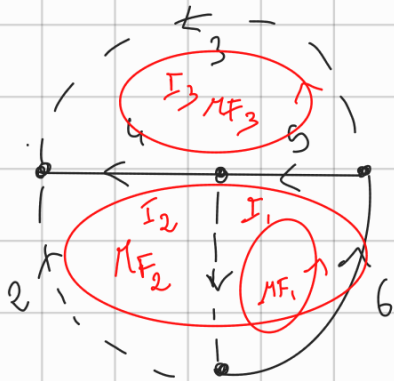


MMF

per Bipoli controllabili in Corrente

nota la corrente, determiniamo univoc. le tensioni in generatore. il ind. di corrente non è controllabile in corrente.

Pseudo un albero e individuato le MF



Variabili ausiliarie

corrente corrente

$$i_c = \{i_1, i_2, i_3\}$$

$l-m+1$ equaz. MF

$$I = \{I_1, I_2, I_3\}$$

corrente corrente

in $l-m+1$ incognite

① $l-m+1$ kV mfr

dopo ora scrivere

le v in funzione delle incognite (I)

$$\begin{cases} v_1 + v_5 + v_6 = 0 \\ v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0 \\ v_3 - v_4 - v_5 = 0 \end{cases}$$

② Esprimere $i_1, \dots, i_6$ in funzione delle variabili ausiliarie
(Si perché se var ausiliarie danno una base per lo spazio delle correnti)

$$i_1 = I_1$$

controlla quel corrente
primario...

$$i_2 = I_2$$

$$i_3 = I_3$$

$$i_4 = -I_2 - I_3$$

$$i_5 = I_1 - I_2 - I_3$$

$$i_6 = I_1 - I_2$$

$\left. \begin{matrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} m-1 \\ KI \in R \end{matrix}$

metodo col eliminazione

Espresso le correnti i_4, i_5, i_6
in funzione delle correnti "

③ Bipoli controllabili in corrente, esprimi $V_1, \dots, V_6$ in funzione di $i_1, i_2, \dots, i_6$

Riprendo il circuito precedente

$$V_1 = V_{g2}$$

$$V_2 = 2R i_2 = 2R I_2$$

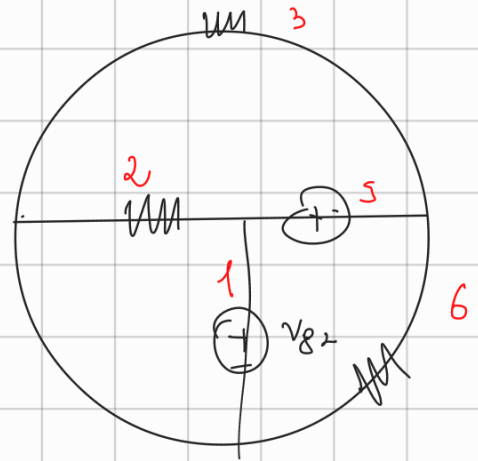
$$V_3 = 2R i_3 = 2R I_3$$

$$V_4 = R i_4 = R(-I_2 - I_3)$$

$$V_5 = -V_{g1}$$

$$V_6 = 3R i_6 = 3R(I_1 - I_2)$$

elaboro le
tensioni in
funzione
delle correnti



Le relazioni costitutive bipoli costitutive in corrente

Se ora sostituisco, ottengo il sistema risolvibile

$$\Rightarrow \underline{R} \underline{I}_{cicliche} = \underline{V}_{generatori \text{ indipendenti}} \text{ tensioni}$$

dove $\underline{R} = R^{(l-m+1) \times (l-m+1)}$

$$\underline{I}_{cicliche} \in R^{l-m+1}$$

$$\underline{V}_{generatori} \in R^{l-m+1}$$

$$R_{kk} \quad k=1, \dots, l-m+1$$

= Somma resistenze Maglia Favolante k el. di segno

$$R_{hk} \quad h, k=1, \dots, l-m+1 \quad h \neq k$$

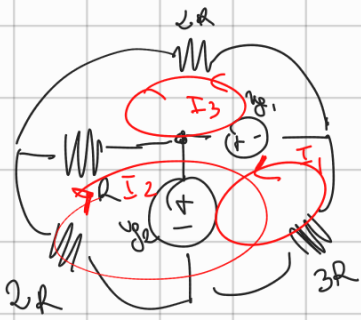
= Somma algebra resistenze a comune tra MF h e MF k

$\Rightarrow$ ogni resistenza ha segno + se I_h e I_k la percorrono contemporaneamente.

