusione per il Dipolo
sia controllabile in corrente*

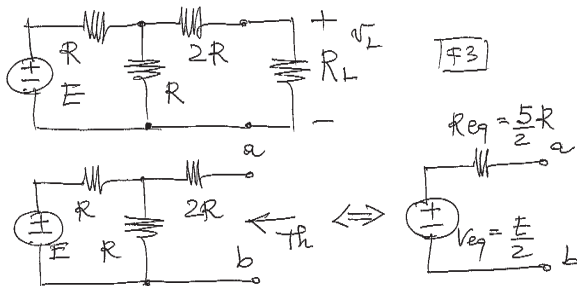
Theremin esiste $\Leftrightarrow$ Dipolo controll. in corrente

Dato i_o , posso trovare V_o

Da trovare lo Q_{im}

Esempio. Determinare v_L con il Teorema di Thevenin

del caso
generale

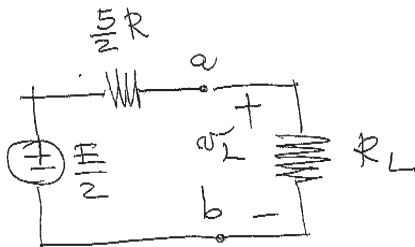


• scollegiamo il carico R_L e troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; notiamo che il resistore $2R$ e' appeso (non vi passa corrente); quindi e' immediato determinare Thevenin: si ha

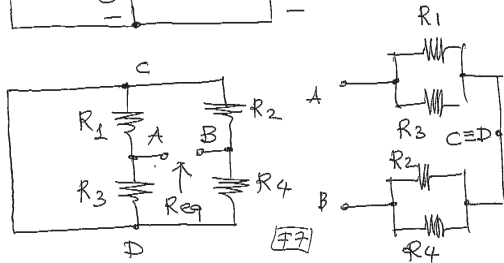
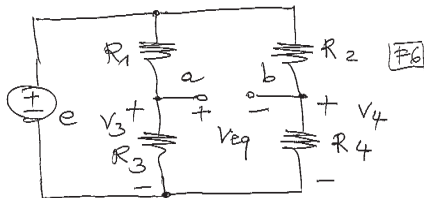
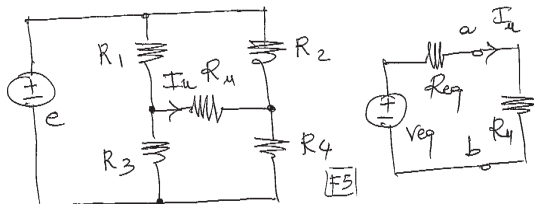
$$R_{eq} = \frac{5}{2}R; \quad v_{eq} = \frac{E}{2} \quad \text{da partizione di tensione}$$

- a questo punto ricollego il carico R_L ; dalla regola del partitore di tensione otteniamo

$$v_L = \frac{E}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{5}{2}R}$$



Esempio. Determinare la corrente I_u per il circuito a ponte in figura



- colleghiamo R_u e determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; si ha usando la regola del partitore di tensione

$$v_{eq} = V_3 - V_4 = e \frac{R_3}{R_1 + R_3} - e \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

- per determinare R_{eq} disattivo il gen.re di tensione sostituendolo con un corto circuito; 'semplifico' il corto circuito che collega i nodi C e D e ridisegno il bipolo; a questo punto e' facile vedere che

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

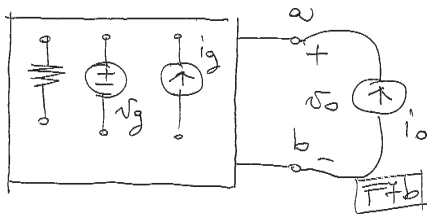
- reinserendo R_u si trova che

$$I_u = \frac{v_{eq}}{R_{eq} + R_u}$$

- verificare che il ponte e' bilanciato ($I_u = 0$) se e solo se $R_1 R_4 = R_2 R_3$

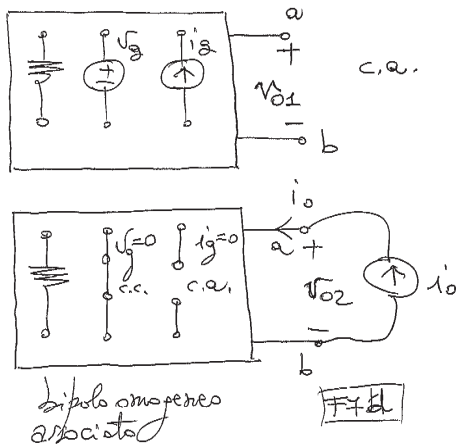
Dimostrazione del Teorema di Thevenin

- alimento il bipolo ab con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 e determino la tensione v_0 usando il pse; cio' e' possibile in quanto la rete e' *lineare*



- raggruppo le cause in due insiemi: causa 1 e' data da tutti i gen.di di tensione e corrente interni al bipolo; causa 2 e' data dal gen.re di corrente esterno i_0 ; dal pse si ha

$$v_0 = v_{01} + v_{02}$$



disattivando i_0 si trova che $v_{01} = v_{c.a.} = v_{eq}$; disattivando i gen.ri interni al bipolo trovo invece che $v_{02} = R_{eq}i_0$; quindi

$$v_0 = v_{01} + v_{02} = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

che e' la stessa relazione costitutiva del bipolo di Thevenin (verificare)

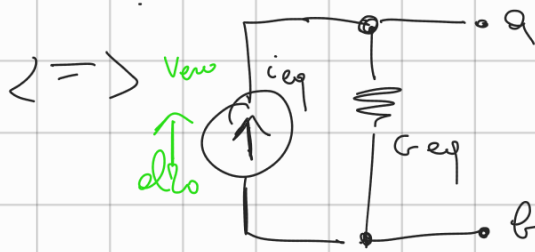
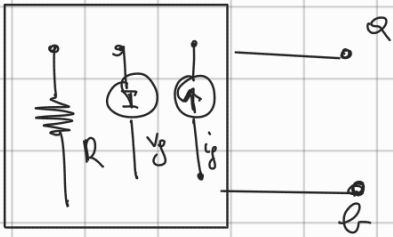
- **Importante.** Dalla dimostrazione si nota che l'equivalente di Thevenin esiste purché il bipolo ab sia *controllabile in corrente*

Con Thevenin abbiamo ottenuto una rappresentazione di un bipolo tramite un generatore reale di tensione. Con Norton, dualmente, e sotto opportune ipotesi, otteniamo una rappresentazione tramite un generatore reale di corrente

