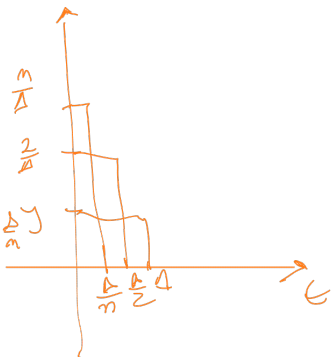


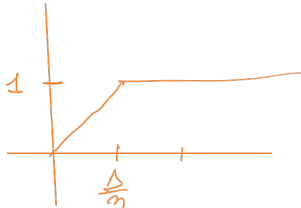
Trasformata di Laplace

Mauro Forti

May 22, 2020

lim $f_m(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta} \text{ se } t \in [0, \Delta] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{array} \right.$





$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \frac{\Delta}{n} \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{\Delta} & \text{se } t \in [0, \frac{\Delta}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*è un limite di
sue di funzioni
che fanno area sotto = 1*

area sotto sempre 1

in $t=0$, vale 0

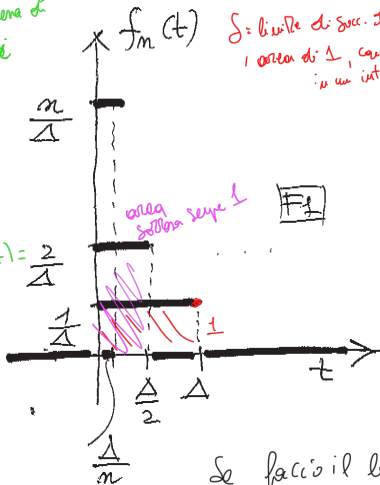
area concentrata
in un intervallo
arbitrariamente piccolo
sullo 0

Preliminari matematici

• Funzioni impulsive

• Ricordiamo la definizione in termini euristici della funzione impulsiva $\delta(t)$; consideriamo una successione di funzioni $f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, come mostrato in figura

Sequenza di
funzioni



δ = limite di succ. di funzioni
l'area di 1, concentrata
in un intervallo



$F_n = \begin{cases} 0 & t < 1/n \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$
c'è un razzo lineare
ma i due se deriviamo
 $F_n(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0 & 0 < t < 1/n \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$
del
rampato

es. $n=2$ $F_2(t)$,
derivata è $\frac{2}{\Delta}$

Se facciamo il limite di $f_n(t)$ e $F_n(t)$

δ della $\rightarrow$ gradino
Unitario

• si ha

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

successione
di funzioni

$n \rightarrow \infty$, *funzione esplosa*
in 0, ma
area sotto
vale 1

quindi $\delta(t) = 0$ per $t \neq 0$, $\delta(t)$ singolare in $t = 0$, inoltre l'area
sottesa e' unitaria, cioe', per ogni $\epsilon > 0$

$t = 0 \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

*area concentrata in un intervallo
arbitrariamente piccolo
intorno a 0*

definizione

$\varphi \in \mathcal{S}$

$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ *estrarre il valore in 0*

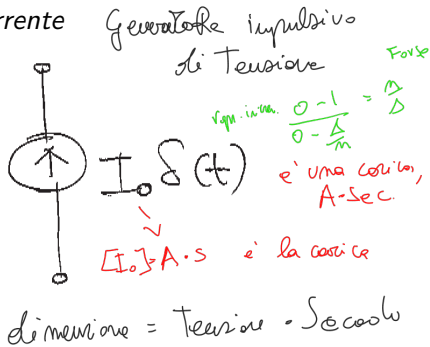
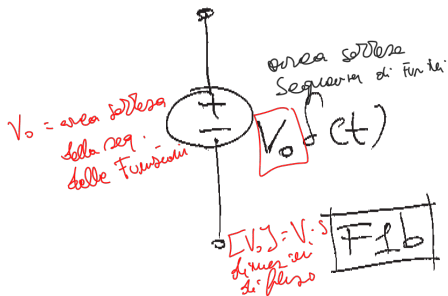
δ applicato a una funzione

ci serve per es. per derivare funzioni discontinue
introducendo succ. di funzioni $f_n(t)$, e.c. f_n vale 0 fino a $[0, \frac{1}{n}]$, dove vale $\frac{1}{\Delta}$
se facciamo la derivata vale

