

Funzioni di rete

Studiare le funzioni di trasferimento

Mauro Forti studiare insieme usabile

April 28, 2020

FUNZIONI DI
TRASFERIMENTO

Il punto di vista ingresso-uscita

Unica causa, unica eccitazione
e unica causa

Per un circuito lineare e tempo invariante (LTI) con un ingresso (causa, eccitazione) e una uscita (effetto, risposta) definiamo funzione di rete nel dominio di Laplace

$$H(s) = \frac{\text{trasformata di Laplace dell'effetto (risposta forzata)}}{\text{trasformata di Laplace della causa}}$$

↓
Funzione razionale

condizioni iniziali
nulle

$$H(s) = \frac{L[\text{effetto}]}{L[\text{causa}]}$$

causa è solo
e 1 uscita

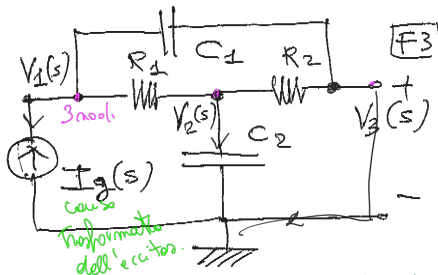
no elementi reattivi
carichi, no generatori
dovuti alle
condiz. iniziali

escludiamo
i generatori
indipendenti:
a $t=0$ se elementi
carichi
perché altrimenti
avremmo 3
input

- **Esempio.** Determinare la funzione di rete

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)}$$

Circuit
Symbolic
Replace



Prova 13
- a fianco
di V1

C_1 e C_2 scorichi;
sono impotenti
o ambidue

DL₁ é um círculo sem o mesmo raio

- consideriamo il circuito simbolico nel dominio di Laplace con gli elementi reattivi scarichi a $t = 0^-$ (risposta forzata)

uso método dei nodi, ho solo guardato come

C_1 e C_3 sono
antitruati ed DL
inadone

tools mode:
Generate content, no image generation

• analizzando con il metodo dei nodi otteniamo un sistema risolvente del tipo $\mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}(s)$ e cioè'

R_{ii} = conduttanza collegata al nodo i
 R_{ik} = conduttanza in comune tra nodo i e k , la conduttanza separa

$$\frac{1}{R_1} + sC_1 \begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & -sC_1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & -G_2 \\ -sC_1 & -G_2 & G_2 + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per usato conduttanze
 creato nel nostro modello +
 la stessa
 Termini noti

Sistema
 risolvente, serve
 memoria

• quindi Regola Cramer per risolvere

$$V_3(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & I_g(s) \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & 0 \\ -sC_1 & -G_2 & 0 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)}$$

$V_3(s)$, quello
 nella colonna
 3 il resto
 Termini noti
 da cui si sa
 $V_3(s)$ Proporz a
 $I_g(s)$

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 \\ -sC_1 & -G_2 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)} I_g(s)$$

$$= H(s) I_g(s)$$

- svolgendo i conti otteniamo $N(s) =$ *rapporto tra determinanti*

$$G_1 G_2 + (G_1 + G_2 + s C_2) \cdot s C_1$$

$$G_1 G_2 + G_1 s C_1 + G_2 s C_1 \quad H(s) = \frac{s^2 + (\frac{G_1}{C_2} + \frac{G_2}{C_2})s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}{(G_1 + G_2)s^2 + \frac{G_1 G_2}{C_1} s}$$

$+ s^2 C_2 C_1 = s^2 + \dots$

$$V_3(s) = \text{proporzionale a } I_g(s)$$

rapporto tra $V_3(s)$ e $I_g(s)$ è un rapporto tra segnali

coeff. tutti reali, no numeri complessi

• nel dominio di Laplace il circuito stabilisce un 'legame di proporzionalità' fra ingresso e uscita (risposta forzata). La 'costante di proporzionalità' è una funzione $H(s)$ della variabile s detta funzione di rete del circuito *proporzionalità non costante, variabile s*

- si può dimostrare in generale che per un circuito lineare e tempo invariante

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{usando } V_3(s)$$

e' una funzione razionale a coefficienti reali; inoltre $H(s)$ non dipende dalla grandezza impressa dalla eccitazione !!!

Se cambia ingresso, $H(s)$ rimane sempre la stessa

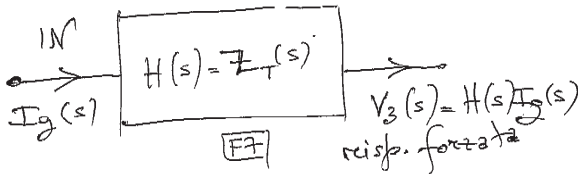
Nel DL il circuito stabilisce un legame di proporzionalità tra ingresso e uscita (Forzata), e la proporzionalità è data da una funzione di variabile s

• nel caso considerato il circuito puo' essere rappresentato come una scatolina che si caratterizza completamente dal punto di vista ingresso-uscita (risposta forzata) con $H(s)$; se cambia eccitazione ($I_{g1}(s)$), $H(s)$ non cambia e la nuova risposta forzata e' $H(s)I_{g1}(s)$

Se il circuito e' LSI, $H(s)$ e' razionale a coeff. real.

il circuito non dipende per $I_g(s)$, che va a moltiplicazione

il circuito e' dimensionato una scatolina a cui applico un ingresso e provo uscita. Se l'auto ingresso, $H(s)$ rimane la stessa



Tensione - Corrente

$H(s)$ non dipende da ingresso

- in questo caso

$$\left[\frac{V}{I} \right]$$

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)} = Z_T(s)$$

e' detta 'impedenza di trasferimento'.