Segue - in caso celebrario.

V_k
 $k=1, \dots, l-m+1$ = Somma algebrica Tensioni generatori
 indipendenti MF K . Ogni Tensione ha
 segno $(+)$ se I_k esce dal $(+)$ del
 generatore, segno $(-)$ altrimenti.

$\Rightarrow \underline{R} = \underline{R}^T$ Simmetrica (per note di resistenze e
 gen. di V)



es.
 Si sommano
 su questo
 resistenza con segno
 opposto

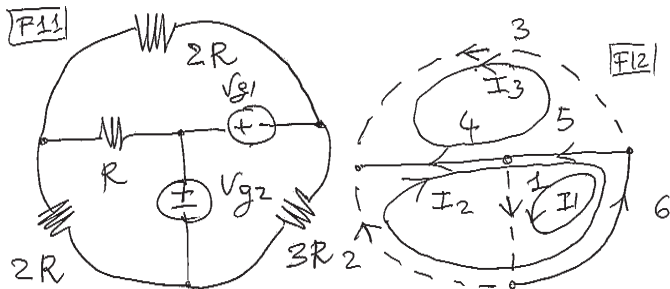
$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{g1} - V_{g2} \\ -V_{g1} \\ -V_{g1} \end{pmatrix}$$

- **Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)**

- Per reti di soli bipoli controllabili in corrente; in particolare reti di resistori e generatori indipendenti ideali di tensione
- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MMF sono le correnti cicliche delle MF

$$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T$$

oppure equivalentemente le correnti $\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T$ delle corde. In generale si hanno $\ell - n + 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $\ell - n + 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 + v_5 + v_6 = 0$$

$$v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

$$v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

- Passo 2: esprimo le correnti dei lati del grafo (in generale sono ℓ) in funzione delle correnti delle correnti cicliche; e' sempre possibile in quanto le correnti cicliche sono una base per lo spazio delle correnti dei lati; nel far cio' uso $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 = l_1$$

$$i_2 = l_2$$

$$i_3 = l_3$$

$$i_4 = -l_2 - l_3$$

$$i_5 = l_1 - l_2 - l_3$$

$$i_6 = l_1 - l_2$$

- Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in corrente, posso esprimere le tensioni dei bipoli (ℓ) in funzione delle correnti dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in corrente

$$v_1 = v_{g2}$$

$$v_2 = 2Ri_2 = 2Rl_2$$

$$v_3 = 2Ri_3 = 2Rl_3$$

$$v_4 = Ri_4 = R(-l_2 - l_3)$$

$$v_5 = -v_{g1}$$

$$v_6 = 3Ri_6 = 3R(l_1 - l_2)$$

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $\ell - n + 1$ equazioni nelle $\ell - n + 1$ incognite date dalle correnti cicliche delle MF; in questo caso $\ell - n + 1 = 3$; in forma vettoriale si ha

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{g1} - v_{g2} \\ -v_{g1} \\ -v_{g1} \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvante per il MMF e' del tipo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_{\text{cicliche}} = \mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$$

con $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(\ell-n+1) \times (\ell-n+1)}$ (matrice delle resistenze),

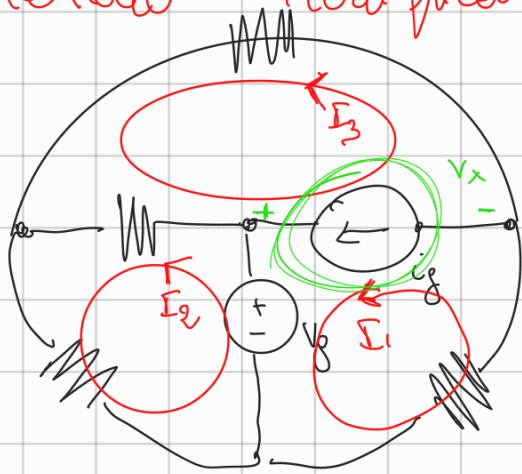
$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$