• **Teorema di Norton.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Supponiamo che il bipolo sia controllabile in tensione. Allora il bipolo e' equivalente a una conduttanza equivalente G_{eq} in parallelo a un generatore di corrente equivalente i_{eq} cosi' definiti:

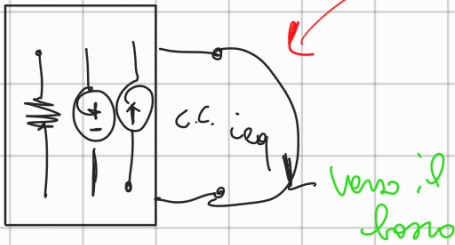
- G_{eq} : conduttanza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- i_{eq} : corrente ai morsetti ab quando sono chiusi in corto circuito

$$i_{eq} = i_{c.c.}$$



controllo
in Tensione

i_{eq} = corrente di cortocircuito

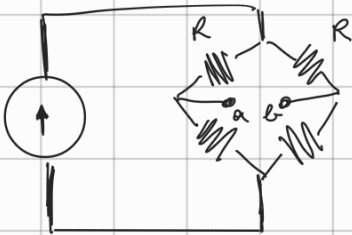


$$i_{c.c.} = \frac{V_{c.a.}}{R_{eq}}$$

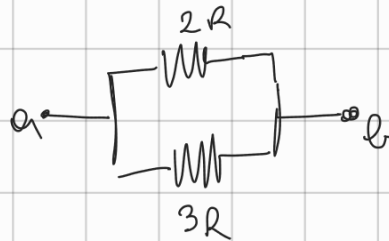
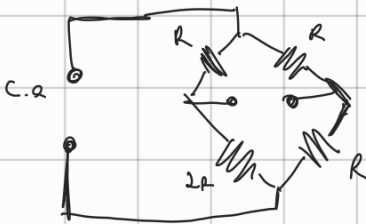
$$R_{eq} = \frac{V_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

$$R_{eq} = \frac{V_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

Esercizio



$$G_{eq} =$$

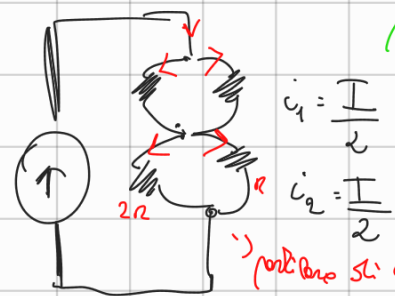


$$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} =$$

Corrente di cortocircuito



risolvere il circuito verso a e b



la corrente
si divide,
per il
gli corrente

$$i_1 = \frac{I}{2}$$

$$i_2 = \frac{I}{2}$$

potrebbe si corrente
o anche per 1/3, 1/4

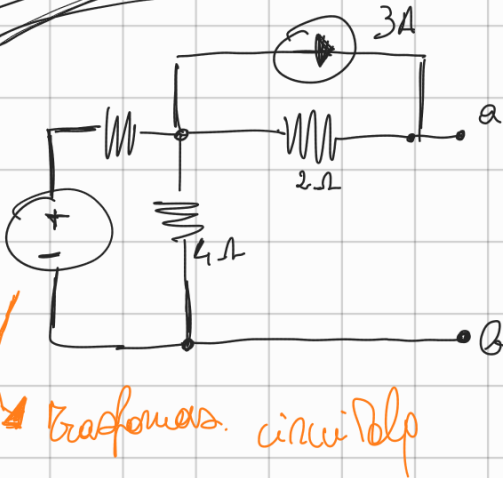
Per la più corrente della resistenza più piccola

$$i_8 = I \frac{\frac{1}{2} R}{\frac{1}{2} R + \frac{1}{2}} \Rightarrow i_3 = \frac{1}{3} I$$

$$i_4 = \frac{2}{3} I$$

eq. di Norton è dunque $\Rightarrow$

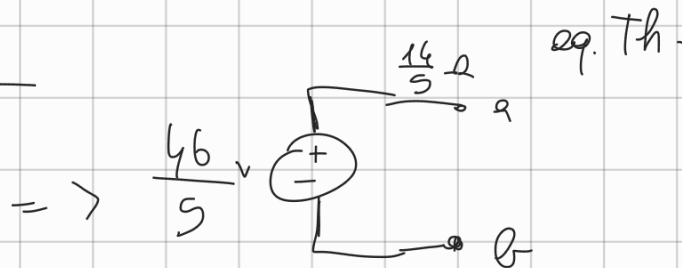
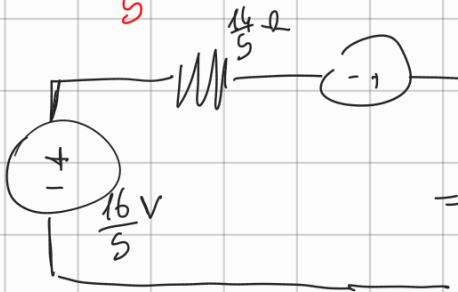
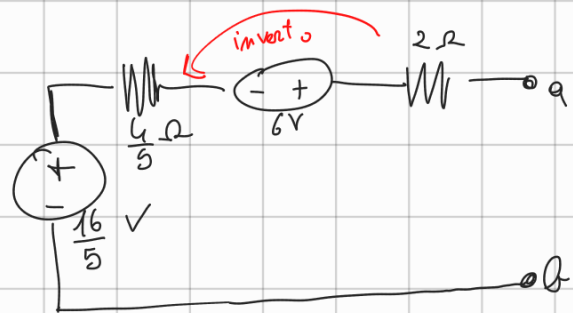
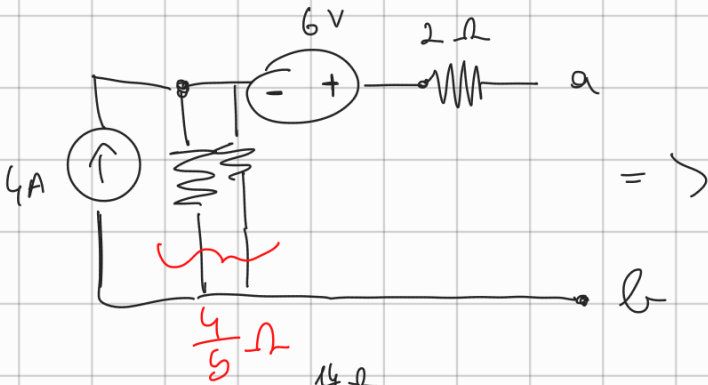
l'equivalente di Norton è dunque il seguente



