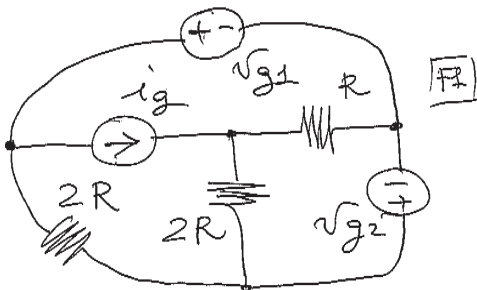


- **Metodi Generali di Analisi di Reti Resistive**

- Consideriamo il seguente circuito con  $\ell = 6$  bipoli e  $n = 4$  nodi.

Risolvere il circuito significa determinare tutte le tensioni  $v_i$  e correnti  $i_i$  dei bipoli. Sono  $2\ell = 12$  incognite

note  
intro: 6

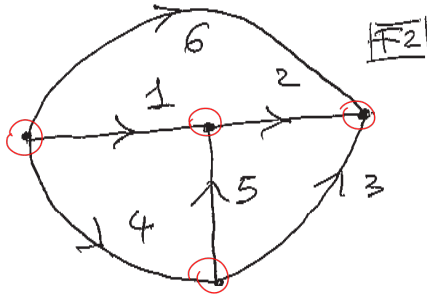


- In pratica si individua un sottoinsieme delle incognite, dette variabili ausiliarie, e si cerca di scrivere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili ausiliarie; dalle variabili ausiliarie possiamo poi trovare indirettamente tutte le altre incognite

- per individuare le variabili ausiliarie e scrivere il sistema risolvante facciamo uso di alcuni elementi di teoria dei grafi

Consideriamo un *grafo orientato* associato al circuito; il grafo e' *connesso* ed ha un numero di lati  $\ell = 6$  pari al numero di bipoli; supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ogni lato

- *nodo*: e' un punto del grafo a cui sono connessi due o piu' bipoli; si hanno in questo caso  $n = 4$  nodi



Possiamo anche avere un nodo pleguere,  
Solo due lati



## Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)

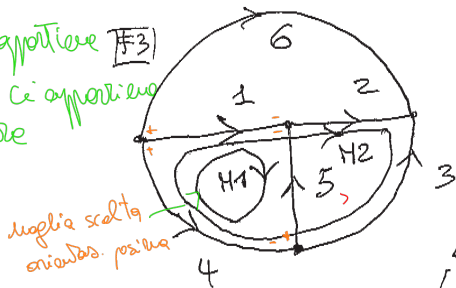
• maglia: insieme di lati che formano un percorso chiuso; ad esempio  $M1 = \{1, 5, 4\}$ ,  $M2 = \{1, 2, 3, 4\}$ , etc. Per ogni maglia possiamo scrivere una KV. Ad esempio, orientando  $M1$  e  $M2$  in senso positivo orario otteniamo

$$KV\ M1: v_1 - v_5 - v_4 = 0; \quad KV\ M2: v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

contiamo le maglie indipendenti:

ogni maglia consente di scrivere una KV

se il lato appartiene alla maglia, ci appartiene una sola volta



ogni KV porta un vincolo

es. 1 nota  $v_1, v_4$ , trovo  $v_5$

• ogni KV lungo una maglia stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le tensioni dei lati che fanno parte della maglia; le tensioni dei lati  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ , non sono quindi tutte indipendenti di loro

$m - \ell + 1$  KV indipendenti

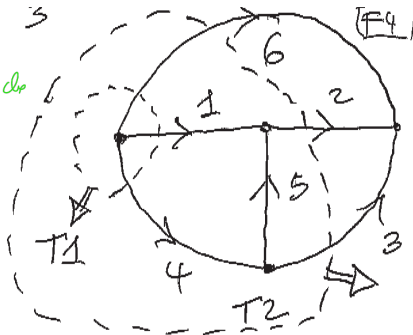
Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)

• taglio: consideriamo una linea chiusa (linea Guassiana) che taglia il grafo in due parti senza passare dai nodi; per taglio si intende l'insieme dei lati che sono intersecati dalla linea chiusa

linea  
non passa  
sui nodi

maglia: insieme dei lati

taglio: insieme dei lati  
che intersecano, che  
tagliano



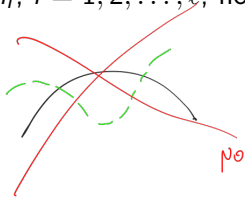
per ogni Taglio  
possiamo fare  
una KI

