

- Richiami sui numeri complessi 3 Forme di un numero complesso
- Consideriamo il numero complesso espresso in forma algebrica

FORMA ALGEBRAICA

NOTAZIONE

$$\bar{z} = x + jy$$

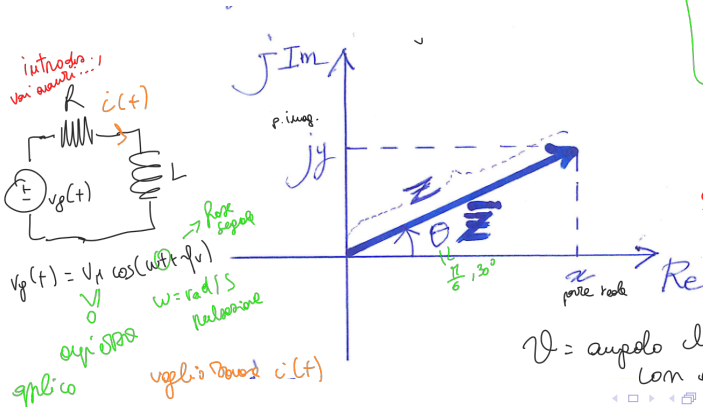
p. reale
parte imag.

$\bar{z}$ ← numero complesso

con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \text{Re}[\bar{z}]$ parte reale, $y = \text{Im}[\bar{z}]$ parte immaginaria, e j unità immaginaria ($j^2 = -1$) la quale proprietà i è riservata per la corrente!

• $\bar{z}$ può essere visto come un punto (o vettore) del piano complesso

per seni e coseni
non posso usare Fourier
perché sono segnali ad
energia infinita...
O.T.



Stesso numero può
essere individuato
da Modulo e
Fase

θ = angolo del vettore forma
con asse delle X

numero complesso

UNIVOCAMENTE

NOTAZ. LETTERA
MAIUSCOLA

lunghezza segmento.

• $\bar{z}$ può essere individuato^{UNIVOCAMENTE} tramite il suo modulo $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il suo argomento θ ; gli argomenti θ si misurano a partire dall'asse x , a cui si attribuisce $\theta = 0^\circ$ e^{l'angolo che il vettore forma con l'asse x} ruotando in senso positivo antiorario

• il verso positivo antiorario e' detto anche verso degli anticipi; il verso negativo orario e' detto verso dei ritardi

• se $\bar{z} \neq 0$ si ha *allora posso determinare un angolo*

ruoto nel senso degli anticipi
se $\bar{z} \neq 0$ posso univ. dell'angolo a multipli di 2π

FORMULE
DI PASSAGGIO

$$\cos \theta = \frac{\textcircled{x} \text{ parte reale}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{\textcircled{y} \text{ parte imag.}}{\sqrt{x^2 + y^2} \text{ modulo}}$$

• se $x \neq 0$
p. reale $\neq 0$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

• inversamente
dato modulo e dato angolo

$$x = Z \cos \theta; \quad y = Z \sin \theta$$

modulo *angolo*

formule di
Euler

angolo
Rotazione verso positivo = Verso degli anticipi
Se Ruoto verso negativo = Verso dei ritardi
angolo

$$|z| \cos \varphi = x \quad |z| \sin \varphi = y \quad |z| e^{j\varphi} = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

- forma trigonometrica

$$\bar{z} = \overset{\text{modulo}}{Z}(\cos \theta + j \sin \theta)$$

- dato che (identità di Eulero) $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ otteniamo la forma esponenziale

$$\bar{z} = Z \overset{\text{argomento}}{e^{j\theta}}$$

Modulo

Forma esponenziale
di un numero complesso

θ = angolo che vettore forma con l'asse delle x...

FORMULA generale per θ

Formula
generale

$$\theta = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \quad y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \quad y > 0 \end{cases}$$

+ π all'arctg se
 $\text{Re}[\bar{z}] < 0$

nel 2° e 3° quadrante
aggiungo π

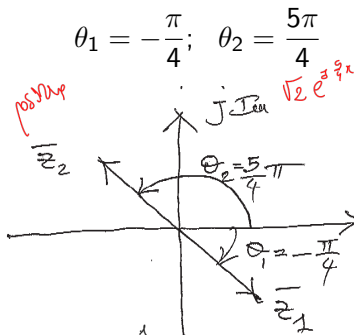
TAPPOLO A.

• E' necessario fare attenzione al calcolo degli argomenti quando $x = \text{Re}[\bar{z}] < 0$!!! Proviamo a scrivere in forma esponenziale i due numeri complessi $\bar{z}_1 = 1 - j$, $\bar{z}_2 = -1 + j$. Si ha $Z_1 = Z_2 = \sqrt{2}$; inoltre

$$\theta_1 = \arctan(-1) = -\pi/4; \quad \theta_2 = \arctan(-1) = -\pi/4!!!!$$

!! siamo così in assurdo; per non sbagliare conviene disegnare i numeri nel piano complesso; si vede allora che

arctan va bene solo se parte reale > 0 positive



arctan funziona solo se sono nel 1° e 4° quadrante $-\pi/2, \pi/2$ nel 2° e 3° non funziona

Se p. reale negativa, devo aggiungere π per ottenere arg. giusto

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{se } x > 0$$

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi \quad \text{se } x < 0$$

se $x = 0$ $y > 0$, $\frac{\pi}{2}$
 $x = 0$ $y < 0$, $-\frac{\pi}{2}$

Funzioni sinusoidali (dominio del tempo)

Descrivono la f sinusoidale nel dominio del tempo
Funs. del tempo del tipo

- Per senoide si intende una funzione del tipo

AMPIEZZA = a di u
FASE = Radianti
PULSAZ. $\frac{1}{\text{sec}}$

$t > 0$

$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$ ← φ variabile indep e il tempo
ampiezza senoide della sinusoide

dove $E_M (\geq 0)$ e' l'ampiezza; $\omega (\geq 0)$ e' la pulsazione (in rad/sec), φ e' la fase (in radianti); la frequenza (in Hz) e' data da

T , periodo in sec.

$$f = \frac{1}{T} \text{ Hz Frequenza}$$

T = periodo della sinusoide secondi

e T Periodo, intervallo di tempo tra due picchi della sinusoide

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/sec]}$$



dove T (in sec) e' il periodo della sinusoide

affinché faccia un ciclo completo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

[dopo T secondi il segnale torna allo stesso valore

⇒ Frequenza = numero periodi dell'onda in un secondo
Se so ω so f , conosco il periodo

Rappresentazione di sinusoidi con fasori (dominio di fasori)

- Alla sinusoide $e(t)$ si associa il numero complesso in forma esponenziale

associato alla fase
sinusoide il numero
complesso in forma exp.

NOTA $\vec{E} = E_M e^{j\varphi}$

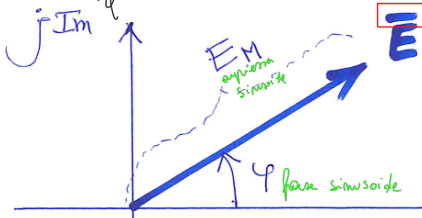
non tiene conto di ω

$$\begin{cases} \text{Modulo } E_M = \text{ampiezza sinusoide} \\ \varphi = \text{fase sinusoide} \end{cases}$$

detto fasore associato a $e(t)$

- notare che il modulo del fasore coincide con l'ampiezza della sinusoide; l'argomento del fasore coincide con la fase della sinusoide; il fasore non contiene l'informazione sulla pulsazione della sinusoide

MODULO = AMPIEZZA SINUS.
 φ = FASE SINUSOIDALE



ω non serve perché
è la stessa in tutti
i la segue a parte. Se analizziamo
in un istante tutti le tensioni o
correnti sono alla stessa ω

- Ad una sinusoide corrisponde un punto (vettore) del piano complesso

Fasore non
tiene conto
della pulsazione.

$\Rightarrow$ Ad ogni sinusoide corrisponde un punto del piano complesso

Piano complesso come Piano Fasori

sinusoidi e fasori sono in corrispondenza biunivoca

- ad ogni sinusoida corrisponde il fasore $\bar{E}$ e quindi un punto del piano complesso inteso come piano dei fasori
- viceversa, assegnato $\bar{E}$ e ω , vi corrisponde una unica sinusoida a pulsazione ω che possiamo ottenere tramite la formula

FORMULA
ANTITRASFORMAZIONE

$$e(t) = \text{Re} [\bar{E} e^{j\omega t}]$$

Formula antitrasmformata fasori

• verifica: si ha

Fasore
vettore rotante

=> Sinusoidi e vettori piano complesso sono in corrispondenza biunivoca
Formula eulero

$$\text{Re} [\bar{E} e^{j\omega t}] = \text{Re} [E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \text{Re} [E_M e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

$$\text{Re} [E_M (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))] = E_M \cos(\omega t + \varphi) = e(t)$$

e me prendo la parte reale

• le due relazioni ottenute sono una coppia trasformata e antitrasformata (tecnicamente e' detta trasformata di Steinmetz)

=> Sinusoidi e Fasori sono in corrispondenza biunivoca. posso fare le operazioni in uno dei due domini

Prendo vettore, se lo moltiplico

- interpretazione geometrica; l'operatore

$e^{j\omega t}$

vettore rotante
che gira attorno all'
origine con velocità
angolare ω e
modulo
costante

$$\vec{E} \times e^{j\omega t}$$

rappresenta una rotazione di un angolo ωt in senso positivo
(antiorario); infatti Sto sommando gli angoli

$$\vec{E} \times e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = E_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- allora

Forse: vettore fisso
2) originario e' φ $t=0$
poi ω aumenta linearmente
di t

Prendo forse, lo faccio girare nel piano a velocità angolare ω
e' un vettore di modulo costante E_M che ruota intorno all'origine di verso
con velocità angolare ω in senso positivo antiorario (vettore di t
rotante)

Prendendo la parte Reale, faccio la
Proiezione.

- infine, l'operatore

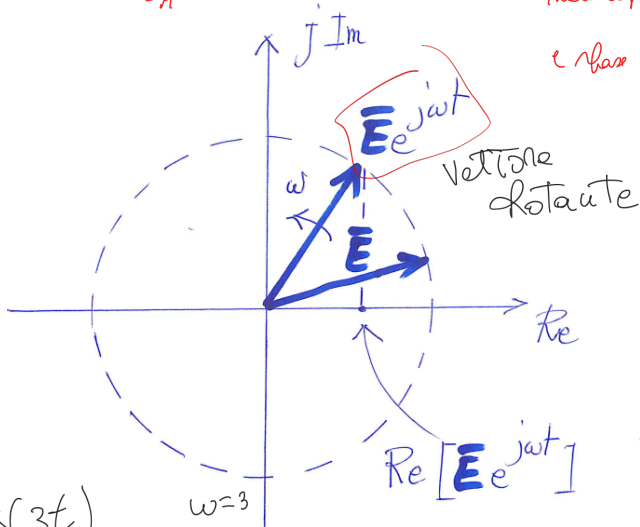
$$\text{Re} [\vec{E} \times e^{j\omega t}] \Rightarrow \text{Proiezione sull'asse reale}$$

e' l'operatore di proiezione sull'asse reale

in senso
positivo antiorario

$$\vec{E}_n e^{j\psi_n} \cdot e^{j\omega t} = E_n e^{j(\psi_n + \omega t)}$$

meno complesso in modulo E_n
e fase $\psi_n + \omega t$



$$4 \cos(3t)$$

$$4 e^{j\psi_0}$$

$$\omega = 3$$

$\rightarrow$

$$e(t) = 4 \sin(2t)$$

$$= 4 \cos(2t - \pi/2)$$

$$4 e^{-j\pi/2} = -4j$$

seno $\rightarrow$
in coseno
in ritardo
di $-\pi/2$



$$4 e^{j0} = 4$$

• Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 4 \cos(3t)$ e interpretare graficamente

• si ha $E_M = 4$ e $\varphi = 0$, quindi $\bar{E} = 4e^{j0} = 4$

$$E_M = 3 \quad \varphi = 0$$

$$\bar{E} = 3e^{j0} = 3$$

$$3 \cos(3t)$$

fasore corrispondente?

Torna geometricamente?

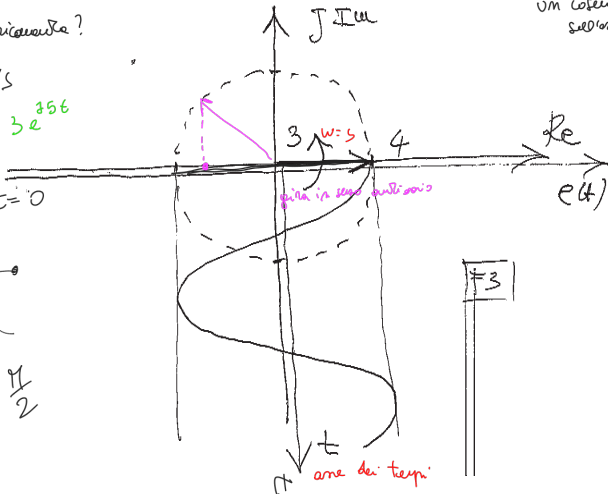
$$\omega = 3 \text{ rad/s}$$

$$3e^{j0} e^{j3t} = 3e^{j3t}$$

$$\bar{E}(t) = 3 \quad t=0$$



$$\omega = \frac{\pi}{2}$$



un coseno è un fasore
sezione reale

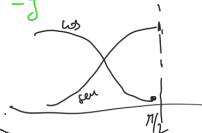
$$3$$

$$y_{\text{sen}}(2t)$$

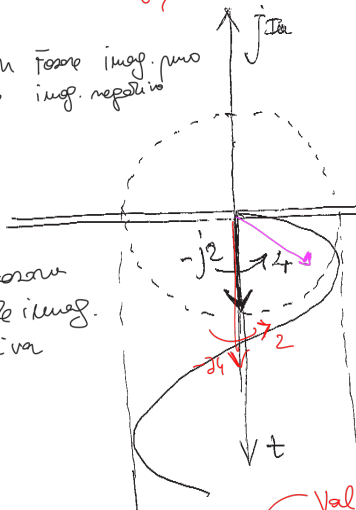
$$2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$E_M = 4 \quad \varphi = -\pi/2$$

- Se o há um Fosfo. íng. pos
com parte íng. negativo

$$\bar{E} = \underbrace{4e^{\frac{\sigma - \mu}{2}}}_{-\sigma} = -\sigma$$



Seu è un Fossor
però, con forte immag.
negativa



74

$$2 \cos(3t - \pi/4)$$

$$2e^{-\pi/4}$$

Vale linearità e unicità

• Calcolo Fasoriale

proprietà

Stessa pulsazione

• Unicità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω ; si ha $e_1(t) = e_2(t)$ per ogni t se e solo se $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$

la fase

- Linearità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω e $a, b \in \mathbb{R}$; allora $ae_1(t) + be_2(t)$ è una sinusoidale a pulsazione ω con fasore $a\bar{\mathbf{E}}_1 + b\bar{\mathbf{E}}_2$ *combinazione lineare sinusoidale*
- Regola di derivazione: sia $e(t)$ una sinusoide a pulsazione ω con fasore $\bar{\mathbf{E}}$; allora $de(t)/dt$ è ancora una sinusoide a pulsazione ω con fasore $j\omega\bar{\mathbf{E}}$; quindi *parimenti si combinano i fasori associati*

deriv. diff. nel

*dominio del tempo
oper. algebriche nell'altro
dominio*

derivata sinusoide

$$\frac{de(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\bar{\mathbf{E}}$$

eq. diff. $\Rightarrow$ eq. algebriche

• questa importante regola implica che una operazione differenziale d/dt nel dominio del tempo si trasforma in una operazione algebrica $j\omega \times$ nel dominio di fasori; la regola è analoga a quella valida per la trasformata di Fourier

