

Circuiti del secondo ordine

Mauro Forti

April 21, 2020

eq. diff. del 1° ordine, 2 elementi reattivi

Circuiti del Secondo Ordine *descritti da eq. diff. del 2° ordine*

- Sono circuiti che contengono due elementi reattivi; il caso più interessante è 1 C e 1 L; li analizziamo prima nel DT e poi nel DL

- DT: risposta in evoluzione continua per $t \geq 0$; libera, forzata a eccitazioni costanti o sinusoidali, completa; transitori che conseguono ad un evento critico a $t = 0$; la trattazione estende quella vista per i circuiti del primo ordine

- DL: verifica con T. Laplace e estensione a eccitazioni più generali *nel dominio trasformate* *Verifica + estensione*

non solo ecc. sinusoidali ecc.

2 induttori, 2 condensatori, o induttore e condensatore

↳ Difficoltà è nel fare l'autotrasformata

2 elementi reattivi, descritti da eq. diff. 2° ordine

Analisi DT e poi DL

Caso parallelo conviene usare conduttanza equiv.

generatore
conduttore
conduttore



Var. stato = tensione nei condensatori, corrente negli induttori

come var. di stato per l'equaz. diff.

per arrivare all'eq. diff posso scegliere i_L per parallelo
 scrivo k_i al posto per serie uso v_c } altrimenti ogni equaz. integro-diff.

corrente generatore controllata da i_L var. per eq. diff voglio scrivere eq. diff. che risolva circuito

$$i_c + i_L + i_G = i_s, \quad t \geq 0 \text{ in evoluzione continua}$$

$$\Rightarrow C \frac{dv}{dt} + i_L + G_p v = i_s \quad v = L \frac{di_L}{dt}$$

corrente imposta generatore
v'è anche la tensione sugli induttori
sono in parallelo v'è anche la tensione sull'induttore

$$\Rightarrow LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_p L \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s \quad t \geq 0$$

Divido per LC per avere una FORMA NORMALIZZATA

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G_p}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_s$$

$P_n = \omega^2 i_s$
 $\alpha = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$
fattore di smorzamento per il circuito

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec} \text{ è la pulsaz. di risonanza}$$

fattore di smorzamento è legato alle perdite nel circuito

nel caso parallelo p. esempio se perdite le ho sulla conduttanza, date da

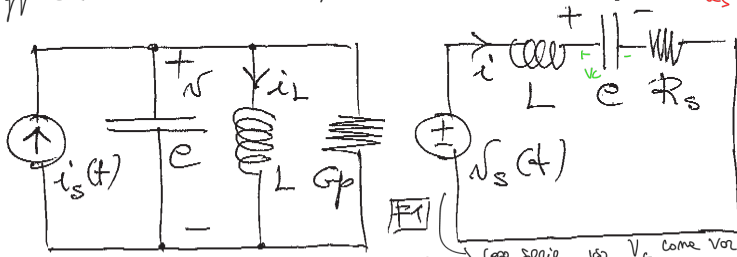
$$\text{caso serie le perdite sono } r_s \cdot i_s$$

sono una specie di attrito nei nostri circuiti.

Circuiti RLC del Secondo Ordine (DT) *nel dominio del tempo*

• Prendiamo in considerazione i due circuiti RLC parallelo e serie e cerchiamo di farne una trattazione unificata nel DT

Eq diff che descrive caso serie e parallelo, e' della stessa forma *R_s resistenza serie*



uso var. di stato per scrivere le eq. diff *→ caso serie, uso V_C come var. per eq. diff*
 • per il circuito parallelo ($\parallel$), usando come variabile i_L possiamo

scrivere $i_C + i_L + i_G = i_s$, quindi

$$C \frac{dv}{dt} + i_L + G_p v = i_s$$

e, considerando che $v = L di_L / dt$

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G_p L}{LC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = i_s, \quad t \geq 0$$

$$V_s = L \frac{di}{dt} + V_C + R_s i$$

$$i = C \frac{dV}{dt}$$

$$V_s = LC \frac{d^2 V}{dt^2} + R_s C \frac{dV}{dt} + V_C$$

normalizzo

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{V_C}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

• dualmente, per il circuito serie (Σ), usando come variabile v_C

SCRIVO KV alla maglia $v_S = L \frac{di}{dt} + v_C + i R_S$ $i = C \frac{dv_C}{dt}$

$$\underbrace{C}_{\frac{C-p}{2C}} L \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \underbrace{R_S C}_{\cancel{C}} \frac{dv_C}{dt} + \underbrace{v_C}_{\cancel{C}} = v_S, t \geq 0 \Rightarrow$$

• entrambe le equaz. diff. affini del secondo ordine sono riconducibili alla forma dove $x =$ variabile scelta, $\frac{d^2}{dt^2}$ o $\frac{d}{dt}$ Diviso

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f, t \geq 0$$

per avere
forma
normale

• nel caso $\parallel$
 $\alpha =$ FATTORE DI SMORZAMENTO
 RLC $\parallel$
 e' il fattore di smorzamento del circuito RLC $\parallel$

$$\alpha = \alpha_p = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$$

... $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$

... PULSAZ. RISONANZA e la Rison

differentisco lo
2 solo per lo
defn di α, x , e f
 ω_0 e la Rison

e' la pulsazione di risonanza e

l'eccibos.
del circuito

$$f = \omega_0^2 i_S$$

i_S corrente di ecc. ω_0^2
del circuito

e' il termine forzante

- nel caso Σ

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} \text{ rad/sec} \quad 2\alpha_s = \frac{R_s}{L}$$

e' il *fattore di smorzamento* *pendibile del circuito legato al*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec} \quad \Rightarrow \text{pendente di smorzamento}$$

pendite nel circuito

e' la *pulsazione di risonanza* e *Costante* $\frac{GP}{2C}$ *pendibile con GPV^2 , pendibile di $\frac{GP}{2C}$ sulla conduttanza*

$$f = \omega_0^2 v_s$$

e' il termine forzante

Cost Serie *pendibile $R_s \cdot i^2$*

Ho ricordato entrambi i circuiti alla STESSA equos. differ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = f$$

Fattore di smorzamento dipende dalle perdite nel circuito
PULSAZIONE di RISONANZA $\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Termine Forzante $\omega_0^2 \cdot ecc.$

Risposta Libera di circuiti RLC

Studio la soluzione dell'omogenea

- E' la risposta quando i generatori indipendenti sono disattivati e gli elementi reattivi sono carichi *no gen. indipendenti* energia immagazzinata negli L e C e ci sono un Bravisio di Storia

Elementi reattivi carichi, c'è energia immagazzinata in L e C e ci sono un Bravisio di

- Passo 1. troviamo la forma matematica della risposta libera CARICA (integrale generale dell'omogenea) *associata ~> dipende da due costanti (?) occorre eq. diff. del 2° ordine*
- Passo 2. imponiamo le condizioni iniziali

circolo quasi

→ sprezzo generazione, ho equos. diff. omogenea,

eq. diff. del secondo ordine, dipenderà da due costanti.