- ad esempio  $T1 = \{1, 6, 4\}$ ,  $T2 = \{6, 2, 3\}$
- orientiamo ciascun taglio scegliendo una normale positiva alla linea chiusa (uscente o entrante); nel caso in figura si ha

ogni taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare tra le correnti

$$KI \ T1 : i_1 + i_4 + i_6 = 0; \quad KI \ T2 : i_6 + i_2 + i_3 = 0$$

- ogni KI per un taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le correnti dei lati che fanno parte del taglio; le correnti dei lati  $i_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ , non sono quindi tutte indipendenti di loro



Se  $C_i$  appartiene,  $C_i$  appartiene 1 volta

Le  $l$  tensioni e le  $l$  correnti non sono tutte indipendenti

Supponiamo di avere un grafo orientato

• Albero: insieme di lati del grafo:

1) Connesso

2) tocca tutti i nodi

3) non forma percorsi chiusi

( UN ALBERO NON CONTIENE MAGLIE )

• Proprietà: ogni albero ha  $n-1$  rami

# Co-albero: insieme dei lati del grafo che non appartengono all'albero  
(insieme complementare)

=> gli elementi dei co-alberi si chiamano conole (bracciata)

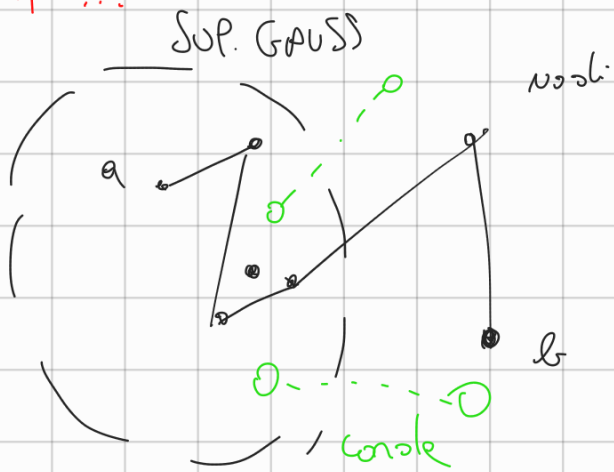
• Un coalbero può contenere una maglia

• ogni albero ha  $l - (n-1) = l - n + 1$  conole

• ogni co-albero valido non contiene tagli

( tutte le volte che taglio il mio circuito, mi interseco per forza con un ramo )

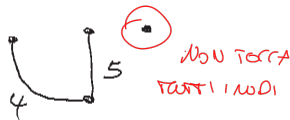
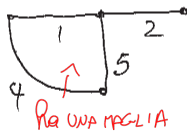
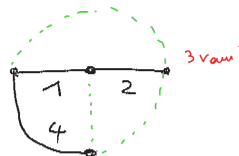
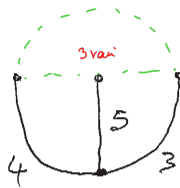
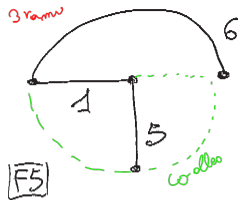
Dim!!!



per sf. di alloro, ho  
un percorso che m.  
va da a a b

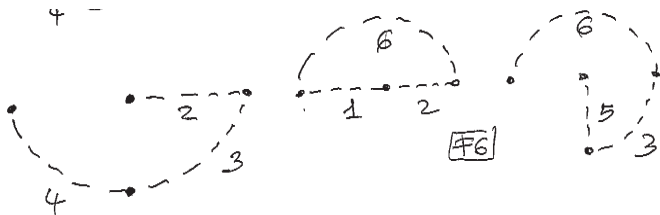
la mia superficie di  
non può intersecare  
Solo onde

- **Albero**: insieme connesso di lati del grafo che tocca tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie)  $n-1$   $KI$  indipendenti



