

Reti due porte

nel DL

Mauro Forti

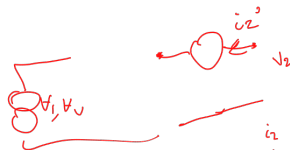
April 30, 2020

$\left. \begin{array}{l} \text{ricevitori} \\ \text{maximizzazione} \end{array} \right\} Z$
 $\left. \begin{array}{l} \text{antisp} \end{array} \right\} h$

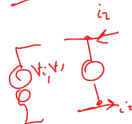
$$\begin{aligned}
 v_1 &= Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \\
 v_2 &= Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \\
 i_1 &= h_{11} v_1 + h_{12} v_2 \\
 i_2 &= h_{21} v_1 + h_{22} v_2 \\
 v_1 &= b_{11} i_1 + b_{12} i_2 \\
 v_2 &= b_{21} i_1 + b_{22} i_2 \\
 i_1 &= b_{11} v_1 + b_{12} i_2 \\
 i_2 &= b_{21} v_1 + b_{22} i_2
 \end{aligned}$$

def=1 { ABCD $\begin{cases} v_1 = A v_2 + B (-i_2) \\ i_1 = C v_2 + D (-i_2) \end{cases}$

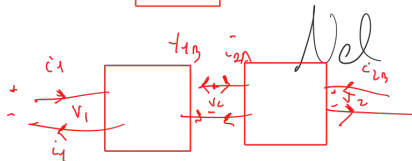
$$A = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{-i_2=0}$$



$$B = \frac{v_1}{-i_2} \Big|_{v_2=0}$$



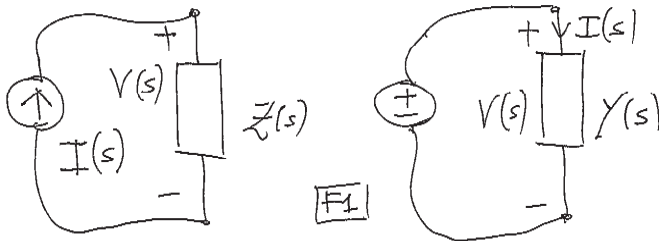
DL



• Bipoli RL_C

- Consideriamo un bipolo LTI nel DL contenente un certo numero di condensatori C_i e induttori L_i . Supponiamo C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$; la relazione costitutiva nel DL e' il legame che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$

lo possiamo considerare il bipolo con una impedenza come rapporto tra effetto e causa, elemento



- ci sono solo due possibili rappresentazioni (relazioni costitutive) del bipolo

- se il bipolo e' controllabile in corrente: alimento in corrente ($I(s)$, causa) e trovo la tensione $V(s)$ (effetto); ottengo cosi' la rappresentazione impedenza

impedenza bipolo, rapporto tra effetto e causa

e' una Relaz. costitutiva

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

- dualmente, se il bipolo e' controllabile in tensione, ottengo la rappresentazione ammettenza

Precedere
bipolo generico
nel DL

$$Y(s) = \frac{I(s)_{\text{effetto}}}{V(s)_{\text{causa}}}$$

Come causa =

Tensione o corrente

- se esistono entrambe le rappresentazioni, sono legate da Se I corrente

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

• per un bipolo ci sono 2 possibili
relaz. costitutive

Se ho una rete a due porte ho più possibili relaz. costitutive
quadrupolo, oggetto a 4 terminali, e ha un vincolo =>

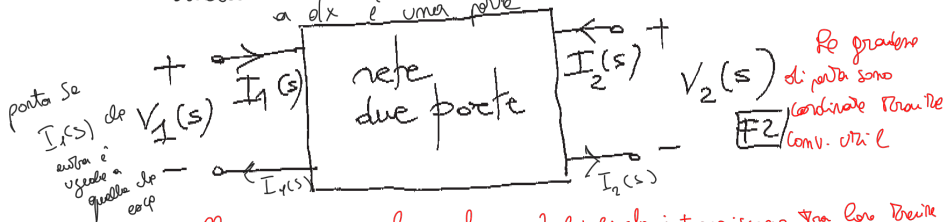
quadrupolo e' una rete a due porte la cui coppia di terminali e'
e.c. la corrente che entra in un terminale e' uguale a quella che

- Consideriamo adesso una rete due porte LTI nel DL contenente C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$

quindi con 2 vincoli.

esiste
nell'altro triangolo,
intanto per istante

→ automaticamente anche la copia di triangolo
a dx è una porta



allora, se ciò vale ho 2 bipoli che interagiscono tra loro tramite INDIPENDENTI ciò che c'è dentro la scatola

- relazioni costitutive: 2 legami che la rete stabilisce fra le 4 grandezze di porta $V_1(s)$, $V_2(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$ per come funziona internamente

- abbiamo varie possibilità per scrivere le relazioni costitutive; ad esempio, scegliendo come cause I_1, I_2 e come effetti V_1, V_2 ottengo la rappresentazione a parametri z della rete due porte

z_{11}, z_{12} sono funzioni di rete

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s)$$

Posso scegliere in vari modi le cause e gli effetti.

Relaz. costitutive
2 legami INDIPENDENTI
tra le 4 grandezze

che generalizza la rappresentazione impedenza di un bipolo

- scegliendo come cause I_1, V_2 e come effetti V_1, I_2 ottengo la rappresentazione a parametri h della rete due porte

ho molte
scelte
di cause o
effetti

$$V_1(s) = h_{11}(s)I_1(s) + h_{12}(s)V_2(s)$$

$$I_2(s) = h_{21}(s)I_1(s) + h_{22}(s)V_2(s)$$

- complessivamente, in base alla scelta della coppia di variabili indipendenti, abbiamo 6 diverse possibili rappresentazioni di una rete due porte; essendo rappresentazioni della stessa rete due porte, sono legate fra di loro (nota una rappresentazione posso ottenerne un'altra con opportune formule di trasformazione)

6 rappresent. possibili dello stesso oggetto, saranno tutte legate tra loro

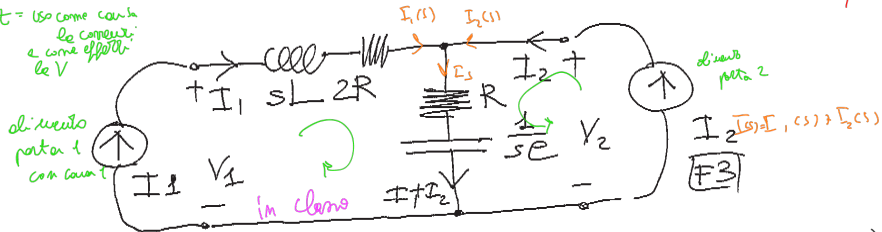
Sono rappresentazioni dello stesso oggetto,
anche queste rappres. sono legate tra loro

Esempio. Determinare parametri z e h della rete due porte in figura

Yopp. $t =$ uso come carico
le connessioni
e come effetto
le V

Le C sconsigli

sono in OL
in quanto E una rete
a due porte



• si ha

Yopp. z , connessioni
come carico

$$V_1 = (sL + 2R)I_1 + (R + \frac{1}{sC})(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = (R + \frac{1}{sC})(I_1 + I_2)$$

quindi

$$V_1 = (sL + 3R + \frac{1}{sC})I_1 + (R + \frac{1}{sC})I_2$$

$$V_2 = (R + \frac{1}{sC})I_1 + (R + \frac{1}{sC})I_2$$

• inoltre

$$V_1(s) = (3R + \frac{1}{sC} + sL) I_1 + (2R + sL) I_2$$

Parametri M

V_1 effett., I_1 cause paramet. indip.
 I_2 V_2

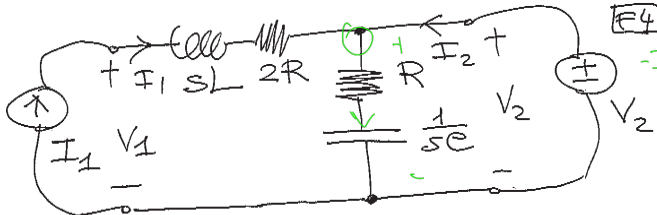
$$V_1 = (sL + R) I_1 + V_2$$

$$I_2 = -I_1 + \frac{1}{R + \frac{1}{sC} + sL} V_2$$

$$V_2(s) = (2R + sL) I_1 + (2R + sL) I_2$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} 3R + \frac{1}{sC} + sL & 2R + sL \\ 2R + sL & 2R + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

sym. 2x2
diagonal.



$$-I_2 - I_1 + \frac{V_2}{R + \frac{1}{sC}}$$

Parametri R, uso I_1 e V_2 come coup

I_2 e V_1 effett.



$$V_1 = (R + \frac{1}{sC}) I_1 + V_2$$

$$I_2 = -I_1 + \frac{V_2(s)}{2R + sL}$$

$$V_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$

$$\begin{cases} V_1 = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{sC} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2R + sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\ I_2 = \end{cases}$$

antisimmetrica

- Parametri z (a circuito aperto) Generalizza: impedenza del circuito
- Scegliamo I_1, I_2 come grandezze indipendenti; V_1, V_2 come dipendenti; si ha *effetti*

$$\begin{cases} V_1 = z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2 \\ V_2 = z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2 \end{cases}$$

Parametri z e/o h, L e C scorrono solo impedenze

V_1 e V_2 effetti
 I_1, I_2 cause

- in forma vettoriale

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

valore tensione in porta *valore corrente in porta*

generalizza:
nell'impedenza come
reti 2 porte

oppure

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Parametri, risposte forzate, C e L scorrono,
altrimenti avrei generalizzato meglio alle C.i. in s.d.
Ci sarebbero più cause

Perché "Parametri a C.A."?