- R_{kk} ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma delle resistenze della maglia k
- R_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma *algebrica* delle resistenze a comune fra maglia k e maglia h ; ogni resistenza si prende col $+$ se I_k e I_h la percorrono in senso concorde, col $-$ altrimenti
- V_k ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma *algebrica* delle tensioni dei gen.ri ind.ti di tensione della MF k ; ogni tensione si prende con il $+$ se I_k 'esce dal morsetto $+$ del gen.re di tensione', col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{R}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$

- Osservazione. Per ottenere il sistema risolvante abbiamo usato tutte le KV ($\ell - n + 1$) al Passo 1, tutte le KI al Passo 2 ($n - 1$) e tutte le relazioni costitutive dei bipoli (ℓ) al Passo 3
- Osservazione. Una volta determinate le correnti cicliche, possiamo determinare indirettamente tutte le altre correnti e tensioni dei bipoli (pensarci!)
- Osservazione. MMF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le correnti dei rami dell'albero, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le tensioni dei bipoli.

Metodo Modificato (MISTO) analisi su box MF



Scegliamolo allora...

Passo ① Puntale

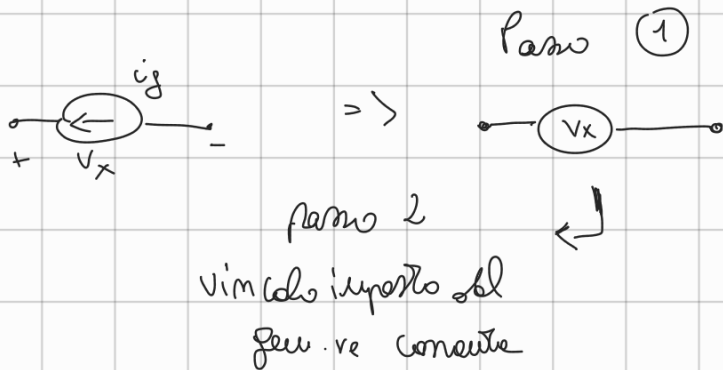
Passo ② Fattore

Passo 3.. il generatore \$i_g\$ non è controllabile in corrente

Va in crisi il passo 3

introduco una incognita aggiuntiva

=> Var. ausiliarie I_1, I_2, I_3 incognita aggiuntiva V_x



lo facciamo diventare un gen. di Tensione

KV mF passo 1

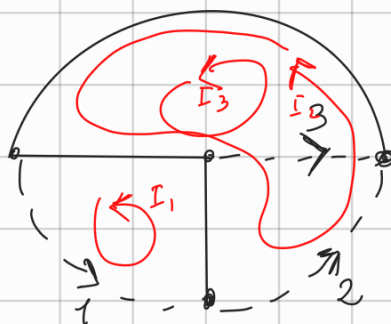
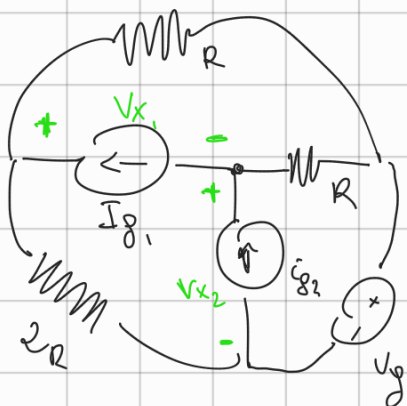
$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{pmatrix}$$

Passo 2 vincolo corso la corrente, che impone un vincolo

$$i_g = I_1 - I_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_g \\ -V_g \\ - \\ i_g \end{pmatrix}$$

Esercizio



Variabili ausiliarie: $I_1 = i_1$

$I_2 = i_2$

$I_3 = i_3$

• Var. aus. aggiuntive: V_{x1}
 V_{x2}

• Passo 1 kv mF

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & R & R \\ 0 & R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{x1} + V_{x2} \\ -V_{x1} - V_{x2} + V_g \\ -V_{x1} \end{pmatrix}$$