*Delta e' la
derivata in senso
generalizzato
del gradimento unitario*

*La δ ci serve per fare derivata di funzioni in senso classico
es. fun. discontinue
es. gradimento unitario*

Generatori impulsivi di tensione e corrente



• Con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di tensione che imprime una tensione $V_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di V_0 ; V_0 misura l'area sotto dall'impulso in un diagramma tensione-tempo, quindi $[V_0] = \text{Volt per secondi}$

• analogamente, con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di corrente che imprime una corrente $I_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di I_0 ; I_0 misura l'area sotto dall'impulso in un diagramma corrente-tempo, quindi $[I_0] = \text{Ampere per secondi}$

- per quasi ogni (q.o.) t si ha

$$f_n(t) = F'_n(t)$$

la $\delta(t)$ e'
la derivata (in senso generalizzato)
del gradino unitario

dove $F_n(t)$ e' mostrata in figura; passando al limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \delta(t) \stackrel{\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = u(t)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(t) = \frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \right) = \frac{d}{dt} u(t)$$

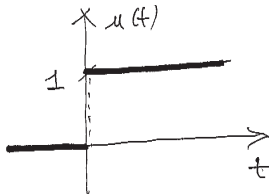
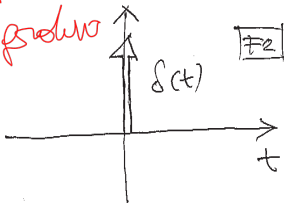
dove $u(t) = 1, t > 0$; $u(t) = 0, t < 0$ e' la funzione gradino unitario

- la funzione (discontinua!) gradino unitario e' quindi derivabile nel senso delle funzioni impulsive e si ha

Se e' la derivata in
senso generalizzato
del gradino unitario

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

Con δ possiamo
scrivere le
funzioni gradino



• per mezzo della δ e' possibile calcolare la derivata generalizzata (nel senso delle funzioni impulsive) di funzioni che hanno discontinuita' di prima specie (di salto)

Regola per calcolare derivata

• **Proprieta':** Sia $f(t)$ derivabile (nel senso delle funzioni ordinarie) eccetto che in un numero finito di istanti t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dove vi sono discontinuita' di prima specie (esistono finiti $f(t_i^-)$, $f(t_i^+)$); allora

*funzioni discontinue
salto*

derivata di funzioni discontinue

*Ci sono due tipi di salto
c'è un salto
una cosa da zero*

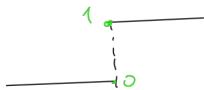
$$\frac{d}{dt}f = f' + \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)] \delta(t - t_i)$$

*contributo Regola
"al salto"*

Si compensa per l'ampiezza del salto

dove f' e' la derivata nel senso delle funzioni ordinarie, d/dt la derivata nel senso delle funzioni impulsive, $\sigma_i = f(t_i^+) - f(t_i^-)$ e' il salto di f in t_i e $\delta(t - t_i)$ e' la funzione δ traslata in t_i

Non appena c'è un salto, appare una δ centrata in quell'istante, di ampiezza pari all'ampiezza di salto



*δ centrata in 0 (ove c'è il salto)
di ampiezza $1 - 0 = 1$*

Esempio. Per la funzione in figura si ha, considerando che $f'(t) = 0$ per q.o. t

costante a tratti

fn costante a tratti

quasi uguale

$$\frac{df}{dt} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

apriamo

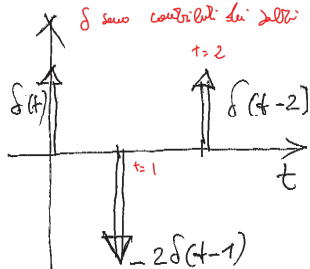
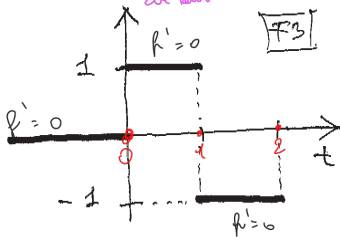
t_1

t_2

traslato

area di tutte

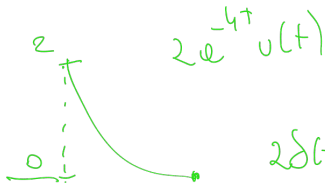
le funzioni della serie di impulsi che tendono a $-2\delta(t)$