Trovare equivalente di Norton

Def. per casa

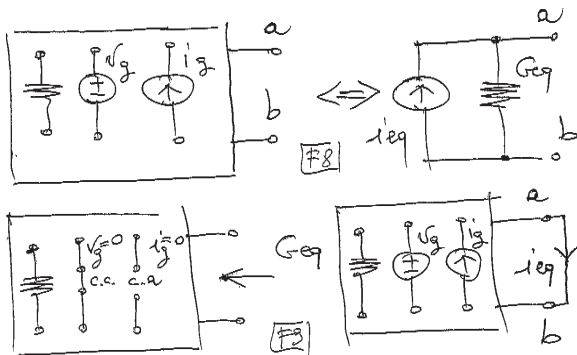
le equivalenti se esistono sono uniche



eq. Norton



- Usando uno schema a blocchi

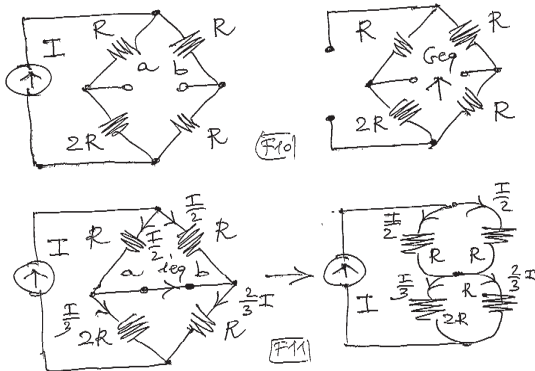


- per esercizio provare a dimostrare il teorema usando il pse
- Nota: se un bipolo e' controllabile sia in corrente che in tensione si ha

$$i_{c.c.} = \frac{v_{c.a.}}{R_{eq}}; \quad v_{c.a.} = R_{eq} i_{c.c.}; \quad R_{eq} = \frac{v_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

Trace

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo ab



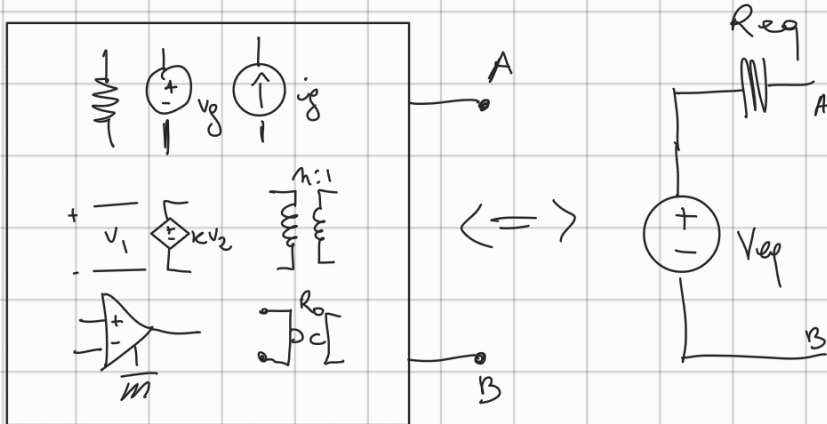
- si ha

$$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$$

- notiamo poi che dalla regola del partitore di corrente si ha

$$i_{eq} = \frac{I}{2} - \frac{I}{3} = \frac{I}{6}.$$

Thevenin, Norton bipoli che contengono generatori controllati e/o a.o.

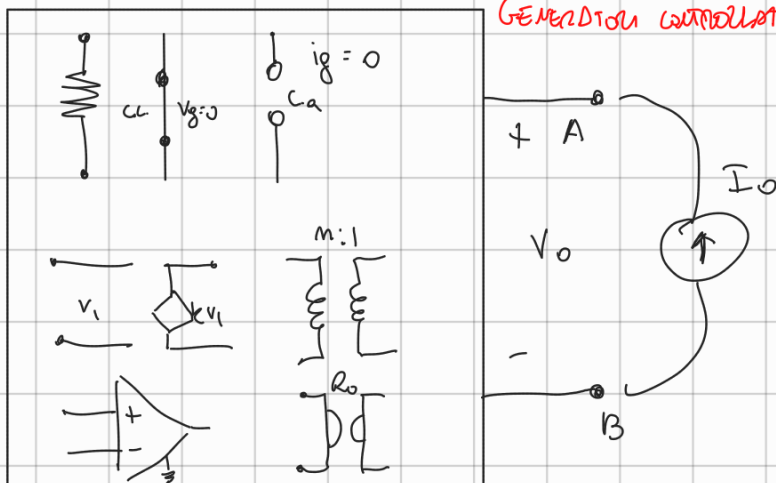


V_{eq} = Tensione a circuito aperto A, B

Bipolo LINEARE NON OMogeneo

(ci sono generatori controllati all'interno)

NON SPEGNERE GENERATORI CONTROLLATI

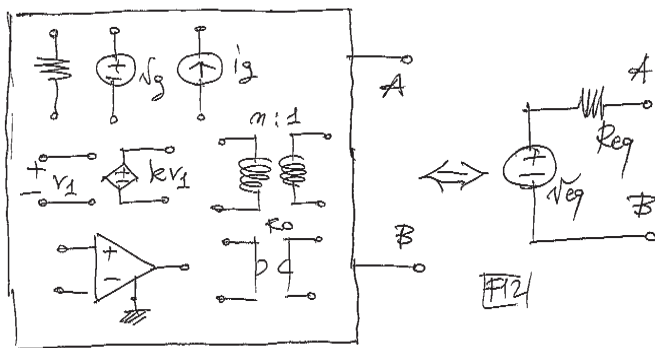


$$R_{eq} = \frac{V_o}{I_o}$$

Bipolo OMogeneo associato

Presenza di generatori controllati e ao

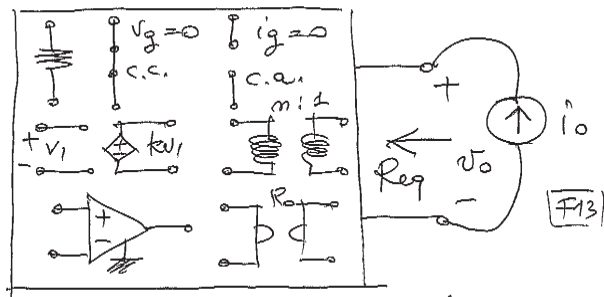
- I teoremi di Thevenin e Norton sono facilmente estendibili al caso importante in cui il bipolo contiene generatori controllati e/o ao ideali; ci sono però alcune cose da evidenziare