- verifica *SEM* *no deriva, solo*

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \text{Re} [\overbrace{\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}}^{e(t)}] \}$$

$$\stackrel{\text{scambiare}}{\text{operazione}} = \text{Re} \left[\frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) \right]$$

derivata campo complesso
segue stessa regola campo reale

è sempre una sinusoide
a pulsaz. ω

$$= \text{Re} [j\omega \bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \rightarrow e \text{ è una sinusoide a pulsaz. } \omega$$

e' una sinusoide a pulsaz. ω

- graficamente

$$j\omega \bar{\mathbf{E}} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

doce sta il fasore?
parte reale
espresso
velocità rotante

Rotazione di $\frac{\pi}{2}$

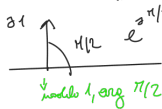
quindi il fasore $j\omega \bar{\mathbf{E}}$ di $de(t)/dt$ ha modulo pari a ωE_M e si ottiene ruotando in senso positivo antiorario di un angolo pari a $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ di $e(t)$

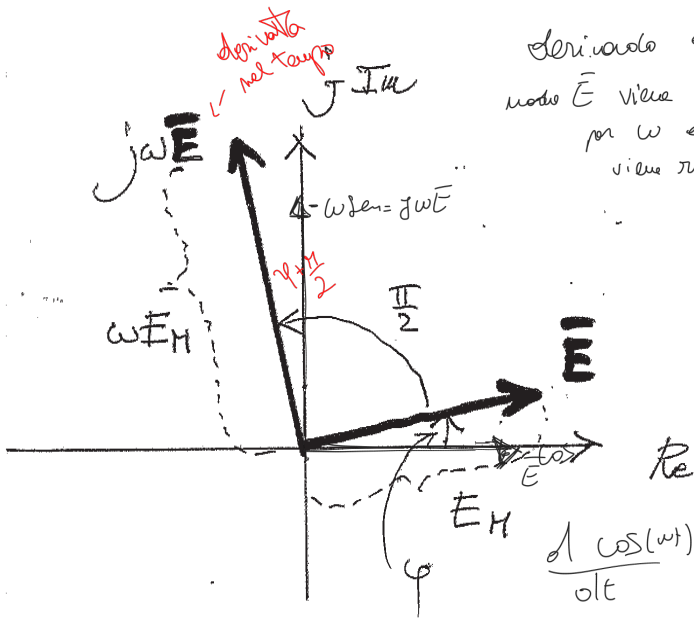
• moltiplicazione per j = rotazione per $\pi/2$ in senso pos. antiorario

$$\text{Modulo} = \omega \cdot E_M$$

$$\text{Argomento} = \varphi + \pi/2$$

$$j = e^{j\pi/2}$$





derivando $e(t)$,
 modo $\vec{E}$ viene moltiplicato
 per ω e per
 viene ruotato di 90°

$$\frac{d \cos(\omega t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t)$$

Analisi in regime sinusoidale

Lea. 3/04/23

Consideriamo il circuito RL con generatore ideale di tensione sinusoidale $v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$. Vogliamo trovare $i(t)$ per $t \geq 0$ assumendo $i(0) = i_0$

è un sistema dinamico
ASSEGNO LA CONDIZ. INIZIALE SULLE
CONDIZ. DI STATO

per trovare univocamente i , devo sapere la condiz. iniziale

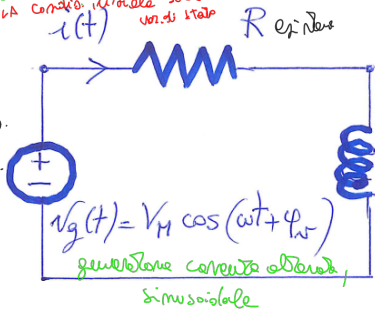
Provo a risolvere il circuito normalizzando

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

V_M dipende da v_g

φ_v fase dipende da v_g

Risultato



L induttanza

ω = pulsazione

φ_v = fase

applicando KV

KV: $v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$, quindi il circuito soddisfa alla equazione differenziale affine del primo ordine

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) \quad t \geq 0$$

$L \frac{di}{dt}$ è un problema di Cauchy.
 Ri è un problema di Cauchy.
 $V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ è un problema di Cauchy.

$v_g(t)$ Termine Forzante

è un problema di Cauchy.

ha soluzione unica per $t > 0$

con $i(0) = i_0$

- si ha per risolvere $i_{omag} =$ spingo il generatore, ottengo $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$

mi dà tutte le sol. possibili... impago la cond iniziale e cerco l'unica sol. con $K \in \mathbb{R}$ e $\tau = L/R$ (costante di tempo)

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-t/\tau} + i_{\text{part.affine}}(t)$$

integrale generale + integrale particolare
 ← dell'equazione omogenea dell'affine
 Sol. dell'equazione omogenea
 dipende dal circuito e dal tipo di eccitazione
 Costante di tempo
 Sol. dell'equazione affine

- verifichiamo a breve che possiamo scegliere

$$i_{\text{part.affine}}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

ω = stora frekvenser

$$\omega = \omega_{\text{generator}}$$

quindi

Risposta completa

$$i(t) = \underbrace{K e^{-t/\tau}}_{\substack{\text{parte transitoria} \\ \text{che si somma} \\ \text{a } 0 \text{ per } t \rightarrow \infty}} + \underbrace{I_M \cos(\omega t + \varphi_i)}_{\substack{\text{sol. stazionaria associata} \\ \text{comente sinusoidale alla stessa} \\ \text{frequenza del generatore}}}$$

- il primo termine (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$) è detto parte transitoria, mentre il secondo è detto risposta in regime permanente sinusoidale; in pratica, per $t \geq 4\tau$ si ha $\epsilon \gg \gamma$

CIRCUITO RAGGIUNGE
del TRANSITORIO un REGIME
SINUSOIDALE

$$i(t) \simeq I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Regime sinusoidale
sterzw

e quindi, esaurito il transitorio, la *corrente nel circuito è sinusoidale alla stessa pulsazione ω del generatore*

Trovo la parte di REGIME SINCRONICO nel DT

CIRCUITO
RAGGIUNGE UN
REGIME SINUSOIDALE

• determiniamo I_M e φ_i nel dominio del tempo; si ha integrale particolare dell'equazione
 usando metodi trigonometrica i.e. i affina = $I_M \cos(\omega t + \varphi)$

Sostituisco
 integrale particolare
 dell'equazione
 nel
 eq. differenziale

$$L \frac{di}{dt} + Ri = -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) + R I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

incognite I_M e φ_i
 cose i affina e
 uguale alla Tensione
 applicata

$$= I_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_i) - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi_i) \right]$$

trucco
moltiplico e divido

devo avere uguale
 i termini per arrivare
 alla tensione
 applicata al
 circuito

$a^2 + b^2 = 1$ a, b seno e
 coseno dello stesso
 angolo

$$= Z I_M [\cos \varphi_z \cos(\omega t + \varphi_i) - \sin \varphi_z \sin(\omega t + \varphi_i)]$$

$$= Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

ho scoperto
 con formula prostaferina (!)

$$\tan \varphi_z = \frac{\sin \varphi_z}{\cos \varphi_z} = \frac{\omega L}{R}$$

con

coseno soma angoli

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

impedenza del nostro circuito RL

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \sin \varphi_z = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ e quindi } \angle \Rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1$$

angolo t.c.
 φ_z

→ tutto ciò che
 contribuisce la tensione
 applicata al generatore

$$\tan \varphi_z = \frac{\omega L}{R} = \frac{\sin \varphi_z}{\cos \varphi_z} \quad \varphi_z = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

*angolo b
 con $\arctg$
 e $\frac{\omega L}{R}$*

- allora

coinciderà se hanno stessa frequenza e
stessa fase

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = \underbrace{Z}_{\text{impedenza}} I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

da cui

funzioni sinusoidali
coincidenti $\Rightarrow$ hanno
stessa fase e stessa
frequenza $\forall t$

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

È un integ.
particolare della forma vista
(sinusoide stessa ω), quindi
sceglio I_M e
 $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z \dots$

espressione della corrente

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

ho lavorato integrando
partic. dell'eq
diff. ottenendo sol.
1° ordine

- soluzione nel dominio del tempo e' complicata!!!

• introduciamo metodo dei fasori, molto efficiente per trovare le
correnti e tensioni in regime sinusoidale; attenzione, vedremo che il
metodo dei fasori non permette però di trovare la parte transitoria
delle risposte.

uso Metodo Fasori, e' efficiente, !!

trovo corrente in regime sinusoidale

ma NON TROVO PARTE TRANSITORIA

es. se avrò una risposta completa, TC + Reg.

ma troverò TC con Fasori

ho determinato
 I_M e φ_i nel
dominio del tempo

Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale nel dominio del tempo *passato il transitorio, sono in regime sinusoidale*

- Resistore ideale R . Supponiamo $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora da legge di Ohm *Legge OHM vale anche in regime sinusoidale*
- $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; quindi

La R attivo interno, linea corrente e necessario applicare una tensione per far scorrere corrente nel resistore

La R e I sono in fase tra loro, stesso fase

Resistore e' un puro resistore, el. dissipativo

V_M , ampiezza tensione da applicare per far scorrere una certa corrente I_M .

Serve applicare Tensione per V_M in fase all'altro

ampiezza Tensione da applicare

for scorrere una corrente con ampiezza I_M

dove valore V e segue le fasi devono essere uguali vale la legge di Ohm tra la ampiezza di Tensione e corrente. La fase della Tensione coincide con corrente

Relaz. tra V_M e I_M e φ_v e φ_i ?

$\varphi_v = \varphi_i$

$\varphi_v = \varphi_i$

- R rappresenta la resistenza fisica (dovuta a un fenomeno dissipativo) offerta dal resistore al passaggio di una corrente; la tensione da applicare per fare scorrere tale corrente ha ampiezza $V_M = RI_M$ ed e' in fase con la corrente

• Induttore ideale. In accordo alla legge di Faraday si ha

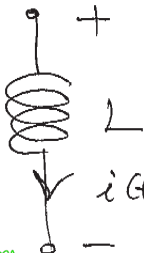
modello idealizzato (rel. cost.)

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{d\varphi_{\text{conc}}}{dt}$$

• Coseno di $i(t)$ qual è?
V da applicare all'induttore
per scrivere la
corrente $i(t)$?

dove $\varphi_{\text{conc}} = Li$ e' il flusso concatenato, *v.s. con l'induttore*

• quando per nell'induttore
corrente $i(t)$
si stabilisce un
campo magnetico.
Si concatena un
flusso del campo
magnetico con il
avvolgimento, L è
la costante di proporz.
tra flusso concatenato e V



$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Per corrente continua L è un C.C.

legge di
 V_M, I_M ?
 φ_v e φ_i ?

• Esperimento 1. Supponiamo che L sia percorso da una corrente costante (continua) $i(t) = I$; allora $v(t) = 0$, quindi L è un corto circuito per le correnti costanti (interpretare fisicamente!) C.C. $\forall I$

[induttore lascia passare una corrente costante senza che sia necessario applicare tensione ai morsetti, è un corto circuito]

Se il flusso concatenato costante, con ciò forse controllata matrice dell'induttore $\Rightarrow$ allora V da applicare $i = 0$

• Esperimento 2. Supponiamo adesso che L sia attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora

I non costante
 φ_i flusso concatenato non costante
 varia,

ho una

forma

contro elettromotrice, devo applicare una tensione per vincere la f. elettromotrice
 Forza contrell si oppone alla variaz. di corrente

Tensione da applicare:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = L \frac{di}{dt}$$

$$= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$$

Proprietà
 • quindi

$$-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$$

e' una proprietà

$$V_M = \omega L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

Tensione in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente

• Conclusione importante: a differenza del caso in continua, per far scorrere su L una corrente alternata di ampiezza I_M , e' necessario applicare una tensione alternata di ampiezza

$$\omega = 2\pi f$$

$$L = \text{Henry}$$

$$X_L = \omega L$$

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M$$

Per far scorrere in L una corrente di ampiezza I_M ... devo applicare

Tale tensione e' necessaria per 'vincere' la forza contro elettromotrice che si sviluppa su L per il fenomeno

che si oppone alla variaz. di corrente

dell'autoinduzione. Si ha inoltre che la tensione e' in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente

Forza corrente alternata $\Rightarrow$ flusso varia nel tempo, si oppone alla variaz. di corrente

Devo applicare V_M per vincere forza contrell

$\Rightarrow$ Forza elettromotrice $\uparrow$
 si oppone

- abbiamo posto

Reattanza
induttiva dell'
induttore

$$X_L = \omega L; [X_L] = \text{Ohm}$$

ωL coeff. di proporzionalità
ampere/metro e corrente

Reattanza, in Ohm è la
resistenza apparente che
l'induttore offre al
passaggio di corrente

che è detta reattanza induttiva e si misura in Ohm

- dato che

X_L = Resist. apparente che induttore L offre
al passaggio di una corrente alternata

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} = \frac{V_M}{X_L}$$

per un valore scelto $I = \frac{V}{R}$
perché ...

la reattanza induttiva ha il significato fisico di resistenza apparente
che l'induttore offre al passaggio di una corrente alternata;

'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non
è legata a un fenomeno ^(dissipativo) dissipativo ma piuttosto a un fenomeno
reattivo (dovuto all'autoinduzione)

- notare che $X_L = \omega L$ cresce se cresce ω ; quindi L offre resistenze
apparenti tanto più elevate quanto ω è elevata

Varia corrente $\Rightarrow$ varia flusso $\Rightarrow$ si indurre
forza controel $\Rightarrow$ resist. apparente che ti
opponi al passo
di cor.

immediatamente corrente passa bene quando ω è piccola. Più varia corrente, più aumenta
resistenza apparente

Induttore offre più resistenza apparente all'aumento di ω
Es. Induttore 1 Henry, f 50 Hz $R = \frac{\omega}{2\pi}$ $\omega = 2\pi f$

$$X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1 = 314 \Omega$$

Se applico 100V, ho appena corrente di
di appena di induttanza

$\frac{100}{314}$ che lo percorre

se possiamo a 1 MHz $\Rightarrow 60 k\Omega$

- Condensatore ideale. Si ha in regime sinusoid.

proprietà duale

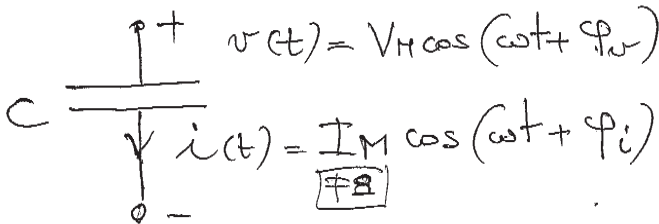
A.)

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = \frac{dq_c}{dt}$$

carica presente su una
se passa corrente, provocho una
variazione di carica sulle armature
(e viceversa)

dove $q_c = Cv$ e' la carica sulle armature

Condensatore anticipa la corrente



$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi_i)$$

una volta che le armature si sono caricate,
non passa più corrente

- Esperimento 1. Supponiamo di applicare a C una tensione costante (continua) $v(t) = V$; allora $i(t) = 0$, quindi C e' un circuito aperto (una interruzione elettrica) per le tensioni costanti (interpretare fisicamente!)