*Teoria
fondamentale*

↑
RISPOSTA LIBERA DIPENDERÀ
DA 2 COSTANTI

- consideriamo l'eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0$$

e l'equazione caratteristica associata

è un polinomio

$$p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}{1}$$

- le radici caratteristiche valgono

Soluzione

naturali = caratteristiche
e "indipendenti" naturali
indip. dei parametri

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{rad/sec} = \text{sec}^{-1}$$

"BIFREQUENZE"

e sono dette anche frequenze naturali in quanto caratterizzano il tipo di risposta naturale di un circuito RLC

- consideriamo separatamente i tre casi $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0, \Delta = 0$

e $\Delta < 0$ radici complesse, $\Rightarrow$ oscillazioni smorzate...

Radici reali

Radice reale

"PREDITEATTE, smorz. alto, il circuito non oscilla"

- notare che le perdite crescono se cresce α ($G_p v^2$ W nel caso $\parallel$, $R_s i^2$ nel caso Σ)

oscillazioni smorzate in un certo sistema, non possibili in un sistema del primo ordine

$$G_c \stackrel{\text{per}}{\hat{=}} \frac{G_p}{2C} \Omega^{-1}$$

$$R_c \hat{=} \frac{R_s}{2L} \Omega$$

Freq. NATURALI sono $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ [rad/sec]

Freq. naturali, sono rad/sec

$$1/\text{sec} = \text{Hz}, \text{freq}$$

• Naturali = caratterizzano l'evoluzione naturale del circuito, indipendentemente dai generatori

$\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$, Grandi positive, α grande,
2 radici caratter. real. e stive
CIRCUITO NON OSCILLA

$\Delta = 0$ radice reale.

$\Delta < 0$, Radici caratter. di
coppia, $\Rightarrow$ oscill. smorzata
del sistema, in evol.
libere

$$\leftarrow \alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \alpha > \omega_0$$

- $\Delta > 0$. Caso sovrasmorzato caso ideale $\alpha = 0$, $\neq$ pendolo, non realistico
- per un $RLC \parallel$ si ha non ha oscillazione

Se $\Delta > 0$
 $G_p > 2\sqrt{\frac{C}{L}} \alpha_p = \frac{G_p}{2C} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff \boxed{G_p > G_c} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$
 G_c conduttanza critica conduttanza critica Ω^{-1}
 con G_c conduttanza critica in Ohm^{-1} e' una conduttanza

$\frac{2L \cdot \sqrt{C}}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{C}} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$
 $= \frac{2C\sqrt{L}}{LC}$
 $= 2\sqrt{\frac{C}{L}}$
 $= 2\sqrt{\frac{1}{\frac{L}{C}}}$
 $= 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{G_c}}}$
 $= 2\sqrt{G_c}$
 RESISTENZA CRITICA Ω

- per un $RLC \Sigma$ si ha

R_c resistenza critica
 $\alpha_s = \frac{R_s}{2L} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff \boxed{R_s > R_c} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
 con R_s resistenza critica in Ohm RESISTENZA CRITICA Ω

con R_s resistenza critica in Ohm

- le due radici caratteristiche sono reali negative distinte soluz. diff. reale $\Delta > 0$

Si sono nel caso R, L, C positivi

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ rad/sec}$$

es. $-3, -7 \text{ rad/s}$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

Forma dell'omogenea

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

devo avere condiz. iniziali

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie) facendo variare k_1, k_2 si ottengono le soluz. dell'omogenea

facendo variare k_1, k_2
 faccio variare le soluzioni, nello spazio delle soluzioni.

Frontiera tra il valore delle
resistenze / conduttanze critiche

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$$

$$\alpha \geq \frac{R_2}{2L} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rel. sec}$$

$$\frac{R_2}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad R_2 > \frac{2L\sqrt{LC}}{\sqrt{LC}\sqrt{LC}} = \frac{2L\sqrt{LC}}{LC}$$

$$\begin{cases} R_2 > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{critica} \quad \Omega \\ G_p > 2\sqrt{\frac{C}{L}} \quad G_{critica} \quad \Omega^{-1} \end{cases}$$

Caso sovrasmorzato

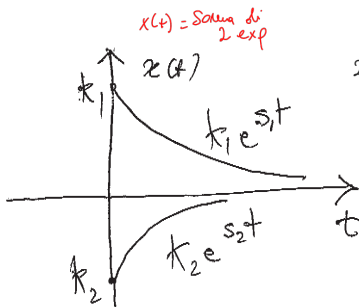
• Due radici reali, a fine delle
soluzioni.

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Per k_1 e k_2 risolvere problema
di Cauchy, imposta cond. iniziali.

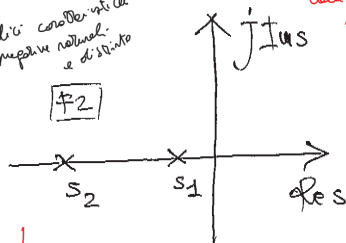
CASO SOVRA SMORZATO, MSPD PERIODICA

- la risposta e' di tipo aperiodico; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



2 radici caratteristiche
negative reali
e distinte

Φ_2



piano complesso, qui piano
delle frequenze
natural.

es. $k_1 > 0, k_2 < 0$

Somma di 2
exp

↓
il transitorio più veloce e' quello
più lontano dall'asse immaginario, s_2
l'exp. va più velocemente a 0
 s_1 più lento

• PIANO FREQ NATURALI
c'è sempre le radici reali.

Transitorio, quello più lontano al $\leftarrow$ onne ing.

- $\Delta = 0$. Caso *criticamente smorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha $\alpha^2 = \omega^2 = \alpha_c^2 = \omega_0$

Combin. particolare
o' element

parallelo

$$\boxed{\alpha_p = \omega_0} \iff \boxed{G_p = G_c} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Conduttanza parallela
= Conduttanza Critica

- per un $RLC \Sigma$ si ha

Si annulla il Δ ,
le due radici...

$$\boxed{\alpha_s = \omega_0 \iff R_s = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

annullando il Δ

- le due radici caratteristiche sono reali negative coincidenti

doppia radice reale, neg.

$$s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 \text{ rad/sec}$$

radice doppia

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

radice doppia

QUANDO t piccolo, domina
e, lui
poi viene sovrastato da $e^{-\alpha t} k_2$
dell'exp
domina e va
in 0

2° fun. inde. per la
integrale

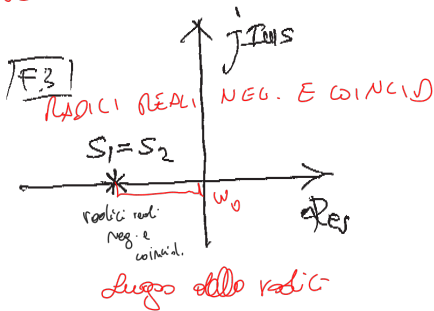
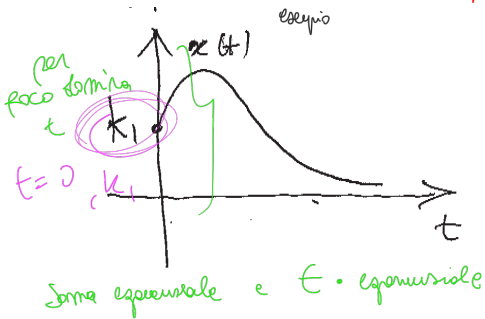
semina t

più $e^{-\alpha t}$

domina e va
in 0

- la risposta e' di tipo aperiodico; in figura un possibile $s_{\text{omma exp}} + t_{\text{exp}}$ andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali

RISPOSTA APERIODICA



se abbiamo ancora le perdite abbiamo $G_p = R_s$?