- supponiamo che il bipolo sia controllabile in corrente; vale ancora enunciato Teorema di Thevenin; la definizione di v_{eq} e R_{eq} è la stessa data in precedenza

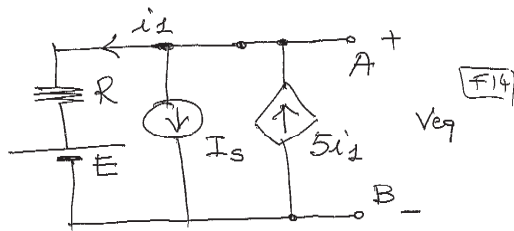
- c'è da fare molta attenzione a come si valuta la R_{eq} ; a tal fine
- 1) disattivo i generatori indipendenti di tensione e corrente
 - 2) *non disattivo* i generatori controllati
 - 3) lascio così come sono gli ao
 - 4) ottengo così il bipolo omogeneo associato per il quale applicando i_0 e valutando v_0 ottengo

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0}$$



bipolo OMogeneo associato

Esempio. Determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo AB



- la tensione equivalente e' direttamente valutabile dal circuito di partenza e si ha usando Millmann

$$v_{eq} = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_{eq} = Ri_1 + E$, quindi

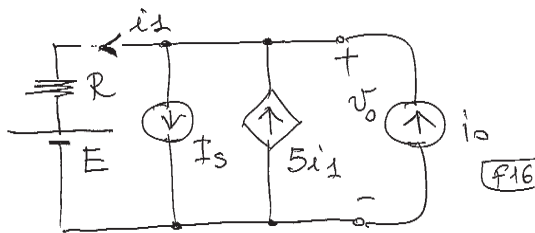
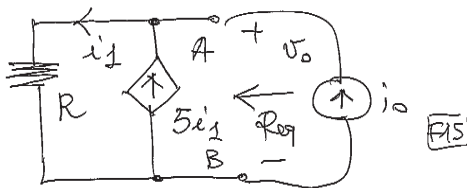
$$i_1 = \frac{v_{eq} - E}{R}$$

facendo sistema

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s$$

- per la resistenza equivalente considero il seguente circuito per il quale $i_0 = -5i_1 + i_1$ e $i_1 = v_0/R$ da cui

$$R_{eq} = -\frac{R}{4}$$



Secondo metodo risolutivo (determino insieme v_{eq} e R_{eq}); alimento il bipolo di partenza con un gen.re ind.te di corrente i_0 ; si ha

$$v_0 = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1 + i_0}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1 + Ri_0$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_0 = Ri_1 + E$, quindi

$$i_1 = \frac{v_0 - E}{R}$$

facendo sistema otteniamo

$$v_0 = E + \frac{R}{4}I_s - \frac{R}{4}i_0$$

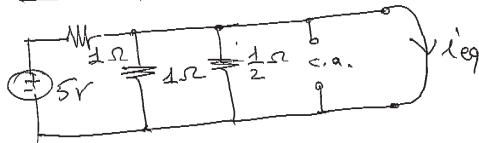
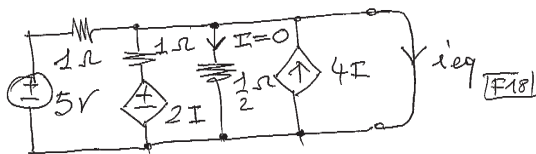
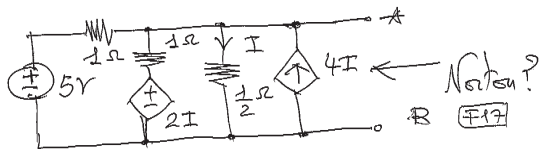
- se confrontiamo con la relazione costitutive

$$v_0 = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

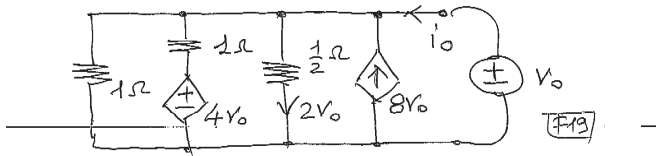
del bipolo equivalente di Thevenin otteniamo

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s; \quad R_{eq} = -\frac{R}{4}$$

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo



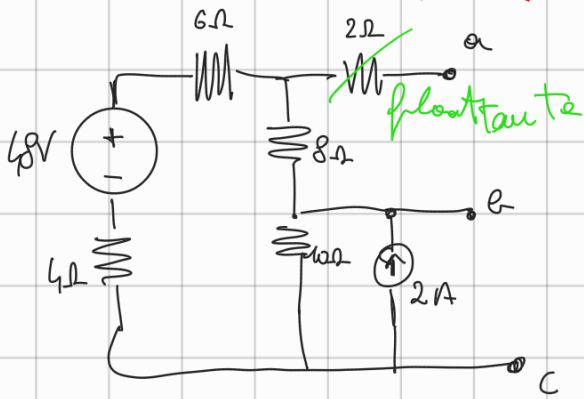
- per $i_{c.c.}$ notare che si ha $I = 0$ dato che la resistenza da $1/2$ Ohm e' cortocircuitata; quindi possiamo semplificare come mostrato; ne consegue facilmente che $i_{c.c.} = 5 \text{ A}$



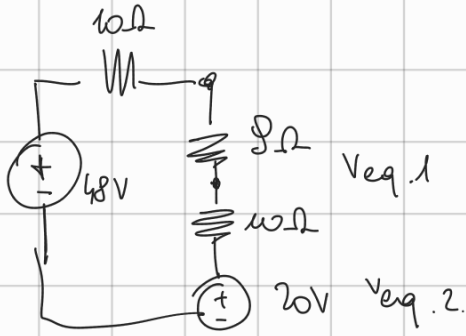
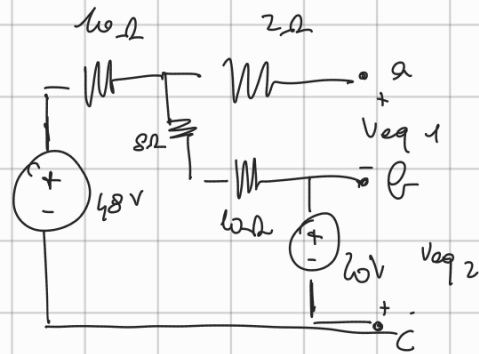
• valutiamo adesso G_{eq} ; si ha $I = 2v_0$ da cui scrivendo una KI per la linea Gaussiana indicata otteniamo
 $i_0 = v_0 + v_0 - 4v_0 + 2v_0 - 8v_0$; quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = -8 \text{ Ohm}^{-1}.$$