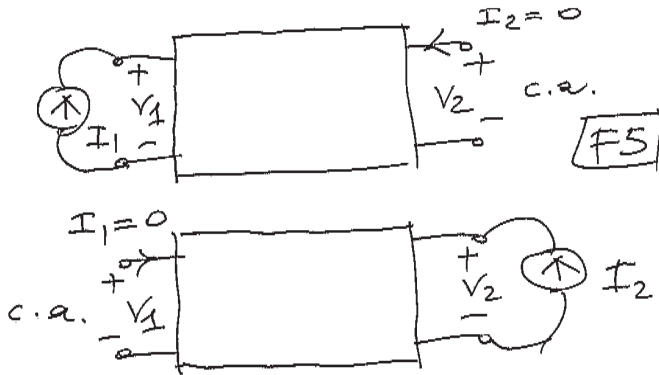
- Definizione operativa: si ha

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

impedenza alla porta 1 quando la 2° è a c.a.
lascio porta 2 aperta
Tensione porta 2 quando è circuito aperto

POSSO TROVARE
 Parametri Parametrici
 ANALISI SPETTRALE
 CIRCUITO a uscolo
 DEFINIZIONE OPERATIVA

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_1 sulla porta 1 e lasciando a circuito aperto la porta 2



- operativamente z_{11} e' l'impedenza alla porta 1 quando la porta 2 e' a circuito aperto; z_{21} e' l'impedenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' a circuito aperto

- analogamente si ha

QUESTA È LA DEF. OPERATIVA

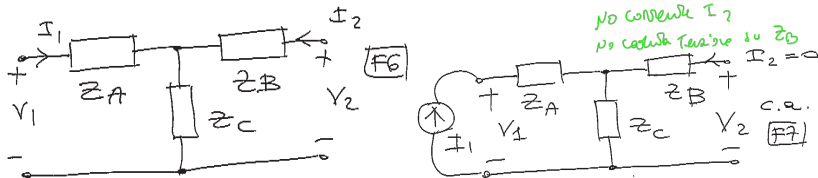
$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}; \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_2 sulla porta 2 e lasciando a circuito aperto la porta 1

- operativamente z_{22} è l'impedenza alla porta 2 quando la porta 1 è a circuito aperto; z_{12} è l'impedenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 è a circuito aperto

vedi slide

- **Esempio.** Parametri z di rete a T Si usa bene la def. propria



- si ha $z_{11} = Z_A + Z_C$, $z_{21} = Z_C$ inoltre $z_{22} = Z_B + Z_C$, $z_{12} = Z_C$, quindi

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_A + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_B + Z_C \end{pmatrix}$$

$$z_{21} = z_{12}$$

- notare che la matrice $\mathbf{Z}$ di una rete a T è simmetrica

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

Se $I_2 = 0$ uso kV

da kV $V_1 = Z_A I_1 + Z_C I_1$ $V_2 = Z_C I_1$

$\Rightarrow z_{12} = Z_C$ $z_{22} = Z_B + Z_C$

Dato se inverto il circuito

Le impedenze di Thevenin sono uguali.

Segue si moltiplica da porta 1 a porta 2, come si moltiplica da 2 a 1

• Reciprocità di una rete due porte.

• Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri z ; la rete si dice reciproca se Z è simmetrica, cioè

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

l'impedenza di trasferimento da porta 1 verso porta 2
è uguale all'impedenza di trasferimento da porta 2 verso porta 1

• quindi una rete due porte è reciproca se e solo se le due impedenze di trasferimento z_{21} e z_{12} coincidono

Se scambio fra loro posizione causa e effetto, l'effetto non cambia

il segnale si propaga da porta 1 verso porta 2 come

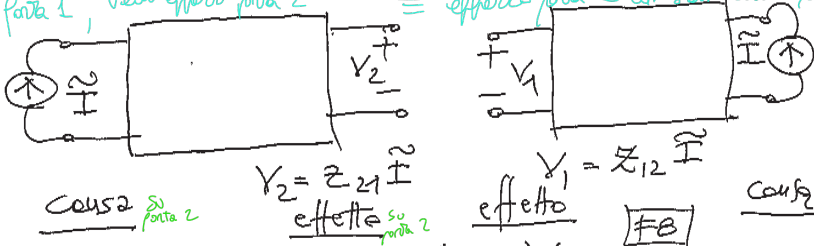
il segnale si propaga da 2 verso porta 1

esprimi 1
 $\tilde{I}$ sulla porta 1, corrente fissata
 $V_2 = z_{21} \tilde{I}$ = imp. di trasferimento $\tilde{I}$
 $\tilde{I}$ causa su porta 1
 V_2 effetto su porta 2

inverte posizione causa e effetto
 $\tilde{I}$ causa su porta 2
 V_1 effetto su porta 1
 $V_1 = z_{12} \tilde{I} \Rightarrow z_{12} = z_{21}$
 effetto non cambia se inverte causa e effetto

- consideriamo per una rete reciproca il seguente esperimento

Causa porta 1, verso effetto porta 2 $\equiv$ effetto porta 1 con stessa causa porta 2



$$Z_{12} = Z_{21} \Rightarrow V_2 = V_1$$

- ne consegue che: in una rete reciproca l'effetto non cambia se si scambiano fra di loro posizione di causa e effetto

- si puo' dimostrare che: una rete due porte che contiene solo bipoli e' reciproca $\Rightarrow Z_{12} = Z_{21}$

Solo bipoli: all'istesso tempo. Se metto altre reti 2 porte, non e' piu' vero, per non essere reciproca $\Rightarrow$ metto gen. controllati o p.e.

Se ci sono reti a due porte, non sara' vero, tendono a rendere non reciproca la rete $\Rightarrow$ es. q.o.

Reti 2 porte reciproca. Solo bipoli, non necessariamente reciproca

**EFFETTO NON CAMBIA se cambio posiz
CAUSA - EFFETTO**

Dim. con Tellegen

Circuito equivalente a parametri z : supponiamo siano assegnati i parametri z di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri z); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

Circuito che ha le stesse relaz. costitutive, esternamente e' uguale

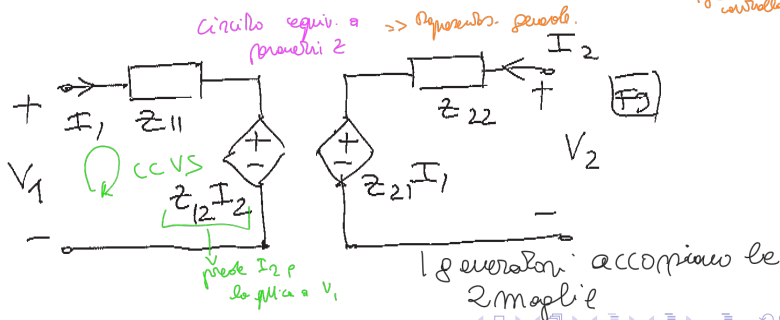
*V_1 proporzionale a 2 porzi.
 $z_{11} I_1$ e*

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2 \\ V_2 &= z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2 \end{aligned} \right\} \text{conosciute}$$

Tensione self-induzione

*Se reciproca
 potrei con cellatore
 i generatori controllati.*

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura



- Parametri y (di corto circuito)

- Scegliamo V_1, V_2 come grandezze indipendenti; I_1, I_2 come dipendenti; si ha *cause* *effetti* *cause* *effetti*

$$I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2$$

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

- in forma vettoriale

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{V}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{V}$$

oppure

*vettore corrente
di porta*

matrice ammettenza

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

espressione per y_{11} quando $V_2=0$ (corto circuito su porta 2)

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

devo fare 4 prove in CC

$$y_{21} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

allora $V_2 = v_m$ c.c. sulla porta

4 prove in CC.

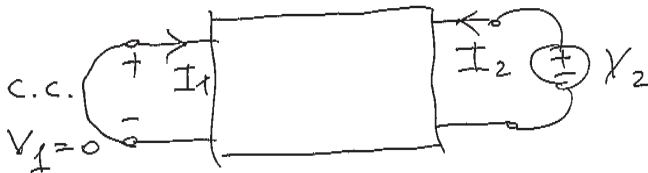
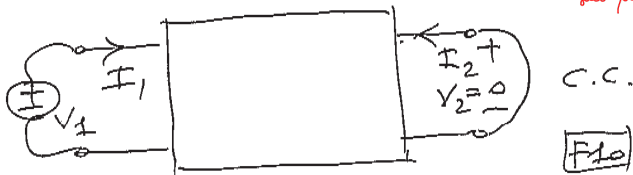
- Definizione operativa: si ha

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \big|_{V_2=0}; \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \big|_{V_2=0}$$

*y_{11} ammettenza porta 1 quando V_2 e' in c.c.
 y_{21} = coefficiente di transf. da porta 2 a 1
 quando la 2 e' porta e' in c.c.*

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_1 sulla porta 1 e mettendo in corto circuito la porta 2

questo e' il trasferimento e' la tensione sulla porta 1, resto effetto sulla porta 2



- operativamente y_{11} e' l'ammettenza alla porta 1 quando la porta 2 e' in corto circuito; y_{21} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' in corto circuito