Dimensionalmente e' una impedenza

lavora corrente e si trasforma in una tensione di uscita

qui $H(s)$ ha un polo in ∞ e un polo negativo, l'ingegnere stabile

Tutti i circuiti passivi sono Asintoticamente stabili

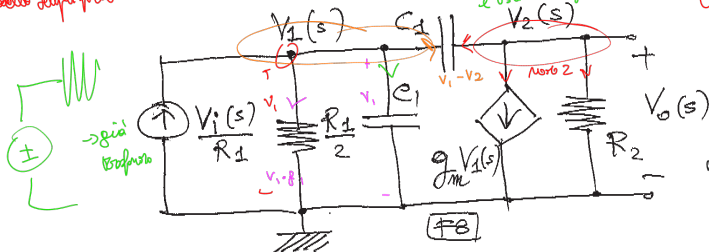
per $H(s)$ posso studiare stabilità del sistema

- **Esempio.** Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$$

Modello Trasistor in alta Freq. *Trasistor in alta frequenza*
 interengono capacità parassite, collegano in retardo, e l'uscita dell'ingresso

modello semplificato di Jaxetto (?)



uso metodo nodi
 ho generato
 corrente, ho inserito
 approssimazione



- dalle KI ai nodi 1 e 2 otteniamo *usiamo metodo dei Nodi: ho solo gen. corrente, non incognite o p*

KI nodo V_1

$$V_1(s) \left(\frac{2}{R_1} + sC_1 \right) + \underbrace{(V_1(s) - V_2(s))sC_1}_{\text{corrente su } C_1 \text{ in altro}} = \frac{V_i(s)}{R_1}$$

KI nodo V_2

$$\frac{V_2(s)}{R_2} + (V_2(s) - V_1(s))sC_1 + g_m V_1(s) = 0$$

C_1 e C_2
 scordarli
 se incognite
 sono i nodi
 rispetto a Tm

- sotto forma di sistema , *matrice*

*Matrice
NON SIM*

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{R_1} + 2sC_1 & -sC_1 \\ \textcircled{g_m} - sC_1 & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_i(s)}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} - g_m V_1$$

- risolvendo ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{C_1}{R_1} - \frac{g_m}{R_1}}{3C_1^2 s^2 + (\frac{2C_1}{R_1} + C_1 g_m)s + \frac{2}{R_1 R_2}}$$

generatori di corrente, matrice non simmetrica, pol. possono essere complessi
Se simmetrica, autoval. reali
pol. 2° ordine variabile s
zero parte reale negativa (positiva?)

Funzione non a fase minima > > Divergenza separ. Cortesio

la risposta in ampiezza non è per forza dipendente da quella in fase (vicinaria)

⇒ comunque scelgo le componenti, il sistema è ass. stabile

STABILITA' ASINTOTICA per il denominatore.

uno zero viene

$\frac{g_m}{C_1}$, a parte reale positiva

• Funzioni di rete di circuiti con amplificatori operazionali

Amplic. con
iniettore
non con impedenze

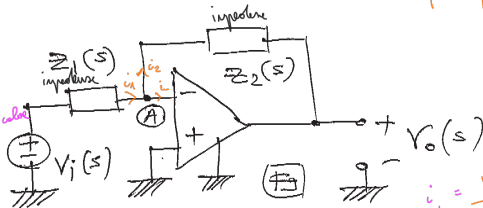
Esempio. Per il circuito in figura, scrivendo una KI al nodo A ottengo

Finisce trasferimento in tensione

$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$

$\frac{-R_2}{R_1}$ amplificazione invertente con nella prima parte

Fisicamente, questo si presenta di tensione a $s=0$, e cioè $\frac{V_i-0}{Z_1}$ corrente che non può entrare in operazionale, finisce tutta nel condensatore, e per come è definito i.e. $C \frac{dV}{dt}$ è l'integrale della corrente di



$i_i = \frac{V_i - 0}{Z_1} = \frac{0 - V_0}{Z_2}$

Ki di nostro interesse

$\left\{ \begin{array}{l} K_i \text{ di nostro} \\ \text{di ingresso e contributo} \end{array} \right.$

posso rivederla

- se $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = R_2$, si ha $T_v(s) = -R_2/R_1 \rightarrow$ amplificazione invertente (amplificatore invertente)
- se $Z_1(s) = R$, $Z_2(s) = 1/sC$, si ha

Condensatore di capacità C

Corrente ancora tutto nel condensatore, non passa nell'ao

$T_v(s) = -\frac{1}{sRC}$

invertente

$V_0(s) = -\frac{1}{sRC} V_i(s)$

integratore invertente

$V_0(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_i dt + \text{costante}$

integratore invertente

Se anti-produttore (?)