altori es. Random



=>



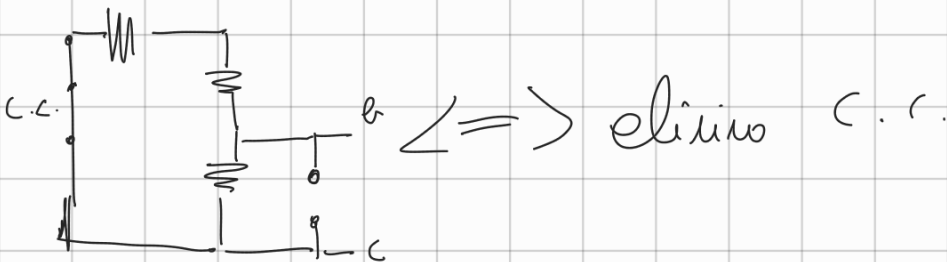
Pi es. 4

$$KV = -48 + 10i + 8i + 10i + 20 = 0$$

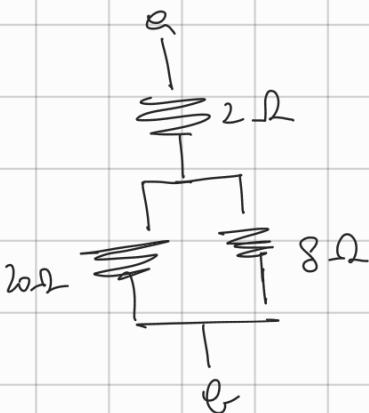
$$i = 1A$$

$$V_{eq, ab} = 8i = 8V$$

$$V_{eq, bc} = 10i + 20 = 30V$$

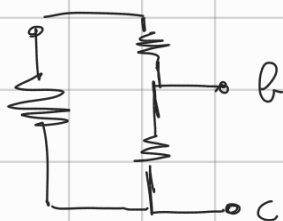


=> elimino c.c.



$$R_{eq, ab} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 7,71 \Omega$$

Poi ...



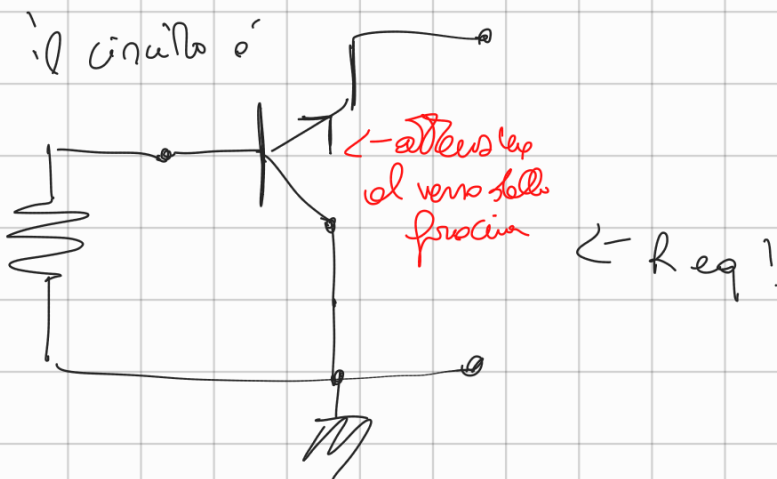
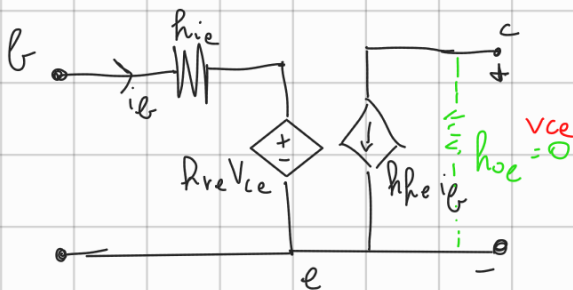
$$R_{eq, bc} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{18}} = \frac{180}{28} = 6,43 \Omega$$

Resistenza equivalente, caso transistor (un pochino più difficile)

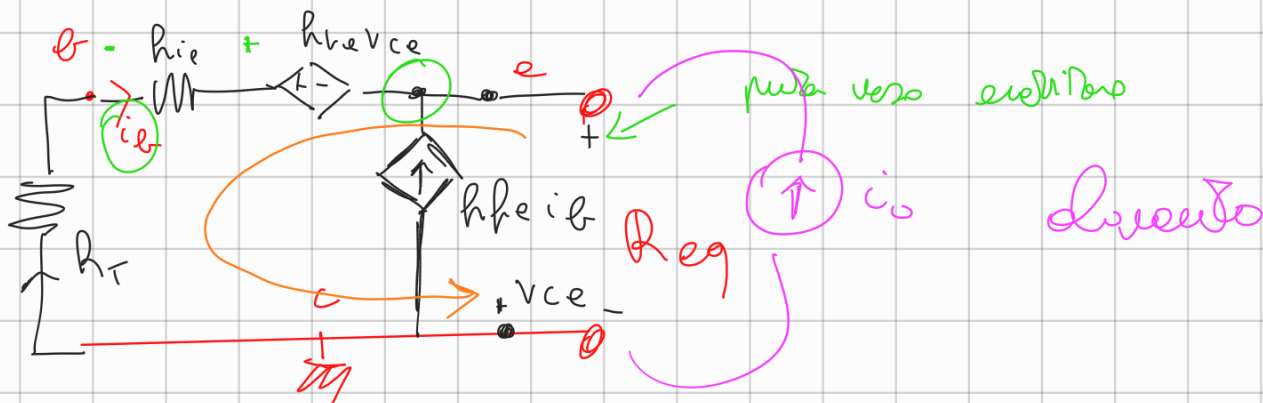
Esercizio da compilare, con un BJT

Sempre P, esercitazione

Conduttanza = 0, circuito aperto



Sostituire il modello



$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o}$$

• Determina gradatamente i controlli V_{ce} , i_b , esprimi funzione di

$$h_{ie}, h_{fe}, h_{re}, h_{oe} = 0 \quad i_o, v_o$$

$$V_{ce} = -V_o$$

$$i_b + h_{fe} i_b + i_o = 0$$

$$i_b = \frac{-i_o}{1+h_{fe}}$$

ora esprimi V_o in funzione di i_o

Scrivo KV lungo la maglia

$$K_V = -V_o - h_{ve} V_{ce} - h_{ie} i_b - R_T i_e = 0$$

$$V_o = -R_{re} V_{ce} - (h_{ie} + R_T) i_b$$

ora sostituisco

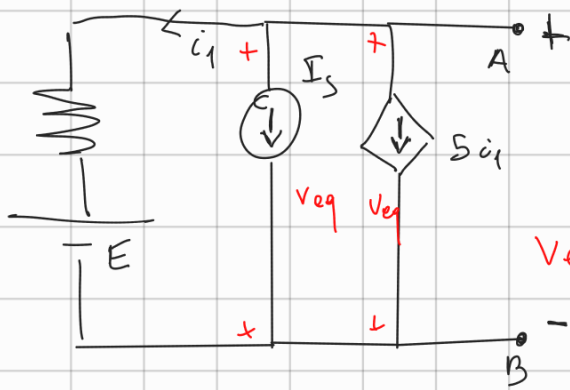
$$V_o = h_{ve} V_o + \frac{h_{ie} + R_T}{1+h_{fe}} i_o$$

