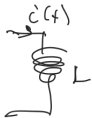


Atti 2° polo, Funzione
di Rete

Metodo simbolico di Laplace ^{Metodo}

Mauro Forti

April 25, 2020



$$V(t) = V_m \cos(\omega t) \quad V$$

$$i(t) = \frac{V_m}{X_L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_m}{X_L} \sin(\omega t) \quad A$$

$$p(t) = \frac{V_m^2}{X_L} \sin^{\omega t} \cos \omega t = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{X_L} \sin(2\omega t) \quad W$$

Fasori: ^{bravo risposta} regime sinusoidale con eccit. sinusoidale ^{non vedo su di lui, ma su tutto il piano complesso}

Laplace: qualsiasi equazione, ^{bravo anche risposta libera, ~~bravo risposta~~ forzate, Bravissimo}

introduco un vincolo simbolico in Laplace, come con i Fasori

Metodo simbolico di Laplace

il circuito diventa senza memoria

- E' un metodo applicabile a circuiti lineari e tempo invarianti (LTI). Consiste di due passi:

i) trovo le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio di Laplace (DL)

ii) determino le leggi di Kirchhoff nel dominio di Laplace

Ottingo in questo modo un circuito simbolico nel DL che e' senza memoria e puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

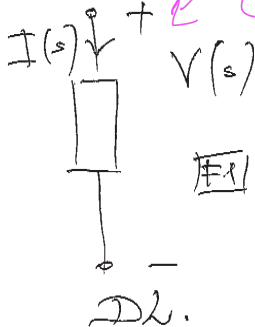
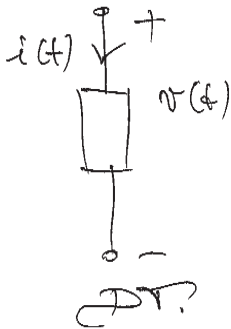
Con Laplace trovo
risposta completa,
d.c., f.t.r., transitoria ecc

Lea. 25/05/23

Relazioni costitutive nel DL *Domini Laplace*

• Consideriamo un bipolo nel dominio del tempo (DT) a cui e' applicata $v(t)$ e in cui fluisce $i(t)$; supponiamo $v(t)$ e $i(t)$ trasformabili secondo Laplace; consideriamo poi un bipolo ai cui morsetti e' applicato simbolicamente $V(s) = L[v(t)]$ e in cui fluisce $I(s) = L[i(t)]$; per relazione costitutiva nel DL si intende la relazione che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$

leggere, spesso diph tra v e i



*Simbolicamente
convien. utilizzare*

*non posso dire
che un*

*variabile e'
a potenziale
piu' alto
di questo.*

E' simbolico

TUTTO SIMBOLICO

non posso dire che sono a potenziale maggiore, sono in una
FUNZIONE COMPLESSA

- *Resistore ideale*: nel DT soddisfa alla legge di Ohm

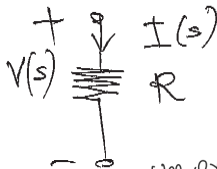
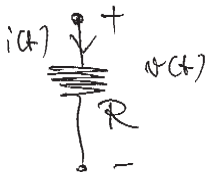
$v(t) = Ri(t)$; per la linearita' della trasf.ta di Laplace si ottiene

*che dimensioni ha
la Trasformatrice?*

$$V(s) = RI(s)$$

*Funzione Scelta, Trasformatore
Lineare*

quindi un resistore continua a essere definito da una resistenza nel DL



[F2]

un exp e adim
 e^{-st} , $e^{\frac{1}{s} \text{ sec}}$ adim

- $V(s)$ e' l'integrale di $v(t)$, integrale in dt
e' $V \cdot s$. Valle per secondi.

la variabile di Laplace

$$S \text{ seno } \frac{\text{rad}}{\text{Secondi}}$$

$$S = \frac{1}{\text{Sec}}$$

• *Condensatore ideale*: nel DT soddisfa a $i(t) = Cdv(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

Carica a 0^- sul nostro condensatore

$$I(s) = C(sV(s) - v(0^-)) = sCV(s) - \underbrace{Cv(0^-)}_{\substack{\text{carica a } 0^- \text{ sulla armatura d.C.} \\ \text{della } C \text{ con carica}}} = I(s)$$

• nel DL il condensatore e' un elemento senza memoria in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico

caso 1) • C scarico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) = 0$ allora si ha ed. nelle risposte forata e scarico

V e I proporzionali a $V(0^-) = 0$

$$I(s) = sCV(s); \quad V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Tensione prop. a corrente

• definiamo

I e V proporzionali al ϕV

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad \text{Ohm}$$

generalizz.:
impedenza in DL
del condensatore

impedenza di C nel DL e

$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = sC \quad \text{Ohm}^{-1}$$

ammettenza di C nel DL

e' un'impedenza se e' scarico

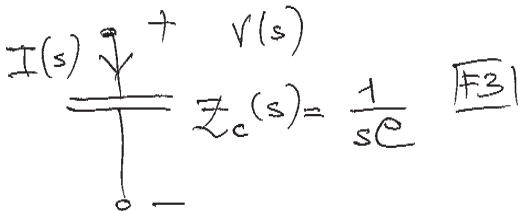
• allora un C scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_C(s) = 1/sC$ oppure una ammettenza $Y_C(s) = sC$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_C(s)}; \quad I(s) = Y_C(s)V(s)$$

Pero l'impedenza dipende da S

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura

anche nei
fori dipendono
da ω



Caso 2, C e' carico a $T = 0^-$

- C carico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{\frac{1}{sC}} - C v(0^-)$$

di parte della cond's. iniziale

C ha una storia, a $t = 0^-$ è carico

torino costante, corrente costante
corrente a $t = 0^-$ sul condensatore

oltre impedenza, c'è un generatore da far apparire esplicitamente. Le cond's. iniziali, la storia precedente

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

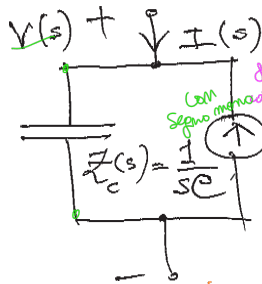
- altrimenti possiamo scrivere

moltiplico $\frac{1}{s}$

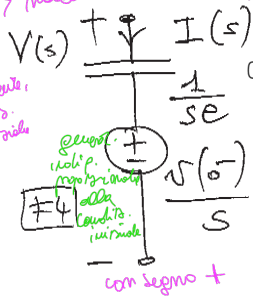
$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

$Z_C(s)$ conduttore scarico *generatore di tensione a gradino*

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



$e v(0^-) = q(0^-)$
Caric con 0^-



modello serie, moltiplico per $\frac{1}{s}$

Condensatore carico
Condensatore scarico
+
generatore di tensione indep.