Come sistema nona nella attento, u. e c'è tanto attento, non oscilla. se non c'è attento, oscilla all'infinito

Passo a Δ negativo.

- $\Delta < 0$. Caso sottosmorzato *ORA ABASSO ANCORA LE PERDITE*
- per un $RLC \parallel$ si ha

Scendo al di sotto del valore critico

$$\alpha_p < \omega_0 \iff$$

$$G_p < G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

*condizione
scende sotto
il valore
critico*

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s < \omega_0 \iff R_s < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Resistenza minore della resistenza critica

- le due radici caratteristiche sono complesse coniugate a parte reale negativa

*Termin sotto radice negativo,
va scritto in forma complessa*

Pol. Sosp. risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

± 2 e cambia di segno sotto radice

$$= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

puls. naturale oscil. $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
(con sottosmorzato)

Fattore di smorz. d

$$\omega = -\alpha \pm j\beta \text{ rad/sec}$$

*radici
conjugate
e complesse*

dove

$$0 < \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

3 parametri: resistenza, capacità e induttanza

β positivo quando $\omega_0 > \alpha$

E' la pulsazione naturale di oscillazione in rad/sec del circuito RLC

oscilla ad una puls. più bassa di ω_0

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$x(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi)$$

pulsazione $\beta < \omega_0$

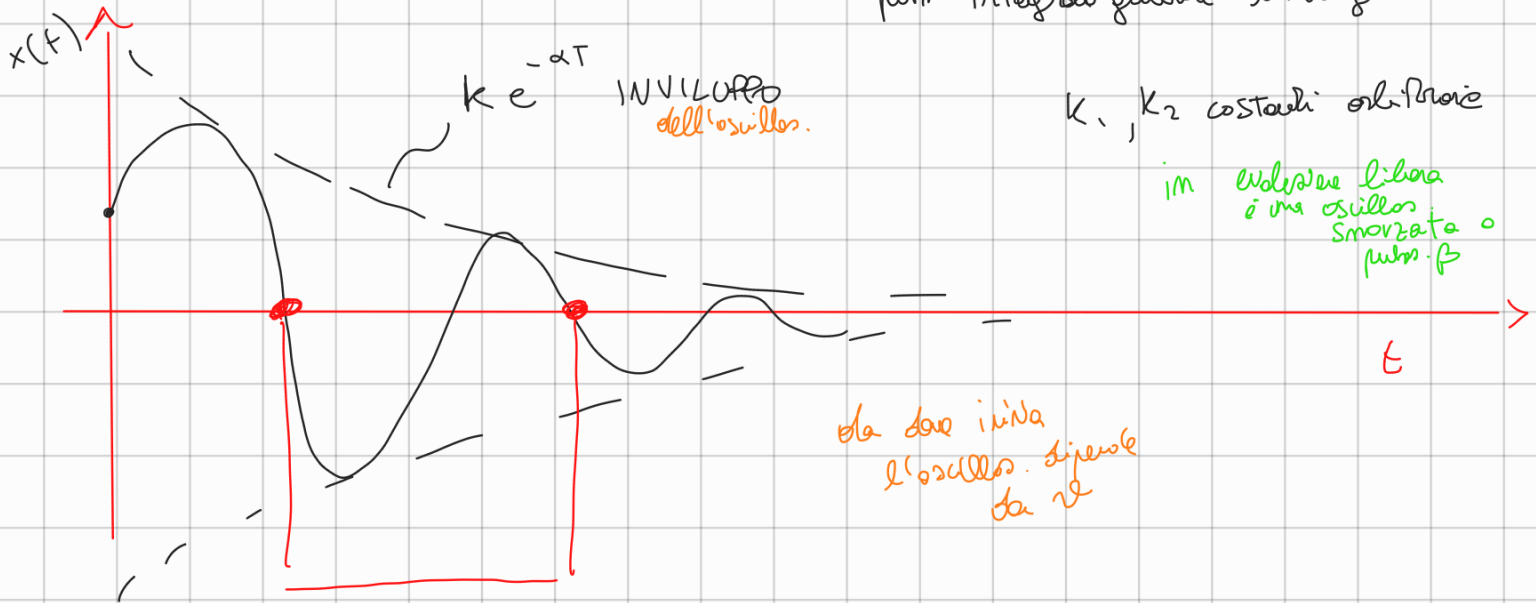
oppure

$$= k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$

forma integrale generale dell'oscillazione

k_1, k_2 costanti arbitrarie

im. Evoluzione libera
di un oscill. smorzata o
puls. β

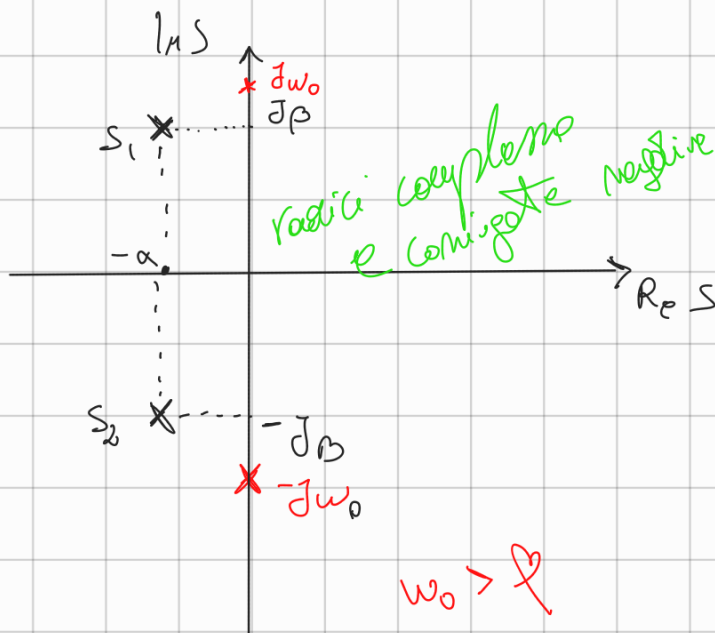


da dove inizia
l'oscill. dipende
da φ

1 periodo $T_D = \frac{2\pi}{\beta}$
periodo β

- Parte reale determina l'involuppo dell'oscillazione, quanto veloc. va a 0 più neg. è α , più veloc. va a 0

ζ = determina quanto
oscilla velocemente
dentro l'involuppo
determina la pulsazione
di oscill. dell'involuppo



Caso limite $R_s = 0$ o $G = 0$, idealmente...

- Pulsazione naturale del circuito LC entra in gioco quando si ecc. solo con $\omega_0 \gg \alpha$ ris. z.