che corrisponde ad un integratore invertente

Se invece, da Z_1 e R a Z_2 , ho un derivatore invertente (non si può, amplifica bene)

Esempio. Per il circuito in figura si ha $V_B(s) = V_0(s)/2 = V_A(s)$ e

*K1 al nodo B, molto bello
- Non posso correre*

$V_B = \frac{V_0}{2}$, i resistori in serie dividono la tensione

dalle quali ottengo $V_B = V_A$

$$\frac{V_0(s)}{2} \left(\frac{2}{R} + sC \right) - \frac{V_i(s)}{R} - \frac{V_0(s)}{R} = 0$$

*inuguale, non si riferisce a
Kerna che non conosci*

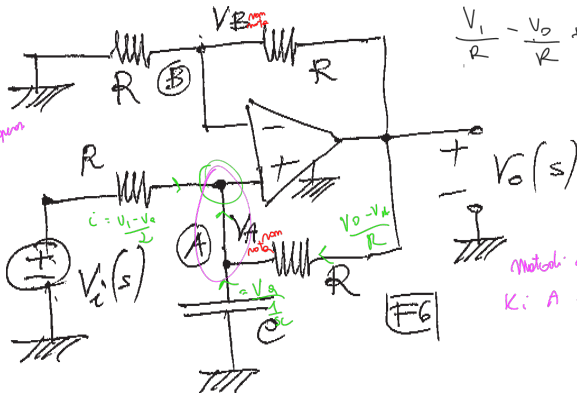
$$\left(V_i - \frac{V_0}{2} \right) \cdot \frac{1}{R} + \frac{\left(V_0 - \frac{V_0}{2} \right)}{R} = \frac{V_0}{2} \cdot s \cdot C$$

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{sCR}$$

$$\frac{V_1}{R} = \frac{V_0 \cdot sC}{2}$$

- e' un integratore non invertente (integratore di Deboo). *con 1 solo gener.*

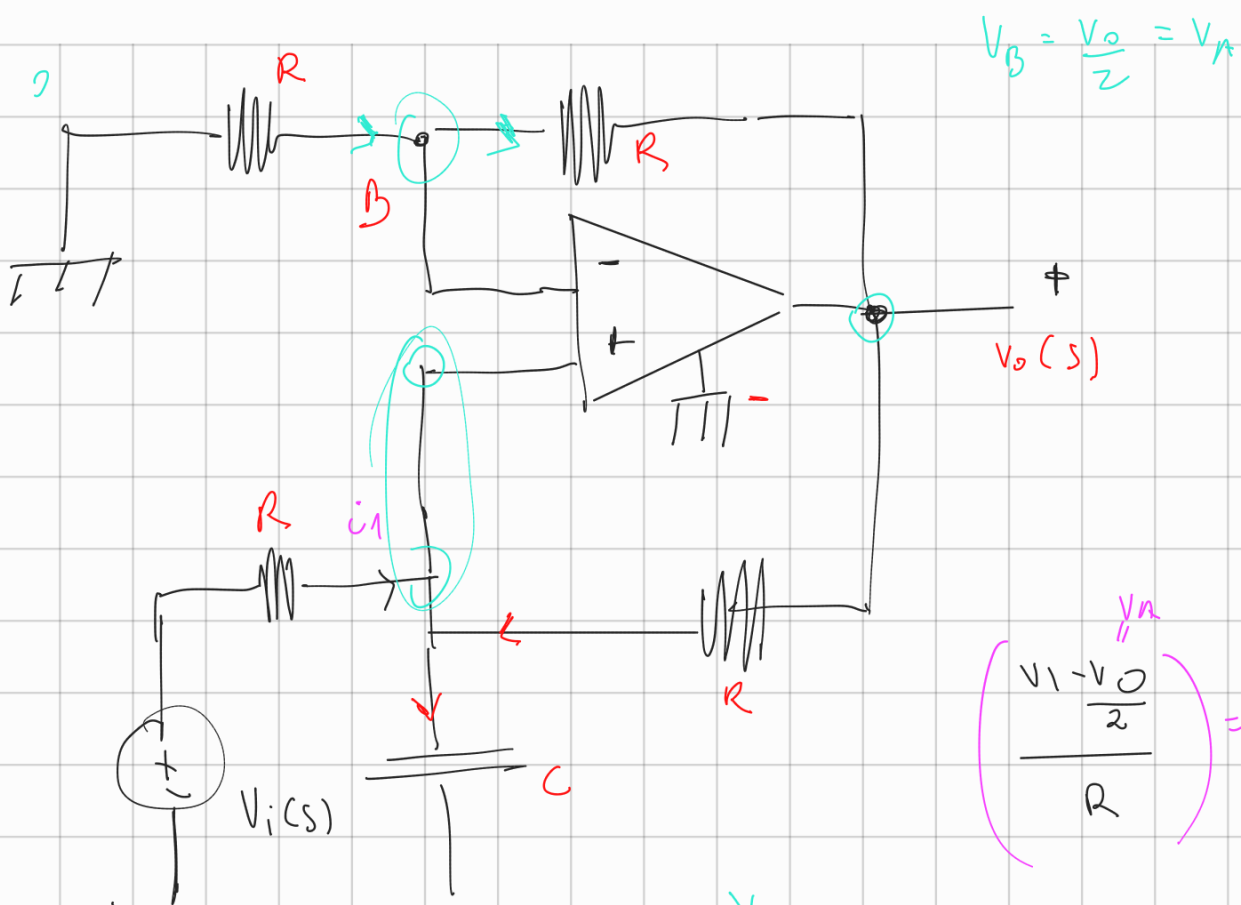
*$V_A = V_B$ sono uguali
e V_0 uscirà pure*



$$\frac{V_i}{R} - \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{R} = V_0 \cdot s \cdot C$$