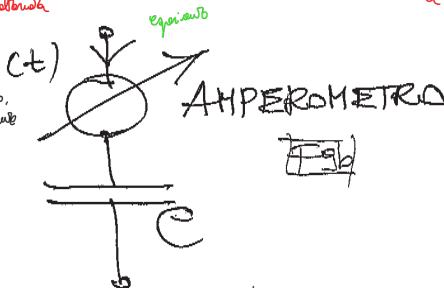
due armature metalliche, sono proprio un'interruzione elettrica. $i(t) = 0 \quad \forall V$ costante

dopo che C si è caricato, non passa più corrente

• Esperimento 2. Supponiamo adesso di applicare a C una tensione alternata (sinusoidale) $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$; dato che la tensione varia, si ha un passaggio continuativo di cariche (elettroni) fra le armature, quindi l'amperometro misura un passaggio di corrente; ne consegue che C non e' una interruzione elettrica per le correnti alternate

C permette passaggio corrente se applico V alternata

C non e' un'interruttore elettrico se $V(t)$ varia nel tempo.
Le armature si caricano e scaricano, l'amperometro vede un passaggio di corrente



come la tensione cresce, le armature iniziano a caricarsi, c'è passaggio di corrente con carica e scarica dell'armatura

dal punto di vista fisico, Tra le armature c'è una corrente di spostamento, $\frac{dQ}{dt}$ capo di

induzione elettrica nel dielettrico

Non appena c'è un campo elettrico che varia nel tempo, c'è una corrente dovuta alla variazione del campo elettrico, la corrente di spostamento

- si ha C , soggetta ad una tensione variabile

$$v = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

esempio
for e
apv

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = C \frac{dv}{dt}$$

$$= -\omega C V_M \sin(\omega t + \varphi_v) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \pi/2)$$

veloc. vola tt, dunque fase e apv deve usare

- $\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$

- quindi

Corrente che passa
nel condensatore ha
apv

$$I_M = \omega C V_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{X_C}$$

e esempio for e apv

$$\varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2}$$

Reattanza capacitiva

nel condensatore
Corrente che
anticipa la
Tensione
di $\pi/2$

- abbiamo indicato con

Reattanza
capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$[X_C] = \text{Ohm}$$

Reattanza capacitiva, inversamente
proporzionale ad ω

la reattanza capacitiva

- la reattanza capacitiva (si misura in Ohm) ha il significato fisico di resistenza apparente che il condensatore offre al passaggio di una corrente alternata; 'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non e' legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo

Resistenza apparente che
Corrente elettrica

cos'è
apv tensione V_M , diviso per X_C , ho l'apv corrente

$\Rightarrow$ • notare che $X_C = 1/\omega C$ decrese se cresce ω ; quindi C offre resistenze apparenti tanto piu' piccole quanto ω e' elevata

X_C e' inversamente proporzionale ad ω

• notare che vi sono diverse proprieta' duali per L e C (rifletterci).

• Se $\omega \rightarrow 0$, C e' una i.c. elettronica
 $X_C \rightarrow \infty$
 Ma grande resistenza, tende a non far passare corrente
 $X_C \rightarrow \infty$

• in un condensatore la corrente anticipa di $\pi/2$ la tensione $V(t)$



$\omega \rightarrow \infty$, C fa passare molto bene la corrente
 $X_C \rightarrow 0$
 Ma grande resistenza, tende a non far passare corrente
 $X_C \rightarrow 0$

• $I(t)$ in un condensatore ideale anticipa di $\pi/2$ $V(t)$

se dunque bravo in fase della tensione, per quello della corrente lo brava indietro nel verso degli anticipi di $\pi/2$

$1 \mu F$, 50 Hz $\rightarrow$ $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{314} = 3184 \Omega$

$\omega = 2\pi f$

Se avessi $50 \text{ kHz} = 3,18 \text{ k}\Omega$

Simbolos: ω negative impossibile

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

INDUTTORI
 $X_L = \omega L$
 $\varphi_v = \varphi_i + \pi/2$

$$V_m = X_L \cdot I_m$$

CONDENSATORI
 $X_C = \frac{1}{\omega C}$
 $\varphi_i = \varphi_v + \pi/2$

$$I_m = \frac{V_m}{X_C}$$

Resistenza
 $V_m = R \cdot I_m$
 $\varphi_i = \varphi_v$

Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale

- Consiste di due passi *Veolo se quello che ho trovato nel DT si trasforma nel DF*
- Passo 1. Determino le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio di fasori *come si comporta LLC nel DF*

• Passo 2. Determino l'espressione delle leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori *Relos. costitutive e Kirchhoff per relos. costitutive*

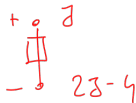
• *Circuiti NON SODDISFA relos. differenziali, ma algebrici*
facciamo vedere che otteniamo nel dominio dei fasori un circuito senza memoria che può essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1
Circuiti simbolici senza memoria nel dominio dei fasori

Bipolo in regime sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

fluisce questa corrente



es. *potenziale 3 e 23-4.*
 il corpo dei capacitori non ha un ordinamento,
 non posso dire che

$3 > 23-4 \dots$
 non posso dire che è a Terzina
 più alta...

- Per l'analisi vale legge ohm per la corrente i e φ_i e φ_v sono in fase tra loro
è un el. senza memoria.

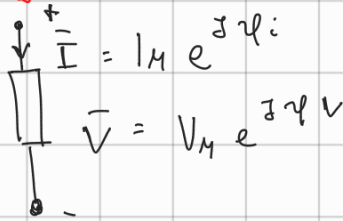
Relos. COSTITUTIVE

Passo nel dominio dei fasori

Lezione 10 17/04/23

Bipolo

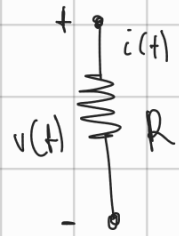
Tensione e corrente fasori, relazion. simbolica



Relazione costitutiva, 1 legge tra $\bar{V}$ e $\bar{I}$ $\hookrightarrow$ algebrico

applicata una tensione simbolica $\bar{V}$ e che fornisce una corrente $\bar{I}$ passata la parte transitoria

• R ideale in regime sinusoidale nel tempo



$$v(t) = R i(t)$$

$$\bar{V} = R \bar{I}$$

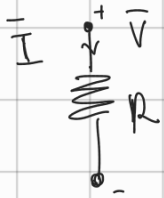
Legge ohm simbolica nel dominio dei fasori

Relaz. analoga a quella del tempo

Relaz. Piana e tale

applico transf. fasoriale ad entrambi i membri, la trasformata è lineare dunque

me lo rappresento così nel d. Fasori



$$\bar{V} = R \bar{I}$$

relaz. tra 2 numeri complessi, nasconde due relaz

$$\text{cioè } \hookrightarrow V_m e^{j\psi_v} = R I_m e^{j\psi_i}$$

$$\left. \begin{aligned} V_m &= R I_m \\ \psi_v &= \psi_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Relazione tra} \\ &\text{ampiezza e fase} \end{aligned}$$

Tensione e corrente sono in Fase

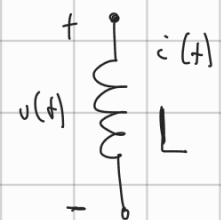
ci sono due relazioni

Sono in fase Tensione e corrente

Induttore ideale, regime sinusoidale

nel tempo soddisfa la relazione

Studio gli elementi Reattivi



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Utile sapere, anche in regime sinus.

applico Trasformata fasoriale

trasformo

$$\bar{V} = L j\omega \bar{I} = \overbrace{j\omega L}^{\text{immaginario puro}} \bar{I} = j \overbrace{X_L}^{\text{imp. pura}} \bar{I}$$

$j\omega L$ è una costante di prop. imag. pura, e dipende da ω

nel dominio Fasoriale ci un bipolo senza memoria

"Legge di ohm simbolica per un induttore"

$j\omega L$ ha stesso ruolo di una resistenza

• Impedenza di L in corrente altern. immaginaria pura

Infatti: $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{j\omega L}$ Batteremo dunque $\bar{Z}_L = j\omega L = jX_L$

numero complesso di dim. ohm $[\bar{Z}_L] = \text{ohm}$

allora volgo

numero complesso, dim Ω

• Legge di Ohm simbolica per induttore

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_L}$$

impedenza, immittanza dipende da ω

AMMETTENZA dell'induttore

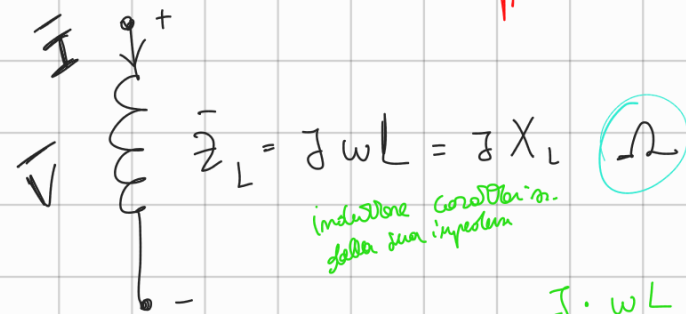
• Sono numeri complessi, ma non $\bar{Y}_L$ e $\bar{Z}_L$, passivi, non è associata ed emi una grandezza sinusoidale

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{\bar{Z}_L}$$

ammittenza dell'induttore

• $\bar{Z}_L$ e $\bar{Y}_L$ non sono FASORI, sono numeri complessi: non è associata ed emi una grandezza sinusoidale ma ne servono per esprimere legge di Ohm simbolica per i fori.

• Rappresentazione nel dominio dei fori di un induttore
lo tratto come un resistor (I e V grandezze fittizie)
Rappresentazione Simbolica NEL D.FAS.



induttore considerato dalla sua impedenza

$j \cdot \omega L$ = sfasamento di 90° , moltiplicare per j infatti esplicitamente

lo tratto come un resistore... moltiplico e div. tra numeri complessi

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I}$$

ricambiando ciò che abbiamo visto nel dominio del Tempo sono 2 relazioni

ESPLICITO RELAZIONE

$$\Rightarrow \bar{V} = V_m e^{j\psi_v} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} I_m e^{j\psi_i} = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}$$

def. fase I "meno che ha modulo 1 e arguente $\frac{\pi}{2}$

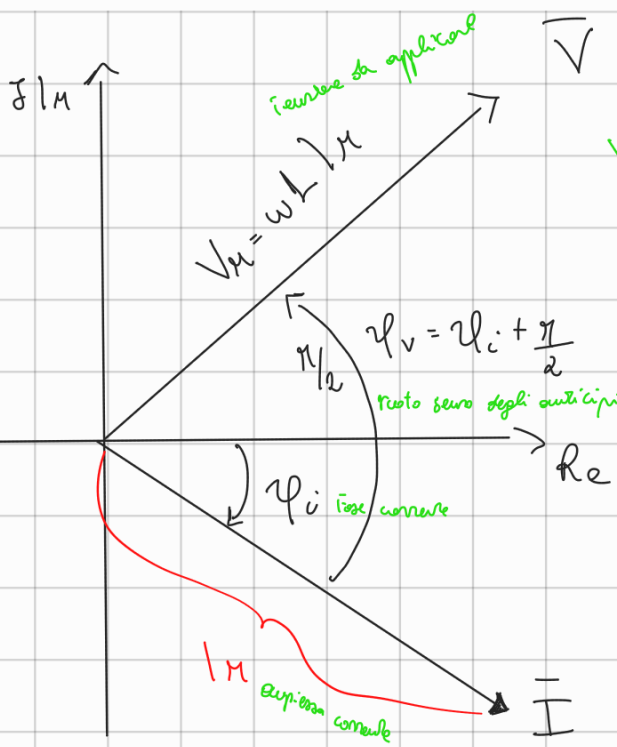
da qui

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = \omega L I_m \\ \psi_v = \psi_i + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

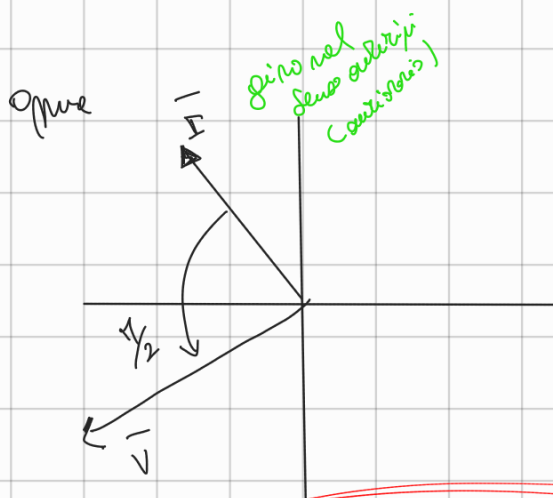
modulo moltiplicato per ωL
teniamo anticipo di $\pi/2$ la corrente...

Diagramma Fasoriale

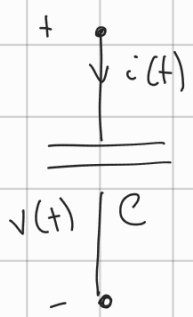
trovato la corrente $\bar{I}$ che fluisce in un induttore...



$V_m > I_m$ tensione da applicare per far scorrere corrente di ampiezza I_m (mA)



Per un Condensatore



Def. cost nel tempo

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

risposta sempre...

nel dominio
Fasoriale

$$\bar{I} = j\omega C \bar{V} = \frac{\bar{V}}{\frac{1}{j\omega C}}$$

parte $\frac{1}{\omega C}$

$$= \frac{\bar{V}}{-j} \quad // \quad \frac{1}{j} = -j$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -j X_C \quad \text{impedenza condensatore}$$

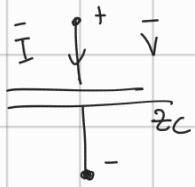
$$\bar{Y}_C = \frac{1}{\bar{Z}_C} = j\omega C \quad \text{ammettenza condensatore}$$

Legge di Ohm simbolica per condensatore
Coinvolge grandezze non misurabili, Fasori

$$\bar{I} = \bar{Y}_C \bar{V} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C}$$

$$\bar{V} = \bar{Z}_C \cdot \bar{I}$$

Altre Rappresentazione Simbolica



è un bipolo in cui

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} \Omega = -j X_C \Omega$$

Comobenzio, senza memoria,
impedenza data da un numero
complesso, immaginario puro,
ma la p.i.m è negativa,
segno opposto rispetto
all'induttore
... in serie vengono cancellati

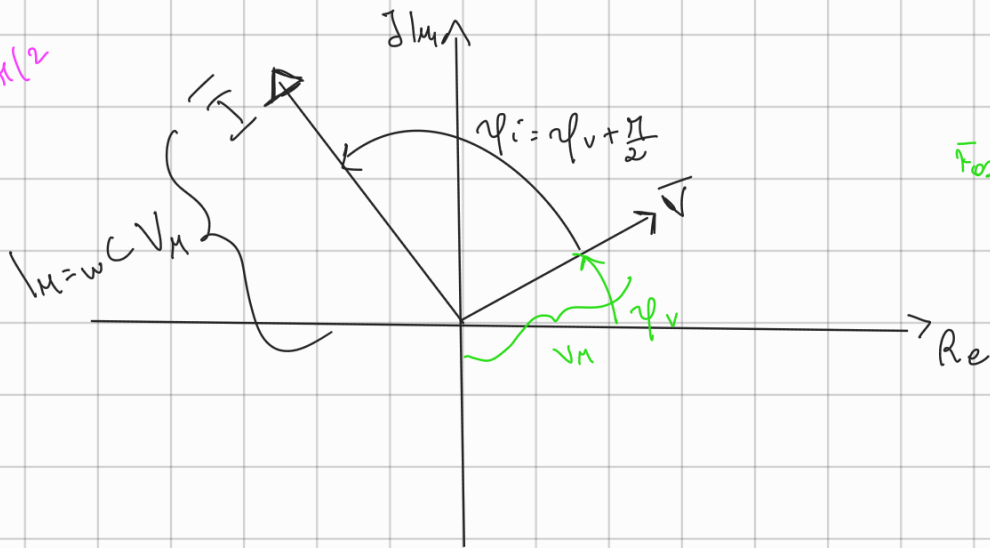
rot. 90° • INTERPRETO LA RELAZIONE

$$\Rightarrow \bar{I} = j \omega C \bar{V} \Rightarrow \bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} V_M e^{j\varphi_v}$$

al contrario

$$\bar{V} = \bar{Z}_C \bar{I} \\ V_M e^{j\varphi_v} = \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j\varphi_i} \\ V_M = \frac{I_M}{\omega C} \\ \varphi_v = \varphi_i - \pi/2$$