δ sono contributi dei salti

$t=2$

-1-1



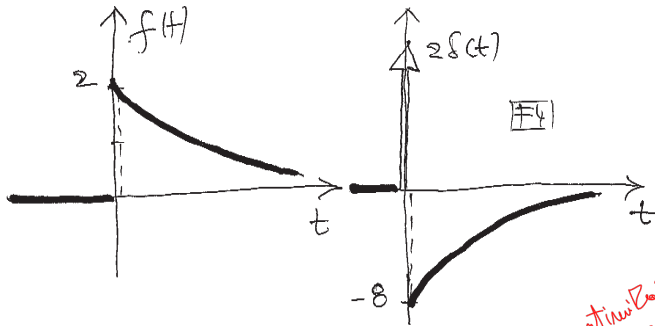
-2 = area delle successione di impulsi

$$2\delta(t) - 8e^{-4t}u(t)$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(t) = 2e^{-4t}u(t)$$

per avere discontinuità
devo avere una δ



- si ha $f'(t) = -8e^{-4t}u(t)$ e quindi

$$\frac{df}{dt} = f'(t) + \underbrace{[f(0^+) - f(0^-)]\delta(t)}_{\text{salvo in } \phi, \text{ con } \delta \text{ centrato in } 0} = -8e^{-4t}u(t) + \underbrace{2\delta(t)}_{\substack{\delta \text{ mostra discontinuit\`a, dipende} \\ \text{caso in cui} \\ \text{app'imo il} \\ \text{salvo in } 0}} \quad \text{caso in cui} \\ \text{condensatore}$$

Voglio tensione discontinua su C, devo porerci una
corrente in $t=0$

Richiami su trasformata di Laplace

- **Trasformata di Laplace di funzioni ordinarie**

- sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; si definisce Trasformata di Laplace di f la funzione di variabile complessa s

$$L[f] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove $s = \sigma + j\omega$ e' la variabile complessa (o di Laplace)

Handwritten notes:
- σ : parte reale, ω : parte immaginaria
- s è un numero complesso
- Se $\sigma > 0$, γ è il tasso di crescita esponenziale in regime stazionario. Non si sceglie un caso...
- ω è la frequenza angolare.

- **Funzioni ordinarie trasformabili secondo Laplace**

- si considerano nel seguito funzioni ordinarie f di classe $\mathcal{L}$ e cioè'

- 1) continue a tratti (f ha al più discontinuità di prima specie, cioè per ogni t esistono finiti $f(t^+)$, $f(t^-)$)
- 2) di ordine esponenziale, cioè esistono $M, \beta > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

Handwritten notes:
- β è il tasso di crescita esponenziale.
- M è il modulo dominante da una funzione esponenziale.

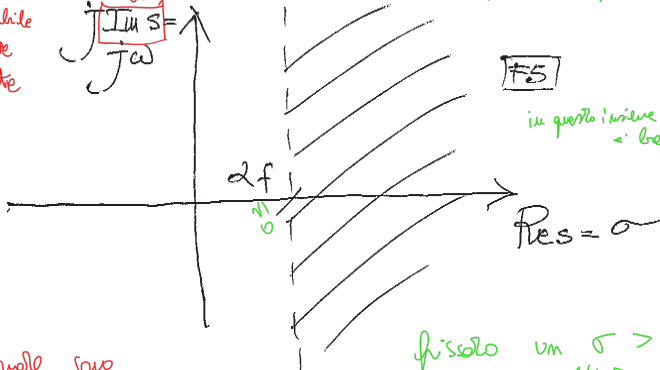
- in tali ipotesi esiste $\alpha_f \geq 0$ (ascissa di convergenza) tale che $F(s)$ e' ben definita per ogni $\text{Re}[s] = \sigma > \alpha_f$; inoltre $F(s)$ e' $\exists \alpha_f$ t.c. analitica per $\text{Re}[s] > \alpha_f$