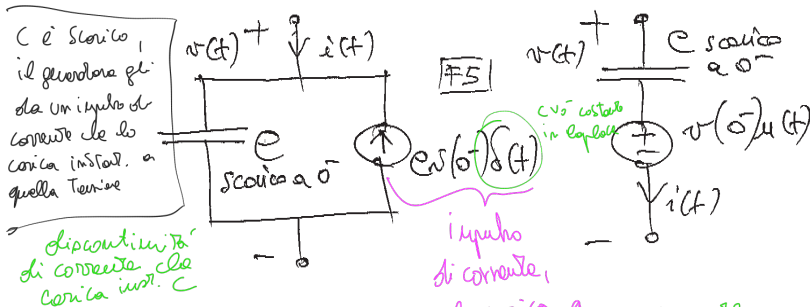
fanno con THEVENIN

• per un C carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di C a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

antitransformo e vedo se rimangono e spariscono le condiz. iniziali

• 'antitransformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un C carico a $t = 0^-$ del DT

antitransformo $\frac{1}{s}$ $i'(t)$



C è scarico, il generatore gli dà un impulso di corrente che lo carica istant. a quella tensione

discontinuità di corrente che carica inst. C

impulso di corrente,

lo carica a quella tensione istantaneamente

antitransformo, A tempo s costante

$$V(s) = L [s I(s) - i(0^-)]$$

$C V(0^-)$ area sotto diagramma tensione corrente

- *Induttore ideale*: nel DT soddisfa a $v(t) = L di(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo *anche lui senza memoria nel DL*

$$V(s) = L(sI(s) - i(0^-)) = sLI(s) - Li(0^-)$$

- nel DL l'induttore e' un elemento senza memoria in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico

- *L scarico a $t = 0^-$* . Se $i(0^-) = 0$ allora si ha

Caso 1

$$V(s) = sLI(s); \quad I(s) = \frac{1}{sL} V(s) \quad \text{Tensione prop. a corrente}$$

dimensioni classiche

- definiamo

$$Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad \text{Ohm}$$

IMPEDENZA DL

(Note: In the original image, 'V' and 'A' are crossed out with red marks in the fraction, and a red squiggle is above 'Ohm'.)

impedenza di L nel DL e

$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL} \quad \text{Ohm}^{-1}$$

Dimensioni classiche

ammettenza di L nel DL

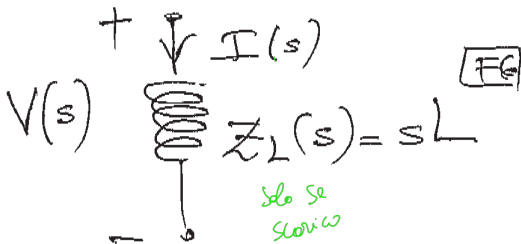
induttore scarico soddisfa legge di ohm simbolica

• allora un L scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_L(s) = sL$ oppure una ammettenza $Y_L(s) = 1/sL$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L(s)}; \quad I(s) = Y_L(s)V(s)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_L &= sL \\ Y_L &= \frac{1}{sL} \end{aligned} \right\}$$

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



solo se
scarico

lo trattare
come se fosse
resistivo

Caso 2, se e' carico

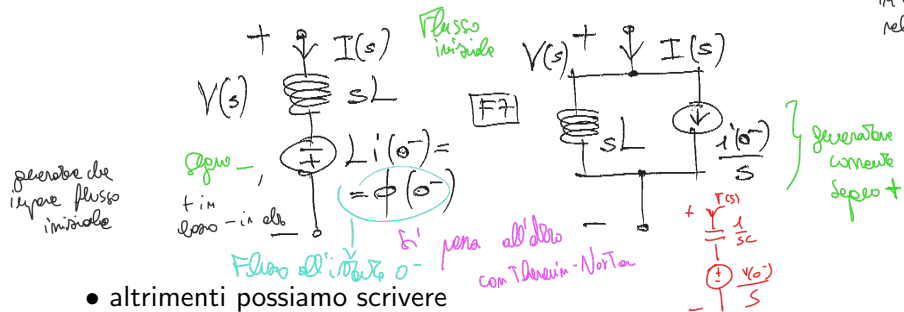
- L carico a $t = 0^-$. Se $i(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$V(s) = \underbrace{sLI(s)}_{\text{induttore scarico}} - \underbrace{Li(0^-)}_{\text{generatore Tensione}}$$

compare Tensione
dipendente da condiz.
iniziale

e ottenere il circuito equivalente serie in figura

$$Li(0^-) = \text{flusso in } 0^- \text{ nell'induttore}$$



- altrimenti possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

esplicito la corrente dividendo per sL

generatore corrente + freccia corrente con $I(s)$

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

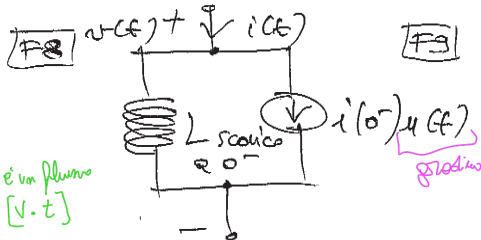
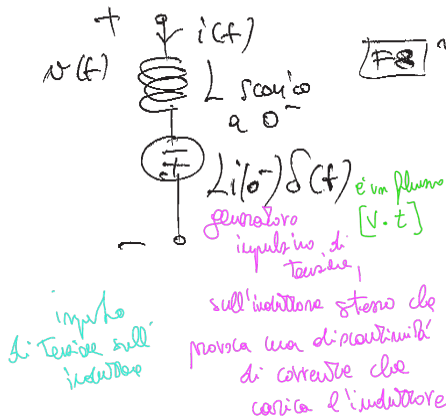
- In Laplace L carico ha esplicitamente un generatore che tiene presente le condiz. iniziali

• per un L carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di L a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

autotrasform

Nel tempo

• 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un L carico a $t = 0^-$ del DT



Modelli di induttore carico
 come un L scarico o
 generatore impulsivo di
 tensione = esso da un impulso di
 tensione che provoca una discontinuita'
 di corrente che carica L

Leggi di Kirchhoff nel DL *valgono anche per DL*

- Consideriamo la KV lungo una maglia di un circuito

maglia con 4 rami

$$v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0, \quad t \geq 0$$

- se le tensioni sono trasformabili secondo Laplace, per la linearita' della Trasf. di Laplace otteniamo

*le tensioni trasformate
conservano un
significato fisico*

e correnti

$$V_1(s) - V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) = 0$$

*tutte le tensioni o
variabili s
= 0, conservano un
significato
fisico*

quindi le trasformate di Laplace delle tensioni soddisfano alla KV

- analogamente *le trasformate di Laplace delle correnti soddisfano alla KI*

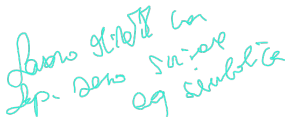
- illustriamo di seguito con degli esempi come si applica il metodo simbolico di Laplace per l'analisi di circuiti LTI.