Passo 2: vincoli generatori di corrente

$$i_{g1} = I_1 - I_2 - I_3$$

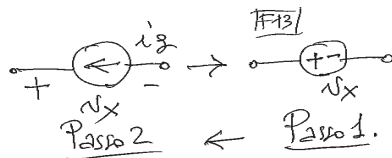
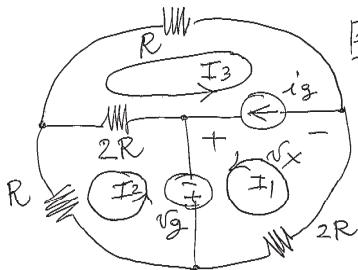
$$i_{g2} = I_1 - I_2$$

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & | & -1 & -1 \\ 0 & R & R & | & 1 & 1 \\ 0 & R & 2R & | & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_{X1} \\ V_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_g \\ 0 \\ i_{S1} \\ i_{S2} \end{pmatrix}$$

Metodo Modificato di Analisi su Base MF

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di corrente (bipoli *non controllabili in corrente*); in tal caso non possiamo ripetere il Passo 3 della precedente procedura
- vediamo come si fa con un esempio; non conosco la tensione sul gen.re di corrente i_g ; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la tensione v_x ai capi di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

$$I_1, I_2, I_3, v_x$$



- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di corrente come se fosse un gen.re di tensione v_x ; mi riconduco così ad una rete con sole resistenze e gen.ri di tensione; posso scrivere le seguenti KV

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di corrente per scrivere una equazione aggiuntiva detta *equazione di vincolo*

$$i_g = I_1 - I_3$$

- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ -v_g \\ 0 \\ i_g \end{pmatrix}$$

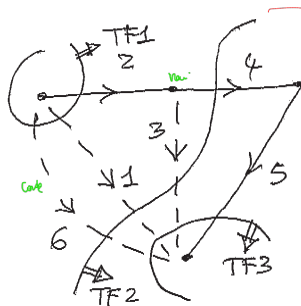
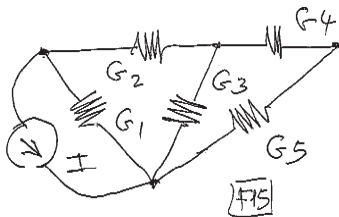
- il metodo descritto è detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base maglie fondamentali*

- Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)**
- Si introduce, per dualita' rispetto al MMF, per reti di soli bipoli controllabili in tensione; in particolare reti di conduttanze e generatori indipendenti ideali di corrente
 - discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MTF sono le tensioni dei rami dell'albero

variabili ausiliarie

$$\mathbf{v}_a = (v_2, v_4, v_5)^T$$

In generale si hanno $n - 1$ incognite



• mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $n - 1$; procediamo con 3 passi

- Passo 1: scrivo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

Step

perche' $n-1$ incognite

*TF: un valore p
tutte corde*

$$i_1 + i_2 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$$

- Passo 2: esprimo le tensioni delle corde (in generale sono $l - n + 1$) in funzione delle tensioni dei rami dell'albero; e' sempre possibile in quanto tali tensioni sono una base per lo spazio delle tensioni dei lati; nel far cio' uso $l - n + 1$

esprimo le corde in funzione delle incognite

KV alle MF associate all'albero

Posso sempre farlo perche'

*le Tensioni dei rami
dell'albero sono una
base dello spazio
delle Tensioni
del grafico*

in parallelo $\rightarrow$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + v_4 + v_5 \\ v_6 &= v_2 + v_4 + v_5 \\ v_3 &= v_4 + v_5 \end{aligned}$$

• Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in tensione, posso esprimere le correnti dei bipoli (ℓ) in funzione delle tensioni dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in tensione