infinitamente derivabile
posso fare tutte
le derivate

$$\int_{j\omega}^{j\omega + w} F(s) ds$$

l'integrale e' convergente in
questo semipiano

Se prendo
parte reale di
 $s > \alpha_f$, l'integrale
e' convergente



in questo insieme l'integrale
e' ben definito

fissato un $\sigma > \alpha_f$
l'integrale converge,

e ad ogni s viene
associata un
 $F(s)$

• Su α_f c'è uno
singolo punto di
discontinuità di $F(s)$

Se F di ordine esponentiale
 $\exists \alpha_f \geq 0$ t.c. l'integrale
converge, e ci associa un valore
 α_f

Trasformata di Laplace di funzioni elementari



$$f(t) = u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

↳ ascissa di convergenza = 0
la funzione è definita $\forall \operatorname{Re}(s) > 0$

► per $s_0 \in \mathbb{C}$

Se $s_0 \in \mathbb{R}$
αp = s_0 , polo

$$f(t) = e^{s_0 t} u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s - s_0}$$

moltiplico per un exp
⇒ ribalta di s_0

► per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$

$$f(t) = \cos(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

► per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$ $\bigwedge_{t \geq 0}$ f. limitata, αp = 0 ascissa di convergenza

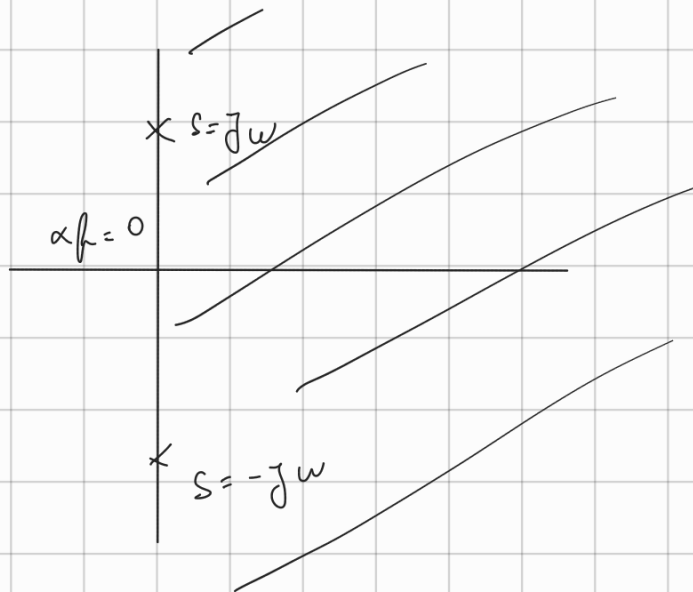
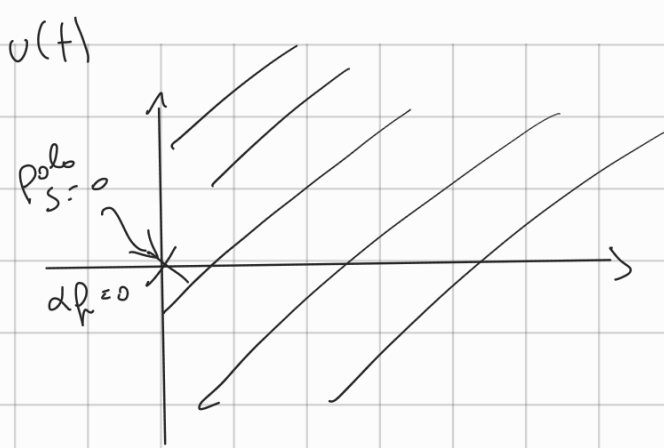
$s = \pm j\omega$ poli

$$f(t) = \sin(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

funzione seppia
 $\forall \operatorname{Re}(s) > 0$

► per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$



$$f(t) = e^{s_0 t} u(t) \Rightarrow \frac{1}{s-s_0}$$

Se s_0 reale, $\alpha_p = s_0$

Se s_0 complesso $\alpha_p =$

- ▶ per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

polo in $\mathbb{C}$, ordine
di convergenza
in $\mathbb{C}$

- ▶ per $n = 1, 2, \dots$ Funzioni polinomiali

$$f(t) = t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

polo di ordine
 $n+1$ in $s=0$

- ▶ per $n = 1$

polo in zero, $df=0$

rampe

$$f(t) = tu(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L} u(t) = \frac{1}{s^2}$$