Tensione dell'operazionale

*Moduli ai nodi A e B
 $K: A = B$*



da $k \bar{I}$ su (A)

$$\frac{V_1 - \frac{V_O}{2}}{R} + \frac{V_O - \frac{V_O}{2}}{R} = \frac{V_O}{2} \cdot sC$$

$$V_1 - \frac{V_O}{2} + V_O - \frac{V_O}{2} = \frac{V_O}{2} R \cdot sC$$

$$V_1 = \frac{V_O}{2} R \cdot sC$$

$$V_1 = \frac{V_O}{2} R sC \Rightarrow V_O = \frac{2 V_1}{sRC}$$

$$\frac{V_O}{V_1} = \frac{2}{sRC}$$

Miei conti

$$V_1 = \frac{V_O}{2} sRC$$

$$2 \frac{V_1}{sRC} = V_O$$

Ho un integratore, ma non invertente

$$\Rightarrow V_O = \frac{2}{RC} \int_0^t V_1 dt + C$$

$$V_O(s) = V_1(s) \cdot \frac{2}{sRC}$$

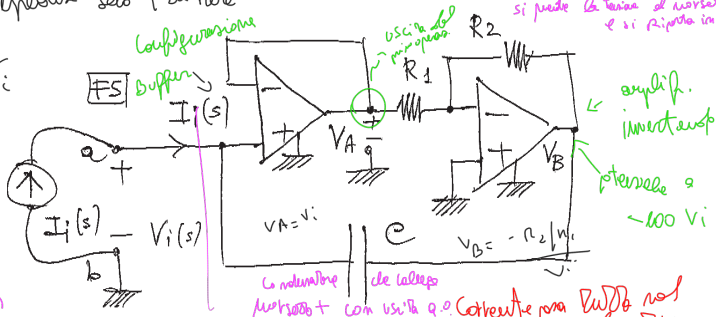
Esempio. Moltiplicatore di capacità. Determinare l'impedenza

$Z_i(s)$ del bipolo ab in figura

ovvero la impedenza seen F.d.note

$$Z_i(s) = \frac{V_i}{I_i}$$

configuraz. a buffer, in questo va dal + dell'op il meno va direttamente in uscita si prende la tensione al morsetto + e si riporta in uscita



Per definizione alimento con I_i trovo V_i
 $Z = \frac{V_i(s)}{I_i(s)}$

Condensatore in serie con uscita q.e. corrente per R_2 nel condensatore

- alimento con un generatore di corrente I_i ; si ha $V_A = V_i$, e

$$V_B = -(R_2/R_1)V_A = -(R_2/R_1)V_i; \text{ allora}$$

e' un amplif. invertente

vedere al nodo d

$$I_i = (V_i - V_B)sC = [V_i + V_i \frac{R_2}{R_1}]sC$$

Tensione di morsetto, l'm uscita dell'op.

la corrente $I_i(s)$ non può essere nell'op, va tutto nel condensatore

perché V_i , lo amplifico, e il condensatore o' a pot. $V_i - 100V_i \dots$ da V_i a $100V_i$

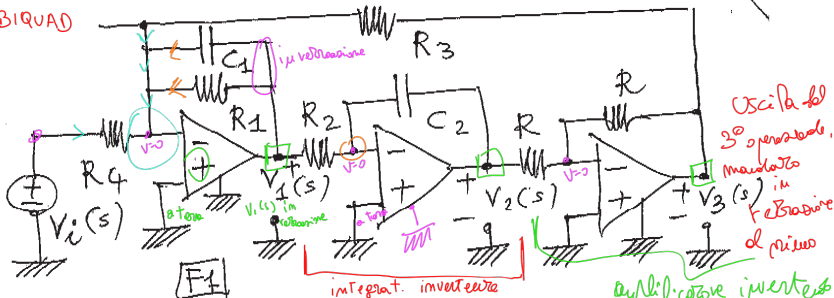
la capacità allora è 100 volte invece di V_i lo $100V_i$ c'è o' $\Rightarrow C = 100C \frac{dV}{dt} \Rightarrow C_{eq} = 100C$

$$I_i = \frac{V}{\frac{1}{sC}}$$

$$Z_i(s) = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})sC} = \frac{1}{sC_{eq}}$$

- il bipolo equivale un condensatore di capacità $C_{eq} = (1 + \frac{R_2}{R_1})C$.