Caso sottosmorzato, circuito oscilla a puls. β
 $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$ Puls. di ris. z.

- l'integrale generale dell'omogenea e'

La Forma delle soluzioni sarà

$$x(t) = ke^{-\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad t \geq 0$$

oscilla con puls. propria ω_0
 e β due costanti arbitrarie

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

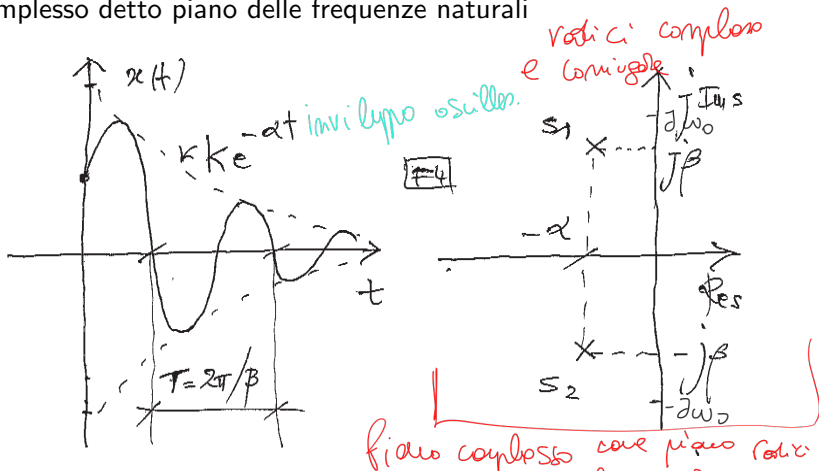
con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{periodo oscill.}$$

$$\beta < \omega_0$$

Debito invisibile c'è una oscill. o puls. β -
 da dove inizia a 0, si vede da β

- la risposta è di tipo *oscillatorio smorzato*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- notare che $\alpha = |\text{Re}[s_1]|$ determina quanto velocemente tende a 0 l'involuppo *Re determina involuppo oscill. più è negativo α , più veloce*
- $\text{Im}[s_1] = \beta$ individua la pulsazione effettiva di oscillazione all'interno dell'involuppo *vedi 9.18*

- Caso ideale senza perdite *caso limite* NO PERDITE
- per un $RLC \parallel$ si ha $G_p = 0$ e quindi

$$\alpha_p = 0$$

non hanno parte reale
Non sono considerate
nella conduttanza.
 R_s è un cc. (?)

- per un $RLC \Sigma$ si ha $R_s = 0$ e quindi

$$\alpha_s = 0$$

- le due radici caratteristiche sono complesse coniugate a parte reale nulla

No parte reale

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea è'

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

NON NO PIÙ SMORZAMENTO

$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

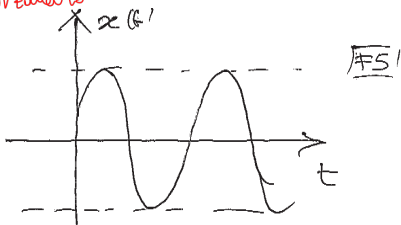
non c'è
più lo smorzamento,
L e C si collegano
energia sinus

- la risposta e' una *oscillazione alla pulsazione di risonanza ω_0* ^{risultate} che non si smorza nel tempo; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali

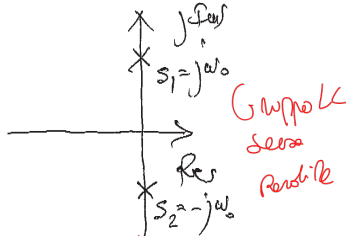
LC si palleggiano energie
senza smorzamento

$$G_p = 0 \quad R_s = 0$$

parte smorzamento = 0



radici caratteristiche
su asse immaginaria, in pure



LC si palleggiano energia senza perdite

- come detto le frequenze naturali sono immaginarie pure.

LC si palleggiano energia. appena molto resistenza, tutto si smorza, seppure pu' ^{avanzo R} si smorza. Se aumento troppo resistenza, non c'e' piu' oscillazione.

$R \rightarrow$

$\rightarrow$

oscillando sempre...

$\uparrow$
 $\downarrow$

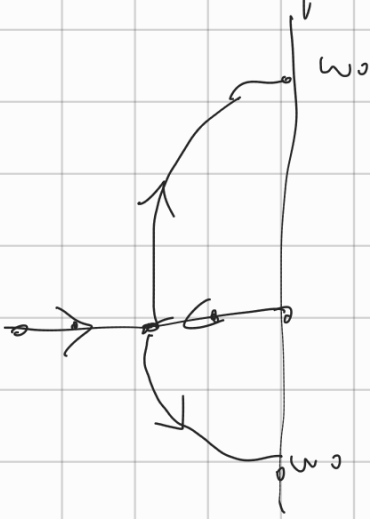
$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t)$$

caso senza perdite

Porto del caso ideale, $\alpha = 0$,
radici caratt. dell'osc. ideale, L e C si
paleggiano energia all'infinito, e l'oscillazione
non si smorza mai.

• inserisco un resistore/conduttore, ogni volta
che si paleggiano energia, un po' di
energia del circuito va via, proprio
alla resistenza, e piano piano tutto si
smorza.

• aumentando resistore arrivo ad un livello
di smorzamento tale che il circuito in ess.
libero non presenta più oscillazioni



Eq. diff. del 1° ordine, L costante invariante

Determinazione delle costanti arbitrarie

Come impostare le condizioni iniziali

- Determiniamo adesso le costanti arbitrarie imponendo le condizioni iniziali sullo stato $v_C(0) = V_0$ e $i_L(0) = I_0$ Sono 2 gli stati iniziali perché qui circuiti del 2° ordine
- illustriamo per un circuito RLC || nel caso sovrasmorzato dove

$$x(t) = i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

- dobbiamo risolvere un problema di Cauchy con le condizioni iniziali $i_L(0) = I_0$ e $\frac{di_L}{dt}(0) = ?$; la seconda è una 'condizione iniziale derivata' che dobbiamo trovare usando l'informazione $v_C(0) = V_0$; per un circuito RLC || si ha $v_L(0) = L \frac{di_L}{dt}(0) = v_C(0)$, quindi

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

- allora, riassumendo, abbiamo il problema di Cauchy con una unica soluzione

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

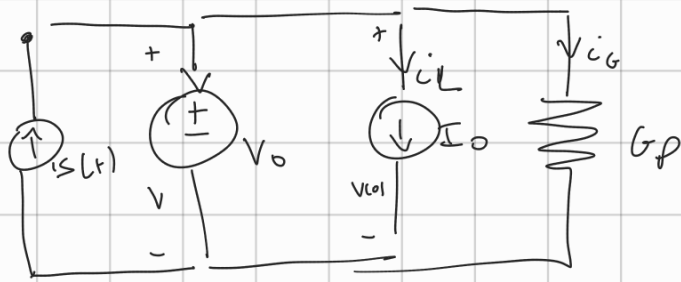
$$i_L(0) = I_0 \quad \text{Ampere}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} \quad \frac{A}{\text{Sec}}$$

Problema circuiti

all'istante $t=0$

$$\left. \frac{d}{dt} i_L \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$



ho a $t=0$
Le C cortoc.
Le L cortoc.

$$t=0 \quad V(0) = V_0 = L \left. \frac{d}{dt} i_L \right|_{t=0}$$

C e L cortoc.
a $t=0$,
C gen. Tensione V_0

L è un gen. corrente
pari a I_0

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = I_0 \end{cases}$$

Sist. 2 eq 2 incognite

$$\frac{d i_L(0)}{dt} = k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

se mettiamo s_1 e s_2 per la forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ \frac{V_0}{L} \end{pmatrix}$$

Ma soluzione unica
perché $s_1 \neq s_2$
e dopo il calcolo...