- ▶ per $\alpha \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{L}^n u(t) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

TRASFORMATA $\mathcal{L}$, c'è un problema

Trasformata di Laplace di funzioni impulsive

- Si definisce in termini euristici

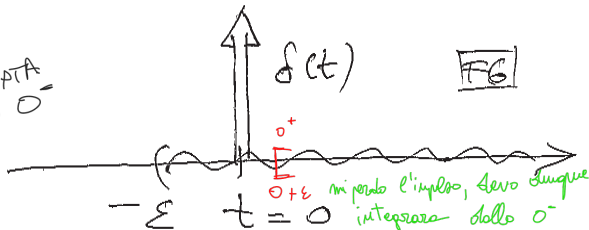
$$\int_0^{-0} \delta(t) e^{-st} dt$$

mi porso
a δ

USO TRASFORMATA
LAPLACE dlo 0^-

$$L_0-[\delta(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$

$\delta(t)$ con centro in $t=0$
se posso si in $t=0$ anche integrando
applicando la definizione
se voglio tenere conto
dell'impulso,
inizio ad integrare
a 0^- , un attimo
prima



- dato che l'integrazione inizia da un attimo prima di 0, con l'integrale riusciamo a 'catturare' la δ ; in pratica la $\delta(t)$ 'campiona' la funzione e^{-st} in $t = 0$, quindi si ha

Trasformata
allo 0 meno
(suma δ)

$$L_0-[\delta(t)] = [e^{-st}]|_{t=0} = 1$$

- per funzioni ordinarie L_0- e L coincidono; nel seguito useremo implicitamente L_0- quando abbiamo a che fare con funzioni impulsive

Proprietà' della T. Laplace

1) Linearità: $f, g \in \mathcal{L}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ implica $af + bg \in \mathcal{L}$ e $L[af + bg] = aL[f] + bL[g]$

2) Vediamo l'importante regola di derivazione; si ha

$$L_0- \left[\frac{df}{dt} \right] = sL_0- [f] - \underbrace{f(0^-)}_{\text{limite sinistro della f. in } 0} = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$$

dove d/dt e' la derivata nel senso delle funzioni impulsive e $f(0^-)$ e' il limite sinistro della f in $t = 0$

Se f e' discontinua, $\frac{df}{dt}$ ha un impulso in $t=0$

• Osservazione importante. Una operazione differenziale nel dominio del tempo (d/dt) diventa una operazione algebrica ($s \times$) nel dominio trasformato di Laplace

in $t = 0^-$

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = s \cdot L[f] - \underbrace{f(0^-)}_{\text{lim } s \rightarrow 0}$$

Esempio. Sappiamo che $\delta(t) = du(t)/dt$; dalla regola di derivazione otteniamo

U è discontinua *derivata* *trasforma* *S* *da* *derivata* *di* *U(t)*

$$L_{0-}[\delta(t)] = sL_{0-}[u(t)] - \underbrace{u(0^-)}_{\substack{\text{trasforma} \\ \text{da } 0^- \\ \text{e importa} \\ \text{da } 0^-}} = sL[u(t)] - u(0^-) = s \frac{1}{s} - 0 = 1$$

3) regola di integrazione: si ha

$$L\left[\int_{0^-}^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

integrazione
divisione per S

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = L[f(t)] \cdot s - f(0^-)$$

$$\begin{aligned} L_{0-}\left[\frac{d}{dt}u(t)\right] &= s \cdot L_{0-}[u(t)] - u(0^-) \\ &= s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1 \end{aligned}$$