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione **FILTRO**
 $T_V(s) = V_3(s)/V_i(s)$ **Filtro, PassaBasso del 2° ordine, o un parabola**
FILTRO **BIQUAD** **eliminando...**



- INCOGNITE, TENSIONI NODI rispetto a TERRA
- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$: **Tensione uscita dell'operazionale** **3 V nodi, 4 me conosco**
Se scriviamo K1 al 2° nodo del 2° op
 $\frac{V_1 - 0}{R_1} = (0 - V_2) \cdot sC_2$ **valori dell'1° op. inv.**
 - scriviamo 3 KI ai nodi di ingresso degli ao; per il secondo ao si ha

Incognite, 3 tensioni di uscita dell'ao

$$\left. \begin{array}{l} \text{integrat. invertente} \\ \text{integrat. invertente} \end{array} \right\} V_2 = -\frac{1}{sR_2C_2} V_1 \quad \frac{1}{sRC} V_{ingresso}$$

mentre per il terzo ao **invertente, con 2 r uguali**

$$K1 \text{ al 3° nodo, 3° op} \quad V_3 = -V_2 \quad \Rightarrow \text{moltiplica per } -1 \quad -\frac{R}{R} = -1$$

• infine per il primo ao $\rightarrow K_i$ corrente di nodo $\frac{V_i - 0}{R_4} + \frac{V_1 - 0}{R_1} + \frac{V_1 - 0}{\frac{1}{sC_1}} + \frac{V_3 - 0}{R_3} = 0$

K1 ai nodi in op.

Singole in 3eq

• allora

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + V_1 \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) = 0$$

~~Scusa~~ blo conosci.

$$V_2 = -V_3; \quad V_1 = -sR_2C_2V_2 = \underbrace{sR_2C_2V_3}_{\text{sostituisco}}$$

quindi

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + sR_2C_2V_3 \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{R_4} &= -V_3 \left[\frac{1}{R_3} + s^2R_2C_1C_2 + s\frac{R_2C_2}{R_1} \right] \\ &= -V_3 \frac{R_1 + s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2}{R_1R_3} \end{aligned}$$

• quindi

Finisce si vede

$$\boxed{\frac{V_3}{V_i}} = -\frac{1}{R_4} \frac{R_1R_3}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + R_1}$$

- метод теней и контур

$$T_v(s) = \frac{V_3}{V_i} = \left[-\frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2} \right] \frac{1}{s^2 + \frac{s}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

- _____

Completeness. complete
stable rigidity
force.

$$T_v(s) = \underbrace{-k}_{\text{invertide}} \frac{1}{s^2 + as + b}$$

invested

SU Stabilität -- asymptot. Stille

2 poli a parte reale negativa

gli è un ingratito
e se l'uscita

$$\frac{K}{s^2 \dots}$$

passavamo del
2° ordine

{ Se posto V_1 invece di V_2 avrei
un parallelo (invece di
un parallelo)

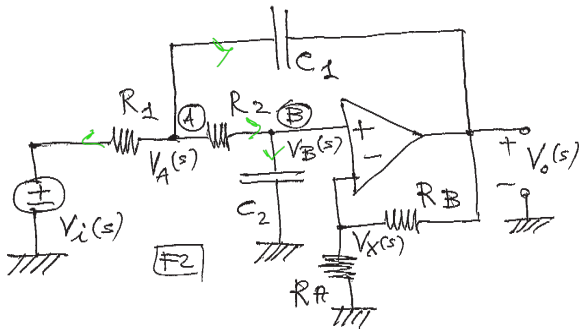
al posto di J mettiamo
 JW , e vediamo cosa
succede per $w \rightarrow 0$
 $- \infty$

Filter Biquad

Filoso im rebus.
positiva, rete del
Koma im rebus. al morbo +

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$$



- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_A(s)$, $V_B(s)$, $V_0(s)$; scriviamo 3 KI ai nodi A, B e X
- dalla KI al nodo X si ha

$$V_X = \frac{V_0}{k}; \quad k = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

$$\frac{V_A - V_B}{R_2} = V_B (sC_2)$$

$$V_A = V_B (1 + sR_2 C_2)$$

- da KI al nodo B ($V_B = V_X$) si ottiene

$$V_A = V_B(1 + sR_2C_2) = \frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2)$$

- infine dalla KI al nodo A

$$\frac{V_A - V_i}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + (V_A - V_0)sC_1 = 0$$

- sostituendo ottengo

$$V_A \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_B}{R_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

e quindi

$$\frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_0}{kR_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

- svolgendo i conti ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0}{V_i}$$

$$= \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{k}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

Esempio. La risposta forzata di un circuito LTI a $e(t) = u(t)$ vale *ingrosso*
 $y(t) = (3 - e^{-3t})u(t)$. Determinare la risposta forzata a

$e_1(t) = \cos(2t)u(t)$. *nuova eccitaz.* *conoscio l'input e rispondo* *ESECUZIO*
risposta forzata, mi calcolo le F di rete,

- Si ha $E(s) = 1/s$ e
 $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+3}$$

Funzione di rete univoc. determinata, non cambia con eccitaz.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{u(t)}$$

quindi

appl. c. alla nuova eccitaz.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = 3 - \frac{s}{s+3} = \boxed{\frac{2s+9}{s+3}} \quad H(s)$$

appl. c. nuova eccitaz.