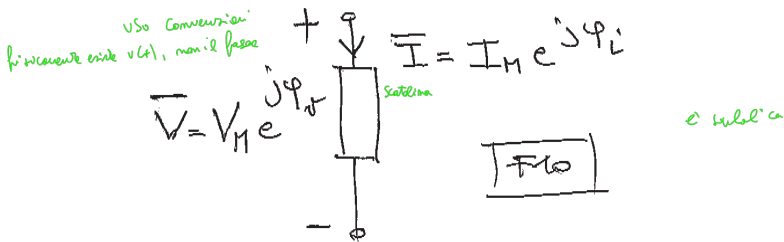
$$\begin{cases} I_M = \omega C V_M & \text{già vista nel tempo} \\ \varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \text{corrente in anticipo rispetto alla tensione} \end{cases}$$



Forse un'idea
info su anticipo
e fase

Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia
- $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione ai morsetti e fasore Tensione
- $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente; indichiamo con $\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v}$ il fasore della tensione e con $\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i}$ quello della corrente; come in figura, pensiamo simbolicamente che al bipolo sia applicato $\bar{\mathbf{V}}$ e vi fluisca $\bar{\mathbf{I}}$ (in questo caso coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori)



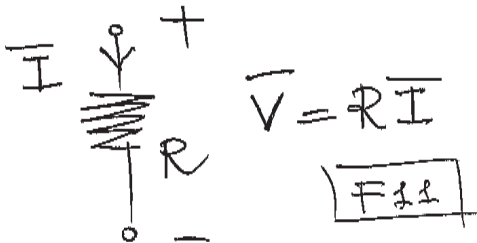
- *Relazione costitutiva del bipolo:* e' il legame che il bipolo stabilisce fra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ nel dominio dei fasori legame algebrico

non differenziale

• **Resistore ideale.** Da $v(t) = Ri(t)$, usando la linearita' della trasformata fasoriale, otteniamo

$$\bar{\mathbf{V}} = R\bar{\mathbf{I}}$$

detta legge di Ohm simbolica nel dominio dei fasori



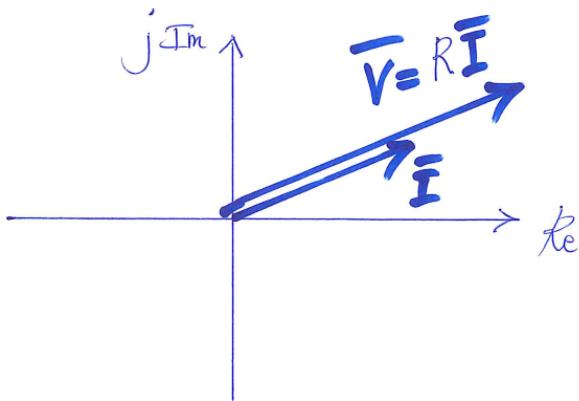
• si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = R\bar{\mathbf{I}} = R I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi, in accordo a quanto visto nel dominio del tempo

$$V_M = R I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

- per $R > 0$ i due fasori $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ sono *paralleli fra di loro e in fase*



• **Induttore ideale.** Da $v(t) = L di(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = jX_L \bar{\mathbf{I}}$$

• *l'induttore è quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di L è il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L = jX_L; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_L] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza è definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_L = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

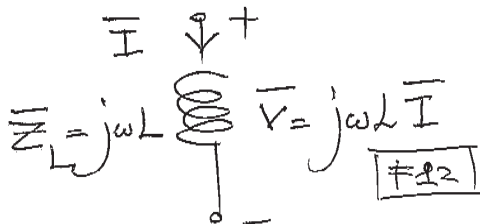
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_L} = \bar{\mathbf{Y}}_L \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per l'induttore'

- quindi, nel dominio dei fasori, l'induttore è un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = \omega L I_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_i}$$

quindi

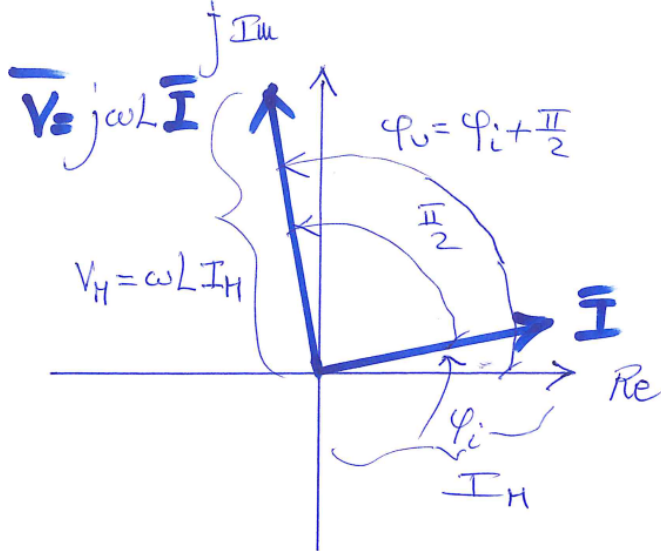
$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \omega L I_M e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

e

$$V_M = \omega L I_M = \underline{X_L} I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{V}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{I}}$



• **Condensatore ideale.** Da $i(t) = Cdv(t)/dt$, usando la linearita' e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}}$$

• il condensatore e' quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di C e' il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_C] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza e' definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = j\omega C$$

e ha dimensioni Ohm^{-1}

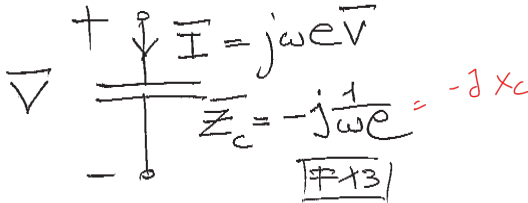
• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_C \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}}$$

legge di ohm simbolica del condensatore

detta 'legge di Ohm simbolica per il condensatore'

- quindi, nel dominio dei fasori, il condensatore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



$$\bar{V} = -\partial \frac{1}{\omega c} \bar{I}$$

$$V_M e^{j\varphi_V} = \frac{1}{\omega C} I_M e^{-j\varphi_I} \quad V_M = \frac{I_M}{\omega C}$$

- Interpretazione geometrica

$$\varphi_v = \varphi_i - \pi/2$$

- Si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}} = \omega C V_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_v}$$

quindi

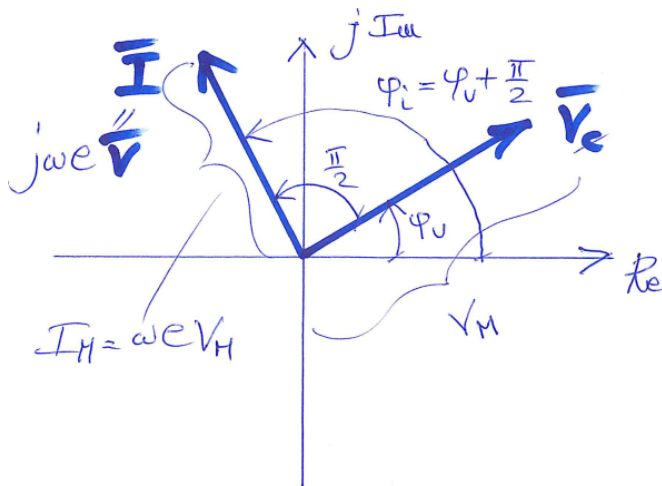
$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C V_M e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

e

$$I_M = \omega C V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \pi/2$$

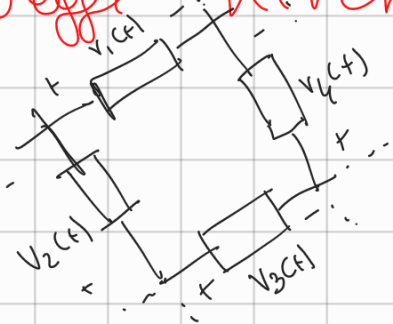
che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{I}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{V}}$



Per Metodo dei Fasori, Step ② Leggere Kinda

Leggi Kirchhoff per il dominio fasoriale



nel dominio del tempo, siamo in regime sinus, faccio una KV
 Teoriami prese a caso

Sono tutte sinusoidi a pulsaz. ω , sono in reg. sinusoidale
 $V_1(t) - V_4(t) - V_3(t) + V_2(t) = 0$ ma possiamo anche scriverlo come,

usando l'analisi fasoriale

$$\text{Re}[\bar{V}_1 e^{j\omega t}] - \text{Re}[\bar{V}_4 e^{j\omega t}] - \text{Re}[\bar{V}_3 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{V}_2 e^{j\omega t}] \quad \text{dove } \bar{V}_i = V_i e^{j\phi_i}$$

$V_1(t)$

$$= \text{Re}[(\bar{V}_1 - \bar{V}_4 - \bar{V}_3 + \bar{V}_2) e^{j\omega t}] = 0 \quad \text{Porta Reale e' un operatore lineare, e^{j\omega t} e' comune}$$

Se $V_1 - V_4 - V_3 + V_2 \neq 0$, facendolo tempo, troveremmo una parte reale $\neq 0$, deve essere per forza $V_1 - V_4 - V_3 + V_2 = 0$

$$\Rightarrow \bar{V}_1 - \bar{V}_4 - \bar{V}_3 + \bar{V}_2 = 0$$

implica necessariamente che $= 0$

Vale KV nel dominio dei fasori

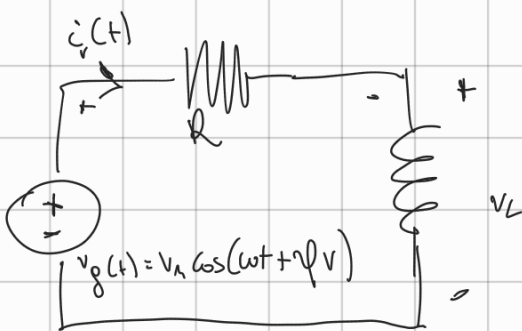
Somma vettorialmente con la regola parallelogramma

ora ho Kirch e relaz costitutive analogamente valgono KI

Esempio. Applico

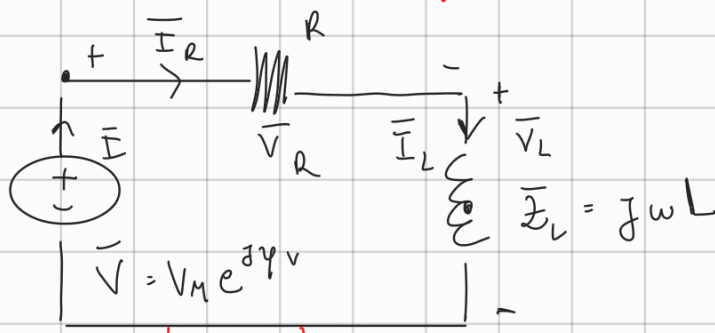
!! $i(t)$ in regime sinusoidale

CIRCUITO RL



Circolo RL con generatore sinus. di tensione

associo un CIRCUITO SIMBOLICO nel dominio dei fasori



fasore corrispettivo non so come

le KI mi dicono che c'è un'unica comes

induttore e' rappresentabile con una impedenza jX_L

$\bar{I}$?

• Kirchhoff

Topologia
coincidenza i fuori

$$KI: \bar{I}_R = \bar{I}_L = \bar{I}$$

ho una sola maglia, una sola corrente.

$$KV: \bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L$$

$$-\bar{V}_g + \bar{V}_R + \bar{V}_L = 0$$

• Relaz. costitutive

$$\bar{V}_R = R \bar{I}_R$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L = \bar{V}_L = jX_L \bar{I}_L$$

sostituisco

$$\Rightarrow R \bar{I}_R + j\omega L \bar{I}_L = (R + j\omega L) \bar{I} = \bar{V}_g$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L}$$

Prova il fasore,
devo trovarlo isolato
nel dominio del tempo

o uso la formula di Parseval. $i(t) = \text{Re} [\bar{I} e^{j\omega t}]$

• scrivo il numero complesso in forma esponenziale
ne trovo modulo e argomento

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = \bar{I}_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}}$$

Suppongo
R positivo

$$= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R})}$$

φ_i

I_M

$$\frac{1}{e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} = e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}}$$

Dunque

anti Parseval

• Il Modulo numero complesso $a + bj$
 $\sqrt{a^2 + b^2}$

• Il Fase = $\arctg \frac{b}{a}$

Forma exp $M e^{j\varphi}$

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R})$

Diagramma fasoriale

Diagramma fasoriale

φ_i
Stessa Formula
Basta trigonometrica

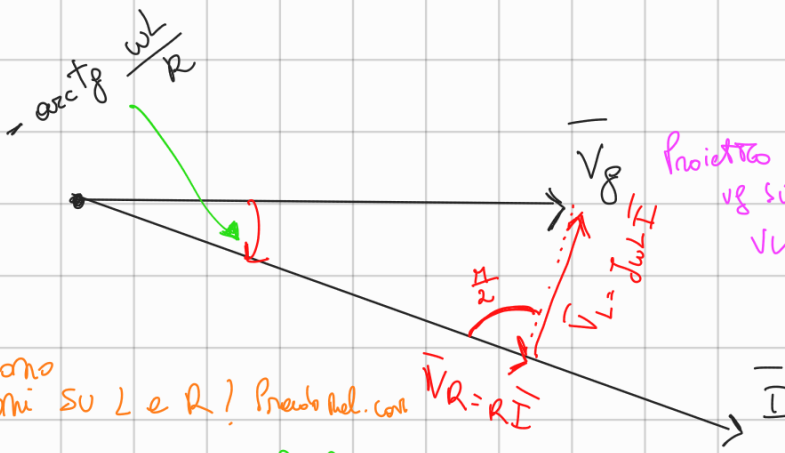
Rappresent. complessiva

Es. $\varphi_v = 0$
e dunque $V_g = V_m$

$\bar{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}}$

Circuito RL
con $V = V_m \cos(\omega t)$ $\varphi_v = 0$

La corrente è dunque
nel 4° quadrante, in ritardo
con angolo compreso tra 0 e 90°
rispetto alla tensione



Come sono le tensioni su L e R? Proiezione...

Tensione applicata la forza φ
e sull'asse x.