- analogamente si ha

Come una Teniera sulla porta x/y diverso
una corrente sulla
porta y/x

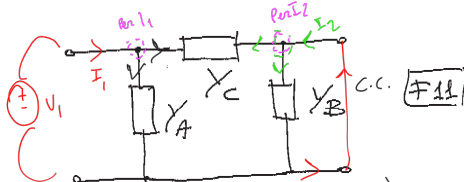
$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \big|_{V_1=0}; \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \big|_{V_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_2 sulla porta 2 e mettendo in corto circuito la porta 1
- operativamente y_{22} e' l'ammettenza alla porta 2 quando la porta 1 e' in corto circuito; y_{12} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 e' corto circuito

$$I_1 = V_1 \cdot Y_0 + (V_1 - V_2) Y_C$$

Si trovano facilmente per rete a triangolo

- **Esempio.** Parametri y di rete a Π Y_C o $Y_{C, \text{c.c.}}$ (più grande)



$$I_1 = V_1 \cdot Y_A + (V_1 - V_2) Y_C = (Y_A + Y_C) V_1 - Y_C V_2$$

- si ha $y_{11} = Y_A + Y_C$, $y_{21} = -Y_C$ inoltre $y_{22} = Y_B + Y_C$, $y_{12} = -Y_C$, quindi

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

$$I_2 = -Y_C V_1 + (Y_B + Y_C) V_2$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_A + Y_C & -Y_C \\ -Y_C & Y_B + Y_C \end{pmatrix}$$

Per reti a π

- notare che la matrice $\mathbf{Y}$ di una rete a Π è *simmetrica*

$$V_2 = 0$$

Y_B è cortocircuitata, Y_C è in parallelo a Y_A

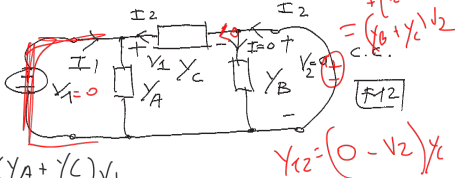
$$Y_{11} = Y_A + Y_C$$

$$I_2 = -Y_C V_1$$

conven. generici

Se invertiamo il circuito, per il rosa

$$\begin{cases} Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \\ Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \end{cases}$$



$$I_2 = Y_B \cdot V_2 + (V_2 - V_1) Y_C = (Y_B + Y_C) V_2 - Y_C V_1$$

$$Y_{12} = (0 - V_2) Y_C$$

Reciprocita' di una rete due porte.

• Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri y ; la rete si dice *reciproca* se $\mathbf{Y}$ e' simmetrica, cioe' *Se ammettente traferim sono diverse* *se le ammettente di nodi sono identiche.*

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

• quindi rete due porte reciproca se e solo se le due ammettenze di traferimento y_{21} e y_{12} coincidono

• verificare che se una rete ammette sia i parametri z che i parametri y allora si ha

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$$

la matrice e' l'inverso dell'altra

Se per una rete $\exists$ sia parametri

z che y

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Z}}^{-1}$$

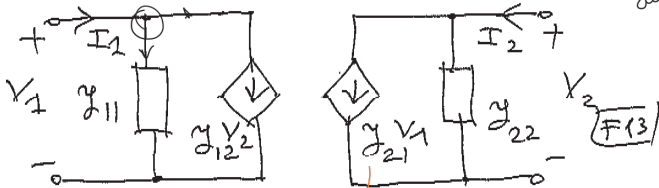
Circuito equivalente a parametri y : supponiamo siano assegnati i parametri y di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri y); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

Es. I_1 , corrente scesa di 2^a pi (circuito esternamente equivalente).
(parallelo)
corrente che scorre nel ramo y_{11}

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2 \\ I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2 \end{array} \right\} \text{ qualcosa che accoppi } \text{ porta 2 a porta 1}$$

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura

I_1 somma di due pezzi:

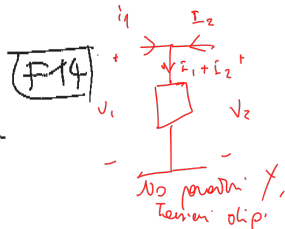
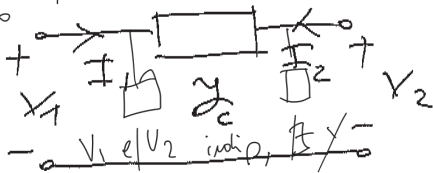


accoppi porta 1 verso porta 2

Non $\exists$ sempre parametri z e y , le cose sono diverse INDIP
 Non $\exists$ sempre parametri z e y . Anche solo impedanza non $\exists$ se bipolo non controll. corrente
 che non

• **Osservazioni.** Per la rete due porte che segue le correnti I_1 e I_2 non sono indipendenti (infatti $I_1 = -I_2$); quindi non esistono i parametri z

es. $z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$ non $\exists$, $z_{11} \rightarrow \infty$, c. a.



• invece V_1 e V_2 sono indipendenti, per cui esistono i parametri y e si ha

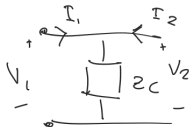
$V_A = V_B = 0$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_c \end{pmatrix}$$

$\nexists$ inf. e' singolare, non e' invertibile, non $\exists z$

• per un trasformatore ideale si ha $V_1 = nV_2$ e $I_1 = -I_2/n$ quindi non esistono ne' parametri z ne' parametri y

Es.



$V_1 = V_2$, non $\exists y$

no $z = \begin{bmatrix} z_c & z_c \\ z_c & z_c \end{bmatrix}$

Ci sono reti in cui non $\exists$ ne z ne y , trasf. ide.

Parametri ibridi h *copria per transistor*

- Scegliamo I_1, V_2 come grandezze indipendenti; V_1, I_2 come dipendenti; si ha *cause* *effetto*.

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}(s) I_1 + h_{12}(s) V_2 \\ I_2 &= h_{21}(s) I_1 + h_{22}(s) V_2 \end{aligned}$$

no shi *no shi* Ω^{-1}

Matrice ibrida, 4 parametri non hanno le stesse dim

- in forma vettoriale

Matrice ibrida

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- definizione operativa dei parametri h e legame con altri parametri; si ha $h_{ii} = \Omega$, impedanza porta i con porta j in C.C.

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{1}{\frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}} = \frac{1}{Y_{11}}$$

impedenza porta 1 quando V_2 è in CC reciproco legame param. Y

$$h_{22} = \Omega^{-1} \text{ ammettenza porta 2 con porta 1 a C.C.}$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{\frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}} = \frac{1}{Z_{22}}$$

porta porta in C.C. ricorrendo

h_{21} : Amplific. corrente da porta 1 a porta 2 con porta 2 in C.C.
 $V_2 = 0$, con l'ipotesi di "cortocircuito"

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}$$

h_{12} : Funzione di trasferimento in tensione da porta 2 verso porta 1 con I_1 in C.C.

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \dots = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

moltiplico e divido per V_1 in un'equazione in V_1

Reciprocita'. Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri h se e solo se

$$h_{21} = -h_{12}$$

Se MATRICE ANTISIMMETRICA
 transistor, rete 2 porte nello stesso modo di uno

Esempio. Determinare i parametri z in funzione dei parametri h

no parametri h . voglio quelli z

es. un transistor non e' reciproco. Es. $h_{fe} = h_{21} \gg 1$
 ma $h_{re} = 10^{-5}$

Assegnate le relazioni costitutive

$$\begin{aligned}
 V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 & V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\
 I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 & I_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{I_2}{h_{22}} - \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 \\
 V_1 &= h_{11} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2 - \frac{h_{12} h_{21}}{h_{22}} I_1
 \end{aligned}$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = \left(h_{11} - \frac{h_{12} h_{21}}{h_{22}} \right) I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2$$

$$z = \frac{1}{h_{11}} \begin{pmatrix} \det H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$$

Procedo in modo algebrico
 voglio esprimere tensioni in funzione delle correnti

$$\text{Es. } V_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{1}{h_{22}} I_2$$

$$V_1 = h_{11} I_1 - \frac{h_{12} h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2$$

- si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}}I_2 \\ V_2 &= -\frac{h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{1}{h_{22}}I_2 \end{aligned}$$

Handwritten notes: $-\frac{h_{21}}{h_{22}}$ (above the first equation), $\left. \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\}$ (bracketed next to the equations), and $h_{11} \cdot h_{22} - h_{12}h_{21}$ (next to the second equation).

e quindi

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: z_{12} (above the top-right element), $z_{12} = z_{21} \Rightarrow h_{21} = -h_{12}$ (to the right), and z_{21} (below the bottom-left element).

- notare che se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha

$$z_{21} = z_{12}, \text{ quindi } h_{21} = -h_{12}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{22}} (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) \\ &= h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}} \end{aligned}$$

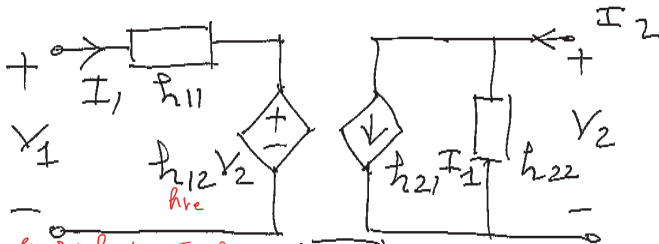
Handwritten checkmark below the result.

• il circuito equivalente a parametri h si ottiene dalle relazioni costitutive

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$

ed e' mostrato in figura

e' l'integrale del rumore...



Prova trovare parametri h di un Trasformatore (15)

$$V_1 = m V_2$$

$$I_1 = -\frac{1}{n} I_2$$

Trasformatore e' reciproco,
matrice antisim

$$H = \begin{bmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = -m I_1$$

non 3 me 2 me y forse pl. ibridi

Trasformatore e'
reciproco

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = 0$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0} = 0$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = m \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = -m$$

Un generatore invece?



v in fase di i , ho già parametri Z

$$V_1 = -R_0 I_2$$

$$V_2 = R_0 I_1$$

ANTISIMM

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -R_0 \\ R_0 & 0 \end{bmatrix}$$

I_1 e V_2 dip.

Cause DIPENDENTI

parametri H $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cause } (I_1, V_2) \\ \text{effetti } V_1, I_2 \end{array} \right.$

parametri H esistono
Se sono indipendenti.