*I e V conservano un
significato fisico*

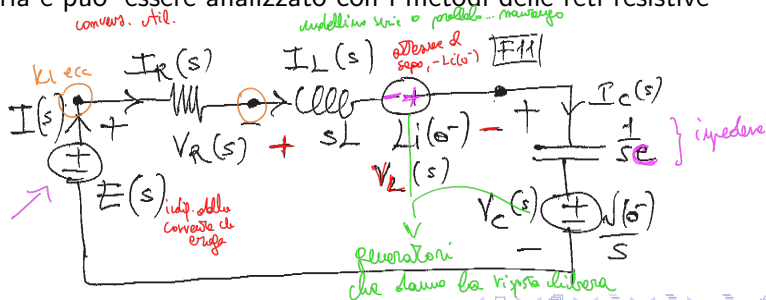
RLC serie $\rightarrow$ IN DL

RLC serie

con eccl. qual' n



- convuls. Atil.



nişanla beraber
ilceye de

- si ha

$$KI : I(s) = I_R(s) = I_C(s) = I_L(s); \quad KV : E(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

quindi ottengo

$$E(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

$$\left[R + sL + \frac{1}{sC} \right] I(s) = \dots$$

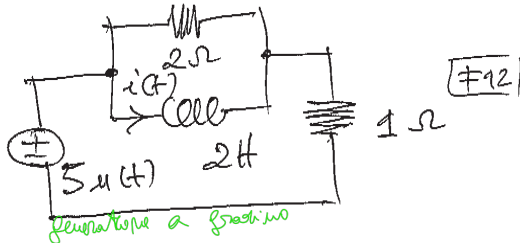
da cui trovo per $I(s)$ lo stesso risultato ottenuto in precedenza scrivendo prima equazione integro differenziale e trasformando tale equazione, cioè'

$$I(s) = \frac{\overbrace{E(s)}^{\text{risposta Forzata}}}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{\overbrace{Li(0^-) - \frac{v(0^-)}{s}}^{\text{definito lo risposta libera}}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

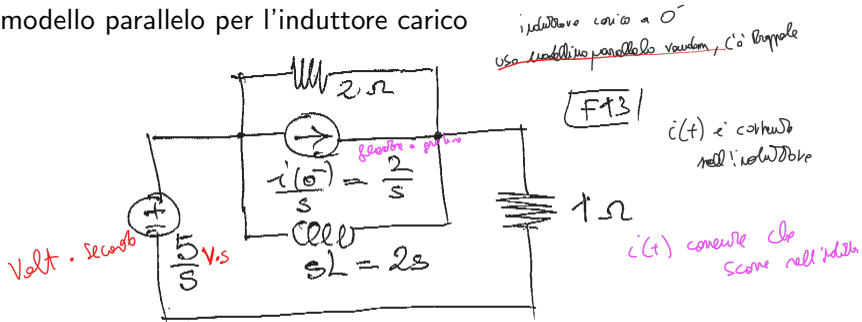
- notare che il generatore indipendente $E(s)$ e' quello che da' luogo alla risposta forzata, mentre i due generatori legati alle condizioni iniziali di L e C danno luogo alla risposta libera.

nel Dominio Laplace appaiono esplicitamente i generatori legati alla risposta libera

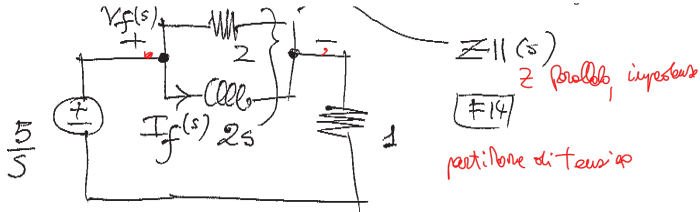
Esempio. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, usando il metodo simbolico di Laplace; e' noto che $i(0^-) = 2 \text{ A}$ Capacitore 1° ordine
simile storia precedente



- consideriamo il circuito simbolico che segue dove abbiamo usato il modello parallelo per l'induttore carico a 0



- forzata: dobbiamo analizzare il seguente circuito, *spazio generatore*
spazio generatore della cond. d. in. in. in.
scorico a 0-



- si ha

$$Z || (s) = 2 || 2s = \frac{2s}{s+1} \quad \frac{2 \cdot 2s}{2+2s}$$

e dalla regola del partitore di tensione

$$V_f(s) = \frac{5}{s} \frac{Z ||}{Z || + 1} = \frac{10}{3s+1}$$

- quindi

si vuole per l'imped.

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{2s} = \frac{5}{3s} \frac{1}{s+1} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+1}$$

dis...

scoraggio in parallelo con l'induttore

Risposta Totale

- antitrasformando

$\lim_{s \rightarrow 0} \dots$

$$i_f(t) = 5(1 - e^{-t/3})u(t) \quad \text{risposta forzata}$$

- libera: consideriamo il circuito che segue; dalla regola del partitore di corrente

l'induttore è l'immagine delle corrente + parte libera

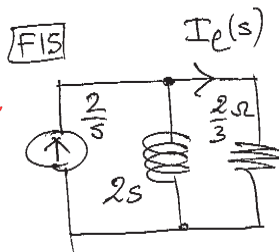
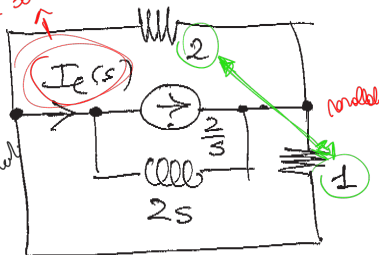
$$I_I(s) = \frac{2}{s} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2s}} = \frac{2}{s + \frac{1}{3}}$$

quindi

l'induttore è l'immagine del generatore e dell'impedenza

$$i_I(t) = 2e^{-t/3}u(t) \quad \text{parte libera}$$

*l'induttore
prende
tutta la
corrente*



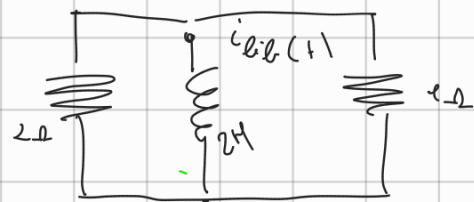
● Nel dominio del tempo invece
Libera = corrente 0+ quando jump generato
nell'induttore

DT, circuito 1° ordine

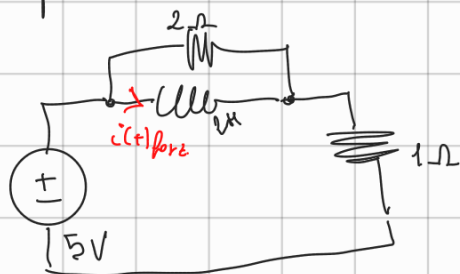
$$i(0^+) = i(0^-) = 2A \text{ datum}$$

$$i_{lib}(t) = i(0^+) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} = 2 e^{-\frac{t}{3}} =$$