↓ dunque per sostituzione

Procedimento libero RLC $\Sigma = 0$ | risposta

1) Trovo forma integrale generale dell'equazione

2) Imposto le condiz. iniziali.

• quindi

derivato in 0

$k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t}$

$$i_L(0) = \underline{i_0 = k_1 + k_2}, \quad \underline{\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = k_1 s_1 + k_2 s_2}$$

e risolvendo

$$k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 i_0 \right); \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 i_0 \right).$$

$s_1 \neq s_2$ per def. di caso sovrasmodato

$$= G_2 = \frac{2C}{\sqrt{LC}}$$

① in che caso si è in RLC parallelo $\alpha > \omega_0$
 come var. eq. d $\frac{G_P}{2C} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$



$$i_L + C \frac{dv}{dt} + G_P v = i_g$$

$$v = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \left(\frac{G_P}{C} \right) \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_g}{LC}$$

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + 2\alpha \frac{dx}{dx} + \omega_0^2 x = 0$$

$$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$G_P \geq 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

rad/sec $\alpha = \frac{G_P}{2C}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 $G_P \geq 2\sqrt{\frac{C}{L}}$

• **Esempio.** Consideriamo un circuito RLC parallelo con $G_p = 1$ *Condizione possibile*
 Ohm^{-1} , $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$. Determinare la risposta libera $i_L(t)$ per

Condiz. iniziale
 $i(0) = i_0 = 1 \text{ A}$ e $v_C(0) = V_0 = 1 \text{ V}$ *1° Vediamo in che caso siamo e in base a quello scriviamo la formula della soluz.*

• si ha *Vediamo in che caso siamo.*

in base al caso
solo formula soluzione
 $G_p = 1 < G_c = 2\sqrt{C/L} = 2$
 $\alpha = 1/2$ $\omega_0 = 1$ $\alpha < \omega_0$ *caso sottosmorzato*

quindi siamo nel caso sottosmorzato

• $\alpha_p = G_p/2C = 1/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \text{ rad/sec}$ e

rad/sec pulz. di oscill. del sistema
 $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}$; le radici caratteristiche sono

$$s_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec} \text{ *freq. naturali*}$$

quindi *forma sol. , integ. generale*

$$k_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + k_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$i_L(t) = k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + k_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

con *impongo condiz. iniziali*

$$i_L(0) = 0 \quad i_L(0) = 1 \text{ A}; \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 1 \text{ A/sec}$$

$V_0 = V_L = L \frac{di_L}{dt}$
 $\frac{di_L}{dt} = \frac{V_0}{L}$

$$G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}} = 2\Omega^{-1} \quad \text{condutt. critico}$$

non oscill. in
esplosione
libera

$$G_p = 1\Omega^{-1} < G_c \Rightarrow \text{caso smorzato}$$

Radici Caratteristiche / f. naturali

$$S_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta \quad \alpha_p = \frac{G_p}{2C} = \frac{1}{2} \text{ rad/sec}$$

$$\alpha_p < \omega_0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \text{ rad/sec}$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

$$\Rightarrow S_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta = \frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

No radici, solo forma soluzione

$$\begin{cases} X(t) = i(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t \geq 0 \\ i_L(0) = 1A \\ V_C(0) = 1V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_L(0) = 1A \\ \frac{d}{dt} i_L(0) = \frac{V_0}{L} = 1A/sec \end{cases}$$

ora sostituiamo

$$i_L(0) = k_1 = 1 \quad i_L(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + k_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\dot{i}_L(0) = k_1 e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} \cos(0) + k_2 e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} \sin(0)$$

deriv. $i_L(t)$ e val. in 0

NON
SAI DERIVARE?
COSTANTE

$$\frac{d}{dt} i_L \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1A/sec$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & - \frac{1}{2} k_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \\ & k_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

t=0

$$-\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k_2 = \sqrt{3}$$

- imponiamo le condizioni iniziali per determinare k_1 e k_2 :

$$i_L(0) = 1 \implies k_1 = 1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies k_2 = \sqrt{3}$$

- infine

$$i_L(t) = e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

- puo' anche essere riscritta come (provare!)

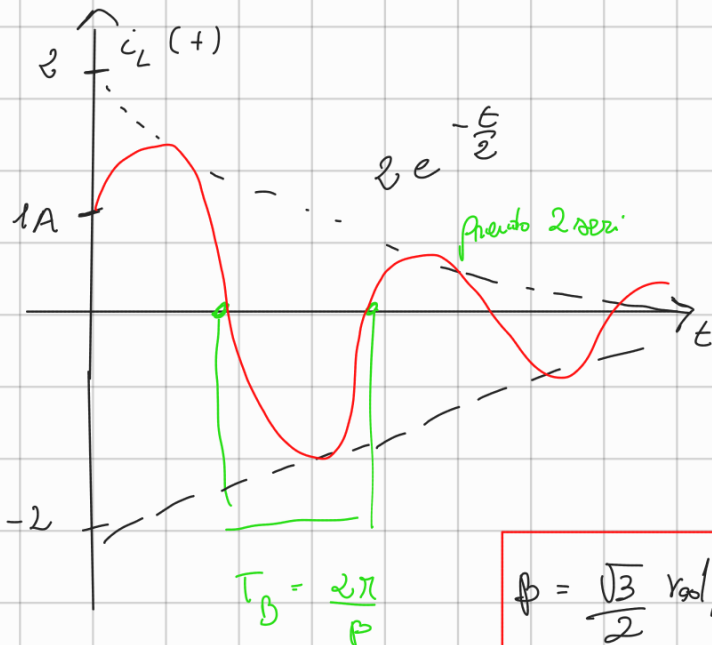
$$i_L(t) = 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right), \quad t \geq 0.$$

↓ per passare a questa forma, molto a più come i termini ecc...