$$V_o (1 - h_{ve}) = \frac{h_{ie} + R_T}{1+h_{fe}} i_o$$

$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o} = \frac{h_{ie} + R_T}{1+h_{fe}}$$

$$R_{eq} \approx \frac{h_{ie} + R_T}{h_{fe}}$$

Da Lavo. 7, Corso Thevenin / Norton generati circuito e/o q.o.



Con definizione di V_{eq} e R_{eq}

non deve esserci i_1 eliminando lo generatore di controllo

? Il bipolo AB

Millmann:

$$V_{eq} = \frac{\frac{E}{R} - I_s - 5i_1}{\frac{1}{R}} = E - RI_s - 5Ri_1$$

Annotations:
 - $\frac{E}{R}$: Come al c.c.
 - $-I_s$: verso il basso
 - $-5i_1$: facciano parte sia i_1
 - $5Ri_1$: non considero i_1 , serve altra eq indipendente

Scrivo KV per eliminare i_1

$$V_{eq} = Ri_1 + E \Rightarrow i_1 = \frac{V_{eq} - E}{R}$$

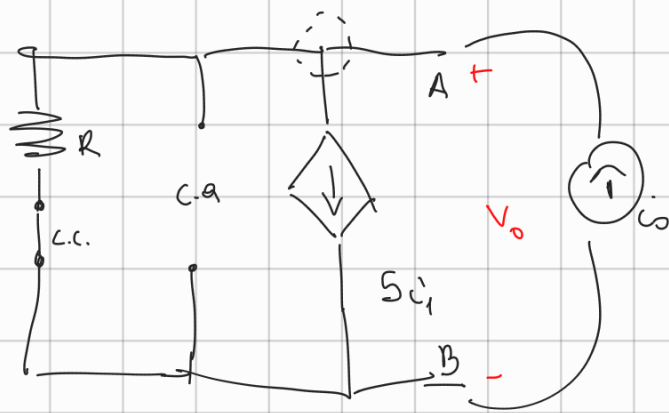
sostituisco

$$V_{eq} = E - RI_s - 5V_{eq} + 5E$$

$$6V_{eq} = 6E - RI_s$$

$$V_{eq} = E - \frac{R}{6} I_s$$

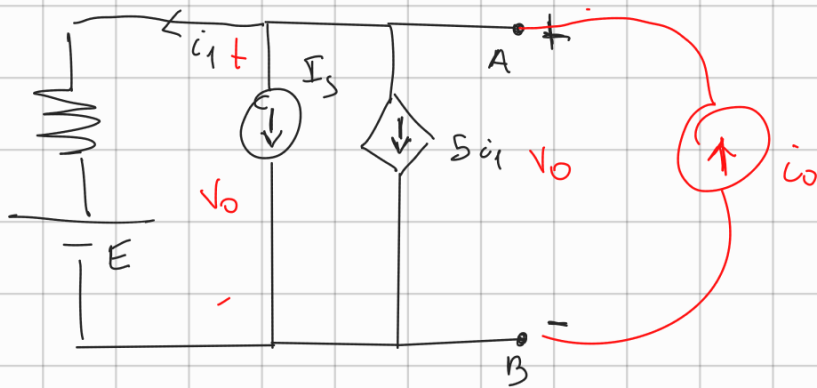
R equivalente, il CCS ottenuto in modo sostituendo la R_{eq}



$$i_o = 6i_1 = \frac{6}{R} V_o$$

$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o} = \frac{R}{6}$$

② Metodo variazio: Provare insieme V_{eq} e R_{eq} *almeno* *direttamente il circuito come circuito Th*



$$V_o = R_{eq} i_o + V_{eq}$$

$$V_o = a i_o + b$$

$\downarrow$ $\downarrow$
costante $\swarrow$

$$a = R_{eq} \quad b = V_{eq}$$

MILLMAN

$$V_o = \frac{\frac{E}{R} - I_s - 5i_1 + i_o}{\frac{1}{R}}$$

over ho anche lui

$$= E - RI_s - 5Ri_1 + Ri_o$$

Kirchof sulla prima maglia

$$V_o = Ri_1 + E \Rightarrow i_1 = \frac{V_o - E}{R}$$

$$V_o = E - RI_s - 5V_o + 5E + Ri_o$$

$$6V_o = 6E - RI_s + Ri_o$$

$$V_o = \frac{R}{6} i_o + E - \frac{R}{6} I_s \Leftrightarrow R_{eq} i_o + V_{eq}$$