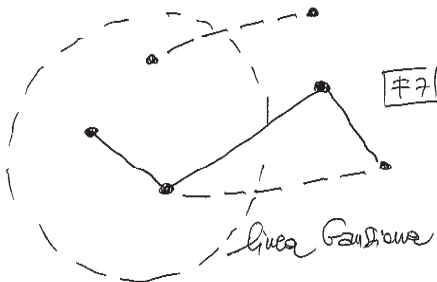
- esempi di alberi validi e di alberi non validi
- Proprietà: ogni albero ha  $n - 1$  rami
- Infatti il primo ramo connette 2 nodi; aggiungendo un ramo connesso un terzo nodo; procedendo così riesco a connettere tutti gli  $n$  nodi con  $n - 1$  rami

- *Coalbero*: insieme di lati del grafo che non fanno parte dell'albero



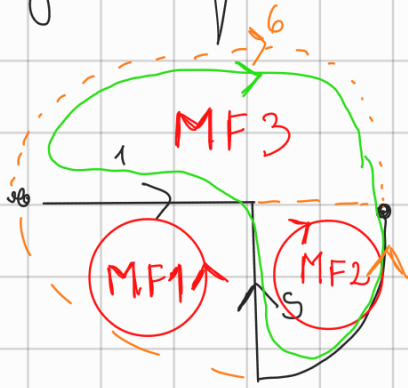
- esempi di coalberi validi e esempi di coalberi non validi (fare)
- Proprieta': ogni coalbero ha  $\ell - n + 1$  corde (ovvio)
- convenzionalmente i rami dell'albero vengono indicati a tratto continuo mentre le corde sono tratteggiate

- Proprieta: un coalbero non contiene tagli (non e' possibile tagliare il grafo in due parti intersecando solo corde)



- Cenno alla verifica: consideriamo una linea chiusa che taglia il grafo in due parti; prendiamo un nodo interno ed un nodo esterno alla linea chiusa; dato che l'albero connette tutti i nodi, ed e' connesso, vi sara' un percorso lungo l'albero che collega il nodo interno a quello esterno; quindi la linea chiusa interseca almeno un ramo dell'albero

Magli's ~~fantasmi~~ <sup>fantasmi</sup> associata al mio libro



: Contiene 1 Conda e,  
per il nido, solo rami  
dell'albero.

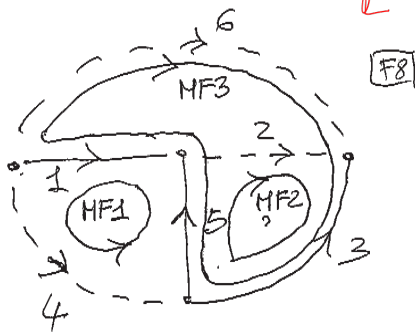
Puedo ir ellos  
y puedo ir con

- Le MF sono in corrispondenza biunivoca con le cande del co-albero

Vi sono  $l^{-n+1}$  MF associate all'albero

Proprietà': se aggiungo una corda ad un albero si forma una maglia costituita dalla corda e, per il resto, da rami dell'albero; tale maglia è detta *maglia fondamentale* (MF)

*maglia fondamentale associata ad un albero*



• Proprietà': le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde del coalbero; vi sono quindi  $\ell - n + 1$  maglie fondamentali associate all'albero; ciascuna maglia fondamentale si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente della corda che le individua

- $MF1 = \{1, 5, 4\}$ ;  $MF2 = \{2, 3, 5\}$ ;  $MF3 = \{1, 3, 5, 6\}$

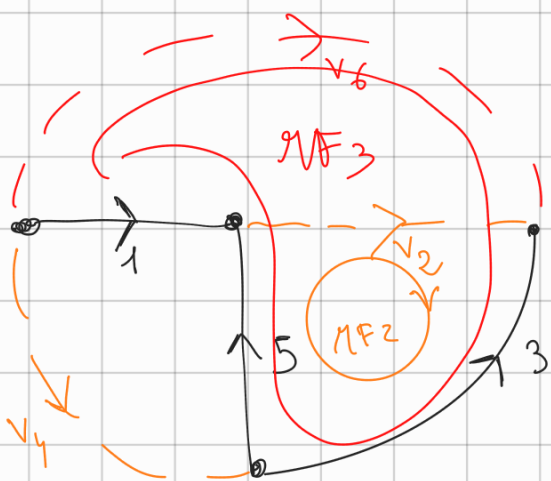
$$\underline{V} = (V_1, V_2, \dots, V_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$$