- inoltre $E_1(s) = s/(s^2 + 4)$ e allora *E* *nuova trasformazione dell'uscita*

$$Y_1(s) = H(s)E_1(s) = \boxed{\frac{2s+9}{s+3}} \cdot \boxed{\frac{s}{s^2+4}} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-j2} + \frac{B^*}{s+j2}$$

3° ordine, 2° ordine, 1° ordine
MC SX

poli complessi, immag. coniug.

- i coefficienti della scomposizione in fratti semplici sono

$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)Y_1(s) = -\frac{9}{13}$$

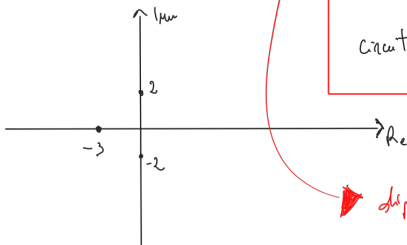
$$B = \lim_{s \rightarrow j2} (s-j2)Y_1(s) = \frac{35-j6}{26}$$

• allora

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Ae^{-3t}u(t) + Be^{j2t}u(t) + B^*e^{-j2t}u(t) \\&= Ae^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}[Be^{j2t}]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}\left[\frac{35-j6}{26}(\cos(2t) + j\sin(2t))\right]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + \frac{35}{13}\cos(2t)u(t) + \frac{6}{13}\sin(2t)u(t).\end{aligned}$$

la soluzione riguarda la
funzione di rete, non solo l'excitazione

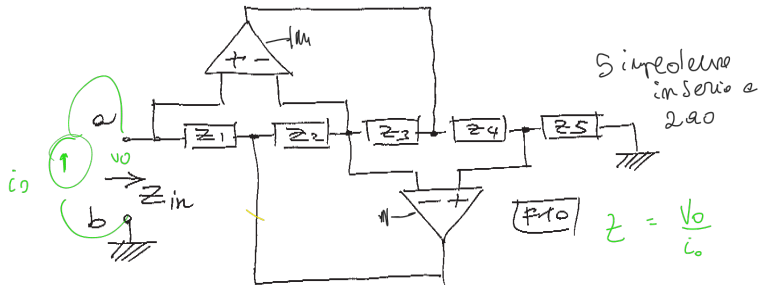
Poli dunque



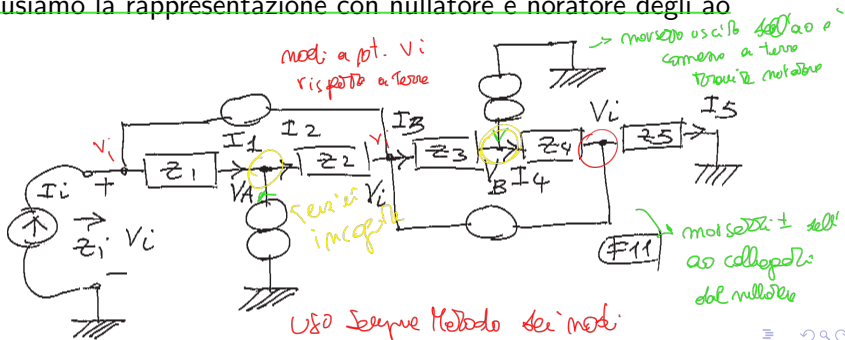
circolo asintoticamente stabile

dipende dalla risposta libera, non forzata

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo ab



- usiamo la rappresentazione con nullatore e noratore degli ai



- possiamo scrivere $I_5 = V_i / Z_5$ e, essendo $I_4 = I_5$,

corrente nel
bipolo Z_5

trovo potenza
modo B

ho fatto un

K1 al modo di ingresso

$$V_B = V_i + Z_4 I_5 = V_i \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

$$V_B - V_i = I_4 Z_4$$

- inoltre

nell'ao

$$I_3 = \frac{V_i - V_B}{Z_3} = \frac{1}{Z_3} \left(-V_i \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

e essendo $I_2 = I_3$ nel moltiplicatore non fanno corrente

$$V_A = V_i + Z_2 I_2 = V_i \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right)$$

- quindi

$I_i = I_c$, non fare corrente nell'ao

$$I_i = \frac{V_i - V_A}{Z_1} = V_i \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5}$$

- infine

$$Z_{in} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

$$V_i = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} I_i$$

Prodotto impedenze di giri
Prodotto imp. pol.

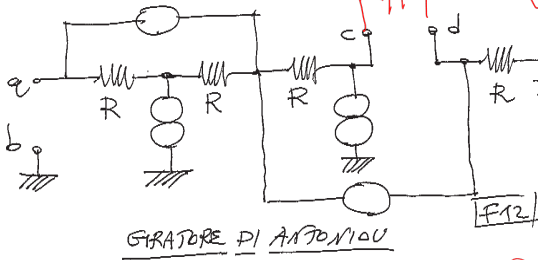
- ad esempio, se $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R$ e $Z_4 = 1/sC$ si ha

$$Z_{in}(s) = sR^2C = sL_{eq}$$

*impedenza di un
induttore*

- corrisponde ad un giratore con resistenza di girazione R chiuso su un condensatore (giratore di Antoniou)

*c all'ingresso vedo
un induttore
se collego un
condensatore
all'uscita*



*Resistenza di Girazione R
le reles. contributive sono quella di un
girazione*

- se $Z_1 = Z_3 = 1/sC$, $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$, si ottiene

$$Z_{in}(s) = \frac{1}{RC^2 s^2}$$

e per $s = j\omega$ *studio, comp. in reg. sin*

$$Z_{in}(j\omega) = -\frac{1}{RC^2 \omega^2}$$

impedenza reale, non c'è j, e' un resistore neg.

che corrisponde a un resistore negativo dipendente dalla frequenza (FDNR; 'frequency dependent negative resistor').