La corrente

Come sono le tensioni su R e L, riprendo la KV

il triangolo mi semplifica
la KV sotto forma
 $\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L$

Circuito Ohmico
induttivo, RL, corrente
in ritardo tra
0 - 90°

$\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L = R \bar{I} + j \omega L \bar{I}$

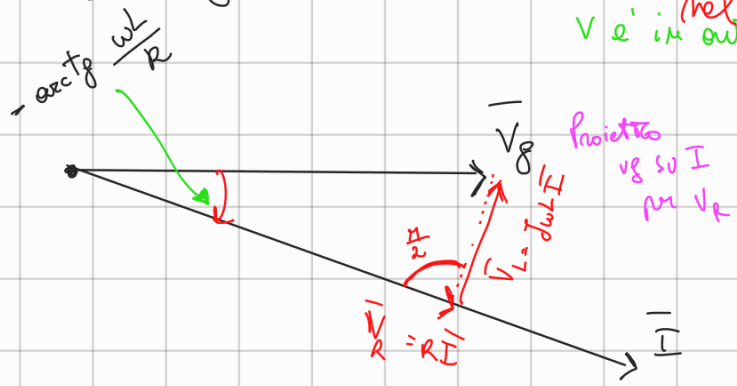
$\arctg$ ha valori tra
-pi/2 e pi/2

$\bar{V}_R = R \bar{I}$

$\bar{V}_L = j \omega L \bar{I}$

RL in serie, al passaggio della
corrente, in regime sinusoidale, per effetto collaudato
della R e della L autoinduzione. oltre al passaggio della
corrente una resistenza oppone una forza
 $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ e c'è uno sfasamento in ritardo della
corrente rispetto corrente

V_L è ortogonale ad I , (moltiplico per j)
V è in anticipo di pi/2



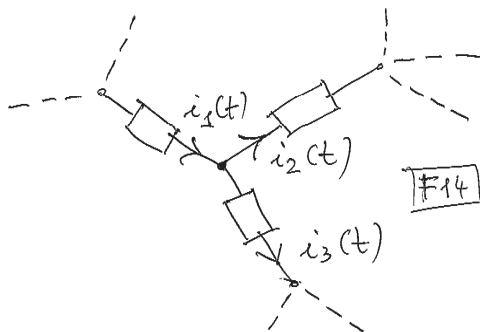
ho complessiva la visuale
sulle tensioni

Vedi interpretazione - FISICA

- **Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori**

- Consideriamo una rete in regime sinusoidale a pulsazione ω (tutte le correnti e tensioni, esaurito il transitorio, sono sinusoidali a pulsazione ω); consideriamo un nodo a cui sono collegati tre bipoli. Si ha dalla KI: $-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ per ogni t ; quindi $-\text{Re}[\bar{I}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{I}_2 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{I}_3 e^{j\omega t}] = \text{Re}[(-\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3) e^{j\omega t}] = 0$ per ogni t da cui

$$-\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$



• KI nel dominio dei fasori: i fasori delle correnti in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le correnti

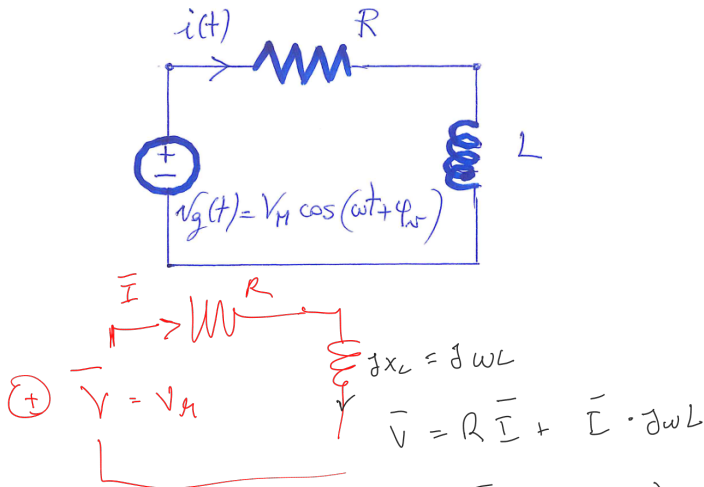
• analogamente, KV nel dominio dei fasori: i fasori delle tensioni in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le tensioni

• usando le relazioni costitutive e le leggi di Kirchhoff illustrate possiamo associare al circuito un circuito simbolico nel dominio dei fasori; il circuito simbolico è senza memoria e può essere analizzato con i metodi delle reti senza memoria visti nella Parte 1

ora che ho relaz. costitutive
e leggi di Kirchhoff, posso
associare un circuito simbolico nel dominio
dei fasori

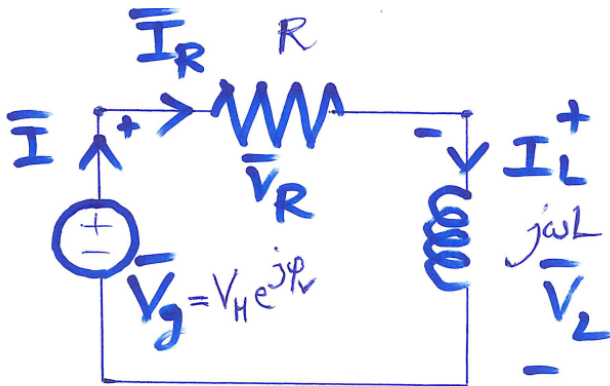
Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori

- Consideriamo ancora il circuito RL studiato in precedenza; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



$$\bar{V} = \bar{I}(R + j\omega L)$$
$$V_M e^{j\varphi_v} = I_M e^{j\varphi_i} \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\omega L t}$$

- Passo 1. Associo il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



• Passo 2. Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{I}$:

- KI: $\bar{I} = \bar{I}_R = \bar{I}_L$
- KV: $\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L$
- relazioni costitutive: $\bar{V}_R = R\bar{I}_R$; $\bar{V}_L = j\omega L\bar{I}_L$
- si ha quindi

$$\bar{V}_g = V_M e^{j\varphi_v} = (R + j\omega L)\bar{I}$$

e

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L}$$

$$-\bar{V}_g + R\bar{I} + \bar{Z}_L\bar{I} = 0$$

$$\bar{V}_g = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L}$$

$$I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_g e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\arctan(\frac{\omega L}{R})}} \Rightarrow$$

- Passo 3. Da $\bar{\mathbf{I}}$ otteniamo $i(t)$. Scriviamo $\bar{\mathbf{I}}$ in forma esponenziale

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\frac{\omega L}{R})}}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))}$$

allora

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

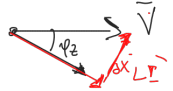
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$$

• stesso risultato ottenuto con analisi nel dominio del tempo; il procedimento nel dominio dei fasori e' molto piu' semplice e diretto

- Esercizio per casa: ripetere il Passo 3 usando invece la formula di antitrasformata fasoriale $i(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{I}} e^{j\omega t}]$

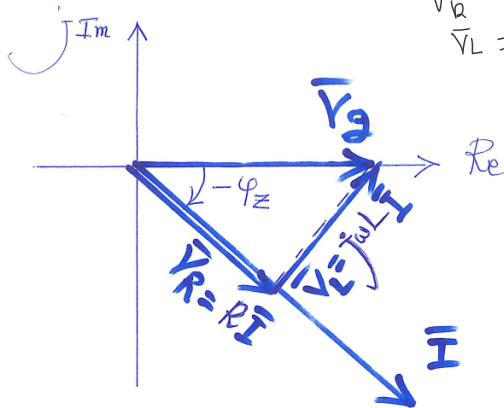
- **Diagramma fasoriale**

- Sia ad esempio $\varphi_v = 0$, quindi $\bar{\mathbf{V}}_g = V_M$



$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega L}{R})}$$

- si ha $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} + j\omega L\bar{\mathbf{I}}$; $R\bar{\mathbf{I}}$ e' parallelo a $\bar{\mathbf{I}}$, mentre $j\omega L\bar{\mathbf{I}}$ e' in anticipo di $\pi/2$ rispetto a $\bar{\mathbf{I}}$; possiamo allora costruire il seguente diagramma fasoriale



$$\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L\bar{\mathbf{I}}$$

- Interpretazione fisica *è calcolato da un giuocatore di Tennis* R e L in serie ad R
- Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto combinato della resistenza Ohmica e del fenomeno dell'autoinduzione, offre al passaggio di una corrente alternata una "resistenza apparente" (impedenza) pari a *non è una vera resistenza fisica*

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ Ohm}$$

$$I_H = \frac{V_H}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

vedi sopra

La presenza di L in serie a R provoca quindi:

- 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ *$Z_{RL} > R$ per una nuova corrente superiore diminuisce di intensità coseno*
- 2) uno sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\varphi_z = \arctan(\omega L/R)$ *compreso fra 0 e $\pi/2$*
- 3) tali effetti sono tanto più evidenti quanto ω è elevata

- $\varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ *Se $\omega \rightarrow 0$ $\arctg \rightarrow 0$ $\omega^2 L^2 \rightarrow 0$*
- Finché c'è solo R , V e I sono in fase. con L in serie, si sfasa di 90° *così solo R**
- Se ω cresce predominano su R dell'induttanza*
- Vera impedenza coseno R e X_L vanno combinate secondo Teo Pitagorica*
- Corrente limitata anche dall'autoinduzione*
- La corrente non è limitata solo da R , ma qui sta contribuendo di R e L , con ω che sale, L domina *vedi ora Disp. Frequ*

Resistenza apparente

1) Z_{RL} = impedenza o "resistenza apparente"

perché la corrente è

$$I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

2) Perché $\varphi_i = \varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R}$

• Risposta in frequenza

T. Due forme sono del primo ordine (RL)

- Supponiamo $v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$, facciamo variare ω e studiamo gli andamenti di

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- il primo degli andamenti rappresenta la risposta in ampiezza, mentre il secondo la risposta in fase; nel complesso sono la risposta in frequenza del circuito

corrente passa bene fino alla pulsanza critica.

Risposta FREQ RL

Pulsanza critica per $R = \omega L$
quando resistenza coincide con impedenza
 $\omega = \frac{R}{L}$

Risposta in ampiezza

Risposta in fase

di un circuito RL

Risposta in frequenza del circuito

applied circuit

$$V_g(t) = V_M \cos(\omega t) = \text{coseno}$$

$$i(t) = I_M (\omega t + \varphi_i(\omega)) = \text{effetto}$$

corrente ha ampiezza e fase, dipendenti da ω

corrente passa bene fino a $\omega_c = \frac{R}{L}$

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

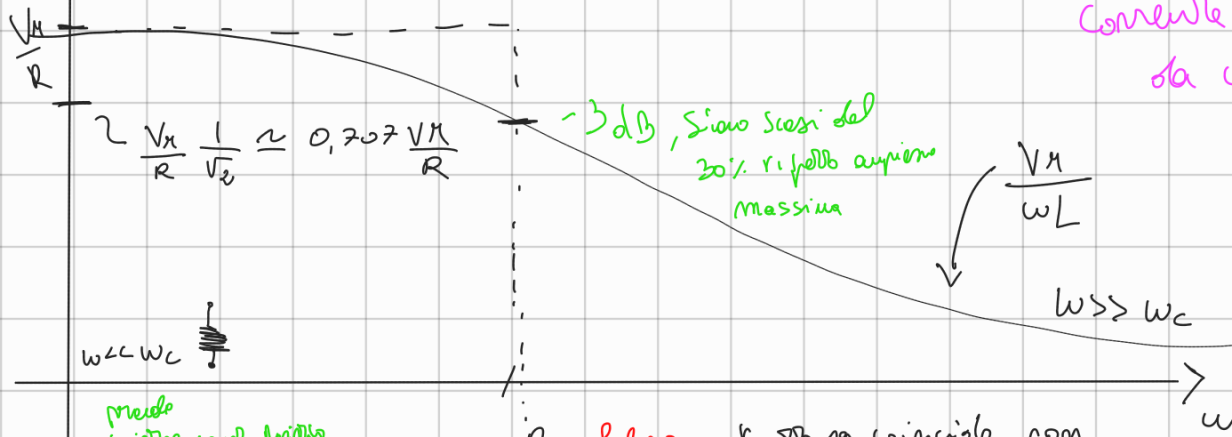
$$\varphi_i(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R}$$

ω basso, L ha poco che corrente

$I_M(\omega)$
 $\omega \rightarrow 0$ resistenza coincide con resistenza

I_M è fun. decrescente monotona decresc.
Se cresce ω , cresce denomin

corrente passa bene da 0 fino a ω_c , poi



comportamento induttivo

comportamento induttivo

$\omega_c = \text{puls. a } -3\text{dB}$
ampiezza ridotta 30% rispetto a prima massima

$\omega_c = \frac{R}{L}$ Puls. critica resistenza coincide con resistenza, si controlla tutto



corrente in ritardo rispetto a tensione di un angolo di $-\pi/2$

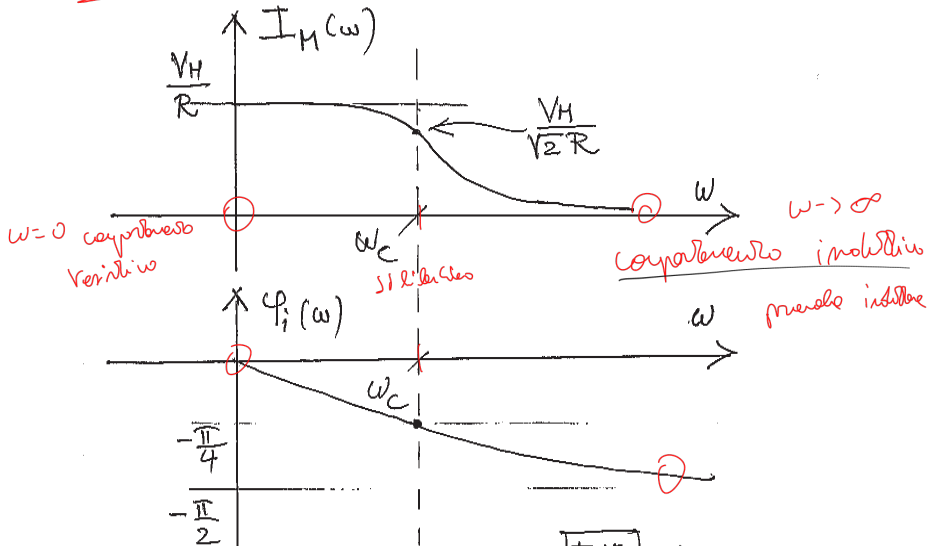
$$\arctg(0) = 0 \quad \arctg(\infty) = \pi/2$$

per $\omega \rightarrow 0$, prevale R, e tensione e corrente sono quasi in fase
 $\omega \gg 0$, prevale L

tensione e corrente sono quasi in fase
come se ci fosse solo induttore

punto critico, R e L si controllano

ω_c critica è quando resistenza e reattanza si controbilanciano tra loro



Teorema: Appioppa e Forè sono legati +15 in pila opposita.