I_1 e V_2 ... dipendenti

V_1 e V_2 dip, no g
 I_1 , I_2 dip, no Z

$$V_1 = m V_2$$

$$I_1 = -\frac{1}{m} I_2$$

V_2 e I_1 indep.

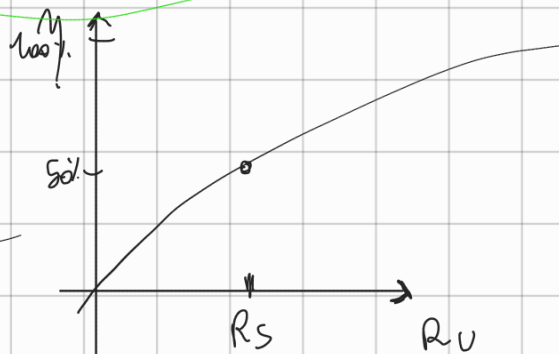
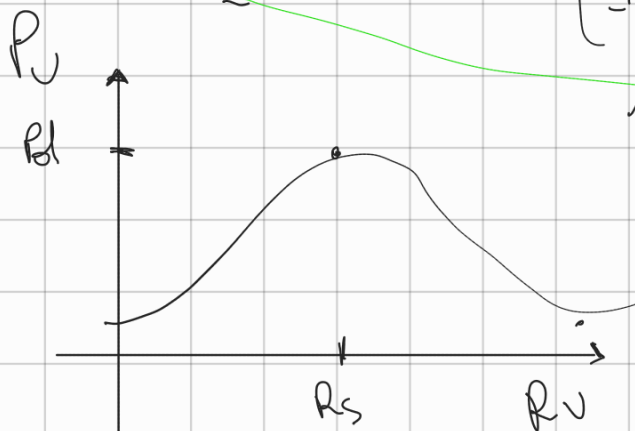
$$V_1 = h_{11} i_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} i_1 + h_{22} V_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{bmatrix} \text{ antisim, } \text{dip.}$$

$$I_2 = -m$$

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{4 R_0}$$



$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_R} = \frac{\frac{1}{2} I_m^2 R_0}{\frac{1}{2} I_m^2 (R_0 + R_s)}$$

generatore

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = -R_0 i_2 \\ V_2 = R_0 i_1 \end{array} \right\}$$

$\exists y!$

V_1, I_2 dip. V_2, I_1 dip, no h

$\exists$ parametri Z

$$\begin{bmatrix} 0 & -R_0 \\ R_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{V_2}{R_0} \\ I_2 = -\frac{V_1}{R_0} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_0} \\ -\frac{1}{R_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Parametri ibridi g invece di usare I_1 e V_2 di parametri h

- Scegliamo V_1, I_2 come grandezze indipendenti; I_1, V_2 come dipendenti; si ha

$h \sim \frac{V_1}{I_2}$ come parametri dip.

$$I_1 = g_{11}(s)V_1 + g_{12}(s)I_2$$

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}(s)V_1 + g_{22}(s)I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

ABCD

Parametri di trasmissione *Due grandezze della porta numero 2 come cause*
 • Scegliamo V_2, I_2 come grandezze indipendenti; V_1, I_1 come dipendenti; si ha *semplifica lo studio della connessione in un solo*

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{T}$ matrice di trasmissione diretta

- definizione operativa dei parametri di trasmissione:

TUTTE
FUNZIONI DI
TRASFERIMENTO
da porta 2 verso porta 1

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; & B &= \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \\ C &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; & D &= \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \end{aligned} \right\}$$

- tutti e 4 i parametri rappresentano funzioni di trasferimento da porta 2 verso porta 1 *A e B di trasferimento si tiene conto*

- i parametri

porta 2 verso porta 1, con $I_2 = 0$

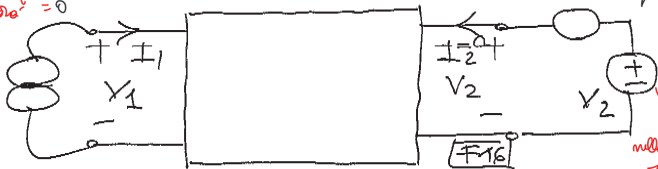
$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$B =$ impedenza di trasferimento

si trovano facendo riferimento al seguente circuito

• Se applico alla porta 2 un generatore V_2 la corrente non sarà $= 0$

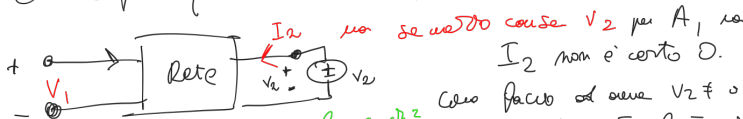
• I_1 e V_1 nome Relas. a priori, caratterizzati da un morsetto



se alla 2 un porta 1 con $V_2 = 0$

$V_2 \neq 0, I_2 = 0$, imbroccato un milliamperometro che ha una tensione sulla sonda ma non fa passare corrente

Da Def. operativa Eq. A



Così faccio ad avere $V_2 \neq 0$ e $I_2 = 0$?

• V_1 e I_2 sono qualcosa, ma milliamperometro solo, 2 relas. a priori? USO NULLATORE, la tensione di morsetto è 0, dunque alla porta 2

a priori non c'è un legame. tra V_1 e V_2 applico sopra V_2 volt, ma la corrente è sempre 0
 $I_2 = 0, V_2$ applicata.
 → Dunque c'è un rapporto alla porta 1

- i parametri

Def. operatore a due uscite si può risolvere il circuito e trovare A

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

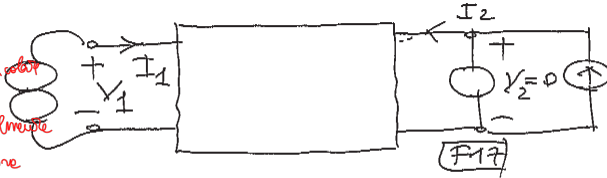
si trovano facendo riferimento al seguente circuito

Se applico I_2 alla porta 2, non avrò V_2 ... serve ingegnere per questo

che mi fa da meno
V1: V2=0
mette un cortocircuito
alla porta
inferiore
e NON ASSORBE
CORRENTI

V_1 e I_1

grande non vincolato
tra loro, lo
definiamo circuitualmente
con un cortocircuito



per trovare una corrente I_2 nel circuito
nel port cortocircuito, e
impone che $V_2 = 0$

Parametri di trasferimento V_1 e I_2

Si può dimostrare che se la rete è a 2 porte, è reciproca $AD - BC = 1$

$$V_1 = A V_2 + B (-I_2)$$

$$I_1 = C V_2 + D (-I_2)$$

$$V_2 = \frac{I_1}{C} + \frac{D}{C} I_2$$

$$V_1 = \frac{A}{C} I_1 + \left(\frac{AD}{C} - B \right) I_2$$

$$Z = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & D \\ 1 & B \end{pmatrix}, \text{ reciproco: } \det Z = 1$$

• **Reciprocita'.** Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri di trasmissione se e solo se

$$\det \mathbf{T} = AD - BC = 1$$

• **Esempio.** Determinare i parametri z in funzione dei parametri di trasmissione

Parametri Z_1 I care, Veffetti

• date le relazioni costitutive

$$V = I_1 \dots I_2$$

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

$$V_1 = A\left(\frac{I_1}{C} + \frac{D}{C}I_2\right) + B(-I_2)$$

$$V_2 = \frac{I_1}{C} + \frac{D}{C}I_2$$

$$V_1 = \frac{A}{C}I_1 + \left(\frac{AD}{C} - B\right)I_2$$

• si ha

e quindi

$$V_2 = \frac{1}{C}I_1 + \frac{D}{C}I_2 \quad \text{da qui: sostituisce nelle}$$

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$V_1 = \frac{A}{C}I_1 + \left(\frac{AD}{C} - B\right)I_2$$

$$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \det \mathbf{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{C} (AD - BC)$$

- otteniamo allora

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & \det \mathbf{T} \\ 1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

AD-BC *Ponta Reciproca se $\det \mathbf{T} = 1$*

- se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha $z_{21} = z_{12}$ e quindi $\det \mathbf{T} = 1$

Reciproca con $Z, Y, \dots$ Morio sym
 con R, g ilvise, Antisym
 con $ABCD, \det \mathbf{T} = 1$

Sono
 I_1 o V_1 in base st. $-I_2$ e V_2

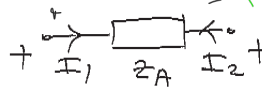
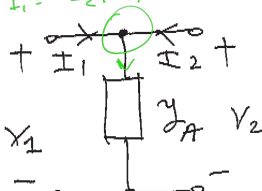
i parametri ABCD se $\mathbf{T}$ sono
 unici

Esempio. Determinare i parametri di trasmissione delle reti due porte in figura.

invece di usare def. operativa, uso definizione

$$V_1 = V_2, I_1 = -I_2 + V_2 Y_A$$

$$\begin{cases} V_1 = A V_2 + B(-I_2) \\ I_1 = C V_2 + D(-I_2) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} -V_1 - V_2 &= -I_1 \cdot Z_A \\ I_1 &= -I_2 \\ V_1 &= -V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= -I_2 \\ \bullet V_1 &= -I_2 Z_A + V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ I_1 &= -I_2 + V_2 Y_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= A V_2 + B(-I_2) \\ I_1 &= C V_2 + D(-I_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con } A &= 1 \quad B = 0 \\ D &= 1 \quad C = Y_A \end{aligned}$$

• per la rete di sinistra si ha $V_1 = V_2$ e $I_1 = Y_A V_2 - I_2$, quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_A & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1$$