$V_a \in \mathbb{R}^{m-1}$  vettore delle  $m-1$  Tensioni dei rami dell'albero

$V_c \in \mathbb{R}^{\ell-m+1}$  vettore delle  $\ell-m+1$  Tensioni delle corde del  $\omega$ -albero

$V_a$  sono una base per lo spazio delle Tensioni  $\underline{V}$  dei lati del grafo

$\Rightarrow V_a$  sono indipendenti.  $\rightarrow$  non ci sono legami tra di loro  
 Note  $V_a$  posso determinare  $V_c$ , scrivendo  $\ell-m+1$  KV alle MF  
 $\rightarrow$  per un albero non contiene neppure un ciclo, non ci sono vincoli di dipendenza lineari tra le  $V_a$



$$V_a = \{V_1, V_3, V_5\} \quad m-1$$

$$V_c = \{V_2, V_4, V_6\} \quad \ell-m+1$$

voglio  $V_4$ , applico la KV  $\Rightarrow$

$$V_4 + V_5 - V_1 = 0 \Rightarrow V_4 = V_1 - V_5$$

Scritto  $V_i$  in funzione della base

$$V_2 - V_3 + V_5 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 - V_5$$

$$V_6 - V_3 + V_5 - V_1 = 0 \Rightarrow V_6 = V_1 + V_3 - V_5$$

$\Rightarrow$  ho usato  $\ell-m+1$  KV MF INDIPENDENTI per costruzione

- Indichiamo con  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$  il vettore delle tensioni dei lati del grafo

- **Tensioni indipendenti.** Indichiamo con  $\mathbf{v}_a$  il vettore delle  $n - 1$  tensioni dei rami dell'albero e con  $\mathbf{v}_c$  il vettore delle  $\ell - n + 1$  tensioni delle corde del coalbero.

Le tensioni  $\mathbf{v}_a$  formano una base per lo spazio delle tensioni dei lati del grafo, e cioè:

1) le tensioni  $\mathbf{v}_a$  sono indipendenti fra di loro

2) da  $\mathbf{v}_a$  si possono determinare le tensioni dipendenti  $\mathbf{v}_c$  scrivendo  $\ell - n + 1$  KV alle MF associate all'albero

- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che l'albero non contiene maglie (pensarci!)

$V_a$  = tensioni indipendenti.

$V_c$  = tensioni co-albero, dipendenti.

Ho  $\ell - n + 1$  corde. per ogni corda, costruisco una MF.  
per ogni MF, scrivo una KV.

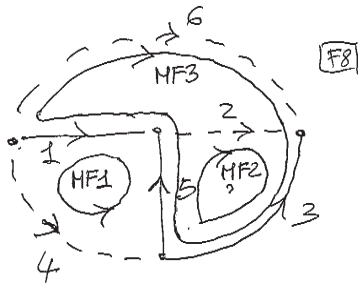
ricavo le  $\ell - n + 1$   $V_c$  con le  $\ell - n + 1$  KV

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo di un esempio; scegliamo l'albero in figura per cui  $\mathbf{v}_a = (v_1, v_3, v_5)^T$  e  $\mathbf{v}_c = (v_2, v_4, v_6)^T$ ; le  $\ell - n + 1 = 3$  KV alle MF sono date da

$$v_4 - v_1 + v_5 = 0$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_6 - v_1 - v_3 + v_5 = 0$$



- notare che tali KV sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la tensione della corda che individua la MF corrispondente; tale tensione non appare per costruzione in altre KV

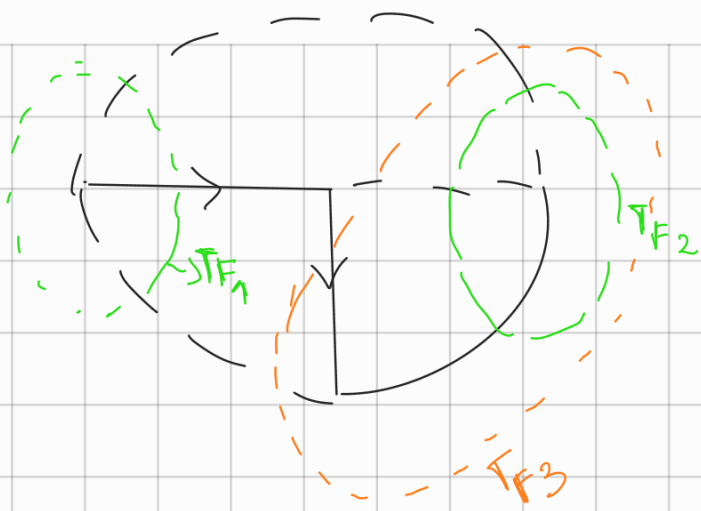
- risolvendo otteniamo le  $\ell - n + 1 = 3$  tensioni dipendenti delle corde in funzione delle tensioni indipendenti dei rami dell'albero