Dunque

TIRO LE FILA

$$x(t) = i(t) \cos \omega t \\ = v_L(t) \cos \omega t$$

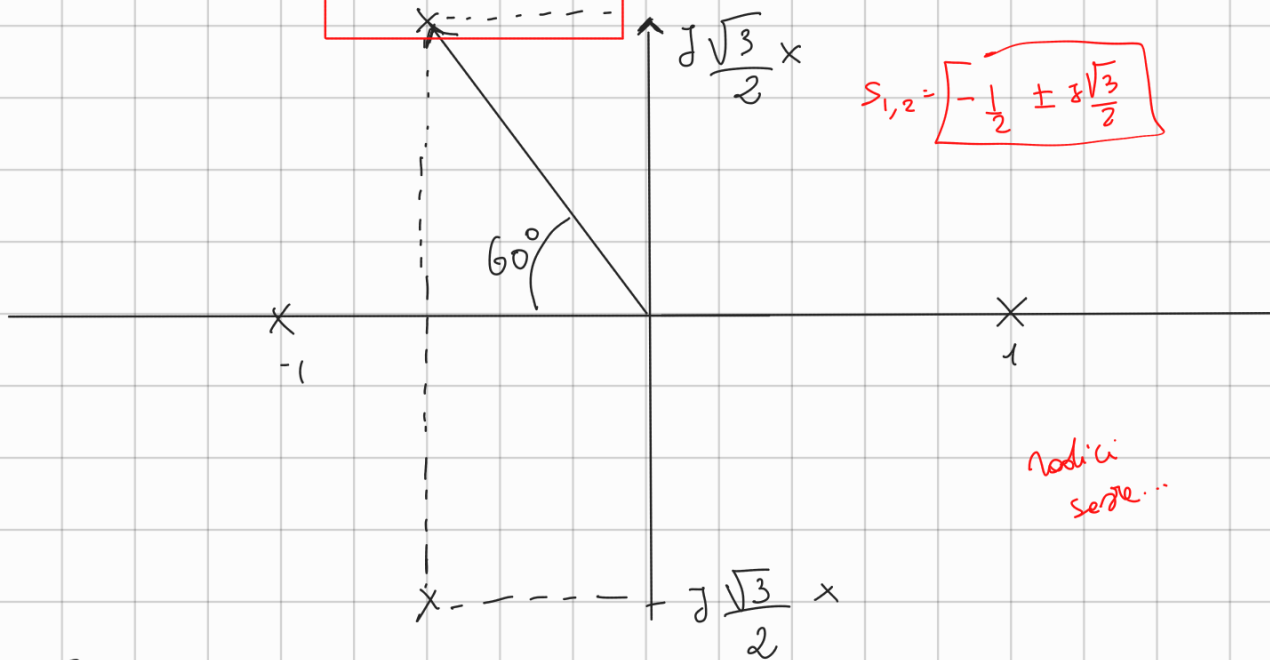


Ma le infinite oscillazioni,
però perché quello che
parto da 1A,
con presenza
di LALS

ho corretto il modello
completamente la
risposta libera.

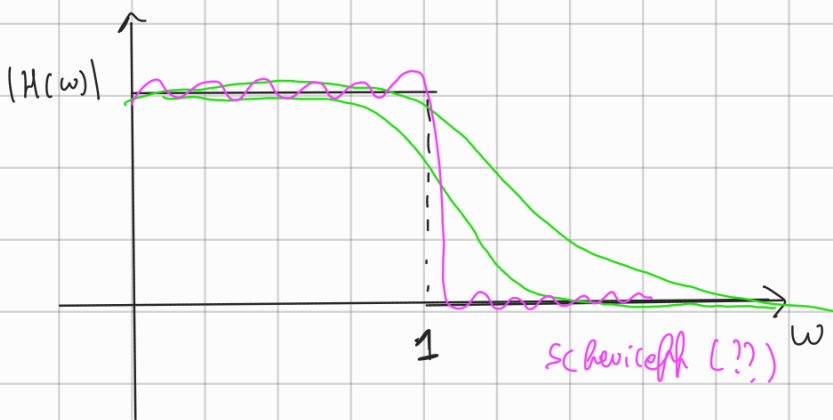
$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

$$s_{1,2} = \left[-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$



radici
serie...

approssimas. di Vattile Rott (??)



segue monotona decrescente

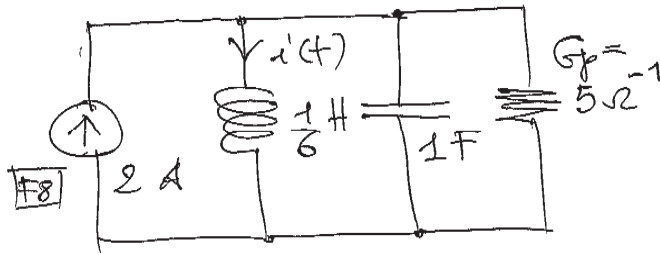
• Se uso poli più vicini all'asse
all'asse immaginario,
da modo a una risposta.

• Se i poli sono lontani dall'asse
immag. ho risposte grosse

Le perdite degli induttori fanno allontanare i poli
dall'asse immaginario.

Fine Pt 1 22/06/23

Esempio. Determinare $i(t)$, risposta forzata, per $t \geq 0$



• la corrente i soddisfa alla eq. diff. non omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 2\omega_0^2$$

con $\alpha = \alpha_p = G_p/2C = 5/2$ rad/sec, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{6}$ rad/sec

- otteniamo allora il problema di Cauchy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = 12$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = i_{\text{trans}}(t) + i_{\text{regime.staz}}(t)$$

- l'equazione caratteristica per l'omogenea e'

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

e le radici caratteristiche sono $s_1 = -2 \text{ rad/sec}$, $s_2 = -3 \text{ rad/sec}$
(caso sovrasmorzato)

- inoltre si ha

$$i_{\text{part.affine}}(t) = \text{costante} = 2$$

quindi

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + 2$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- imponendo le condizioni iniziali si trova $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, quindi

$$i(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

- si ha anche

$$i_{\text{trans}}(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t}, \quad t \geq 0; \quad i_{\text{regime.staz}}(t) = 2, \quad t \geq 0.$$

* LEZ 280523

Ve come Variel Cp

Osservazione: frequenze naturali

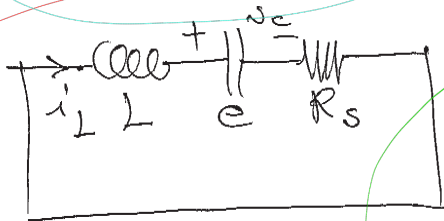
da kV

- Consideriamo un circuito RLC serie. In evoluzione libera v_C soddisfa alla eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0, t \geq 0$$

Prevedo
il L come
var. si $\sqrt{L}$

da $I = C \frac{dv}{dt}$
da $V = L \frac{di}{dt}$



$v_L + v_C + v_{R_s} = 0$

$v_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{dv}{dt}$

F7 $I = C \frac{dv}{dt}$

$LC \frac{dv}{dt} + R_s C \frac{dv}{dt} + v_C = 0$

$\frac{dv_C}{dt} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$

- consideriamo adesso i_L ; si ha da KV

se posso allora prendo una equazione?
NO, i modi naturali sono li stessi

$L \frac{di_L}{dt} + v_C + R_s i_L = 0$

e quindi

$v_C(t) =$

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' + R_s i_L = 0$$

equazione integrale differenziale

- derivando ottengo

eq. diff. del 2° ord. con Stern-coef

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \quad t \geq 0$$

- tutte le grandezze elettriche del circuito soddisfano in evoluzione libera alla stessa eq. diff. omogenea del secondo ordine; sono caratterizzate quindi dalle stesse frequenze naturali.