L'aumento della Forè o la diminuzione dell'appioppa
rispetto ad ω . Se appioppa decresce, mi sono in negativo

• si tratta di un filtro passa basso del primo ordine; la pulsazione critica vale

$$\omega_c = \frac{R}{L} \text{ rad/sec}$$

$$X_L = \omega L = \frac{R}{\omega} \quad \checkmark$$

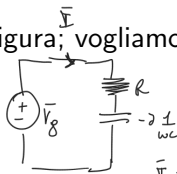
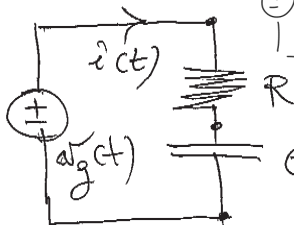
$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \dots$$

ed e' la pulsazione alla quale la risposta in ampiezza e' pari a $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ la massima risposta in ampiezza (che vale V_M/R quando $\omega = 0$) 30% V_{max}

Filtro passa basso, sfasamento negativo

- **Circuito RC serie**

Consideriamo il circuito RC serie in figura; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



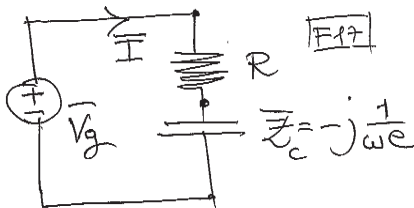
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R - j \frac{1}{\omega C}}$$

$$I_{me} \angle \varphi_i = \frac{V_g e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j\varphi - \arctan(\frac{1}{R\omega C})}$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{V_g}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad \varphi_i = \varphi_v + \arctan(\frac{1}{R\omega C})$$

- Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)

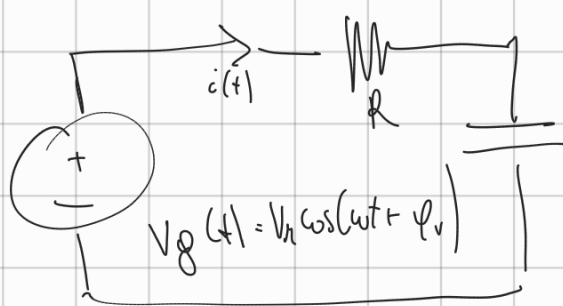
$$i(t) = \frac{V_g}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{R\omega C}))$$



Circuito

impostiamo

con eciotas. Sinusoidale

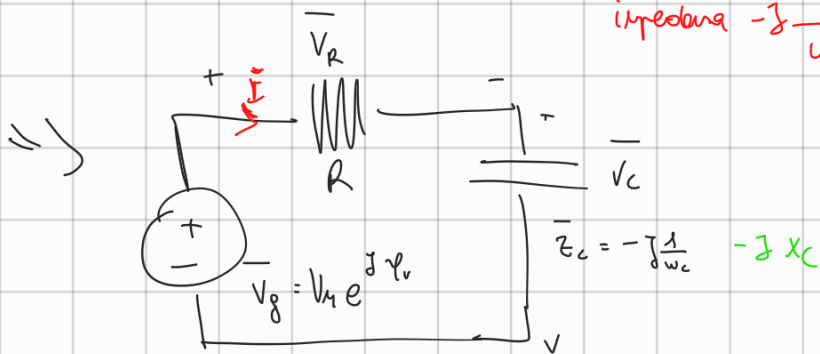


voglio trovare $i(t)$

voglio trovare corrente

Condensatore diventa
impedenza $-j \frac{1}{\omega C}$

C'è un'unica corrente $\bar{I}$



$$\bar{V}_g = V_m e^{j\phi_v} = \bar{V}_R + \bar{V}_C = R \bar{I} - j \frac{1}{\omega C} \bar{I}$$

Scrivo KV su ramo $\bar{I}$

Arctg F. dispari

$\arctg(-x) = -\arctg(x)$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{V_m e^{j\phi_v}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j\phi_v}$$

$$e^{j(\phi_v + \arctg \frac{1}{\omega C R})} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \frac{e^{j\phi_v}}{e^{-j \arctg(\frac{1}{\omega C R})}}$$

modulo = rap. moduli.
arg = diff. argenti.

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \phi_v + \arctg \frac{1}{\omega C R})$$

La corrente è limitata da una combinas. di R e C

La corrente è in anticipo $(+ \arctg)$ di un angolo tra 0 e 90°

Circuito per
elto del
pico sul
pico sul
pico sul



$\omega \rightarrow 0$ corrente per prima perché c'è condensatore che la blocca
 $\omega \rightarrow \infty$ C diventa un C.C. solo resistenza blocca la corrente

Circuito RL, corrente in ritardo sulla V di agelo
Circuito RC, corrente in anticipo su V di agelo...

- Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{I}$

- si ha

$$\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C = R\bar{I} - \frac{j}{\omega C}\bar{I}$$

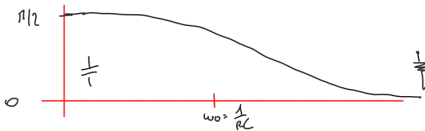
da cui in forma exp

$$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))}$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$

$$\varphi(i) = \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR})$$



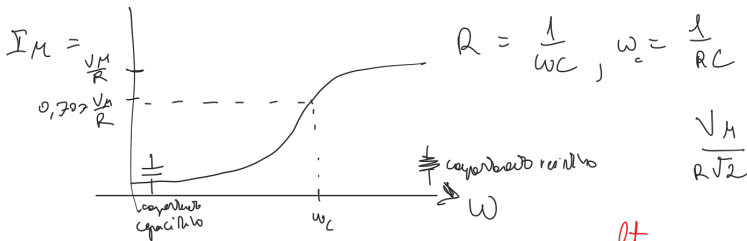
$$\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \approx 0.7 \frac{V_M}{R} \approx \frac{V_M}{R\sqrt{2}}$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{V_M}{R\sqrt{2}}$$

- la presenza di C in serie a R provoca

- un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$
- uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\arctan(1/(\omega CR))$ compreso fra 0 e $\pi/2$
- tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' bassa
- per $\omega \rightarrow \infty$, ~~condensatore~~ diventa un C-C

- studiare la risposta in frequenza del filtro e mostrare che e' un passa alto del primo ordine con pulsazione critica $\omega_c = 1/(RC)$



Les. 20/04/23 11?

F. Dato per alto

Impedenza e ammettenza di un bipolo

non devono esserci generatori indipendenti.

• Consideriamo un bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω contenente R, L, C (no generatori ind. ti di tensione e corrente); l'impedenza

Bipolo deve essere controllabile in corrente
 $\Rightarrow$ applico il teorema di superposizione
 numero complesso

Per come finire il bipolo, stabilisce un legame di prop. tra $\bar{V}$ e $\bar{I}$
 cioè L'IMPEDENZA del BIPOL

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \text{ Ohm}$$

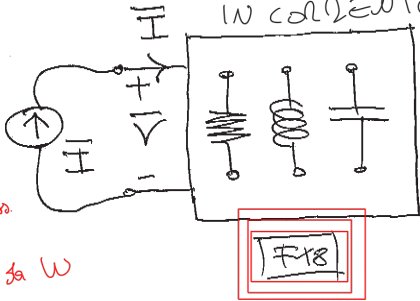
Numero Complesso dipendente da ω

e' definita in modo analogo alla resistenza equivalente di un bipolo

BIPOL O DEVE ESSERE CONTROLLABILE omogeneo

IN CORRENTE

$\bar{I}$ corrente Forze
 $\bar{V}$ tensione Forze sul bipolo conv. velle.



$\bar{I}$ corrente che diventa il bipolo

$\bar{V}$ tensione Forze sul bipolo con conv. velle.

Impedenza dipende da ω

Proporzionalità tra $\bar{V}$ ed $\bar{I}$, e questa costante, Complesso è l'impedenza
 Bipolo stabilisce un legame di

- l'ammettenza del bipolo e' il reciproco dell'impedenza

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \text{ Ohm}^{-1}$$

Per un bipolo deve essere controllabile in tensione applico $\bar{V}$, misuro $\bar{I}$

- si puo' dimostrare che

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}; \quad \bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$$

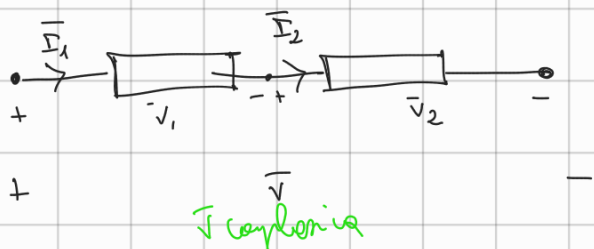
$\bar{Z}$ impedenza, costante di proporzionalita' COMPLESSA

tra $\bar{I}$ e $\bar{V}$ dove $\bar{I}$ e' la corrente fornita
con cui alimento il mio bipolo
OMOGENEO

- Se ho connessione in parallelo, sommo le ammettenze

Dipolo in serie in regime sinus.

Questo cio' equivale ad un solo dipolo di impedenza $Z_1 + Z_2$



$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2$$

(con Kirchhoff ai nodi) $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$

$$\Rightarrow (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \bar{I}$$

Ma quello che abbiamo visto prima, posso vederlo qui, per lo numeri complessi.

TERMINOLOGIA

una funzione di ω

FORMA ALGEBRICA IMPEDENZA

Impedenza bipolo in serie, somma impedenze, somma p. reale + p. imag
induttore e condensatore
Sono casi particolari

$$\bar{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Resistenza Reattanza

ωL ; $-\frac{1}{\omega C}$
dipende da ω

Se altri bipoli in parallelo, sono equivalenti, Tensione la stessa

$$\bar{Y}(\omega) = \underbrace{G(\omega)}_{\text{Conduttanza}} + j \underbrace{B(\omega)}_{\text{Suscettanza}}$$

3 Bipoli a Triangolo, traf a stella ecc.

Legame tra $\bar{Z}$ e $\bar{Y}$

Reciproco tra numeri complessi

valgo G

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} \quad \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)}$$

uso TRUCCO

$$G \neq \frac{1}{R} \quad \text{reciproco di numero complesso}$$

Stesso segno

$$= G + jB$$

moltiplico me e den per coniugato denum.

$$\Rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

dato t dipende anche da parte reale

e se gli altri parti reali e complessa

B e X segno opposto

reattanza e suscettanza segno opposto

Forma esponenziale IMPEDENZA

Z maiuscola e' modulo

φ_z e' l'argomento impedenza

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_z}$$

angolo

Modulo $y = \frac{1}{z}$ modulo z

$$\bar{y} = y e^{j\varphi_y} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z e^{j\varphi_z}}$$

$$y = \frac{1}{z} ; \varphi_y = -\varphi_z$$

argomenti di segno opposto

DA FORMA ALGEBRICA ad ESQUENZIALE

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

resistenza reattanza

$$\bar{z} = z e^{j\varphi_z} = z (\cos \varphi_z + j \sin \varphi_z)$$

$$\bar{z} = R(\omega) + jX(\omega) \quad R(\omega) = z \cos \varphi_z$$

e se $\bar{z} \neq 0$

φ_z :

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_z = \frac{R(\omega)}{z}$$

$$\sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Da EXP ad ALGEBRICA

$$R = z \cos \varphi_z$$

proiezione modulo lungo x

$$X = z \sin \varphi_z$$

proiezione modulo lungo y

$$\Rightarrow \tan \varphi_z = \frac{X}{R}$$

$$\varphi_z = \arctan \frac{X}{R}$$

impedenza bipolo

PROBLEMA

$$\bar{z} = z e^{j\varphi_z}$$

nota $i(t)$,
 $I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

si determina $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$

nota la corrente che passa nel bipolo, determino la tensione da applicare al bipolo per far scorrere quella corrente

Passo ai Fourier

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

Per def di impedenza

$$\Rightarrow V_m e^{j\varphi_v} = z e^{j\varphi_z} I_m e^{j\varphi_i} = z I_m e^{j(\varphi_i + \varphi_z)}$$

$$\Rightarrow v(t) = z I_m \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

$$\begin{cases} V_m = z I_m \\ \varphi_v = \varphi_i + \varphi_z \end{cases}$$

Per far scorrere i(t) devo applicare una tensione di modulo $z I_m$ la cui fase e' $\varphi_i + \varphi_z$

$$I_m = \frac{V_m}{z}$$

$$\varphi_v = \varphi_i + \varphi_z \Rightarrow \varphi_i$$

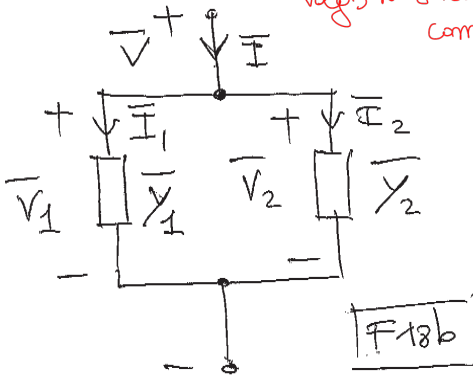
$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$$

FINE LEZ 17/04

• Le regole per il calcolo delle impedenze e ammettenze sono perfettamente analoghe a quelle per il calcolo delle resistenze equivalenti; ad esempio, per due bipoli in parallelo si ha

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \bar{V}, \text{ quindi } \bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$$

*valgono stesse regole
combinazione serie
in parallelo*



*ammettenze equivalenti, somma
ammettenze*

Impedenza, Numero complesso, NO FASORE



- Forma algebrica:

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

dove $R(\omega)$ in Ohm e' detta resistenza mentre $X(\omega)$ in Ohm e' detta reattanza

-

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

dove $G(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta conduttanza mentre $B(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta suscettanza

- formule di trasformazione: si ha

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX}$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

quindi

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- studiare anche le trasformazioni inverse

Posso solo usare Relop. costitutive e KI con Fourier

20/04

Per trovare la corrente in regime sinusoidale del mio circuito

conoscendo corrente, ho

in forma esponenziale

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{Y} = Y e^{j\varphi_Y}$$

adesso

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_Z}$$

impedenza

argomento dell'impedenza

? tensione per far scorrere questa corrente nel bipolo?
 da applicare
 ? $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$

$$= Z I_m \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_Z)$$

Formula inversa

$$\begin{cases} V_m = Z I_m \\ \varphi_v = \varphi_i + \varphi_Z \end{cases}$$

se conosco impedenza, e immediato trovare la tensione da applicare

conosco invece la tensione, voglio trovare la corrente che fluisce nel bipolo

Conosco $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V}$$

$$\Rightarrow I_m e^{j\varphi_i} = Y e^{j\varphi_Y} V_m e^{j\varphi_v}$$

in forma exp

$$\Rightarrow i(t) = Y V_m \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_Y)$$

Corrente che percorre il circuito
 $I_m = Y V_m$
 $\varphi_i = \varphi_v + \varphi_Y$

$$Z = \frac{1}{Y}$$

$$\varphi_Y = -\varphi_Z$$

Ricordando poiché $Y = \frac{1}{Z}$

$$Y e^{j\varphi_Y} = \frac{1}{Z e^{j\varphi_Z}} \text{ Scriviamo}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_Z)$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z}$$

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_Z$$

FAMOSA

corrente che percorre bipolo, di cui conosco impedenza

In fatti per esempio

R-L serie

conosco V applicata, voglio I

impedenza in serie

Somma impedenze, R positivo

Forma exp

$$\bar{Z}_{RL} = R + j\omega L$$

$$= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}} = Z_{RL} e^{j\varphi_{Z_{RL}}}$$

Applicata Tensione: $\frac{V_m}{Z}$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_v - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_Z$$

arctg di R positivo, lo quadrato

impedenza che offre al circuito il rapporto della corrente dovuta sui la res. che incontro.

- $R, \bar{z} = R - \frac{j}{\omega C}$ For $\bar{z} = -\arctg(\frac{1}{\omega CR})$ in un RL, Ampiezza Corrente
 lineare da Resistor e Condens.
 Se siamo in un circuito R-C
 combinazione da Resistor e Condensatore
 $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos\left(\omega t + \varphi_v + \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ impedenza circuito RC
 $\arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$ corrente in anticipo
 $\varphi_z = -\arctg \frac{X_C}{R}$ corrente in ritardo in ritardo

Proviamo Impedenza di un BIPOLO

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

usando forma esponenziale Impedenza = rapporto tra $\bar{V}$ e $\bar{I}$

$$Z e^{j\varphi_z} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

Modulo impedenza = rapporto tra V e I che fluisce nel bip.

$$\Rightarrow \bar{Z} = \frac{V_M}{I_M} \frac{\text{espresso tensione}}{\text{espresso corrente}} \quad \varphi_v - \varphi_i = \varphi_z$$

Lo sfasamento tensione-corrente è coincidente con l'argomento dell'impedenza

Impedenza di un BIPOLO

φ_z ci sta sfasamento Tensione-corrente

Per le impedenze, uso stessa formula serie/parallelo resistenza, ma con complessi

- Impedenza di tipo Ohmico-Induttivo e capacitivo
 Per def. è il rapporto tra $\bar{V}$ e $\bar{I}$ del bip
 in forma algebrica

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

Scriviamo impedenza in forma algebrica

e consideriamo $R(\omega) > 0 \leftarrow$ Bipolo passivo $R(\omega) > 0$ come pot. attiva...