Resistenza negativa dipendente dalla freq



FDNR

(F13)

01/06/23

Cenni su Stabilità di Circuiti

- Consideriamo la funzione di rete di un circuito LTI

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

un sistema (circuito) è descritto da una funzione di rete $H(s)$ di cui

dove N e D sono polinomi a coefficienti reali nella variabile complessa s fra di loro

- Il circuito è asintoticamente stabile (AS) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} < 0$ *poli a parte reale strettamente negativa*
- il circuito è stabile (marginalmente) (S) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} \leq 0$ e inoltre quelli con $\text{Re} = 0$ sono semplici (di molteplicità 1) *poli su una linea solo se semplici*
- il circuito è instabile (INST) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ in tutti i casi rimanenti

→ per le spm ci si riferisce alla parte reale del denominatore, possono anche avere molteplicità 1

Circuiti Passivi: contengono solo bipoli e reti due porte (e mutiporta) passivi; contengono in particolare solo elementi dissipatori e/o accumulatori *Resistori - C e L solo accumuli*,

• si può dimostrare che la stabilità è una proprietà intrinseca di ogni circuito passivo; ne consegue questo risultato fondamentale *o es. n. b. o non passivo*

• **Proprietà:** sia $H(s)$ la funzione di rete di un circuito LTI passivo. Allora i poli di $H(s)$ possono essere dei seguenti tipi:

- 1) poli a $\text{Re} < 0$ (anche multipli) }
- 2) poli a $\text{Re} = 0$ (necessariamente semplici) }
- 3) polo per $s = \infty$ (necessariamente semplice) ??

Prende una qualsiasi funzione di rete di un circuito LTI pass.

poli passivi a $\text{Re} < 0$, $\text{Re} = 0$ $\mu = 1$

Polo $s = \infty$

$$\hookrightarrow |H(s)| \rightarrow \infty \text{ per } |s| \rightarrow \infty$$

Se accade ciò $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, grado $N >$ grado D

$H(s)$ è razz. impropria

all'infinito si comporta come s $\rightarrow$ es.

$$\frac{s^3}{s^2+4}$$

polo semplice in $s \rightarrow \infty \rightarrow$ si comporta come s per $s \rightarrow \infty$

es.

$$\frac{s^4+1}{s^2+s+1}$$

polo su $\mu = 2$ in ∞

si comporta come s^2

Circuiti ~~Passivi~~ ^{ATTIVI} contengono oltre a bipoli dissipatori e accumulatori anche elementi attivi (BJT, generatori controllati, ao)

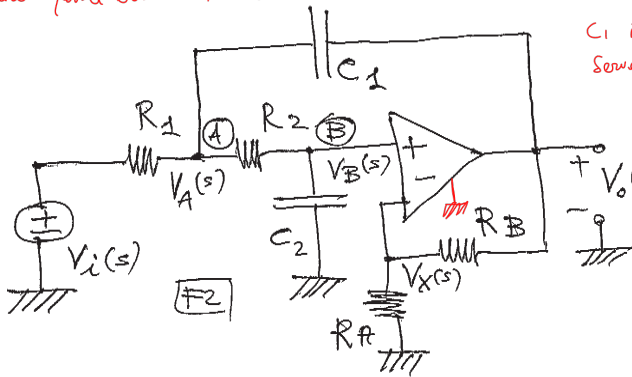
- per i circuiti attivi la stabilità non è una proprietà intrinseca; *non è garantita a priori*
è invece una proprietà che va garantita in fase di progetto del circuito

no poli sopra all'infinito (che vanno come s^2) poiché usando la trasformazione per raggi reciproci, $s \rightarrow \frac{1}{s}$, i poli induttori (s) mi diventano condensatori ($\frac{1}{s}$), ovvero un circuito passivo con 2 poli in 0, quindi stabile, ovvero

CIRCUITI ATTIVI NON GARANTISCONO STABILITÀ

Esempio consideriamo ancora il circuito attivo con un ao in figura

redibito filtro passa-basso **FILTRO IN RETROAZ. POSITIVA**. *rete forma dell'uscita al morsetto + dell'q. v.*



C1 in retroazione

*Serve anche retroaz. negativa derivata
Sarebbe sempre stabile*

*Stabile se
scelta opportuna
C1 e C2*

- abbiamo visto che la funzione di rete

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} \quad \text{FILTRO IN RETROAZ. POSITIVA, } C_1 \text{ e in retroaz. POS.}$$

$$= \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \left(-\frac{k}{R_2 C_2} \right) \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

R_A in retroaz. neg.

dove il parametro $k = 1 + R_B/R_A$

*S può essere positivo o negativo
in base a k*

- si tratta di un filtro passa basso del secondo ordine; per poter essere utilizzato come filtro è necessario che sia AS

- studiamo la stabilità al variare di k ; si ha quanto segue; il denominatore di $H(s)$ è della forma $D(s) = s^2 + 2\alpha(k)s + \omega_0^2$; sia

Studio stabilità
al variare di k

$$k_{\max} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}}{\frac{1}{R_2 C_2}}$$

k che annulla
il coeff di s (k)

il valore per cui si annulla $\alpha(k)$; si ha $\leftarrow s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$ positivo, c.c. stab.