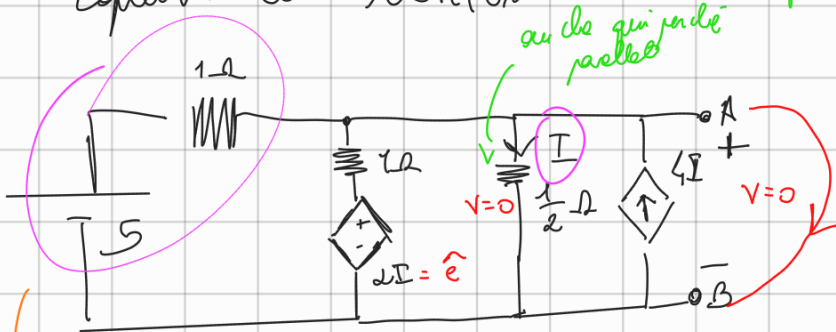
$$R_{eq} = \frac{R}{6}$$

$$V_{eq} = E - \frac{R}{6} I_S$$

Equiv. di Norton

più facile usare Norton

$$\Rightarrow I = \frac{V}{\frac{1}{2}} = 0, \text{ grande lo controlla e' } 0$$

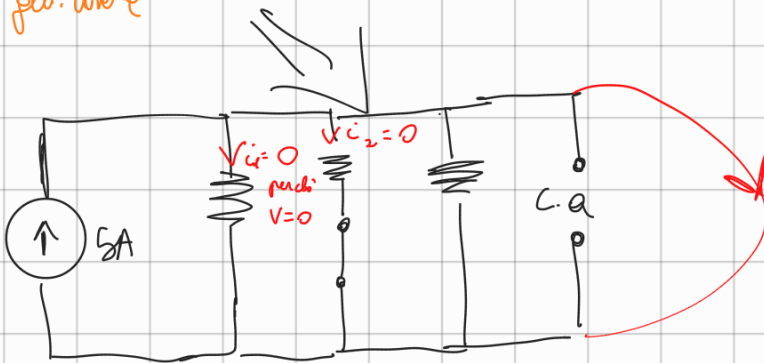


$$I_{eq} = i.c.c.$$

2 = transresistenza, tensione imposta sui suoi soli

? Norton Bipolo AB con definizione

V
Vossano
in gen. un'ora

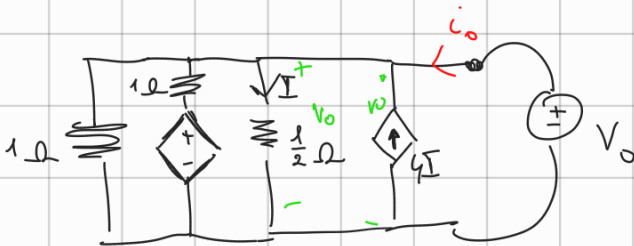


corto circuito,
come conduttore
infinito

$$I_{eq} = 5A$$

la corrente va tutta al cortocircuito

R_{eq} , spezzo i generatori ind. e tolgo C.C.



(o la trova o
la elimino)

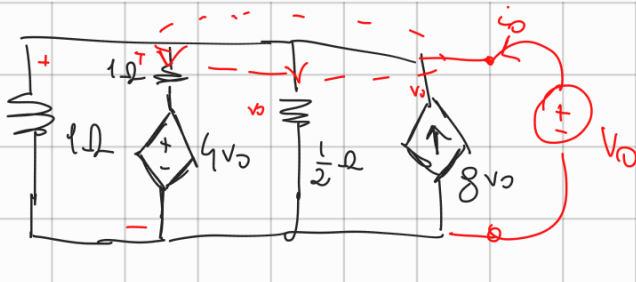
$$G_{eq} = \frac{I_0}{V_0}$$

Trovo la grandezza di controllo

considero V_0

$$I = \frac{V_0}{\frac{1}{2}} = 2V_0 A$$

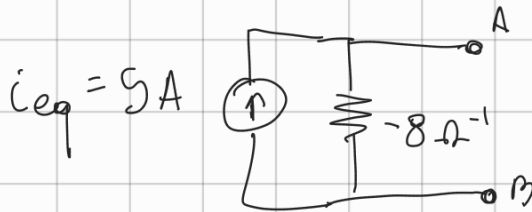
ma i generatori zero dipendono,
perché ho trovato la grandezza



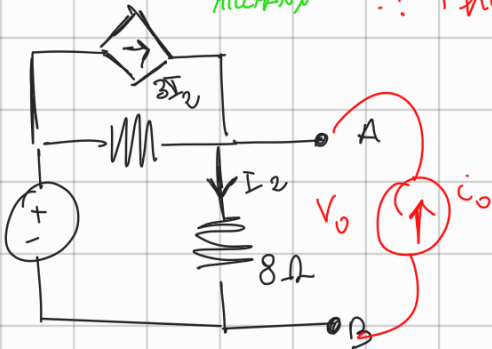
$$i_o = \frac{V_o}{1} + \frac{V_o - 4V_o}{1} + 2V_o - 8V_o = 8V_o$$

$$G_{eq} = \frac{i_o}{V_o} = -8 \Omega^{-1}$$

$\Rightarrow$ eq. di Norton



Non posso ancora usare Millman ?? Thevenin, Norton bipolo AB

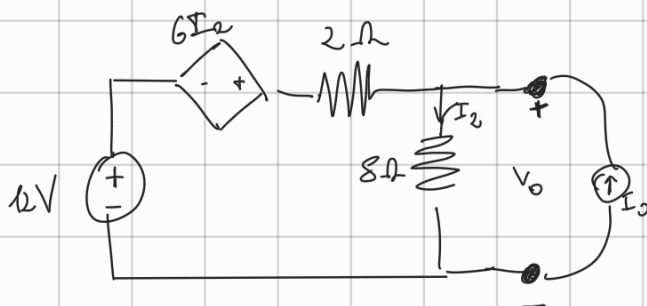


$$V_o = aI_o + b$$

grandezza di controllo

$$I_2 = \frac{V_o}{8}$$

$$\left(V_2 = \frac{3I_2}{\frac{1}{2}} = 6I_2 \right)$$



Applico Millman

$$V_o = \frac{\frac{6I_2 + 12}{2} + i_o}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{6}{8} \cdot V_o + 12}{2} + i_o \Rightarrow$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow V_o = 24 + 4i_o$$

$$V_{eq} = 24 \text{ V}$$

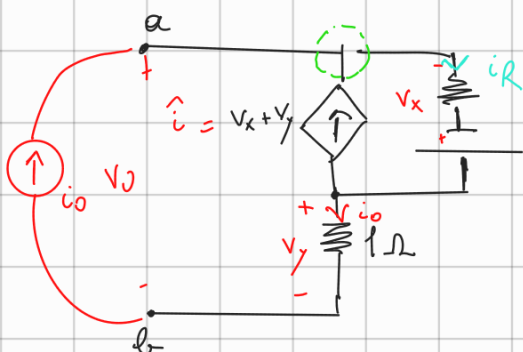
$$R_{eq} = 4 \Omega$$

l'equivalente di Norton

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} \Omega^{-1}$$

$$i_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = \frac{24}{4} \text{ A} = 6 \text{ A}$$

~~##~~ ESERCIZIO PRESO DA UN COMPITO (di un po' di tempo fa...)