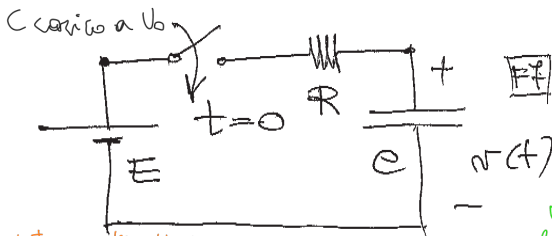
fine questa parte 18/09/23

Transitorio in circuito del primo ordine *Lezione 17, 25/05/13*

• Vogliamo analizzare il transitorio in un circuito RC del primo ordine in parallelo nel dominio del tempo (DT) e nel dominio di Laplace (DL)

• *Completa* DT. Consideriamo il circuito in figura e supponiamo $v(0^-) = V_0$; *riassumo storia fino a 0^-* vogliamo trovare $v(t)$, $t > 0$, con una analisi nel DT; l'analisi consiste di 2 passi

V_0 riassume tutta la storia precedente del circuito



Circuito RC nel tempo

variabile di stato non discontinua

conosco V_0 a 0^- , devo tornare a 0^+ , così per ho lo stato a $V(0)$ che mi serve per sapere $v(t)$ posso risolvere il circuito

i) analisi all'istante critico ($0^-, 0^+$); conosco lo stato a $t = 0^-$ ma per risolvere l'equazione differenziale ho bisogno dello stato a $t = 0^+$; si usa il fatto che il circuito e' non degenerare per scrivere

quando chiuso, porta una corrente finita

$$\left\{ v(0^+) = v(0^-) = V_0 \right\}$$

disinserito circuito, applico E-V₀

ii) analisi in evoluzione continua per $t > 0$; si ha

$i := \frac{E - V_0}{R} e^{-t/\tau}$
una corrente propria, libera
no discontinua

$$\left\{ \begin{array}{l} RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0 \\ v(0^+) = V_0 \end{array} \right.$$

Problema con il

• abbiamo quindi una completa e si ha

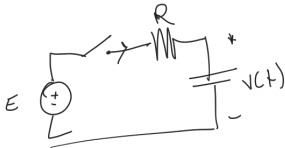
$$v(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = \overset{\text{LIB}}{V_0 e^{-t/\tau}} + E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0$$

con $\tau = RC$

carica
sul condensatore

carica
del condensatore
carica con
batteria

carica con del condensatore
scarica con batteria
a tempo τ



$$RC \mathcal{L} \left[\frac{dv}{dt} \right] + \mathcal{L}[v] = \mathcal{L}[E v(t)]$$

$$RC[sV(s) - v(0^-)] + V(s) = \frac{E}{s}$$

Analisi con Laplace

Dividendo circuiti, e'
come applicazione Teorema
discontinua

- DL. Considero il circuito a partire da $t = 0^-$ sottoposto a una eccitazione discontinua $v_g(t) = Eu(t)$ e scrivo l'equazione differenziale per $t > 0^-$

Chiedo interruzione,
discontinua

Scrivo subito
eq. diff. a 0^-

così considero
la discontinuità
del generatore

considero la discontinuità del generatore

$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_g(t) = Eu(t), \quad t > 0^-$$

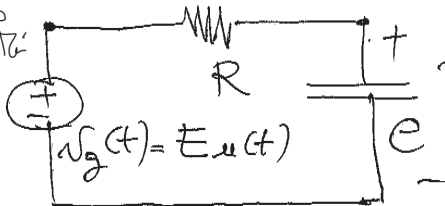
considero così la discontinuità

$$v(0^-) = V_0$$

impongo la b.c. iniziale



Scrivo direttamente
eq. diff. a 0^-



$v(t)$ Applico ora
Laplace

- trasformiamo entrambi i membri con Laplace

esibito circuito

$$\int_{0^-}^{+\infty} (RC \frac{dv}{dt} + v) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} v_g(t) dt$$