Temp Solu. dell'eq. diff

questo vale + grandezze del circuito

Tutte le grandezze el. nel circuito in

Risposta libera hanno la stessa radice caratteristica, sono Solus.

$$i(t) = C \frac{dV}{dt}$$

$$V(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

$$\text{eq } s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

Fattore di qualita'

$$p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

- Il fattore di qualita' di un circuito RLC e' definito come

no DIM

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

rapporto tra i due coeff dell'eq. diff

$$\alpha_{||} = \frac{G_p}{2C}$$

- nel caso $||$ si ha

R_p
resistor

$X_L = X_C = \omega_0$
parallelo

$$Q = Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p} = \frac{\omega_0 CR_p}{1} = \frac{R_p}{\omega_0 L} \propto R_p$$

resistor
in RLC
parallelo

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{R_L}{2L}$$

- nel caso Σ si ha

Q tiene conto delle perdite

Vari con in Evolu. Libera

$$Q = Q_s = \frac{1}{\omega_0 CR_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s} \propto \frac{1}{R_s}$$

$\alpha > \omega_0$ caso smorzato

inversamente
proporzionale a R_s

- $Q < 1/2$ caso sovrasmorzato; $Q = 1/2$ caso di smorzamento critico; $Q > 1/2$ caso sottosmorzato; $Q \rightarrow +\infty$ caso senza perdite

$$\alpha < \omega_0$$

$$\alpha = 0$$

Q_{XS}

diminuisce perdite, aumento Q.T. qualita'

Luogo delle frequenze naturali *radici eq. caratteristica* *Studiando risposta libera*

- Le frequenze naturali sono le radici di

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$\omega_0 = \frac{1}{LC}$ - costante
facciamo variare perdite

- consideriamo un circuito RLC ||, supponiamo L, C fissi e facciamo crescere R_p , quindi cresce Q_p , decresce α_p (decregono perdite)

L, C fissi ω_0 costante

- si ha $s_1 \cdot s_2 = \omega_0^2 = \text{costante}$, mentre $s_1 + s_2 = 2\alpha_p$ decresce
- al variare di R_p le due frequenze naturali descrivono il luogo disegnato in figura; nella figura e' anche riportato qualitativamente il corrispondente andamento delle grandezze in evoluzione libera

LC fissi, ω_0^2 fisso $= \frac{1}{LC}$

ω_0^2 e' prodotto radici caratteristiche $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

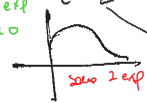
al variare delle perdite ...

$$= \alpha^2 - \alpha^2 - \omega_0^2$$

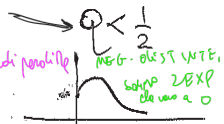
al crescere delle perdite questa Q , che tende a ∞ , e le radici $\alpha \pm j\omega_0$

Se due o più sono perdite, S_1 e S_2 si avvicinano

Caso Critico,
radici real. neg.
coincidenti, ω_0
 $Q = \frac{1}{2}$
 $\exp + E \cdot \exp$
va a 0

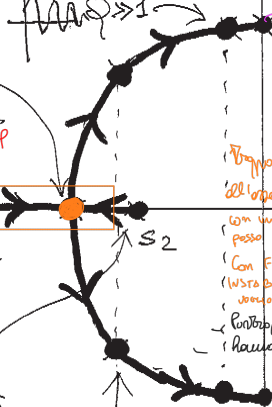


Caso
sottosmorzato
radici reali
e distinte
una più piccola
di ω_0 e l'altra
più grande,
modo che dopo fine
 ω_0^2



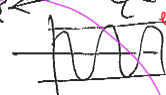
Q < 1/2
M.B. - DISTINTE,
solo 2 EXP
che va a 0
S1, S2 radici negative
distinte

ANDRENTI (RISPOSTA LIB)
CARATTERISTICA



oscill. senza perdite

$j\omega$



Caso CRITICO, NON PERDITE
perdite $\rightarrow 0$
log. stabile, L e C
 $Q = \infty$: allarghio
energia, senza
smorzamento

de Frequenze
NATURALI PERCORRANO
UN SEMICERCHIO
DI RAGGIO ω_0
CENTRATO
NELL'ORIGINE

Se non $Re < 0$,
asintotic. stabile

Taglio vicino
all'asse immaginario



con un filtro passivo, non
passo
con Filtro ATTIVO, SPANNO
(INSTABILITA' FILTRI QUANTO
VUOLGO ALL'ASSE IM)
POTREBBAMO MODIFICARE
H AUMENTARE PERDITE ALTE

filtri instabili;
senza sfatare l'instabilità

Filtro Passivo radici: $\tau_{pole} [Re] < 0$
cioè il circuito in evol. stabile e
ASINTOTIC. STABILE

Caso limite, NO PERDITE, Freq naturale
sull'asse imag. 2C allarghio energia senza
radice

formazione ideale non si può;
costo di compensazione

la perdita con dei
filtri attivi

oscillazione senza zero
Riv. mi avvicino all'asse
imag. con le soluzioni
meno smorzate solo
Q oscillato, allarghio
le perdite

aumentando Re oltre
percorriamo un
semicerchio di raggio ω_0
centrato nell'origine.

Compensazione Perdite con Filtro attivo

> Filtro attivo con oper. i poli passano avvicinati all'asse imag. (risposta in freq
che varia rapidamente)

• Analisi di un circuito RLC in parallelo nel DT e nel DL 25/05/23

- Vogliamo determinare $i(t)$, risposta forzata, prima nel DT e poi nel DL, supponendo di essere nel caso sottosmorzato; per risposta forzata si intende la risposta allo stato iniziale nullo e cioè'

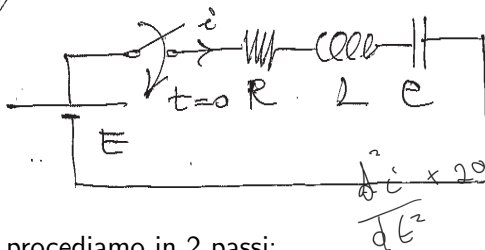
$$i(0^-) = 0, v_C(0^-) = 0$$

variabili di stato

si parte a 0^-

stato nullo a 0

2 var. di stato
ci dà informazione e V su
armatura



t=0

$i = 0$
risposta
lib.

$$\frac{di}{dt} \times 20 \frac{di}{dt} \times 20$$

- Nel DT procediamo in 2 passi:

i) analisi all'istante critico ($0^-, 0^+$): dato che il circuito non è degenere si conservano le variabili di stato, quindi

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0; \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

la corrente che passa da 0^- a 0^+
è finita, V non può
subire discontinuità

Si applica all'induttore
una tensione di valore finito,
la corrente non può subire
discontinuità

ii) analisi in evoluzione continua per $t \geq 0$; usando i come variabile si ottiene *chiuso interruttore*

Applico KV

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(t') dt' + v_C(0^+) = E, \quad t \geq 0$$