$$\tau_{eq} = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \text{ sec}$$



Risposta Forzata $i(0^-) = 0 = i(0^+)$
 $t > 0$



$$i(\infty) = \frac{5}{1}, \text{ numero CC}$$

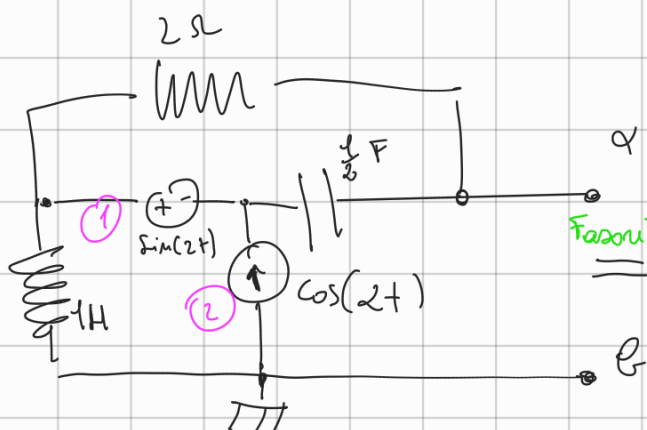
$$i(t) = \cancel{i(0^+)} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = 5(1 - e^{-\frac{t}{3}})$$

induttore è un cortocircuito

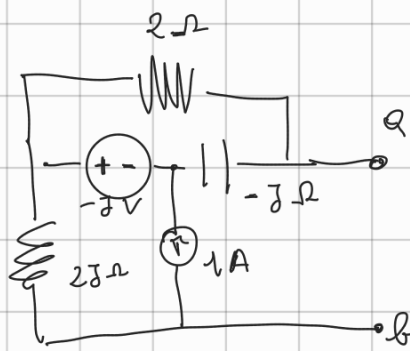


ORA esercizi Random

Coricoper max x trasform. potenze
e trova pot. attiva



Fasori



$$\omega = 2 \text{ rad/sec}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$X_L = 2 \Omega =$$

$\Rightarrow E_q$. Thevenin uso definizione Z_{eq}

$$Z_{eq} = \text{c'attivo generati} = -j \parallel 2 + 2j = \frac{-2j}{2-j} + 2j$$

$$= \frac{-2j + 2j(2-j)}{2-j} = \frac{-2j + 4j + 2}{2-j} = \frac{2j + 2}{2-j} = \frac{6}{5}j + \frac{2}{5}\Omega = \bar{Z}_{eq}$$

carico

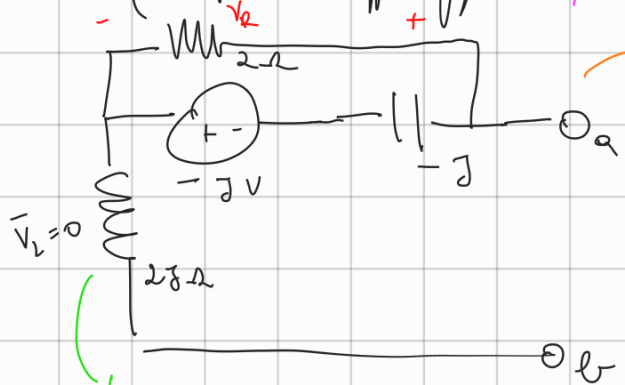
carico ottico-capacitivo

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{eq} = \frac{2}{5} - j\frac{6}{5} \Omega$$

carico giusto, e il coniugato

$$V_{eq} = V_{eq,1} + V_{eq,2}$$

uso principio sovrapposizione, causa (1) e (2)



nell'induttore

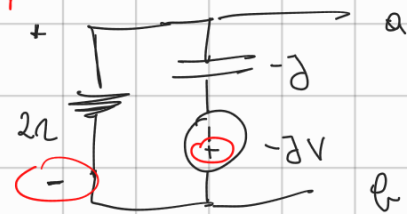
non ci passa corrente

perché
è aperto

no corrente

$$\bar{V}_L = \bar{Z} \bar{I} = 0$$

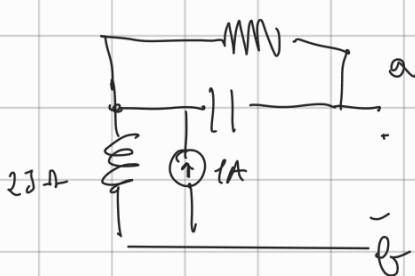
circuito aperto



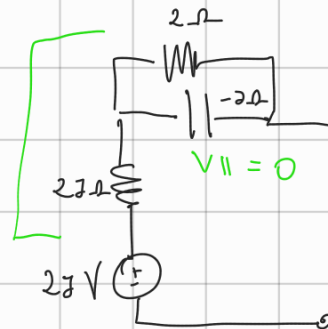
$$V_R = (-)(-j) \frac{2}{2-j} = \frac{2j}{2-j} = \frac{2j(2+j)}{5} = \frac{4j-2}{5} = V_{eq,1}$$

ora gruppo generatori di tensione

non ci passa corrente
sul parallelo



trasformo



impedanza in cui
non passa corrente, appena

$$\Rightarrow \bar{V}_{eq,2} = 2j V$$

$$\bar{V}_{eq} = V_{eq,1} + V_{eq,2} = \frac{-2}{5} + \frac{4}{5}j + 2j = \frac{-2}{5} + \frac{14}{5}j V$$

V_{eq} è il valore di $\bar{V}$

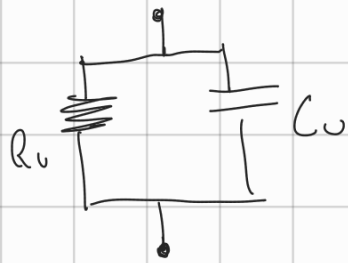
$$\Rightarrow P_{max} = \frac{V_{eq}^2}{8 R_L} = \frac{\left(\frac{200}{25}\right)^2}{8 \cdot \frac{2}{5}} = R_L + X_L j = \frac{8}{8 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5}{2} W$$

in modello ω^2

V_{eq} in val. efficace (?)

ona random

oglio costruire $Z_V = \frac{2}{5} - \frac{6j}{5}$ negativ
 trovarlo per avere il massimo trasferimento
 $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} =$



Lavoro con Ammettenze

$$\bar{Y}_U = \frac{1}{Z_U} = \frac{1}{\frac{2-6j}{5}} = \frac{5}{2-6j} = \frac{5(2+6j)}{4+36} = \frac{10+30j}{40}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j \Omega^{-1}$$

$\frac{1}{Z_C} = \frac{3}{4}$

parallelo

soluzione
autonomia

• $\frac{1}{R_U} \parallel j\omega C_U$

$$= \frac{1}{R_U} + j\omega C_U$$

$\omega = 2$

$\frac{1}{j\omega C}$

$\frac{3}{4}j = 2j \cdot C_U$

$C_U = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{3} F$

autonomia
di un condensatore

$\Rightarrow \frac{1}{R_U} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_U = 4 \Omega$

allora $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}j$ due esse $= \frac{1}{R_U} + 2jC_U$

$C_U = \frac{3}{8} F$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{R_U}$
 $\frac{3}{4} = 2C_U$

Impedenza e il coniugato

Domanda prof: Perché Z_U è il coniugato?