$$\begin{aligned} v_4 &= v_1 - v_5 \\ v_2 &= v_3 - v_5 \\ v_6 &= v_1 + v_3 - v_5 \end{aligned}$$

Posso anche scrivere  $\underline{v}_c = \underline{A} \underline{v_g}$

vetture tensioni dei lati è ortogonale a quello delle corse.

NICE



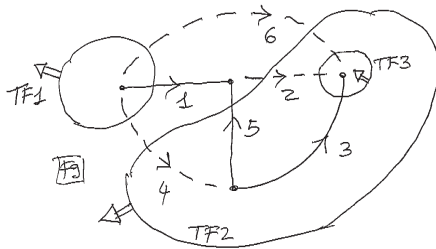
Tagli fondamentali, pseudo  
in ramo e tutte solo

Proso in ramo è sempre possibile  
tagliare il circuito  
in questo modo

- Tagli fondamentali e rami dell'albero sono in  
corrispondenza biunivoca  
vi sono  $n-1$  TF associati all'albero

Taglio Fondamentale (TF): e' un taglio che contiene un ramo dell'albero e, per il resto, solamente corde del coalbero; ogni taglio si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente del ramo corrispondente

*Ragioniamo con le correnti:*



- Proprieta': i tagli fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero; vi sono quindi  $n - 1$  tagli fondamentali associati all'albero
- $TF1 = \{1, 4, 6\}$ ;  $TF2 = \{2, 4, 5, 6\}$ ;  $TF3 = \{2, 3, 6\}$

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T \in \mathbb{R}^l$$

$$i_c \in \mathbb{R}^{l-m+1}$$

$i_c$  sono una base dello spazio  
della corrente.

$$\underline{i_a} \in \mathbb{R}^{m-1}$$

$i_c$  sono indipendenti tra loro

$i_c$ : base spazio corrente:

$i_c$ : indipendenti

note  $i_c$ : posso trovare  $i_a$  scrivendo  $m-1$  k1 ai TF

$$\Rightarrow i_c = \{i_2, i_4, i_6\} \quad l-m+1$$

$$i_a = \{i_1, i_3, i_5\} \quad m-1 \quad m-1 \text{ k1 e f}$$

infer:  $i_1 + i_4 + i_6 = 0 \Rightarrow i_1 = -i_4 - i_6$

valg.  $i_5 \Rightarrow$  valo d. tepla. consistente

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0 \Rightarrow i_5 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$i_3 = -i_2 - i_6$$

Eq. indipendenti:

$l-m+1$  eq indipendenti

$$\underline{i_a} = \underline{B} \underline{i_c}$$

$$A = -B^T$$

$$\underline{V_c} = \underline{A} \underline{V_a}$$

• Indichiamo con  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$  il vettore delle correnti dei lati

• **Correnti indipendenti.** Indichiamo con  $\mathbf{i}_c$  il vettore delle  $\ell - n + 1$  correnti delle corde del coalbero e con  $\mathbf{i}_a$  il vettore delle  $n - 1$  correnti dei rami dell'albero. Le correnti  $\mathbf{i}_c$  formano una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo, e cioè:

1) le correnti  $\mathbf{i}_c$  sono indipendenti fra di loro

2) da  $\mathbf{i}_c$  si possono determinare le correnti dipendenti  $\mathbf{i}_a$  scrivendo  $n - 1$  KI ai TF associate all'albero

• verifica: il punto 1) deriva dal fatto che il coalbero non contiene tagli (pensarci!)

• lavorare con correnti cicliche è com.  
lavorare con correnti di ramo.