• per la rete a destra verificare che

$$V_1 = -Z_A I_2 + V_2$$

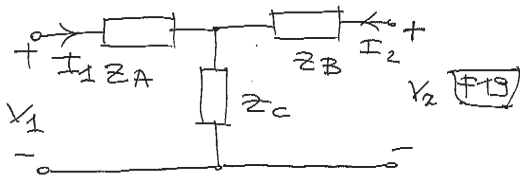


$$T = \begin{bmatrix} 1 & Z_A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_A I_2 + V_2 \\ I_1 &= -I_2 \end{aligned}$$

Reti Reciproche, Rete di soli bipoli, $\det = 1$

• **Esempio.** Determinare i parametri di trasmissione della rete due porte utilizzando la definizione operativa *con generatore*



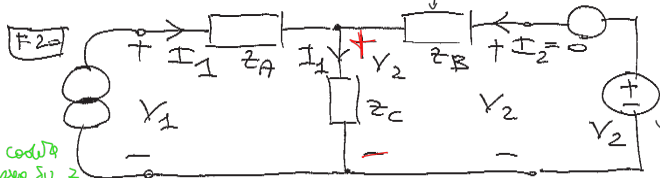
• dato che

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

causa V_2 *serve per* *potenza conservata*

facciamo riferimento a questa rete

Applio V2, Corrente I2=0 *Devo trovare*
V1 I1
non posso conservare, non c'è tensione su ZB



$I_2 = 0$, *no corrente*
flussa su ZB
ZC ha impedenza V2

$$I_1 = \frac{V_2}{Z_C}$$

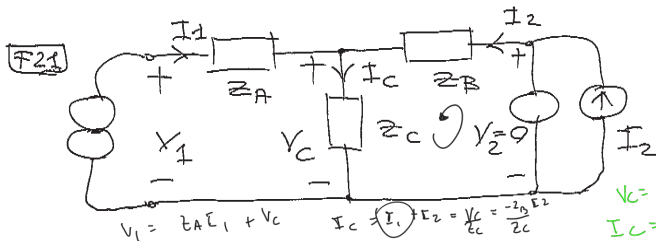
Corrente non va in ZB
ora faccio una KV per V1
 $V_1 = Z_A I_1 + Z_C I_2$

$$\begin{aligned} V_2 &= I_1 \cdot Z_C \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{V_2}{Z_C} \\ V_1 &= Z_A I_1 + Z_C I_2 \\ &= (Z_A + Z_C) \frac{V_2}{Z_C} \end{aligned}$$

- si ha $I_1 = V_2 / Z_C$ da cui $C = 1 / Z_C$ $V_1 = Z_A I_1 + Z_C I_1$
- inoltre $V_1 = (Z_A + Z_C) I_1 = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C} V_2$, quindi $A = \frac{Z_A}{Z_C} + 1$
- i parametri

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad \text{applied}$$

si trovano facendo riferimento al seguente circuito



- si ha $V_C = -Z_B I_2$ e $I_C = V_C / Z_C = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2$;

$$I_1 = I_C - I_2 = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2 - I_2 \text{ e quindi } D = 1 + \frac{Z_B}{Z_C}$$

- infine $V_1 = Z_A I_1 - Z_B I_2 = -\frac{Z_A Z_B}{Z_C} I_2 - Z_A I_2 - Z_B I_2$ e perciò

$$B = Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C}$$

$$V_1 = Z_A I_1 - Z_B \cdot I_2$$

VI sulla uggia grande,
o anche piccola

appli 6 I₂
trovo E_1 e E_2
posso risolvere
i nodi
e ottengo
il modo

$$V_C = -Z_B I_2 + 0$$

$$I_C = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{-Z_B I_2}{Z_C}$$

$$\bar{I}_1 = I_C - \bar{I}_2$$

ho scritto $\mathbb{Z}_7$ in verde
e perciò $x \in \mathbb{Z}_7$

- riassumendo

solo Bipoli all'interno, e
reciproca,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{Z_A}{Z_C} + 1 & Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C} \\ \frac{1}{Z_C} & 1 + \frac{Z_B}{Z_C} \end{pmatrix}$$

Det = 1

- e' facile verificare che $\det \mathbf{T} = 1$ e quindi la rete e' reciproca.

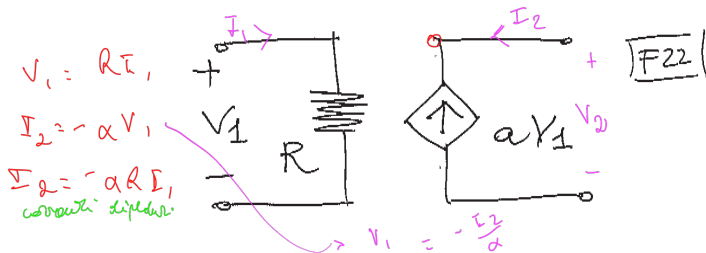
Rete di Soli Bipol.

• $z \Rightarrow V_i = Z_i I_i$

$g \Rightarrow V_1, I_2$ case

Se le componenti sono dip. non z
e sono dip, non g

• **Esempio.** Determinare, se esistono, i parametri z, y, h, g e **TUTTI** ABCD della seguente rete due porte in figura



2o set di parametri non esiste.

① Scrivo le relazioni rete

$$V_1 = RI_1$$

$$I_2 = -aV_1 = -aRI_1$$

→ I_1 e I_2 dip. non z

V_1, I_2 dip. e non z

• si ha $v_1 = Ri_1$ e $i_2 = -av_1 = -aRI_1$; quindi i_1 e i_2 sono dipendenti e non esistono gli z ; anche v_1 e i_2 sono dipendenti, per cui non esistono gli g

Per trovare le altre relaz. ricorrendo a y e h

• gli altri parametri esistono e sono dati da

I_1, I_2 in f. di V_1 e V_2

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} R & 0 \\ -aR & 0 \end{pmatrix}$$

V_1, V_2 indep.

$$I_1 = \frac{V_1}{R} + 0V_2$$

$$I_2 = -aV_1 + 0V_2$$

non reciproca

$$V_1 = RI_1 + 0V_2$$

$$I_2 = -aRI_1 + 0V_2$$

non reciproca
Rete di non soli Bipoli.

V_1 e I_1 in f. di V_2 e I_2

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{aR} \\ 0 & \frac{1}{aR} \end{pmatrix}$$

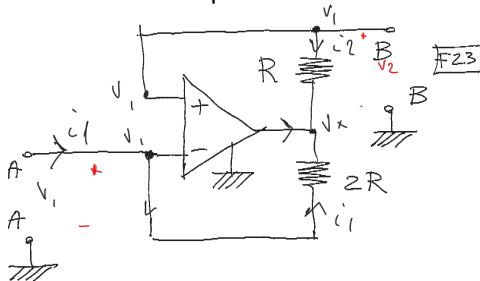
$$I_1 = 0V_2 + \frac{1}{aR}(-I_2)$$

$$V_1 = RI_1 = \frac{1}{a}(-I_2)$$

$$V_1 = 0V_2 + \frac{1}{a}(-I_2)$$

• **Esempio.** Determinare i parametri z , y e ABCD della rete due porte AA-BB. Verificare la reciprocita' della rete

$$V_1 = V_2$$

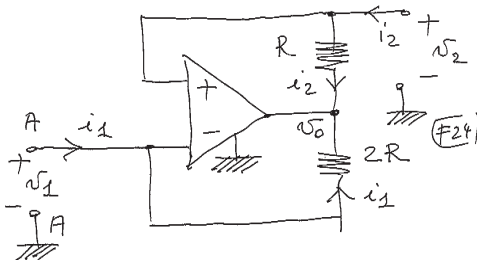


$$\frac{V_1 - V_x}{2R} = i_1$$

$$i_2 = \frac{V_1 - V_x}{R}$$

$$V_1 = 1 \text{ V}$$

$$I_1 = 0 - \frac{1}{2}$$



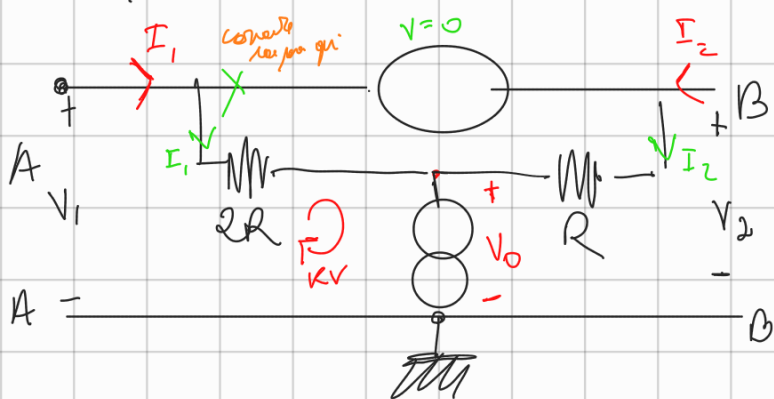
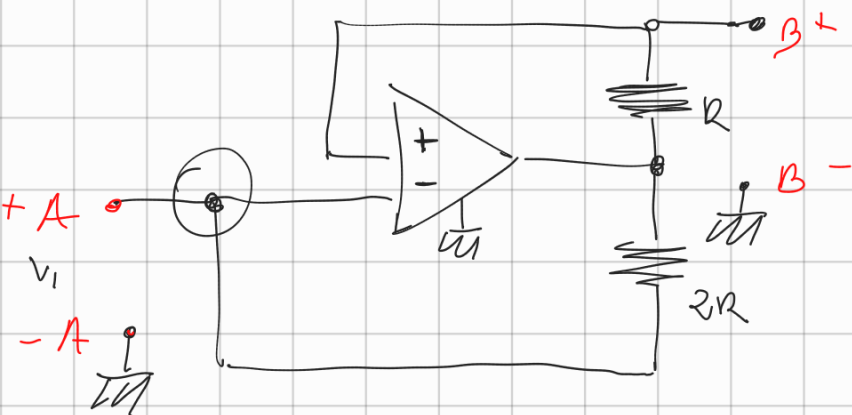
$$V_1 = 2Ri_1 + V_x$$

$$i_2 = \frac{2Ri_1 + V_x - V_x}{R}$$

$$i_2 = 2i_1$$

NON E' 2

• si ha $v_1 = v_2$; inoltre, $v_1 = 2Ri_1 + v_0$, $v_2 = Ri_2 + v_0$, quindi -
 $i_1 = i_2/2$; non esistono perciò né gli z né gli y



• Param. ABCD

V_1, I_1 in funzione di V_2, I_2

$$V_1 = V_2 \quad A = 1, B = 0$$

$$I_1 = \frac{I_2}{2}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

• $V_1 = V_2$ non è possibile γ

$$V_1 = 2R I_1 + V_0$$

$$V_2 = R I_2 + V_0$$

ma essendo $V_1 = V_2$

$$2R I_1 = R I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = 2 I_1$$

INVERTITORE
CORRENTE

Conversione e Tensione dip.

non è possibile γ e z .