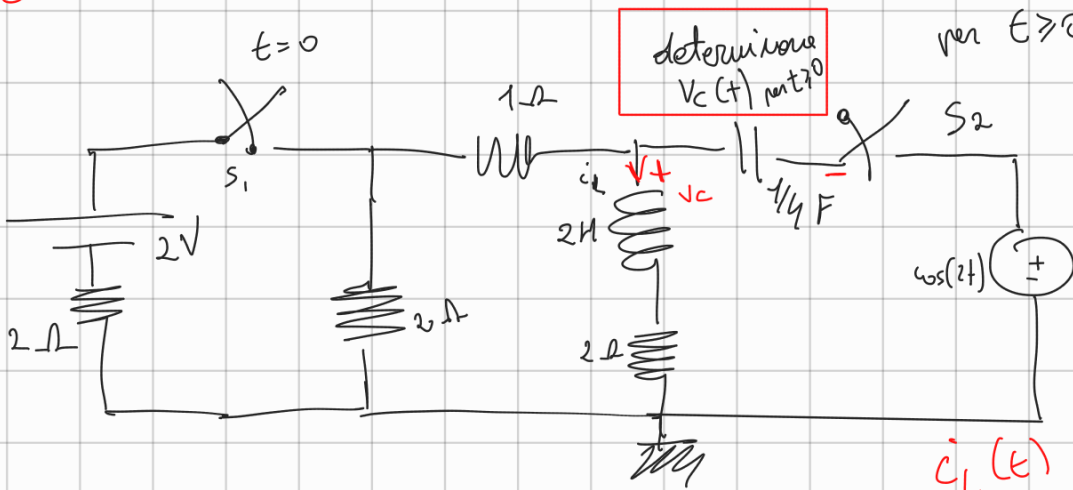
perché è questo il
caso che assolve
la massima potenza??

elimino la parte reattiva
mentre il coniugato

Si elimina autonomia

rimane parte attiva e si dimostra
primario come caso
in continuo
che $R_S = R_U$

Esercizio simile Slide 4 pag. 57



determinare
 $V_C(t)$ per $t \geq 0$

per $t \geq 0$

S_1 si chiude
spontaneo da tempo
a $t = 0$

ed S_2 si apre

determinare $i_L(t) \geq 0$

parte libera
e Forzata

$i_L(t)$
e $V_C(t)$ $t \geq 0$

• Val. di stato $i_L(0^-)$ e $V_C(0^-)$ che si conservano

$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad V_C(0^-) = V_C(0^+)$

FINTO CIRCUITO 2°
ORDINE

Reg. Simulabile

Libera + Forzata

L + F
COMPLETA

Reg. Stazionario

Stato a 0⁻

$i_L(0^-)$

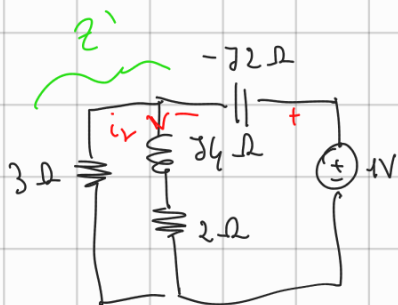
$v_C(0^-)$

$t = 0$

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$

$v_C(0^-) = v_C(0^+)$

① Trovo Stato a 0⁻
circuiti Similici Forzati

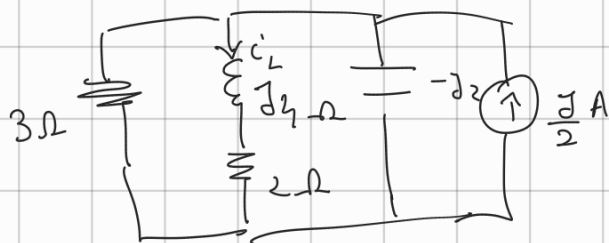


$\omega = 2$

$$(2 + j4) \parallel 3\Omega = \frac{(2 + j4) \cdot 3}{2 + j4 + 3} = \frac{6 + j12}{5 + j4} = \frac{6(1 + j2)(5 - j4)}{41} =$$

$$= \frac{78 + j36}{41} = \underline{\underline{Z_1}}$$

per trovare i_L faccio un partitore di corrente
trovo il circuito e faccio partitore



$$\bar{I}_L = \frac{I}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 + j4}} = A + jB$$

$$= \text{Re}[I e^{j\omega t}] = \text{Re}[I e^0]$$

partitore
di Tensione

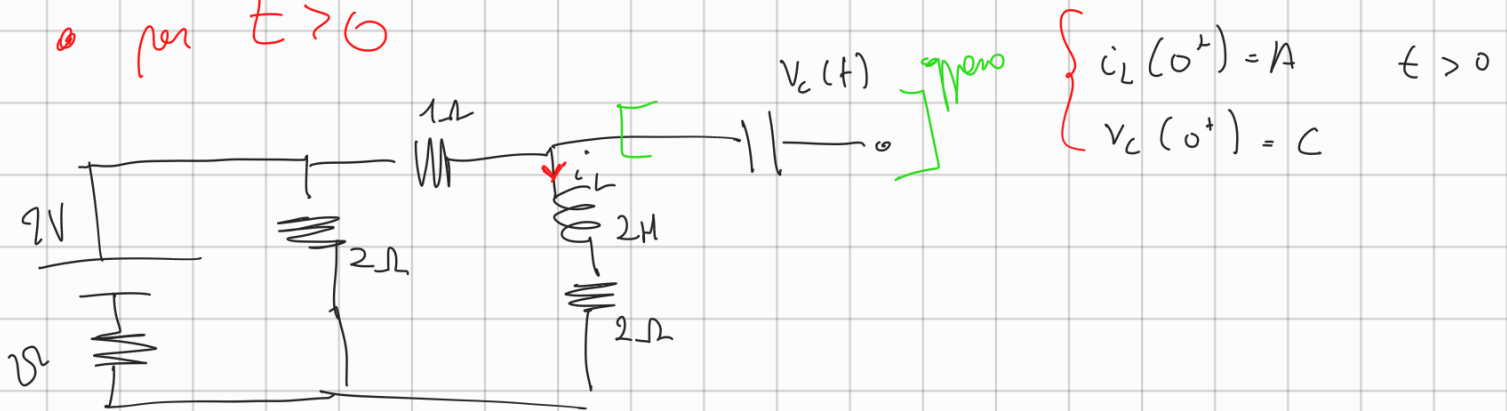
$i_L(0^-) = A$, parte reale del fasore
Tensione su V_C

$$\bar{V}_C = \frac{(2 + j4) \parallel 3 \cdot 1}{(2 + j4) \parallel 3 - j2} = C + jD$$