• Correnti a divergenza 0, verificano le KI

Tensioni indipendenti = Tensioni dei rami dell'albero  $(n-1) \Rightarrow k-n+1$  HF

Correnti indep  $\Rightarrow$  Correnti delle corde del coalbero  $(\ell-n+1) \Rightarrow n-1$  KI  
 $m-1$  TF

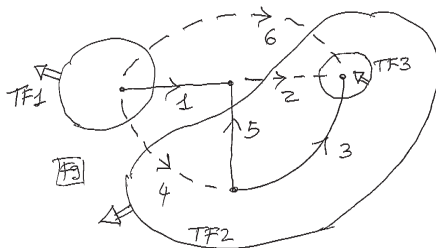
$\forall$  ramo ho un TF

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo dell'esempio considerato per il quale  $\mathbf{i}_c = (i_2, i_4, i_6)^T$  e  $\mathbf{i}_a = (i_1, i_3, i_5)^T$ ; le  $n - 1 = 3$  KI ai TF sono date da

$$i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0$$

$$i_3 + i_2 + i_6 = 0$$



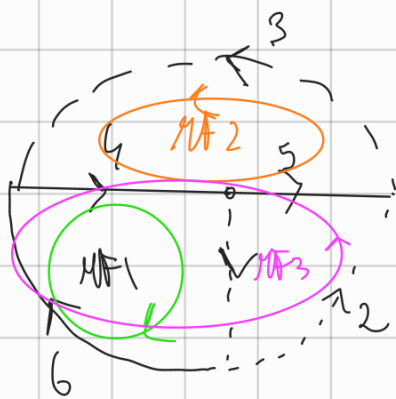
- notare che tali KI sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la corrente del ramo che individua il TF corrispondente; tale corrente non appare per costruzione in altre KI

- risolvendo otteniamo le  $n - 1 = 3$  correnti dipendenti dei rami dell'albero in funzione delle correnti indipendenti delle corde del coalbero

$$i_1 = -i_4 - i_6$$

$$i_5 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$i_3 = -i_2 - i_6$$



$$i_C = \{i_1, i_2, i_3\}$$

$\mathbb{I}_1$  conetti cicliche  
della MF  
Conetti di Maxwell

non esiste neanche la conetto perpendicolare  
della mappa

$$\mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_3$$

$$\underline{\mathbb{I}} = \{\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3\}$$

$l-m+1$

ci sono  
solo le  
conetti  $\mathbb{I}_1$

$$i_1 = \mathbb{I}_1$$

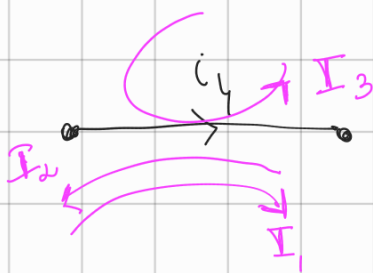
$$i_2 = \mathbb{I}_2$$

$$i_3 = \mathbb{I}_3$$

conetto con  $l$  coincide con  $\mathbb{I}_1$

$\Rightarrow$  Le conetti cicliche coincidono con le  
conetti delle corde  
anch'esse sono per lo spazio delle conetti

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{I}} = \{\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3\} \quad l-m+1$$



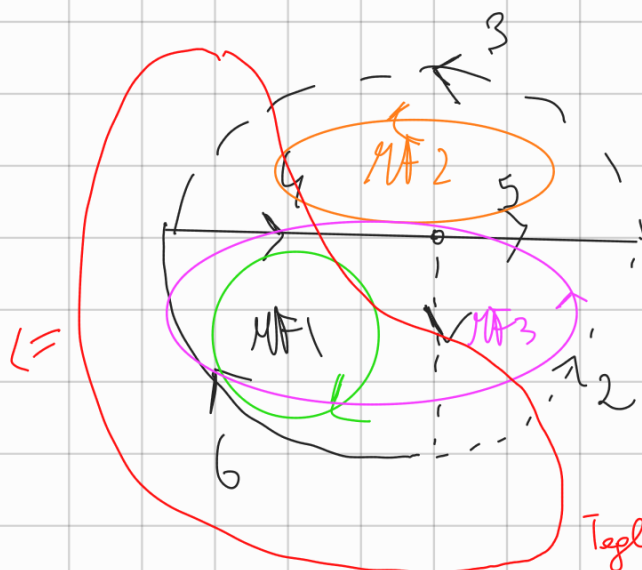
$$i_4 = \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3$$

quali conetti possono in  $i_4$ ?