*Sfrutto che i bipoli
siano controllabili
in tensione*

$$i_1 = G_1 v_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5)$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i_3 = G_3 v_3 = G_3(v_4 + v_5)$$

$$i_4 = G_4 v_4$$

$$i_5 = G_5 v_5$$

$$i_6 = I$$

*non dipende dai
nodi*

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite date dalle tensioni dei rami dell'albero; in questo caso $n - 1 = 3$; in forma vettoriale si ha (verificare)

conta solo numero di nodi

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvete per il MTF e' del tipo

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_a = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze), $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini noti)

• per reti di soli generatori ind.ti ideali di ~~tensione~~^{CORRENTE} e ~~resistenze~~^{CONDUTTANZE} si puo' dare una regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$

- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$

• Osservazione. Per ottenere il sistema risolvete abbiamo usato tutte le KI al Passo 1, tutte le KV al Passo 2 e tutte le relazioni costitutive dei bipoli al Passo 3

• Osservazione. Una volta determinate le tensioni dei rami dell'albero, possiamo determinare indirettamente tutte le altre tensioni e correnti dei bipoli (pensarci!)

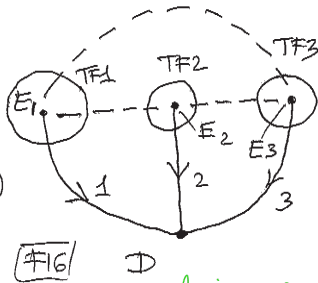
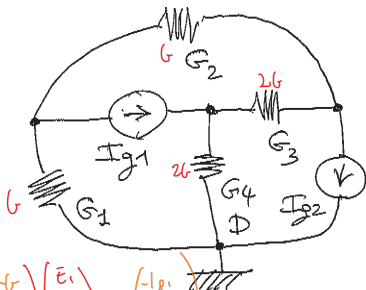
• Osservazione. MTF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le tensioni delle corde, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le correnti dei bipoli

[Metodo dei Nodi *caso particolare dei TF*

- Il metodo dei nodi e' un caso particolare del metodo dei tagli.

Cominciamo dal caso in cui sono presenti solo bipoli controllabili in tensione (conduttanze e gen.ri ind.ti di corrente)

● scegliamo un nodo di riferimento (nodo di terra, *o lo collego a Terra*, o Datum (D)) a cui viene attribuito potenziale $E = 0$; scegliamo poi un *albero stellato* e cioe' un albero che collega ogni nodo direttamente a D; infine orientiamo i rami dell'albero in modo che 'le frecce puntino verso D'



$$\begin{pmatrix} 2G & 0 & -G \\ 0 & 4G & -2G \\ -G & -2G & 3G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{g1} \\ I_{g1} \\ -I_{g2} \end{pmatrix}$$

le incognite sono V_1, V_2, V_3

- applichiamo il MTF all'albero stellato; si nota che: *linea di Taglio nodale*
- le incognite (tensione dei rami dell'albero) coincidono con le $n-1$ tensioni dei nodi, $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, rispetto a D

- ogni TF e' una linea chiusa che contiene un solo nodo (taglio nodale) ed e' orientata positivamente verso l'esterno

- le KI per i TF si esprimono dicendo che e' nulla la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono su un nodo; ogni corrente si prende col + se uscente dal nodo, con il - se entrante nel nodo; sono $n-1$ KI per tutti i nodi eccetto il nodo di riferimento

- in generale il sistema risolvante per il metodo dei nodi e' del tipo *KI al nodo di Terra NO, inutile perché è connesso. lineare delle precedenti*

$$\mathbf{G}\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze),

$\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ vettore delle incognite (tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento); $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini noti)

vettore correnti impresso

Come si costruisce G?