$$v_C(0^-) = C = v_C(0^+)$$

• al cambio dell'interconnessione,
la rete non è degenera,

• per $t > 0$



• 0^+ Conduttori e induttori carichi, sono preservati

È un circuito del secondo ordine,

perché il condensatore è aperto, e dunque
è del 1° ordine

Tensione condensatore per $t > 0$

$V_c(t)$, non dipende corrente, rimane costante
perché isolato

$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

||
0

dopo
V rimane
costante

$$C \frac{dV(t)}{dt} = 0$$

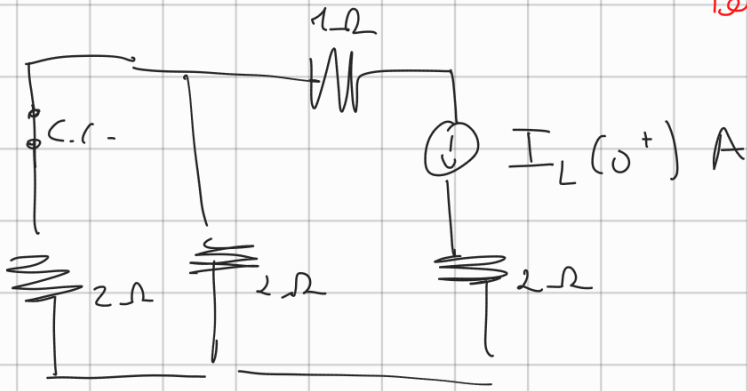
Conduttori rimangono carichi,
a si mette una resistenza in
parallelo per scaricarli

se rimangono aperti
essi mantengono la carica

Risposta Libera: Scarica di L

Tutto condensatore
C aperto, mantiene la Tensione

Scarica



$$i_L(0^-) = A \quad V_C(0^-) = C$$

Bravo τ_{eq}

$$2 \parallel 2 + 3 = 4 \Omega$$

$$\tau_{eq} = \frac{2H}{4} = \frac{1}{2} s$$

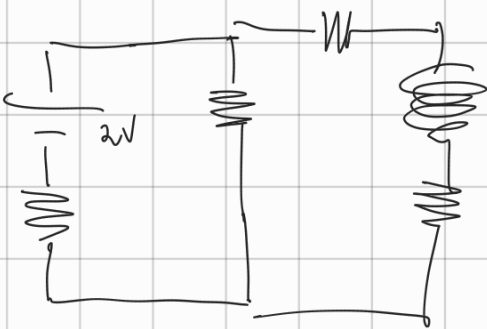
Scarica del condensatore

$$i_L(t) = I_L(0^+) e^{-2t}$$

Risposta forzata, carica dell'induttore scarico valore $i(\infty)$

$I_{FORZATA}$

$$i_{forz.}(t) = i_{for}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$



direzione
su C.C.



=> partizione corrente



$$\Rightarrow \frac{1A \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = i_{for}(\infty)$$

partizione corrente

τ è lo stesso

Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.
 Determinare $i(t)$, $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel DT. Verificare il risultato ottenuto a partire da $t = 0^-$ usando il metodo simbolico di Laplace 29/09/23

QUALUNQUE SIA LA
 GRADIENTE elettrico
 I MODI NATURALI
 SARANNO SEMPRE GLI
 STESSI

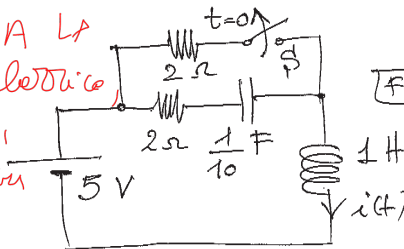
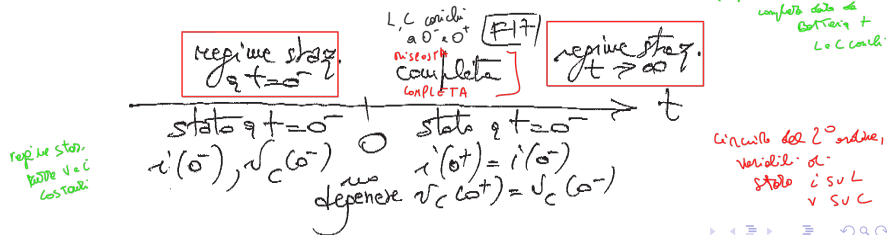


FIG | nuovo
 i_L , α e ω
 Segue gli
 Steady

- **Dominio del tempo:** facciamo riferimento al seguente schema



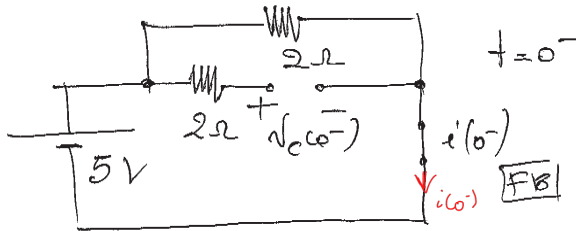
• lo stato a $t = 0^-$ in regime stazionario si determina con il seguente circuito; si ha

Condensatore C.c., induttore C.c., L e C c.c. e C.c. solo

Circuito non deg,
Si conservano var.
stato

Se regime stab.
in regime sim.
sono invariate

$$v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$



• il circuito non e' degenerare per cui

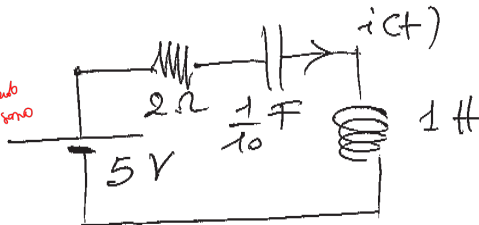
$$v_C(0^+) = \boxed{v_C(0^-)} = \underline{5 \text{ V}}; \quad i(0^+) = i(0^-) = \underline{5/2 \text{ A}}$$

RLC serie, 2° online, vedo in che caso sono

- per $t > 0$ si ottiene il circuito RLC serie che segue per il quale si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$

L e C conica

Seguiamo
Prima Forma
Sol. variando
in che una serie



$$i(0) = 0$$

i in reg. staz. converge dopo
nel circuito $t \rightarrow \infty$

Regime staz. $\rightarrow t \rightarrow \infty$

C e un C , non può
converire

Regime stazionario

- si ha risposta complessa = libera + forzata

in che caso
siamo?

Resistenza

Resistenza

$$R_s = 2 < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{10}$$

Serie

Costi

quindi siamo in un caso sottosmorzato; inoltre

radici complesse, fidele, no neg. e coniugate

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} = 1 \text{ rad/sec}; \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 3 \text{ rad/sec}$$

e quindi le frequenze naturali valgono

Complesse

e coniugate, $\text{Re} < 0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j3 \text{ rad/sec}$$

mi serve ora $i(0^+)$
e $\frac{di(0^+)}{dt}$

- allora $x(t) = K_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + K_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$ = risposta L13

$$TC: i_{tc} = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

causale

- si ha poi evidentemente

da $\frac{5}{2} A$ a 0 ,

ci sono un raccordo

$$\Rightarrow i_{reg.staz}(t) = 0$$

per A e B mi serve $i(0^+)$ e $\frac{di(0^+)}{dt}$

$$i(0^-) = i(0^+) =$$

- condizioni iniziali per il problema di Cauchy: si ha $i(0^+) = 5/2$ A; per determinare $\frac{di(0^+)}{dt}$ considero l'istantanea del circuito a $t = 0^+$; si ottiene dalla KV

devo trovare tensione sull'induttore a 0^+

Per $\frac{di(0^+)}{dt}$ faccio istantanea.