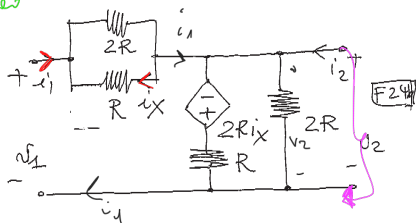
- esistono gli ABCD e si ha

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte non e' reciproca

Esempio. Determinare i parametri $z_{11}, z_{21}, h_{11}, h_{21}$ della rete

funzione di portine, ragionier

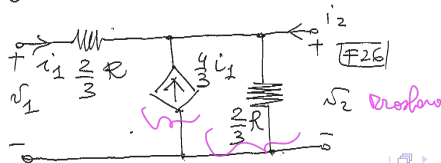
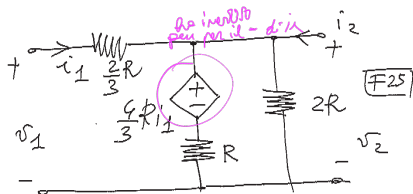


$$i_x = -i_1 \frac{1}{2} = \frac{-i_1 \frac{1}{2}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{-i_1 \frac{1}{2}}{\frac{1+2}{2R}}$$

$$= -\frac{2i_1}{3}$$

$$i_x =$$

• notiamo che $i_x = -\frac{2}{3}i_1$ e che la rete due porte puo' essere trasformata in questo modo



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \parallel I_2 = 0$$

impedenza di trasferimento da 1 a 2

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \parallel I_2 = 0$$

La potenza si conserva e' P_1

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \parallel V_2 = 0$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \parallel V_2 = 0$$

potenza indep. e' I_1

- I_1 e' la grandezza indep. in questi casi $\Rightarrow$ modello circuito
scrivo i_x in funzione di I_1

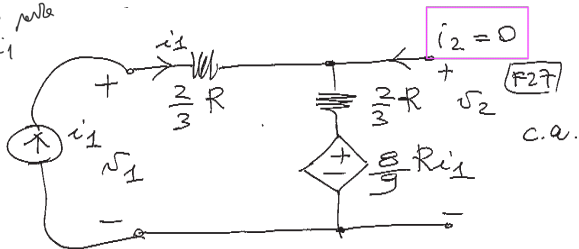
$$\boxed{i_x} = \frac{-i_1 \cdot \frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = -\frac{2}{3} i_1 \quad \text{Partit. corrente}$$

ho trovato i_x , vedo R in parallelo.

Applico una definizione operativa

ora applico la definizione per i portali

impedenza porta 1
per i_1 lascio porta
2 aperta, applico i_1



- alimentiamo con i_1 e lasciamo la porta 2 a circuito aperto; allora $v_1 = \frac{4}{3}Ri_1 + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

$$\frac{2}{3}Ri_1 + \frac{2}{3}Ri_1$$

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{20}{9}R$$

impedenza alla porta 1

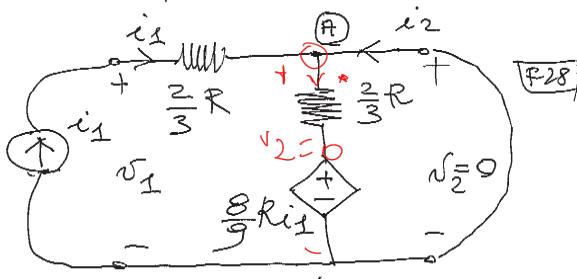
- inoltre $v_2 = \frac{2}{3}Ri_1 + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

v_2 tensione trasferita

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{14}{9}R$$

applico i_1 solo alla porta 1, devo trovare v_2

Per parametri h



- adesso alimentiamo con i_1 e chiudiamo la porta 2 in corto circuito; si ha evidentemente $v_2 = 0$

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{2}{3}R \quad V_1 = 2Ri_1 + 0 \text{ cortocircuito}$$

inoltre, dalla KI al nodo A otteniamo $i_2 = -\frac{7}{3}i_1$, quindi

$$\frac{8}{9}Rv_1$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} = -\frac{7}{3}$$

Adimensionale
conversione trasmission

$$i_2 = -i_1 + i^*$$

$$i_2 = -i_1 - \frac{8}{9}Ri_1 / \frac{2}{3}R$$

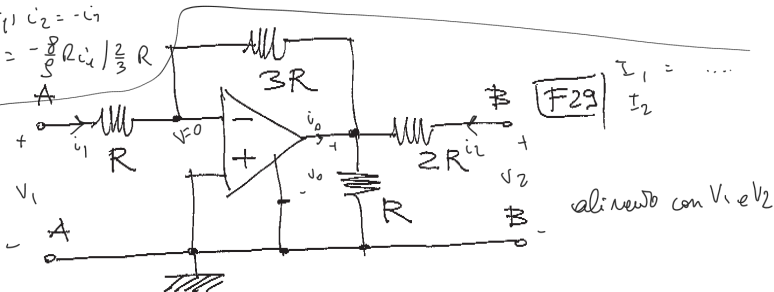
uso PSC per i^*

Spago
PSE

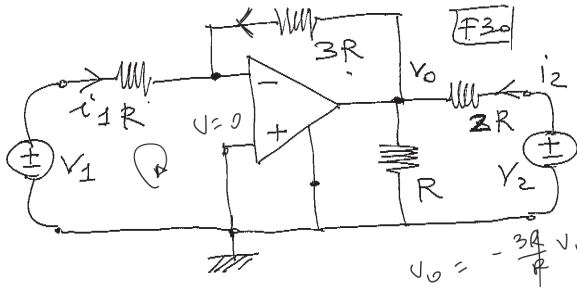
• **Esempio.** Determinare i parametri y della rete due porte AA-BB

Se sup $\frac{0}{3} i_1, i_2 = -i_1$

se sup $i_2 = -\frac{8}{5} R i_1 / \frac{2}{3} R$



allineato con V_1 e V_2



$$V_0 = -\frac{3R}{R} V_1$$

$$= -3V_i$$

è un amplif. invertente

- si ha

$$i_1 = \frac{v_1}{R}$$

- inoltre

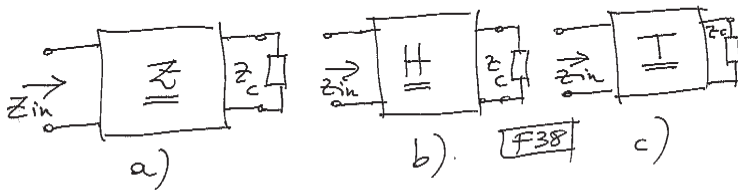
$$i_2 = \frac{v_2 - v_0}{2R} = \frac{v_2 + 3v_1}{2R} = \frac{3}{2R}v_1 + \frac{1}{2R}v_2$$

- quindi

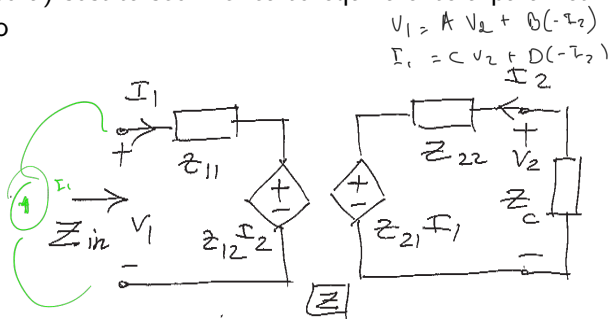
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{3}{2R} & \frac{1}{2R} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte non e' reciproca.