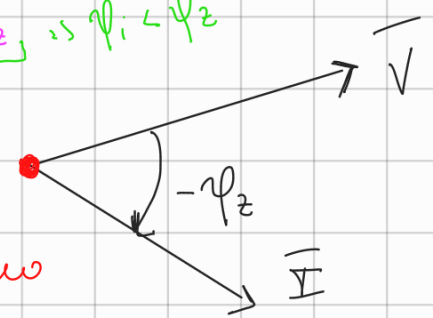
$$\varphi_z(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

φ_z angolo compreso tra -90° e 90°
 dipende dal segno di $X(\omega)$
 $R(\omega)$ positivo, siamo nel 1° o 4° quadrante
 $\leftarrow$ positivo

$\rightarrow X$ positivo, R positiva

1) $X(\omega) > 0$ [angolo $0-90^\circ$, 1° quadrante] $\varphi_z(\omega) \in (0, \frac{\pi}{2})$

ho una φ_z positiva
ed essendo $\varphi_v = \varphi_i + \varphi_z$
 $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z \Rightarrow \varphi_i < \varphi_z$



se φ_z nel 1° quadrante,
la corrente è in ritardo
di un angolo tra $0-90^\circ$
rispetto alla Tensione

in un bipolo
ohmico-induttivo

lo chiameremo

Impedenza di Tipo ohmico-induttivo
= parte reale è positiva e parte imag.
è positiva $\Rightarrow$ implica corrente
in ritardo

In un bipolo ohmico-induttivo
la corrente è in ritardo di un
angolo fra 0 e 90° rispetto
alla Tensione

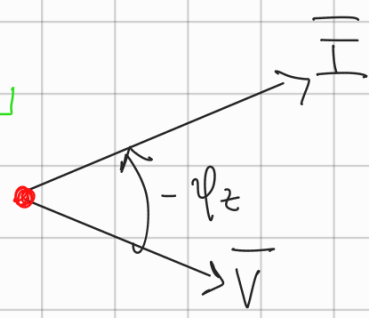
si verifica Percepzione
in un RL

2) $X(\omega) < 0$ Caso 2

$\varphi_z = R - j \frac{1}{\omega C}$... è nel 4° quadrante

$\varphi_z(\omega) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$
positivo



Impedenza ohico-induttivo
= parte reale positiva, p. imag. negativa

esempio circuito RC $Z_c = -j \frac{1}{\omega C}$

Caso ohmico-capacitivo.
la corrente è in anticipo
di un angolo tra 0 e 90°
rispetto alla Tensione

Caso puramente resistivo $\Rightarrow$

Se $X(\omega) = 0$, impedenza puramente Reale, resistenza

* fine Recap

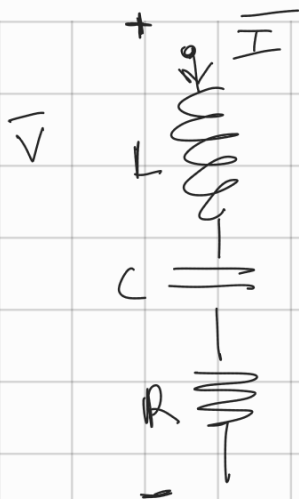
$\hookrightarrow$ E allora Tensione e corrente sono
in fase tra loro

Circuiti Risonanti RLC in serie (Da Fare caso Parallelo)

Siamo in Regime sinusoidale

calcia direttamente
del circuito
impedenza in base ad ω

"mele" prima capacita, poi si capreano, poi mele induttanza



• $\bar{Z}_L = j\omega L = jX_L$ *reattanza induttiva*

• $\bar{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$ *reattanza capacitiva*

• Resistore: impedenza R

X_L e X_C si compensano

Sono in serie, sommo le impedenze

• $\bar{Z}_{RLC} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C)$

Parte reale costante la P. immaginaria $= R(\omega) + jX(\omega)$
e tendono a cancellarsi tra loro. infatti induttore ha reattanza positiva, C reatt. negativa, e dipendono da ω

$\Rightarrow$ c'è un effetto di cancellazione fra L e C

Per questo

ωX_L e X_C si cancellano! $X_L = X_C$

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$\omega L \omega C = 1$

$\omega^2 LC = 1$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

• $\omega_0 \stackrel{A}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}$ rad/sec
è una pulsazione

Pulsazione di risonanza del circuito RLC

Puls. in cui $X_L = X_C$

pulsazione in cui le reattanze sono uguali tra loro

Reattanze che crescono con ω

Reattanze che decrescono con ω

$X_L \geq X_C \Leftrightarrow \omega \geq \omega_0$

$\omega > \omega_0$, prevale X_L , è oblio induttivo

$\omega = \omega_0$ si cancellano

$\omega < \omega_0$ prevale C è oblio capacitivo

$\omega > \omega_0$ caso oblio - induttivo
 $\omega < \omega_0$ caso oblio - capacitivo

$\omega \rightarrow 0$ il condensatore tende a bloccare la corrente, tende ad un C.A.

per $\omega \gg 0$, è l'induttore che tende a bloccare la corrente

Esercizio

Conosco I

potenza $P_i = 0$, Corrente in fase con V

V da applicare per far passare corrente I

1 $\omega < \omega_0$

$\Rightarrow X_C > X_L$

mi "costa" la tensione

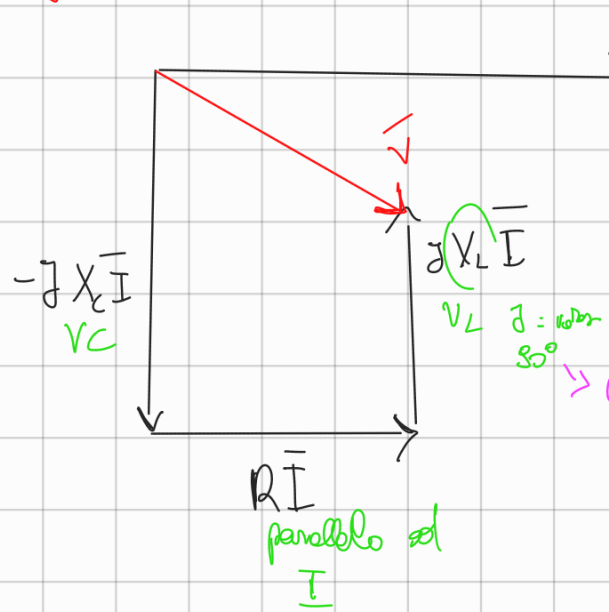
mi aspetto che la corrente sia in anticipo sulla tensione, un

Comportamento ohmico-capacitivo

$$\vec{V} = R\vec{I} + \underbrace{jX_L \vec{I}}_{\vec{V}_L} - \underbrace{jX_C \vec{I}}_{\text{Tensione sul condensatore } \vec{V}_C}$$

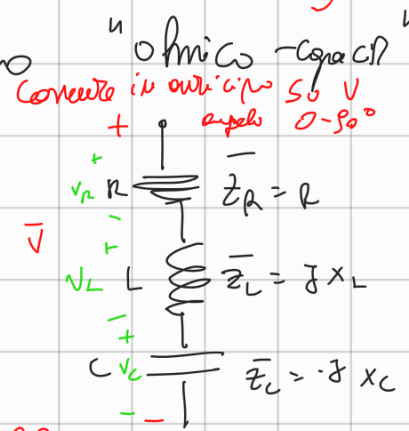
li tratto come se fossero 3 resistori
 $X_C > X_L$
 ricordo che

Diagramma Fasoriale

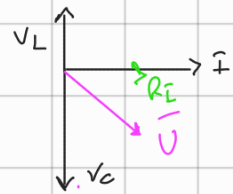


Prevalenza nella serie il condensatore

$X_C > X_L$ Comportamento "ohmico-capacitivo"
 $-j = \text{rotaz. di } 90^\circ \text{ in senso negativo}$
 $\Rightarrow$ l'angolo $V_L < V_C$



Tensione = somma vettoriale

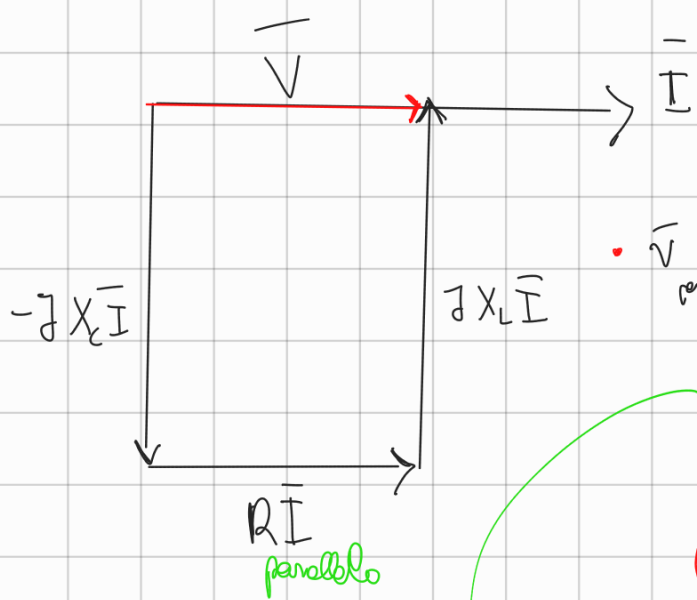


Condensatore Prevalente nella Serie, Comportamento Resistivo

2 $\omega = \omega_0$

L e C si cancellano perfettamente

$\vec{V} = R\vec{I} + jX_L \vec{I} - jX_C \vec{I}$
 Comportamento puramente resistivo
 $X_L = X_C$

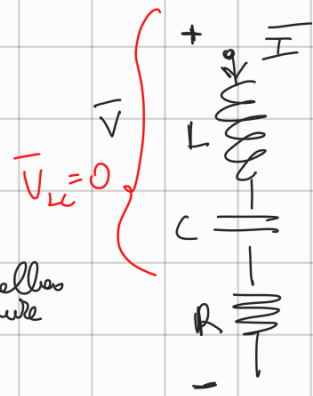


V_L e V_C hanno stessa lunghezza

$\vec{V}$ tensione da applicare è in fase con la corrente.

$$\vec{V}_L + \vec{V}_C = 0$$

LC alla puls. di risonanza ω_0 sono un C.C. impedenze uguali e opposte, si cancellano perfettamente



Impedenze uguali e opposte
 Tra L e C la Tensione tra loro è 0, ma il gruppo risonante conserva qualcosa, ma V_L e V_C sono grandi.

$\Rightarrow$ LC si scambiano energia, solo esternamente non noto nulla, in risonanza possono esserci problemi

3

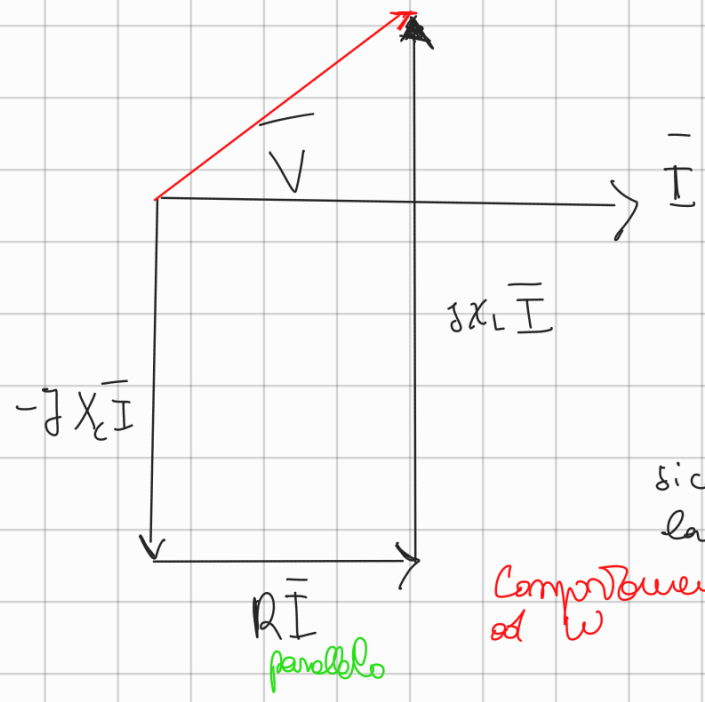
Prevalenza induttiva
 Caso $\omega > \omega_0$

$$X_L < X_C$$

che si comporta come
 $\bar{V} = RI + jX_L \bar{I} - jX_C \bar{I}$
 $X_L > X_C$

Comportamento ohmico-induttivo,

Prevalenza L



Corrente in ritardo rispetto alla Tensione di un angolo tra 0 e 90° , Comportamento Ohmico induttivo.

In generale, se in un circuito a s.s. L e C c'è sempre una puls. particolare sotto la quale il circuito si comporta in un modo (ohmico-capacitivo) e sopra la quale si comporta in un altro.

Comportamento cambia drasticamente in base ad ω

Vediamo dunque ora la risposta in frequenza

Lui si comporta come un filtro passa-banda.

dati un RLC, c'è sempre un ω particolare

Corrente non passa per $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$

RLC è un parabola

Applico Tensione, vedo corrente

Risposta in frequenza di un RLC serie

applico Tensione a RLC, l'impedenza, ω picco, $2-50^\circ$, c'è l'impedenza costante $\omega \rightarrow 0$, L non fa passare corrente, c'è solo ω per cui passa bene corrente

anno esprimono o modulo

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$$

RLC circuiti selettivi, cambiano comportamento in base ad ω

dipendenti da ω

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{Z_{RLC}(\omega)}$$

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v - \varphi_{Z_{RLC}}(\omega)$$

La scriviamo in forma esponenziale

Fase e apêndice
dip. da L

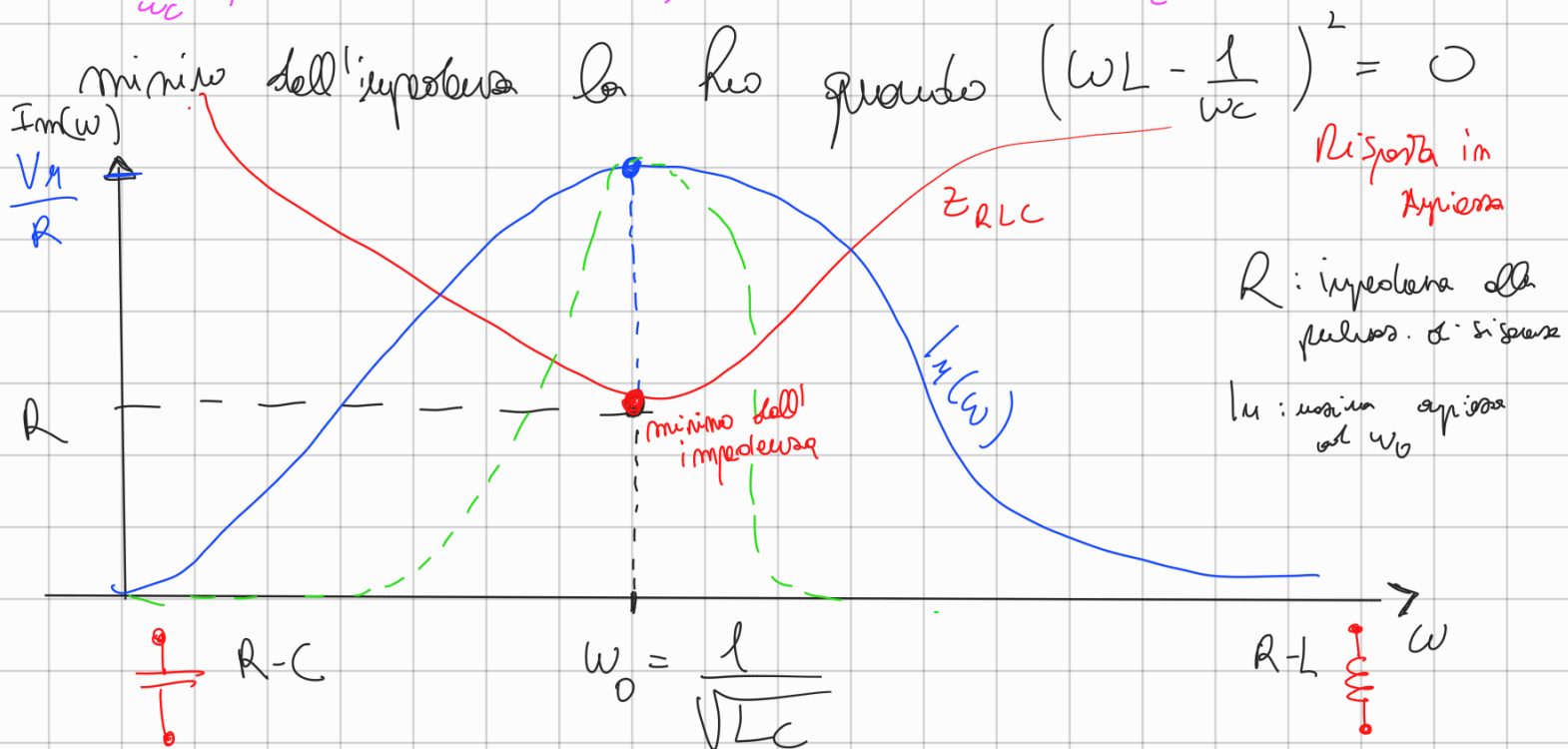
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