Condensatore = per tensione

Induttore: per corrente

meglio trovare $\frac{di(0^+)}{dt}$, dunque
 olt
 trovare v_L e poi $\frac{di}{dt}$

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$5 = 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + v_L(0^+); \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -5 \text{ A/sec}$$

$\frac{2 \cdot i(0^+)}{v_R}$ Trovo Tensione su L a 0^+

devo rifare conversione obbligatoriamente quando vedo L compo un generatore di corrente

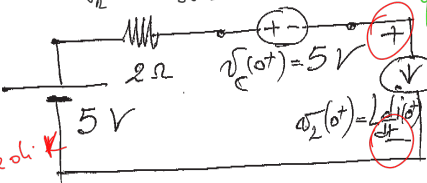
CONV. UTIL.

questo è il vero giusto

$$i(0^+) = \frac{5}{2} A$$

USO CONV. UTILIZZ, e' un generatore

legge di KVL



F20

1.48.00
 28/09/23

- la completa soddisfa quindi al problema

ho le Costanti
iniziali

$$V_L + 2 \cdot \frac{9}{2} = 0$$

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

$$V_L = -5V$$

$$i(0^+) = \frac{5}{2} \quad A = \frac{5}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -5 = -2Ae^{-t} \sin(3t) - Ae^{-t} \cos(3t) + 3Be^{-t} \cos(3t)$$

$$-A + 3B = -5$$

$$-5 + \frac{5}{2} = 3B$$

$$B = -\frac{5}{6}$$

- imponendo le condizioni iniziali ottengo $A = 5/2$ e $B = -5/6$.

Riassumendo

$$B = -\frac{5}{6}$$

$$i(t) = \frac{5}{2}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0. \quad + i_{\text{staz}} = 0$$

Circuito 2° ordine parte libera

- Capisco in che caso sono, Trovo Radici caratteristiche, scrivo forma soluzione

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$

- trovo condizioni iniziali, $\frac{dx(t)}{dt}$ facendo istantanea a $t = 0^+$

$$i(0^+) = A = \frac{5}{2}$$

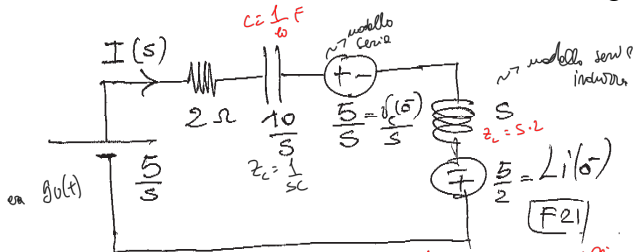
$$\frac{di(0^+)}{dt} = -A + 3B = -5$$

$$3B = -5 + \frac{5}{2}$$

$$3B = -\frac{5}{2}$$

$$B = -\frac{5}{6}$$

- **Dominio di Laplace:** tenendo conto delle condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato otteniamo il circuito simbolico che segue comprendendo lo stato iniziale



a 0^- il condensatore è carico a 5V, per lo modello serie

- dalla KV si ha

$$\frac{5}{s} = 2I(s) + \underbrace{\frac{10}{s} I(s)}_{V_C(s)} + \frac{5}{s} + \underbrace{sI(s)}_{V_L} - \frac{5}{2}$$

$\left[\frac{10}{s} + s + 2 \right] I(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 10}$
 $\left[\frac{s^2 + 2s + 10}{s} \right] I(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 10}$

La mat. pol. coincide con le frequenze naturali. Proviamo prima ω_0

da cui

$$I(s) = \frac{5}{2} \frac{s}{s^2 + 2s + 10}$$

- i poli di $I(s)$ sono $s_{1,2} = -1 \pm j3$ rad/sec e coincidono con le frequenze naturali del circuito

$-2 \pm \sqrt{36} = -1 \pm j3$
 $\left[2 + \frac{10}{s} + s \right] I(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 10} = \frac{5}{2} \frac{s}{s^2 + 2s + 10}$

Poli coincidenti con le frequenze naturali

- per antitrasformare scomponiamo $I(s)$ in fratti semplici

≈ -1

$$I(s) = \frac{K}{s - (-1 + j3)} + \frac{K^*}{s - (-1 - j3)}$$

$\frac{5}{2} \frac{s}{s+2}$
 $\approx \frac{5s}{2(-1+j3)+2}$

con

$$K = \lim_{s \rightarrow -1+j3} (s - (-1+j3)) I(s) = \frac{5}{12}(3+j)$$

$\frac{N}{D'}(-1+j3)$
 $\frac{5}{s+2}$

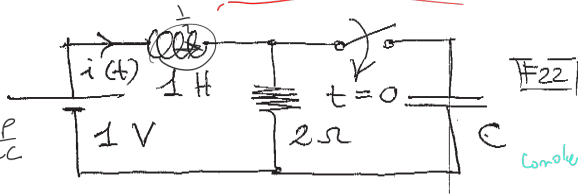
- allora

2 Funzioni a parti complesse, una è il coniug. dell'altra

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{5}{12}(3+j)e^{(-1+j3)t}u(t) + \frac{5}{12}(3-j)e^{(-1-j3)t}u(t) \\
 &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{5}{12}(3+j)e^{(-1+j3)t}\right]u(t) \\
 &= \frac{5}{6}e^{-t}\operatorname{Re}[(3+j)(\cos(3t) + j\sin(3t))]u(t) \\
 &= \frac{5}{2}e^{-t}\cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t}\sin(3t), \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Esempio. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, per $t \geq 0$, con una analisi del DT.

Verificare il risultato a partire da $t = 0^-$ con il metodo simbolico di Laplace. Per $t > 0$ la pulsazione di risonanza e' pari a 2 volte il fattore di smorzamento. Il condensatore e' scarico a $t = 0^-$



$$\omega_0 = 2\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C}$$

F22

$V_C = 0$ a $t = 0^-$
Condensatore e' Capacita di mantenere la carica se scollegato

• DT: per $t > 0$, in evoluzione libera, si tratta di un circuito RLC parallelo; allora

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{C}} = 2\alpha_p = 2 \frac{G_p}{2C} = \frac{1}{2C}$$

quindi $\sqrt{LC} = 1/2$ e $C = 1/4 \text{ F}$

• inoltre per ottenere un c.c. sovrasmorzato

per legge di conservazione di energia, abbiamo

valore in

evoluzione libera, cioè superare il generatore

allora si vede che siamo in parallelo

$$\Rightarrow \alpha < \omega_0 \quad \alpha_p = \frac{G_p}{2C} = 1 \text{ rad/sec}; \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

circuito sottosmorzato: $\alpha < \omega_0$

- per $t > 0$ le frequenze naturali sono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ rad/sec *corso*
 - si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$, con $i_{\text{reg.staz.}}(t) = 1/2 \text{ A}$; *stato stazionario*
- allora *integrale* *forza sol.* *diviso induttore, CC su L e C.A su condens.*
- $$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$
- ritornando a 0-* *induttore grande induttore in CC.* *C = TC + Regime*
- analisi a $t = 0^-$; si ha $i(0^-) = 1/2 \text{ A}$, $v_C(0^-) = 0 \text{ V}$, quindi, dato che il circuito e' non degenero *C' per 1/2 A* *e' scarico da tutto*
- $$i(0^+) = i(0^-) = 1/2 \text{ A}; \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$
- a $t = 0^+$ otteniamo *istantanea a 0+* *abbiamo invece* *che e' la tensione* *sull'induttore*
- la tensione sull'induttore diviso L=1* *derivata di i(0+)* *gli* *di*
- $$v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{di(0^+)}{dt} = 1 \text{ V}$$
- e ora quella* *sul generatore* *di corrente*
- Resistenza* *condensatore* *t = 0+* *tutto sul gen. corrente* *tutto V su L* *condens. utile*
-
- C.C. e' scarico* *Tensione e corrente sul l'induttore*