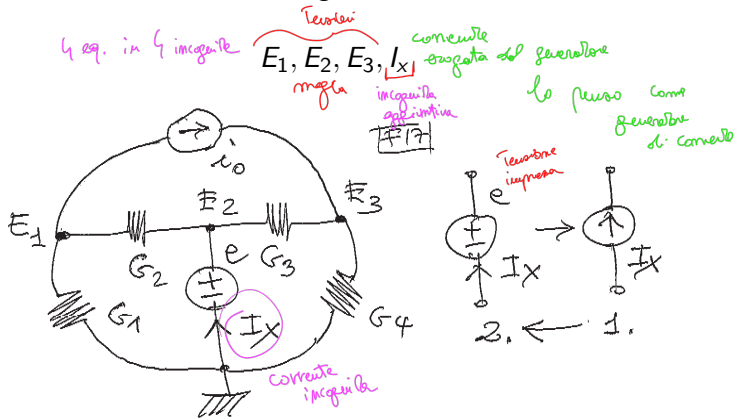
n-1 eq in n-1 incognite

• per reti di soli generatori ind.ti ideali di corrente e conduttanze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$

- G_{kk} ; $k = 1, \dots, n - 1$: ^{in diagonale} somma delle conduttanze collegate al nodo k
- G_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, n - 1$: somma cambiata di segno delle conduttanze a comune fra nodo k e nodo h
- I_k ; $k = 1, \dots, n - 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma algebrica delle correnti dei gen.ri ind.ti di corrente collegati al nodo k ; ogni corrente si prende con il $+$ se entrante nel nodo k , col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$
- e' un sistema di $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite; notare che la dimensionalita' del sistema non dipende da ℓ } *non dipende dal numero di poli*

Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA, 'modified nodal analysis')

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di tensione (bipoli non controllabili in tensione) *Generatore di Tensione*
- vediamo come si procede con un esempio; non conosco la corrente del gen.re di tensione e; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la corrente I_x di tale generatore; le variabili ausiliarie sono *nesso random*



• Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di tensione come se fosse un gen.re di corrente I_x ; mi riconduco così ad una rete con sole conduttanze e gen.ri di corrente; posso scrivere le seguenti KI

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ I_x \\ i_0 \end{pmatrix}$$

• Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di tensione per ~~scrivere una equazione aggiuntiva detta equazione di vincolo~~; in questo caso si ha semplicemente

vincolo imposto dal generatore

$$E_2 = e$$

mi ricordo che c'è un generatore di tensione

• abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ 0 \\ i_0 \\ e \end{pmatrix}$$

sotto blocco

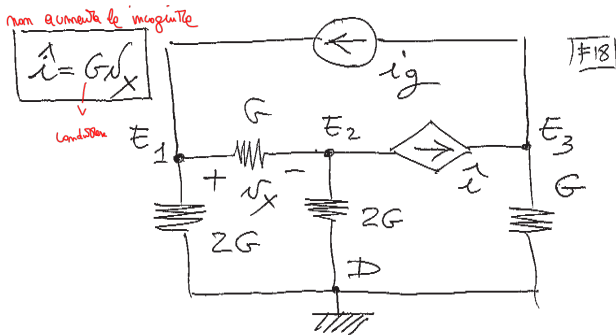
portandolo qui...

integrina

- il metodo descritto e' detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base nodi*; e' uno dei metodi piu' utilizzati in pratica (ad esempio nel simulatore di circuiti SPICE)

Presenza di Generatori Controllati

- Esempio (Nodi con generatori controllati di corrente). *caso più semplice* Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3 (attenzione, v_x non è una variabile ausiliaria e non deve apparire nel sistema risolvibile finale)



- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; scrivo quindi le KI ai nodi *come se mandasse una corrente nota*

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -\hat{i} \\ \hat{i} - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato e esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

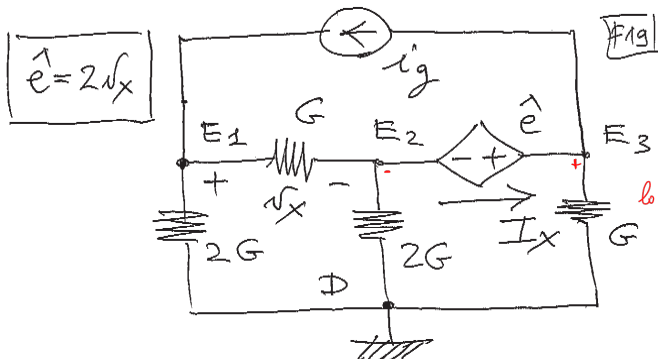
$$\hat{i} = Gv_x = G(E_1 - E_2)$$

- sostituendo arrivo al sistema

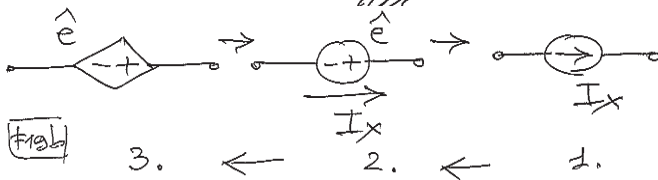
$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ -G & G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \end{pmatrix}$$