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo nei tre casi indicati in figura



• nel caso a) sostituisco il circuito equivalente a parametri z ottenendo



- si ha $I_2 = -z_{21}I_1/(z_{22} + z_c)$ e da KV alla maglia di sinistra

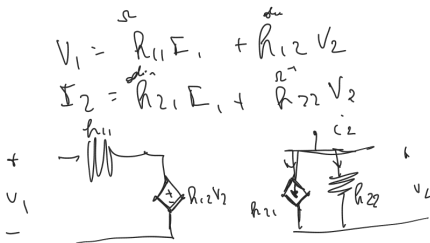
$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1 - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}I_1$$

quindi

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}$$

- nel caso b) si puo' procedere in modo analogo dimostrando che

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22} + y_c}$$



- consideriamo il caso c); si ha

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

e quindi

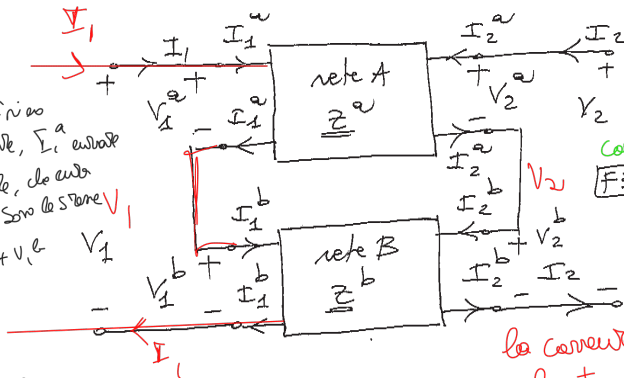
$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A \frac{V_2}{-I_2} + B}{C \frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{Az_c + B}{Cz_c + D}.$$

Bipoli o in serie o parallelo

- Collegamento serie fra reti due porte
- E' il collegamento mostrato in figura

Per rete a 2 porte ho altre configuraz.
serie o parallele

Per definizione
di rete 2 porte, Σ^a uscita
 $= I_1^a$ uscente, che entra
in Σ^b ... Sono la stessa V_1
e $V_1 = V_1^a + V_1^b$



corrente e' la stessa
[F31]

la corrente e' la stessa
e la tensione e' la somma
delle tensioni

- si ha

Per commessione Serie, si sommano
le matrici parametri Z

$$Z = Z^a + Z^b \text{ si sommano le Matrici}$$

- verifica: si ha $I_1 = I_1^a = I_1^b$; $V_1 = V_1^a + V_1^b$; inoltre $I_2 = I_2^a = I_2^b$;
 $V_2 = V_2^a + V_2^b$; allora

concolto: a continuato
per def. di parametri

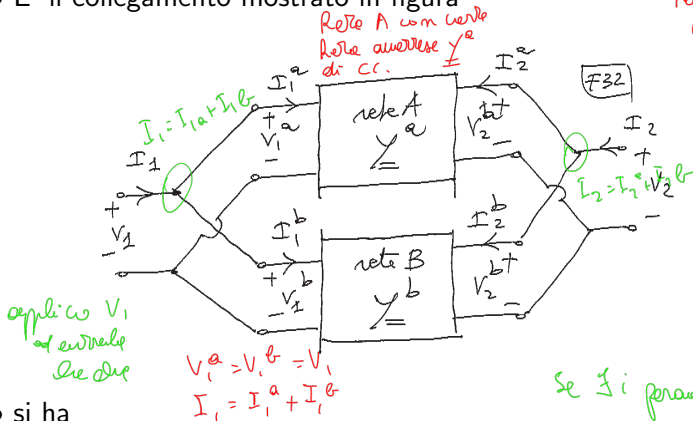
$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a + V_1^b = z_{11}^a I_1^a + z_{12}^a I_2^a + z_{11}^b I_1^b + z_{12}^b I_2^b \\ &= (z_{11}^a + z_{11}^b) I_1 + (z_{12}^a + z_{12}^b) I_2 \end{aligned}$$

ma si vede che
le correnti sono
le stesse

- quindi $z_{11} = z_{11}^a + z_{11}^b$, $z_{12} = z_{12}^a + z_{12}^b$
 - in maniera simile si dimostra che $z_{21} = z_{21}^a + z_{21}^b$, $z_{22} = z_{22}^a + z_{22}^b$
- z_{21} della rete complessiva

• Collegamento parallelo fra reti due porte alla porta 1 e 2

- E' il collegamento mostrato in figura



ho due livelli
cerchiamo in
parallelo, soggetti
alla stessa V ,
t.c. la corrente
è la somma
delle singole
correnti.

- si ha

le porte sono soggette alla
medesima tensione

$Y = Y^a + Y^b$

Si sommano le matrici

Trappola Rete in Serie

$$I_1 = I_1^a + I_1^b \quad I_1^a = Y_{11}^a V_1 + Y_{12}^a V_2$$

$$I_2^a = Y_{21}^a V_1 + Y_{22}^a V_2$$

$$I_1 = (Y_{11}^a + Y_{11}^b) V_1 + (Y_{12}^a + Y_{12}^b) V_2$$

Provare a collegare in Serie
come Foto due Reli a T

e provare a trovare i valori

$\underline{\underline{Z}}$ due delle essere la somma delle
Matrici

è diretto a T somma delle R

$$\underline{\underline{Z}}_u = Z_{1a} + Z_{1b} = 4R$$

Reli A

V_1

V_2

Reli B

V_1

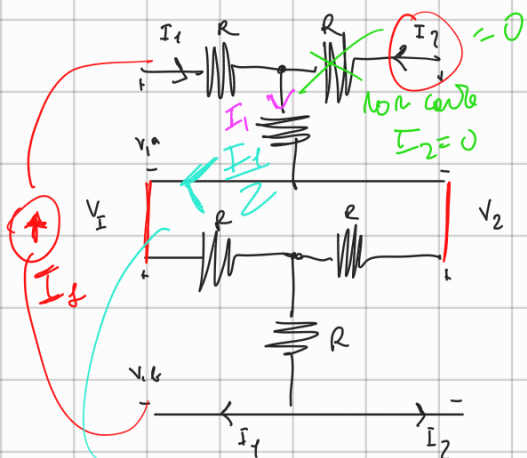
I_1

I_2

Def. operativa

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \parallel I_2 = 0$$

lasciamo $I_2 = 0$, e abbiamo con I_1
la porta 1



$$Z_{11} = R + R + \frac{R}{2} + R = \dots$$

Non si può applicare il Teorema...
perché?

NON È UNA RETE 2 porte !!

Su porta 1 esce $\frac{I_1}{2}$

la Rete è un quadripolo,
non rete a 2 porte

senza usare un trasformatore...

come I_1 , non è
rete a 2 porte così

- verifica: si ha $V_1 = V_1^a = V_1^b$; $I_1 = I_1^a + I_1^b$; inoltre $V_2 = V_2^a = V_2^b$; $I_2 = I_2^a + I_2^b$; allora

*Verifica e la storia.
Corrente e tensione comuni.*

$$I_1 = I_1^a + I_1^b \Rightarrow y_{11}^a V_1^a + y_{12}^a V_2^a + y_{11}^b V_1^b + y_{12}^b V_2^b$$

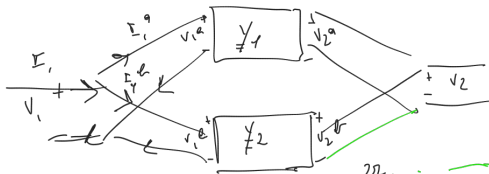
$$= (y_{11}^a + y_{11}^b) V_1 + (y_{12}^a + y_{12}^b) V_2$$

formella y_{11} rete capolinea

$$V_{1a} = V_{2b}$$

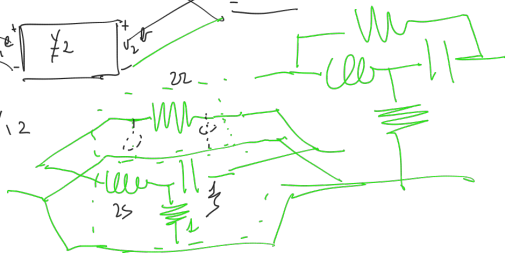
quindi $y_{11} = y_{11}^a + y_{11}^b$, $y_{12} = y_{12}^a + y_{12}^b$

- in maniera simile si dimostra che $y_{21} = y_{21}^a + y_{21}^b$, $y_{22} = y_{22}^a + y_{22}^b$



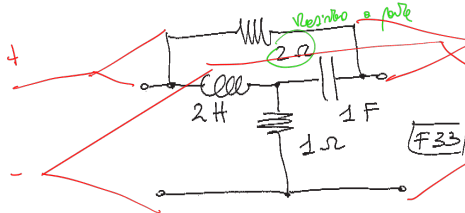
$$y_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} V_{1a} = V_{12}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 2s+1 & 1 \\ 1 & \frac{s}{2}+1 \end{pmatrix}$$



• **Esempio.** Determinare i parametri y della rete a 'T pontato'

E' una rete a 2 porte

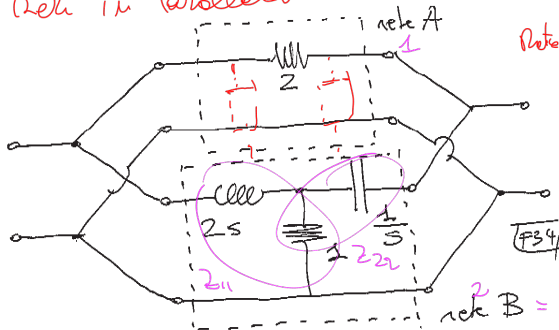


El. con memoria, uso Laplace.
Le C scriverli

• scomponiamo la rete in due reti in parallelo

il ~~parallelo~~ e' voluto

2 reti in parallelo



rete π in cui nessun
overturn

rete B = rete a T

- si ha $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b$ con

$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- inoltre

$$\mathbf{Z}^b = \begin{pmatrix} 2s+1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{s}+1 \end{pmatrix}$$

e' una rete a T, dove primo
Z e poi inverso medio

$$Z_{11} = 2s+1$$

$$Z_{22} = \frac{1}{s}+1$$

e

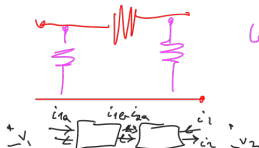
$$\mathbf{Y}^b = [\mathbf{Z}^b]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{s}+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Z}^b}$$