$$i_4 - i_3 - i_1 + i_2 = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel \\ \mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_1 & \mathbb{I}_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow i_4 = \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2$$



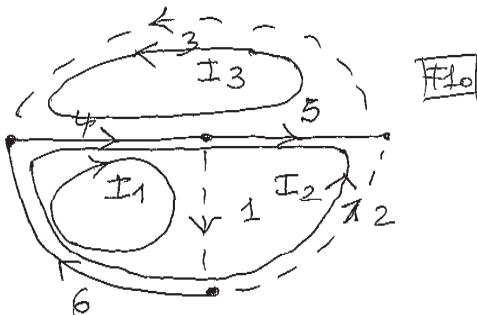
Taglio perpendicolare

Fisica: conetti di un vasso come "sintopositi" di conetti cicliche  
equivolgono alle conetti del Taglio perpendicolare

## Correnti cicliche delle maglie (di Maxwell)

• Esempio. Facciamo percorrere ogni MF da una corrente  $I_i$  che si richiude su se stessa (detta corrente ciclica o di Maxwell); ovviamente vi sono  $\ell - n + 1 = 3$  correnti cicliche delle MF; inoltre tali correnti risultano in corrispondenza biunivoca con le correnti delle corde

$$I_1 = i_1; \quad I_2 = i_2; \quad I_3 = i_3$$



• ne consegue che anche le correnti cicliche  $\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T \in \mathbb{R}^3$  costituiscono una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

# !! Metodo Totale (TABLEAU)

grafo orientato con  $l$  lati e  $n$  nodi incognite:

$l$  tensioni e  $l$  correnti,  $2l$  incognite

• Equazioni Topologiche (dipendono solo dal grafo)

$l - n + 1$  KV m.f. indipendenti

$n - 1$  KI Cf. indipendenti

---

$l$  eq. m. indipendenti

solo per conoscere  
il grafo

• Equazioni TIPOLOGICHE (dipendono da natura elementi)

$\Rightarrow$   $l$  relazioni costitutive dei bipoli.

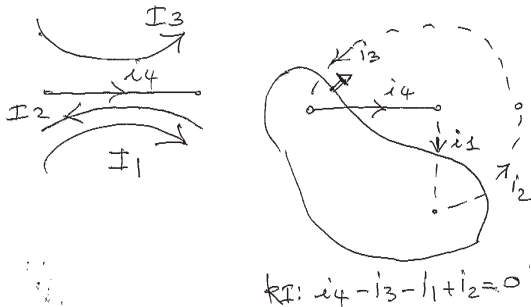
$2l$  equazioni

Metodi ad eliminazione, all'inizio ho tutte le incognite

- le correnti dipendenti dei rami dell'albero si possono ottenere per sovrapposizione delle correnti cicliche; ad esempio, per il ramo 4 si ha

$$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$$

dato che  $I_i = i_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , si vede che cio' equivale a determinare la corrente del ramo usando una KI al TF individuato da tale ramo



- $I_{\text{cicliche}}$  e  $i_c$  costituiscono 2 basi equivalenti per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

## Metodo Totale (del Tableau) !!!

- Consideriamo un circuito con  $\ell$  bipoli e  $n$  nodi e un grafo orientato ad esso associato; scegliamo un albero; le incognite sono le tensioni  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$  e le correnti  $i_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$  dei lati del grafo; in totale vi sono  $2\ell$  incognite

- Equazioni di tipo topologico (dipendono solo dal grafo orientato)  
 $\ell - n + 1$  KV alle MF associate all'albero  
 $n - 1$  KI ai TF associati all'albero

In totale abbiamo  $\ell - n + 1 + n - 1 = \ell$  equazioni topologiche

- Equazioni tipologiche (dipendono dalla natura degli elementi presenti)

$\ell$  relazioni costitutive dei bipoli

- Complessivamente sappiamo perciò scrivere  $\ell + \ell = 2\ell$  equazioni, tante quante sono le incognite; il problema è quindi *ben posto*

- nei principali metodi di analisi non si usa l'intero insieme delle incognite ma un suo sottoinsieme (variabili ausiliarie); ad esempio, nella versione più semplice del metodo delle maglie fondamentali, le variabili ausiliarie sono le  $\ell - n + 1$  correnti delle corde.