- notare che il generatore controllato influisce sulla matrice **G** rendendola (in generale) non-simmetrica

- Esempio (Nodi con generatori controllati di tensione)



lo posso usare
generator
controlato
che impone I_x



- Passo 1. Penso il generatore controllato di tensione come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base nodi introducendo una incognita aggiuntiva data dalla corrente di tale generatore di tensione; le variabili ausiliarie sono quindi

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$

- Posso scrivere le KI

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -I_x \\ I_x - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Esprimo il vincolo imposto dal generatore di tensione $\hat{e}$:

$$\hat{e} = E_3 - E_2$$

è controllato

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di tensione ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{e} = 2v_x = 2(E_1 - E_2)$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$2E_1 - E_2 - E_3 = 0$$

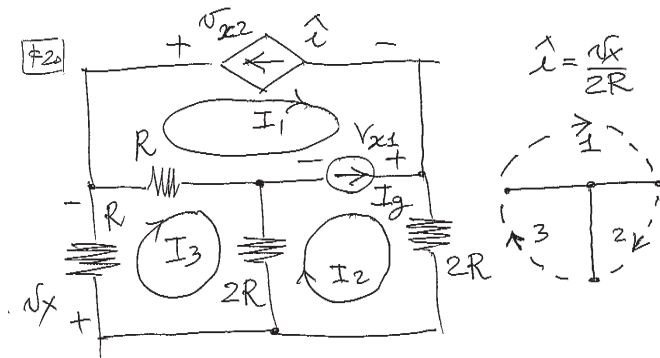
che rappresenta la quarta equazione del sistema risolvibile

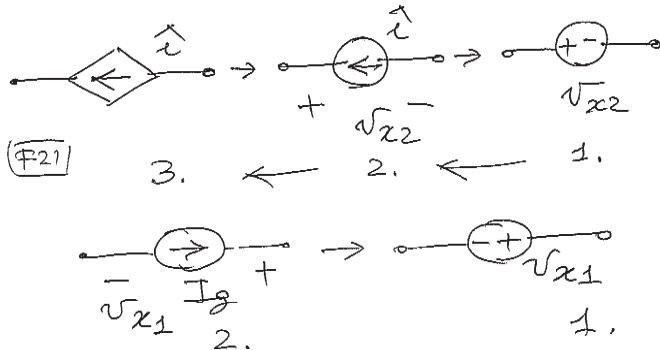
- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 4 equazioni nelle variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 & 0 \\ -G & 3G & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Esempio (MF in presenza di generatori controllati).
- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base MF introducendo una incognita aggiuntiva data dalla tensione su tale generatore di corrente; anche per il generatore di corrente I_g introduco come incognita aggiuntiva la tensione ai suoi morsetti; le variabili ausiliarie sono quindi

$$I_1, I_2, I_3, V_{x1}, V_{x2}$$





Posso scrivere le KV

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R \\ 0 & 4R & -2R \\ -R & -2R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_{x1} - V_{x2} \\ V_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Vincoli imposti dai generatori di corrente:

$$I_g = -I_1 + I_2; \quad \hat{I} = -I_1$$

la prima fra queste relazioni e' la quarta equazione del sistema risolvibile

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{i} = \frac{v_x}{2R} = \frac{Rl_3}{2R} = \frac{l_3}{2}$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$l_1 + \frac{l_3}{2} = 0$$

che rappresenta la quinta equazione del sistema risolvete

- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 5 equazioni nella variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R & 1 & 1 \\ 0 & 4R & -2R & -1 & 0 \\ -R & -2R & 4R & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_g \\ 0 \end{pmatrix}$$