$Z_{12} = Z_{21}$ imped. che
accoppia

$$\frac{1}{2} \Omega^{-1}$$

2x2, invertibile, e con il segno

caso particolare di circuito a T, con 2 condutture $\rightarrow 0$
forse circuito a T



$$Y_{11} = \frac{1}{2}$$

$$Y_{12} = -Y_{21} = -\frac{1}{2}$$

$$V_{1a} = V_{2a} \quad i_{1b} = -i_{2b}$$

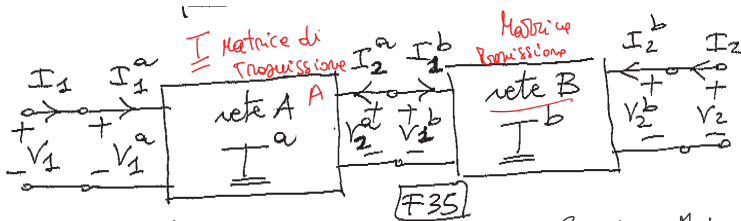
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{pmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{pmatrix} V_{2a} \\ I_{2a} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \begin{pmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Collegamento in cascata fra reti due porte

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$



Matrice Trasmissione Complessiva: Prodotto Matrice Transmiss

- le variabili di porta soddisfano a: $V_1 = V_1^a$, $I_1 = I_1^a$; $V_2^a = V_1^b$,

$$I_2^a = -I_1^b, V_2^b = V_2, I_2^b = I_2$$

Se T^a e T^b , T complessiva
e il risultato

- allora si ha

nel caso
trasmissibile -
ho introdotto segni -
per trattare il
caso di cascata

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^a \\ I_1^a \end{pmatrix} = T^a \begin{pmatrix} V_2^a \\ -I_2^a \end{pmatrix}$$

$$= T^a \begin{pmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{pmatrix} = T^a T^b \begin{pmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{pmatrix}$$

$-I_2^a = I_1^b$

$$= T^a T^b \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

prodotto non
commutativo

V_1, I_1 in funzione di V_2 e $-I_2$

$$\begin{pmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{pmatrix} = T^b \begin{pmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{pmatrix}$$

- quindi

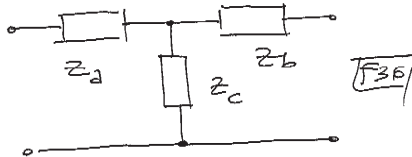
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

cioe' la matrice di trasmissione di due reti in cascata e' pari al prodotto delle matrici di trasmissione delle singole reti

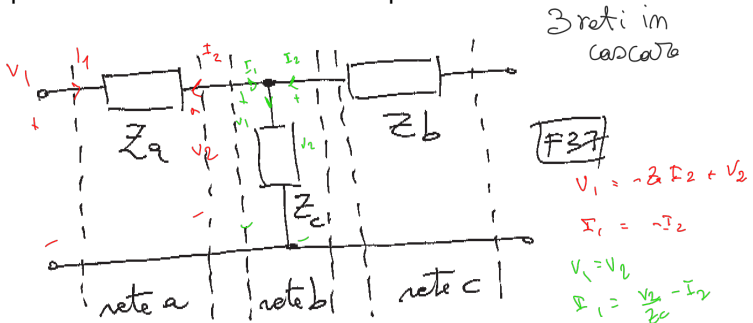
in cascata, se questa ultima coppia di morsetti
e' una porta, dove anche la prima e' una porta?

- Se Reti A e B sono reciproche
($\det(T_{a/b}) = 1$) , allora anche la rete
complessiva in cascata
 $\det(T_a) \cdot \det(T_b) = 1$

- **Esempio.** Determinare la matrice di trasmissione della rete due porte a T in figura *Senza def. operativa, ma scomponendo la rete in cascata*



- scomponiamo la rete in tre reti due porte in cascata



- allora

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b) \mathbf{T}^c$$

Prodotto Matrici non è
comutativo, $\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b$ e poi $\mathbf{T}^c$

con

$$\underbrace{\mathbf{T}^a = \begin{pmatrix} 1 & Z_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Det } 1}; \quad \underbrace{\mathbf{T}^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{il suo} \\ \text{inverso} \\ \text{Det } 1}}; \quad \underbrace{\mathbf{T}^b = \begin{pmatrix} 1 & Z_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Det } 1}$$

$\rightarrow Z_{12}$ è ipotesi

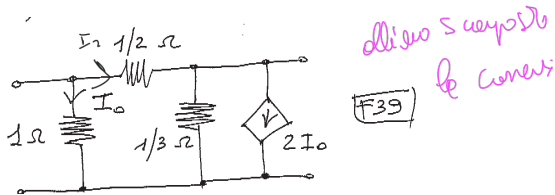
Reciproca

Casuale di Reti Reciproche è sempre Reciproca

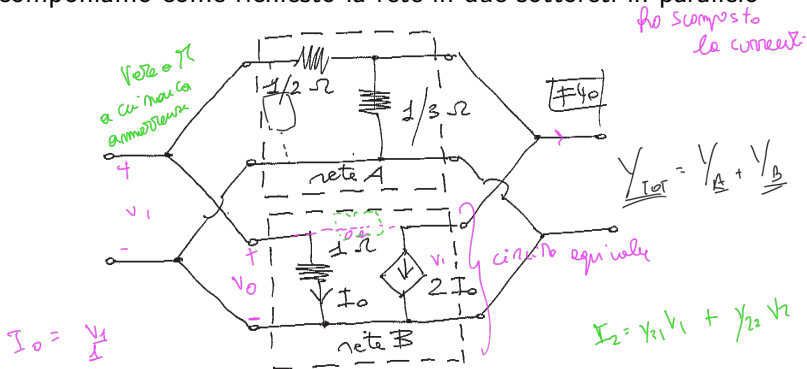
$\Rightarrow$ Det Prodotto = Prodotto Determinanti.

Quale $\mathbf{T}$ avrà $\text{det} = 1$

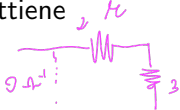
Esempio. Determinare i parametri y della rete due porte in figura pensandola come parallelo fra due reti due porte



- scomponiamo come richiesto la rete in due sottoreti in parallelo



- si ottiene



$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

caso particolare rete π
Y

- inoltre per la rete in basso e' facile vedere che si ha

$$\mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c. equivalente confronto



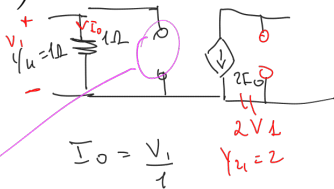
- allora

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- la rete due porte e' non reciproca.

non reciproca' dovuta a $Y_{11} + Y_{22}$

non sym. perche' c'e' generatore controllato



$$I_0 = \frac{V_1}{1\Omega}$$

$$Y_{21} = 2$$

$$Y_{21} = 0$$

no retroaz. da parte
la parte 1

$$I_0 = \frac{V_1}{1}$$

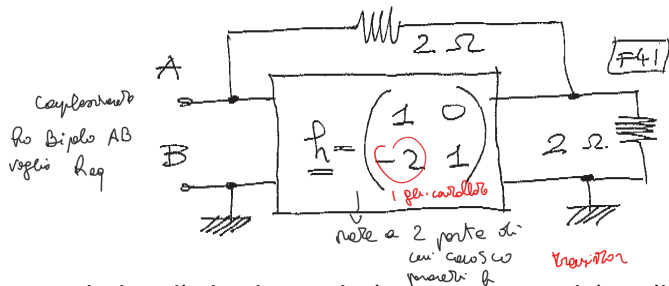
$$Y_{21} = 2$$

$$2I_0 = 2I_1$$

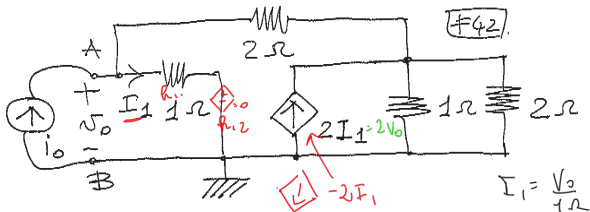
$$Y_{21} = 2\Omega^{-1}$$

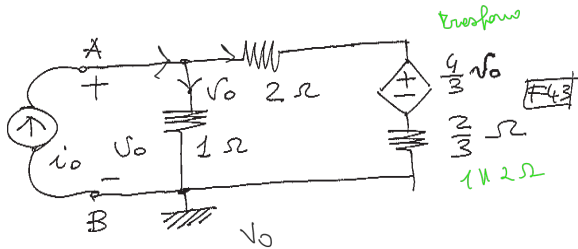
$$Y_{22} = 0 \dots c.a$$

Esempio. Determinare la resistenza equivalente del bipolo AB



• sostituisco il circuito equivalente a parametri h e alimento il bipolo con un generatore di corrente i_0 ; si ha $i_1 = v_0$, quindi trasformando ottengo *corrente I_1 e' della rete 2 porte. non i_0*





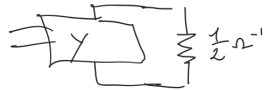
- per Millmann

$$v_0 = \frac{i_0 + \frac{4}{3} \frac{3}{8} v_0}{1 + \frac{3}{8}}$$

$$2 + \frac{3}{3} = \frac{8}{3}$$

- risolvendo ottengo

$$\frac{7}{11} v_0 = \frac{8}{11} I_0$$



Conduttore equiv. = $\frac{1}{2} \text{ ohm}^{-1}$

$$Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_C} = G_{eq} \quad \text{Dopo pl. } Y$$

Trasformo, devo usare il.

cui la pl. Y, che alimenta 2 ohm
Conduttore equiv. =

e quindi

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = \frac{8}{7} \text{ Ohm}$$

oppure vedo parte sx in parallelo 2 ohm e parte
sotto in serie, dopo H, poi pl. Y