1) $k < k_{\max}$ implica $\alpha(k) > 0$, quindi $D(s)$ ha due permanenze e $H(s)$ ha due poli a $\text{Re} < 0$; il circuito è AS

2) $k = k_{\max}$ implica $\alpha(k) = 0$; $D(s)$ ha due poli semplici a $\text{Re} = 0$ $s^2 + \omega_0^2$ $\alpha=0$
dati da $s_{1,2} = \pm j\beta$ con $\beta = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$; il circuito è S non asintoticamente stabile

3) $k > k_{\max}$ implica $\alpha(k) < 0$, quindi $D(s)$ ha due variazioni e

$H(s)$ ha due poli a $\text{Re} > 0$; il circuito è INST

$\rightarrow s^2 - 2\alpha s + \omega_0^2$

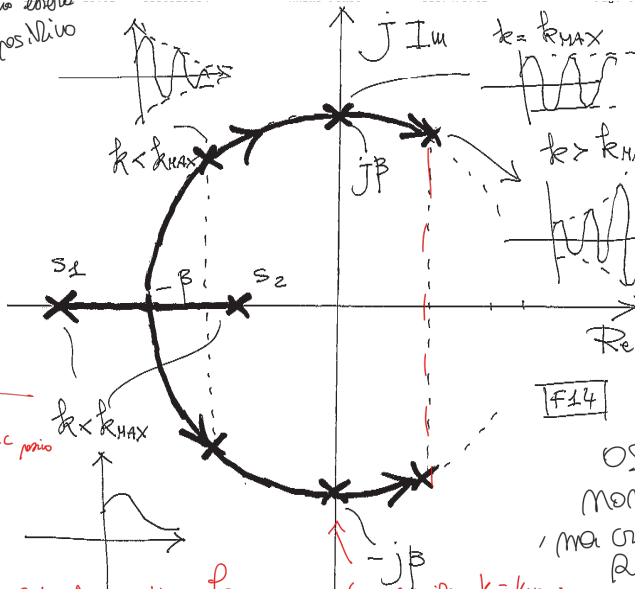
Segni
coeff

+ - +, 2 variazioni, 2 poli $\text{Re} > 0$ o.c. non stabile
Criterio

Per circuiti attivi non è garantita la stabilità, riceviamo sempre di energia per avere $\text{Re} > 0$

- il luogo dei poli di $H(s)$ al variare di k e' riportato in figura ω_0^2 e' Fisso, ζ variabile

$\alpha(k)$ può essere anche positivo



poli: $\text{Re} > 0$
crescono: camp.

in risposta libera
ho una oscill.
non limitata.

Salvo l'1ao, non
ho un transitorio

analogo a RLC passivo

F14

oscillazioni
non limitate
ma cresce in
RISPOSTA
LIBERA

USO FILTRI ATTIVI per evitare il caso limite $k = k_{MAX}$
il più possibile AL L'ASSE IMMAC, stando attento in Fase Progetto

Con RLC i poli sono sempre a parte reale negativa
 Con α_0 ho il surplus di energia che può far andare
 $\alpha < 0$

uso più α_0 per avvicinare il più possibile
 i poli all'asse immaginario
 Variaz. del $K \Rightarrow$ Tecnica di incremento del
 fattore di qualità Q .

Esercizio

Studiare la stabilità del Filtro

rispetto la Funzione di rete

• Den. Propone $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$

C scorricio

Circuito Simulico

$V_1(t) = e^{3t} u(t)$ Applico un impulso

Portatore Teoriale

$W(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$

$V_2(s) = \frac{1}{s-3} \cdot \frac{1}{sC}$

$\frac{1}{sC} + R$

$\frac{sC}{s-3}$

$\frac{1}{1+R}$

$\frac{1}{(s-3)(1+R)} = \frac{1}{RC(s-3)(\frac{1}{RC}+s)}$

$= \frac{sC}{(s-3)(1+R)} = \frac{sC}{s-3+R(s-3)}$

$= \frac{sC}{s-3+RS-3R}$

$V_2 = \frac{1}{CR(s-3)(s+\frac{1}{RC})}$

$V_1 = \frac{1}{s-3}$

$\frac{sC}{S(1+R)-3R-3}$

è Polo ECCITAZIONE

Polo in $s = 3$

$s = -\frac{1}{RC}$

due problemi i poli della Funzione di Rete...

è all'incirca
stabile... in forza,
è positivo.

↓
Polo della F
di Broshner!!

STABILITA' DIPENDE dai poli della
Funzione di Rete