V_L V_R V_C *V_C(t)* *Somma Tensioni lungo una maglia*

Tensione su condensatore *KV della maglia interiore chiuso*

e derivando

$$V_L + V_R + V_C = E$$

diviso per L

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Condiz. iniziali

$$i(0^+) = 0$$

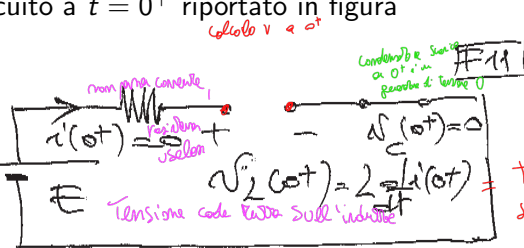
$\rightarrow$ non basta, non a 0 deriv. zero a 0

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

derivata corrente, faccio analisi a 0⁺ per non avere soluzioni banali a 0⁻

dove per trovare la condizione iniziale derivata abbiamo fatto riferimento al circuito a $t = 0^+$ riportato in figura

$t = 0^+$



Condensatore scarico a 0⁺ e in presenza di tensione 0

Start-up a 0⁺

• La corrente è zero. Vado a calcolare la tensione sull'induttore. $= E$

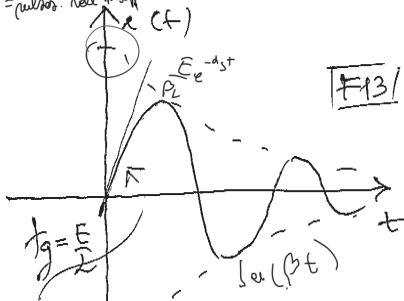
Soliamo risolvere eq. 4th.

Tensione sul generatore

→ individua l'involuppo

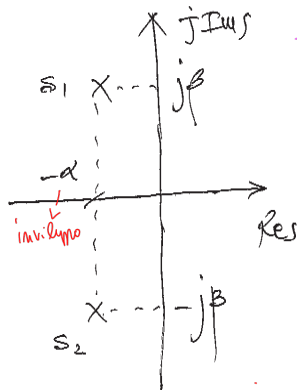
andamento della soluzione

$\beta = \text{pulsos. nell'involuppo}$



F13

Pulsos.
 $\frac{E}{L}$



→ vicino all'asse ima, più piccolo periodo, shorter period

se $-\alpha$ si avvicina a zero, involuppo più piccolo

TRASFORMO, faccio analisi dirett. da 0, su separare analisi

- Verifichiamo il risultato ottenuto con la TL; consideriamo il seguente circuito a partire da $t = 0^-$ e scriviamo l'equazione integro-differenziale a cui soddisfa i ; si ha

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t') dt' + v_C(0^-) = Eu(t), \quad t > 0^-$$

Trasformato Laplace

Tensione su condensatore

Attenzione

non derivo, altrimenti avrei: $ES(t)$, un coseno... eq. diff con eccitaz. impulsiva

Eccitaz. discontinua

$i(t)$

R

L

C

$Eu(t)$

$v_C(0^-)$

$t > 0^-$

- trasformando con Laplace ottengo una equazione algebrica in $I(s)$ in cui appaiono esplicitamente le condizioni iniziali sulle variabili di stato a $t = 0^-$

$$L[sI(s) - i(0^-)] + RI(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{s}$$

Trasformata di una costante

Attenzione

→ integrale

*$v_C(0^-)$ stabile
 $v_C(0^-)$ per $t \geq 0$
 $= v_C(0^-) u(t)$*

da cui $\left[sL + R + \frac{1}{sC} \right] I(s)$ e posto il resto a dx $= Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{E}{s}$

di prima
scomposizione

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) + I_{\text{lib}}(s) = \frac{\frac{E}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

Tiene conto delle condiz. iniziali

- risposta forzata ($i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$)

Voglio studiare, mi concentro su I_{for} I_{for} dipende da eq. forzata

$\Rightarrow I_{\text{lib}}$ dipende dalle condiz. iniziali

moltiplico num e den per s

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

nesso e comune moltip. per s

$$2\alpha = \alpha = R/L$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

I poli della Laplace coincidono con le radici caratteristiche del caso sottosmorzato.

- ne consegue che i poli di $I(s)$ coincidono con le radici caratteristiche $s_{1,2}$ dell'equazione omogenea; in questo caso i poli sono complessi coniugati e a parte reale negativa

$$s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$$

i poli hanno = freq. naturale

infatti nel caso sottosmorzato, poli

aut. trasformata poli complessi

- per antitrasformare consideriamo che

so che ho
due poli
complessi
e coniugati a
Re neg.

aut. trasf.
deale
mentr. e denomi.
a coeff. real.

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$= \frac{1}{(s - (-\alpha_s + j\beta))(s - (-\alpha_s - j\beta))}$$

$$= \frac{A}{s - (-\alpha_s + j\beta)} + \frac{B}{s - (-\alpha_s - j\beta)}$$

1° e 2° grado

aut. trasf. del 2° ordine
TRACC
Fattorizzo
denominatore

abb. de i res propri
scoperto fraz. semplice

- dato che $F(s)$ è razionale e a coefficienti reali, risulta $B = A^*$;
allora otteniamo

risultato deve essere reale

$$i(t) = \frac{E}{L} \left[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t} + A^* e^{(-\alpha_s - j\beta)t} \right] u(t) = \frac{2E}{L} \text{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t)$$

Residuo
complesso

Complesso coniugato
della f. complesso

$\Rightarrow$ meno complesso + coniugato, rimane 2 volte
parte reale

Se siamo la parte coniugata, parte in si cancella e dopo
2 volte la parte reale

Se $F(s)$ è razionale e a coeff. real., allora poli complessi coniugati. (proprietà)
hanno residui complessi e coniugati.

- calcoliamo il coefficiente A (residuo di F nel polo semplice $-\alpha + j\beta$); si ha

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_s + j\beta} (s - (-\alpha_s + j\beta)) F(s) \\
 &= \frac{1}{-\alpha_s + j\beta - (-\alpha_s - j\beta)} \\
 &= \frac{1}{j2\beta} = -\frac{j}{2\beta}
 \end{aligned}$$

- infine otteniamo

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t) \\
 &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}\left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t}\right] u(t) \\
 &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re}[-j(\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))] u(t) \\
 &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Fase
 ~ 3 con polo.
 β
 e' un $\sin(\beta t)$

in risonza antirisonanza Fase

$$i(t) = \frac{2E}{L} \operatorname{Re} \left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t} \right] v(t) \quad e^{-\alpha_s} \cdot e^{j\beta}$$

$$\frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re} \left[-j e^{j\beta t} \right] v(t)$$

↙ è aut. trasf. formale

simile
a
cos β
che ha
la forma
-j

$$\frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t) v(t)$$

oppure aut. trasf. formale

aut. trasf. formale
I e^{jωt}
era s. m. s. di
puls. ω

Risposta Forzata

• Verifica

$$\operatorname{Resid} [F_s - \alpha_s + j\beta] = \frac{1}{2s + 2\alpha_s} \Big|_{s = -\alpha_s + j\beta} =$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{1}{-2\alpha_s + j2\beta + 2\alpha_s}$$



Sì, funziona.