- quindi dobbiamo risolvere *Problema di Luchy, devo trovare una soluzione che parte da $\frac{1}{2}$ con una pendenza di 1*

$$\begin{aligned}
 i(t) &= Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \\
 i(0^+) &= \frac{1}{2} \\
 \frac{di(0^+)}{dt} &= 1
 \end{aligned}$$

in $0^+ = A = 0$

$-Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}Be^{-t} \cos(\sqrt{3}t)$ da $i(0^+)$

$-A + \sqrt{3}B = 1 \quad B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

da cui ottengo $A = 0$ e $B = \sqrt{3}/3$, quindi *nel dominio del tempo*

$$i(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}, \quad A; \quad t \geq 0.$$

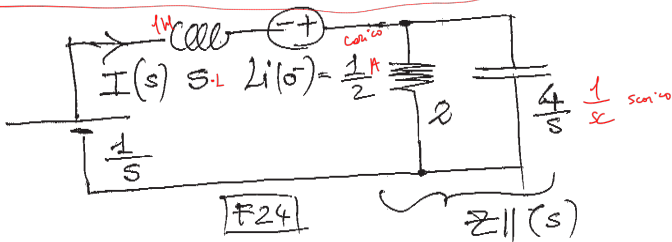
Termine costante nella risposta $\Rightarrow$ polo in zero

in $\frac{1}{s} = u(t)$ in t

DL: il circuito simbolico e' rappresentato in figura

in O^-

Regime
Staz. = Tes valore finale
Se $\lim_{s \rightarrow 0} sI(s)$



- si ha $Z_{||}(s) = 2 \parallel (\frac{4}{s}) = \frac{4}{s+2}$ Ohm, quindi KV implica

$$\frac{1}{s} = sI(s) - \frac{1}{2} + \frac{4}{s+2} I(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Termini costanti} \\ \text{implica polo in } 0 \end{array} \right.$$

- risolvendo si ottiene

Se $\lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = i(\infty)$ Tes val. finale
 $= \frac{1}{2} A$
 $I(s) = \frac{1}{2s} \frac{s^2 + 4s + 4}{s^2 + 2s + 4}$
 -> perche' e' asintotic. stabile
 -> polo in 0

i cui poli sono $s = 0$, $s = -1 \pm j\sqrt{3}$; quindi

Teorema del valore
finale

polo
di reg $I(s) = \frac{K}{s} + \frac{H}{s - (-1 + j\sqrt{3})} + \frac{H^*}{s - (-1 - j\sqrt{3})}$

• si ha

$$\left\{ K = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \frac{1}{2}; H = \lim_{s \rightarrow -1+j\sqrt{3}} (s - (-1+j\sqrt{3}))I(s) = \frac{1}{j2\sqrt{3}} \right\}$$

valore in regime staz.

e quindi

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{j2\sqrt{3}}e^{(-1+j\sqrt{3})t}u(t) + \frac{1}{-j2\sqrt{3}}e^{(-1-j\sqrt{3})t}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t} \frac{e^{j\sqrt{3}t} - e^{-j\sqrt{3}t}}{j2} u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)u(t), A. \end{aligned}$$

$$i(t) = \left(k + A e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + B e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) \right) u(t)$$

$$\hookrightarrow I(s) = \frac{k}{s} + \frac{As}{s^2+3} \Big|_{s=-s+1} + \frac{\sqrt{3}B}{s^2+3} \Big|_{s=-s+1} =$$

ANALISI CIRCUITO ELEM. DEGENERI

$$\frac{k(s^2 + 2s + 4) + A s^2 + \sqrt{3} B s}{s(s^2 + 2s + 4)}$$

$$(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

$$\begin{cases} k + A = 1 \\ 2k + \sqrt{3}B = 4 \\ 4k = 4 \end{cases}$$

$$k = 1$$

$$A = 0$$

$$\sqrt{3}B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

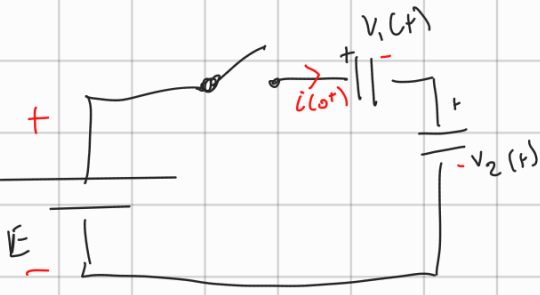
$$\frac{1}{2} v(t) + \left(\cancel{\frac{1}{2} e^{-t} \cos(\sqrt{3}t)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right) v(t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t)$$

alzo esercizio

"partitore capacitivo"

analisi elementare di circuito deve essere
 la stessa tensione che emerge come quella
 della batteria



$$\left. \begin{aligned} V_{C1}(0^-) &= 0 \\ V_{C2}(0^-) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Troviamo } V_{C1}(0^+) \text{ e } V_{C2}(0^+)$$

C_1 e C_2 scarichi a $t=0^-$? Tensione condensatori a $t=0^+$?
 non fossero separati; rimarrebbero entrambi scarichi. Maglia di condenser

$$t=0^+ \quad V_1(0^+) + V_2(0^+) = E \quad kV$$

$$i_1(t) = i_2(t) = i(t) \quad \text{Una maglia.}$$

$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} = i_2(t) = C_2 \frac{dV_2(t)}{dt}$$

• Integro... Analisi all'istante critico $\int_{0^-}^{0^+}$

$$\int_{0^-}^{0^+} C_1 \frac{dV_1(t)}{dt} dt = \int_{0^-}^{0^+} C_2 \frac{dV_2(t)}{dt} dt \Rightarrow$$

$$C_1 [V_1(0^+) - \underbrace{V_1(0^-)}_0] = C_2 [V_2(0^+) - \underbrace{V_2(0^-)}_0]$$

eq. in due incognite

$$\begin{cases} C_1 V_1(0^+) = C_2 V_2(0^+) \\ V_1(0^+) + V_2(0^+) = E \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{V_1(0^+) = E - V_2(0^+)}}$$

Regole Partitore Capacitivo

Reti separati, non convengono

$$\begin{cases} V_2(0^+) = \frac{E \cdot C_1}{C_1 + C_2} \\ V_1(0^+) = \frac{E \cdot C_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

usare le variabili: st-
stato

Tensione code di più Sol condensation più
piccolo