usiamo metodo rapido

$$\hat{i} = 1(v_x + v_y)$$

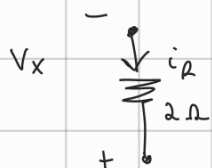
Scriviamo v_x, v_y in funzione delle grandezze note, così il generatore controllato diventa indipendente

$$v_y = 1 \cdot i_o = i_o$$

$\Rightarrow$ KI anche in ab

$$KI \quad i_o + v_x + v_y = i_R = -\frac{1}{2} v_x$$

$\Rightarrow$ concentriamoci sulla resistenza



Cones. generata

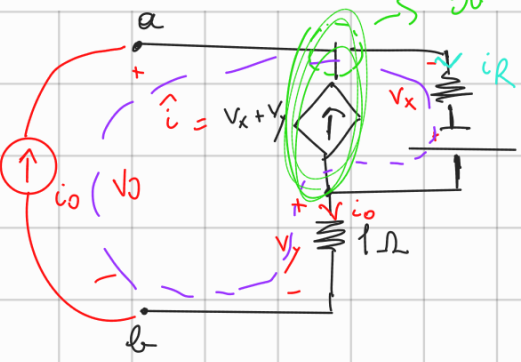
$$2i_o = i_o + i_o = -\frac{3}{2} v_x$$

$$\Rightarrow v_x = -\frac{4}{3} i_o$$

ma ho tutto, ho eliminato le grandezze di controllo

Prendo come risposta per KV la meglio complessiva

di qui non conosco la tensione



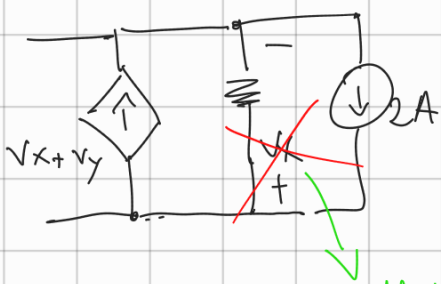
KV: $-V_0 - V_x - 1 + V_x = 0$

$-V_0 + \frac{1}{2} i_0 - 1 + i_0 = 0$

$\frac{3}{2} i_0 - 1 = V_0$

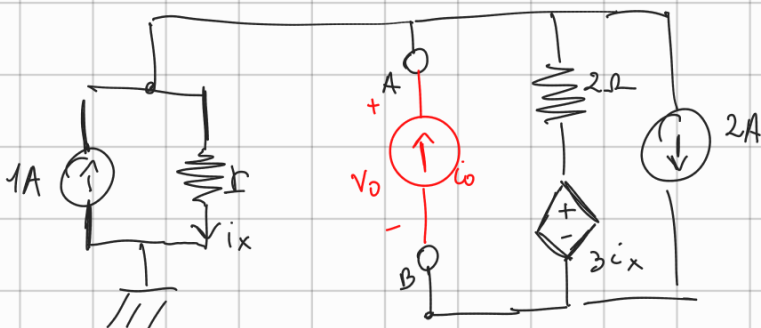
R_{eq} V_{eq}

e se avessi trasformato in un generatore di corrente?

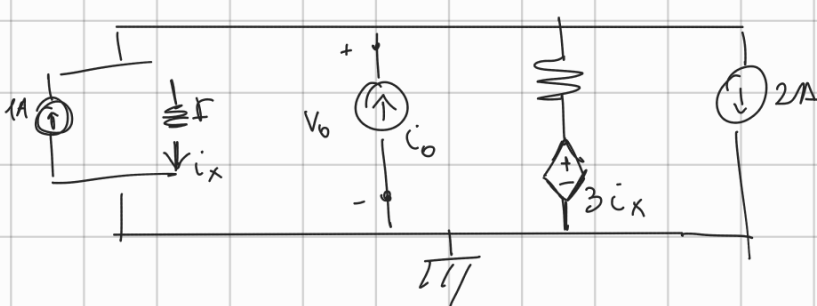


NON TRASFORMARE MAI LE PARTI CON LE GRANDEZZE DI CONTROLLO

NON E' vero, ho perso di vista la variabile di controllo



faccio un unico collegamento a terra



altrimenti, i_0

$g = \frac{1}{R}$

$i_x = g V_0$

$V_0 = \frac{1 + i_0 + \frac{3}{2} i_x - 2}{g + \frac{1}{2}}$

$$= \frac{1 + i_o + \frac{3}{2} g v_o - 2}{g + \frac{1}{2}} = \frac{2 + 2i_o + 3g v_o - 4}{2g + 1}$$

$$\Rightarrow v_o 2g + v_o = 2 + 2i_o + 3g v_o$$

$$v_o = -2 + 2i_o + g v_o$$

$$v_o(1-g) = 2 - 2i_o$$

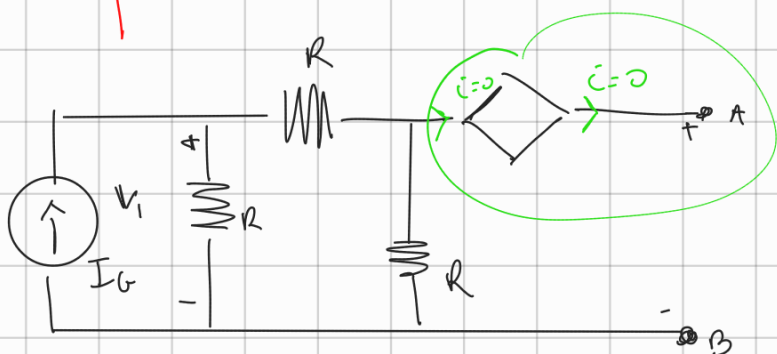
Se $g = 1 \Rightarrow 0 = 2 - 2i_o \Rightarrow i_o = 1$

Non è controllabile in Tensione, e ha 1 eq

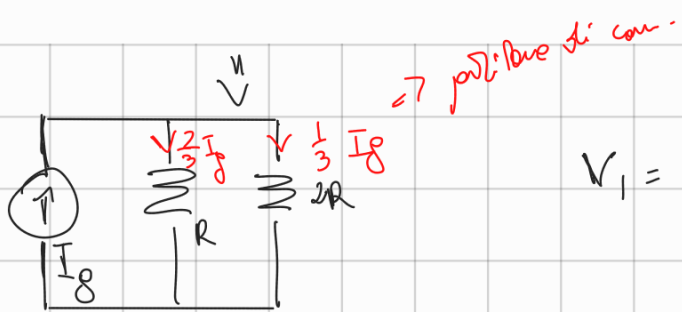
retto i_o nel circuito, e il unico "indice" che $i_o = 1$... non controllabile

il sistema è controllabile in corrente
(v_o in funzione di i_o) se $g \neq 1$

impostiamo altro esercizio $V_{eq} Th??$



Circuito aperto,
è aperto



$$V_1 = \frac{I_g}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2R I_g}{3}$$

$$V_{eq} = \mu V_1 + R \frac{1}{3} I_g = \mu \frac{2}{3} R I_g + R \frac{1}{3} I_g$$

$$= \frac{R}{3} (2\mu + 1) I_g$$