Laplace integra l'eq. differenziale, trasformata di Laplace

integro l'eq. diff. senza
onde la discontinuità

- usando il teorema di derivazione allo 0^-

condizione iniziale, che già conosco, non devo più conoscere $v(0^+)$

Teo. derivazione mi introduce la condiz. iniziale $v(0^-)$ che conosco già

l'equazione

$$\boxed{RC[sV(s) - v(0^-)] + V(s) = \frac{E}{s}}$$

costante *Teo. derivazione* *allo 0^-* *prof. $v(t)$*

- quindi nel DL l'equazione differenziale si e' trasformata in una equazione algebrica; inoltre usando il teorema di derivazione allo 0^- sono state automaticamente introdotte le condizioni iniziali sullo stato a $t = 0^-$, $v(0^-) = V_0$ (quelle che conosco)

- risolvendo ottengo

$$RCsV(s) - RCv(0^-) + V(s) = \frac{E}{s}$$

condiz. iniziale 0 *$V_0 \neq 0$ $E=0$ $E=0$ $E=0$*

$$V(s) = V_{\text{lib}}(s) + V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{sRC + 1} + \frac{RCV_0}{sRC + 1}$$

Rozeob, c'e' E *LIBERA* *ma condiz. iniz. 0*

- libera:

Verifica

$$V_{\text{lib}}(s) = \frac{V_0}{s + 1/RC} \rightarrow v_{\text{lib}}(t) = [V_0 e^{-t/RC} u(t)]$$

diviso per RC *$s - s_0$* *auto. trasforma*

ricordo di $-\frac{1}{RC}$

$A(s + \frac{1}{RC}) + Bs$ *$\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}}$* *$As + A/RC + Bs$* *$A + B = 0$* *$A = 1, A = RC, B = -RC$*

$$RCsV(s) + V(s) = \frac{E}{s} - RCv(0^-)$$

$$(sRC + 1)V(s) = \frac{E}{s} - RCv(0^-)$$

- forzata: si ha

FUNZ. RAZIONALE
PROPRIA POSS.
scomposta in Frazioni

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} F(s) \quad \tau = RC \text{ a comune}$$

con

F. RAZION.
PROPRIA

↪

$$F(s) = \frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Residui: polo del primo ordine

$A(s + \frac{1}{\tau}) + Bs$
 $s(s + \frac{1}{\tau})$

Scegliamo
FRATTI

SEMPLICI
(Se 3 è un'eq.)

$$As + A\frac{1}{\tau} + Bs = 0$$

$$\begin{cases} \frac{A}{\tau} = 1 \\ s(A+B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \tau \\ A+B = 0 \\ B = -\tau \end{cases}$$

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}} \rightarrow v_{\text{for}}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t).$$

ANTI TRASPARENZA

↓
Ev(t)

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} (s + \frac{1}{\tau}) F(s)$$

• $\lim_{s \rightarrow \text{polo}} s\text{-polo}[F(s)]$

Se No $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ risolta, No fattori a come e s_0 sia un polo semplice ($\mu=1$)

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} D(s_0) = 0 \\ D'(s_0) \neq 0 \end{matrix} \right\} \text{polo del primo ordine}$$

oppure c'è il limite $A = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$

$$\text{Residuo } [F, s_0] = \frac{N(s_0)}{D'(s_0)}$$

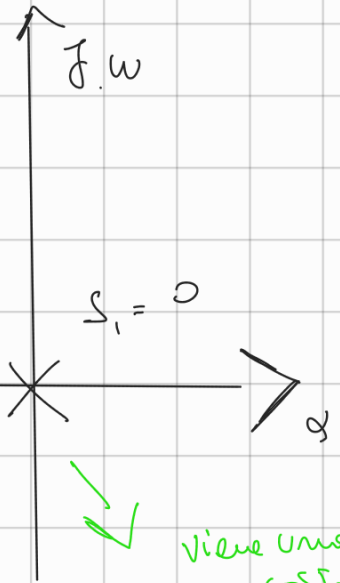
polinomio
polinomio

$$b = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} (s + \frac{1}{\tau}) F(s)$$

i poli dunque



avevamo un polo in 0
e un polo in $-\frac{1}{\tau}$



Il valore iniziale

• $t \rightarrow 0 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$

• $t \rightarrow \infty$, il valore finale...

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

per vedere da dove
inizialmente o tende il sistema

• Per lo stato tempo, si risolve eq differ → derivata Lap.

→ Risolve → Anti Trasformata

cosa più
difficile