//
Superimpose
0

$w \rightarrow 0$ $-\frac{1}{w_f}$ ² $\text{prevalence, Var } \eta \propto \frac{1}{w_f}$

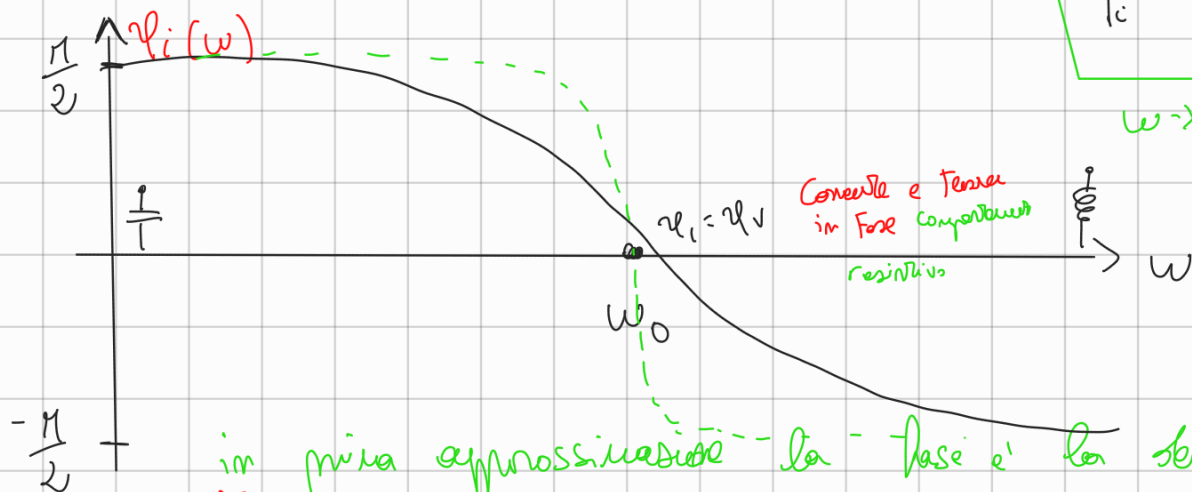
$$w \rightarrow \emptyset, \quad WL \rightarrow \emptyset$$

$$\text{Min } Z = wL = \frac{1}{w_C}$$



• In un circuito RLC Serie abbiamo la MINIMA IMPEDENZA alla PULSAZIONE di RISONANZA ω_0 e a ω_0 l'ampiezza della CORRENTE è MASSIMA

$$\varphi_c(\omega) = \varphi_v - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



Converte e Tenner
in Fore Komponenten
resistivo

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\omega} \rightarrow \infty \\ \arctan \infty = \pi/2 \\ = \pi/2 + \pi/2 \\ \omega_0, \arctan 0 = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \arctan \infty \\ \pi/2 + \pi/2 \end{aligned}$$

in prima approssimazione la fase è la derivata più alta

ω_0 seleziona la banda passante, dove ho distorsione di Fase, non lineare
 E' molto importante vedere quanto è stretta la "curva"
 stretta della curva,
 più il filtro è stretto

ma più è stretto e più allungo

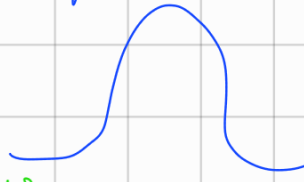
più è stretto, meno è la banda passante

se ha poca perdita, filtro molto selettivo,
 ha anche molto perdita su ω_0
 molta distorsione di fase

più è stretta e
 Filtro molto
 selettivo

sfasamento

↓
 dipende dal
 fattore qualità
 del nostro filtro



In parallelo il circuito è un elimina-banda, per l'inverso
 degli ω_0 possibili

conoscere per
 prima ω_0

Servo ad eliminare
 certe frequenze ω

⇒

RLC serie offre minimo
 impedenza ad ω_0 , e l'ac-
 quista corrente massima

$\omega \rightarrow 0$, Comportamento capacitivo,

$\omega = \omega_0$ Comportamento resistivo,

$\omega \gg \omega_0$ Comportamento induttivo

ω_0

IMPORTANTE

• Potenza regime sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

introduco

VALORE QUADRATICO MEDIO Di una grandezza sinus.

Media di un intervallo
 pari ad un periodo,
 del quadrato
 della sinusoidale

$$= \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v) dt$$

operatore di media
 su periodo T

$$= \frac{V_M^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_v)}{2} dt$$

Costante

2ω ,
 due oscillazioni complete
 in un periodo

RC
 1/4

φ_v

conoscere anticipo
 di $\pi/2$

↓

$$\int_0^T = \frac{1}{2}T - \frac{1}{2} \cdot 0$$

2 oscillazioni, l'integrale della media è 0

$$V_{g.m.} = \frac{1}{2} V_M^2$$

valore quadratico medio, $\frac{1}{2}$ apice tensione²

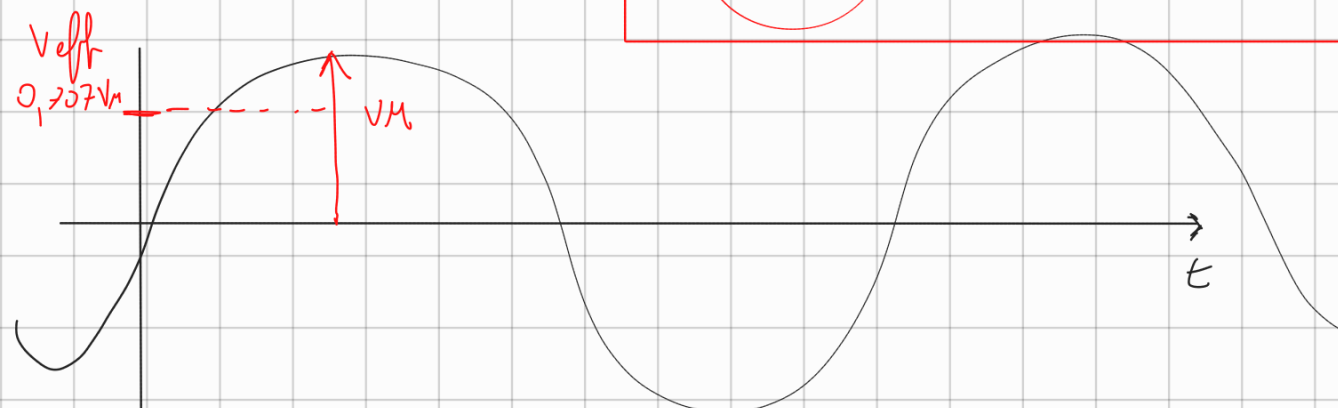
Valore Efficace

V_{rms} root mean square

$$V = V_{eff} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v) dt}$$

$$= \frac{V_M}{\sqrt{2}} \approx 0,707 V_M$$

30% più basso della tensione



$V_{eff} \approx 30\%$ in meno dell'apice della sinusoide

Come lo usiamo per la Potenza?

~~Potenza in Regime Sinusoidale~~

tensione applicata a R

non molto più tanto non cambia una legge

R ideale

applico $v(t) = V_M \cos(\omega t)$

in regime sinus.

per $i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_M}{R} \cos(\omega t)$

Scambi energetici: quante e spesso o Tensione sinusoid.

Applico tensione, posso connettere, si sviluppa potenza e la cui la dissipa ist. in calore

Pot istantanea

in reg. sinusoid

La Pot istantanea varia in f. del tempo

R è un puro dissipatore dissipa istant. tutta l'energia che arriva la potenza

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \text{ W}$$

Pot elettrica che entra ist. in calore nel resistore

Pot. elettrica che viene estratta nel resistore V e

il tempo

- Ci interessa la potenza attiva, non la Pot istantanea che varia nel tempo, vogliamo una costante

DEF POTENZA ATTIVA = media su un periodo della Pot istantanea

POTENZA MEDIA

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Watt

Media su un periodo della potenza istantanea

Operaz. media
di un periodo

o Pot reale, Pot utilizzabile

=> nel caso del resistore

Valore quadratico medio della Tensione

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_M^2 \cos^2(\omega t)}{R} dt = \boxed{\frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}}$$

se posto R fuori, ho Val. quadratico medio V

$$= \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M$$

$$= \frac{V_{eff}^2}{R} = R I_{eff}^2 = V_{eff} I_{eff} \text{ Watt}$$

richi

$$\frac{V_M}{\sqrt{2}} = V_{eff} \Rightarrow \frac{V_M^2}{2} = V_{eff}^2$$

$$R = \frac{V_M}{I_M}$$

espresso equiv
 $V_M^2 = R^2 I_M^2$

• Potenza attiva, cosa significa? se moltiplico per T periodo

$\underbrace{P \cdot T}_{\text{e' un'energia}}$ = $\int_0^T p(t) dt$ Joule E' una energia

energia elettrica assorbita da R in un intervallo di tempo pari
 ad un periodo T della sinusoide

P potenza reale o utilizzata
 Potenza attiva

Energia in un resistore

Conosco P. attiva conosco
 periodo, posso
 energia che viene trasformata
 in maniera irreversibile

Se conosco P attiva, Posso di trovare l'energia che viene trasformata dal resistore in maniera irreversibile, in quanto viene trasformata in calore o altre forme di energia

La Potenza attiva e' legata alla TRASFORMAZIONE da energia elettrica ad un'altra forma di energia (calore, en. luminosa, meccanica ecc.)

• Pot. attiva: Trasformazione irreversibile da energia elettrica ad altre forme (calore, energia luminosa...)

Cos'è un kW/h

Es. Stufa da $P = 1 \text{ kW}$ attiva, un resistore

liberazione di potenza

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 20 \times 10^{-3} \text{ sec} = 20 \text{ ms}$$

Quanta energia assorbe la stufa in un periodo, energia che trasforma in calore?

$$T \cdot P = 20 \times 10^{-3} \times 10^3 = 20 \text{ joule}$$

assorbe 20J in un periodo

ogni 20ms, che trasforma irreversibilmente in calore

in un periodo

la nostra stufa in un periodo (20ms) assorbe 20J e li trasforma in calore

E in 1 secondo? 1sec. = 1000 ms, sono 50 periodi = f

$$50 \times 20 = 1000 \text{ J in 1 secondo}$$

stufa assorbe 1000J in un secondo

def. kWh

energia elettrica in un ora

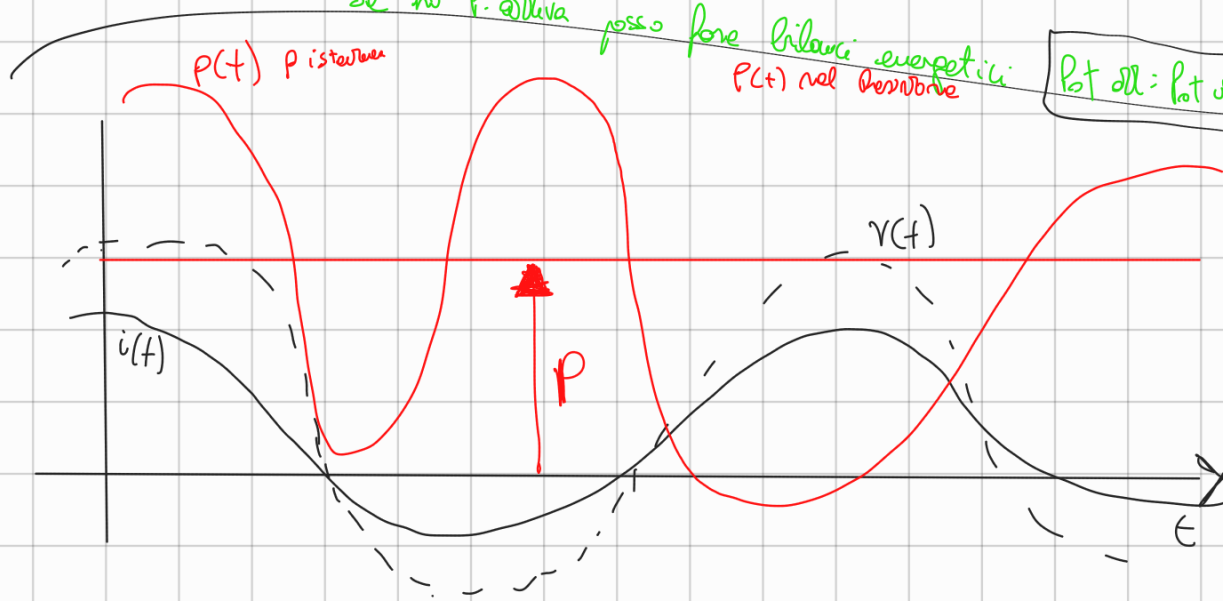
quanta energia elettrica si trasforma in calore in un ora

$$3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6 \text{ Joule} \quad \text{kWh}$$

Se ho P attiva

posso fare bilanci energetici: P(t) nel tempo

$$P_{tot} \text{ att} = P_{tot} \text{ utile} = P_{\text{residuo}}$$



v(t) tensione applicata

i(t) corrente in fase col flusso nel R

- $i(t)$ e $v(t)$ sono in fase, hanno sempre stesso segno, l'istante $p(t)$ ha sempre segno positivo
- ⇒ Resistore assorbe sempre pot istantanea ≥ 0
- $p(t)$ ha anche pulsaz. doppia

P_{attiva} = valor medio della potenza istantanea

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad \text{Watt} \quad v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{V_M \cos(\omega t)}{R} \quad p(t) = \frac{V_M^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

se ne faccio la media

$$P_{attiva} = \frac{1}{RT} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_M^2}{RT} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{V_{eff}^2}{R} = I_{eff}^2 R$$

- *Forma esponenziale:* $P_{attiva} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ *Joule* $\frac{1}{2} V_m^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} V_m$ *Valid*

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z}$$

dove Z in Ohm e' il modulo dell'impedenza e φ_z e' l'argomento

•

$$\bar{\mathbf{Y}} = Y e^{j\varphi_y}$$

dove Y in Ohm^{-1} e' il modulo dell'ammettenza e φ_y e' l'argomento

- *formule di trasformazione:*

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

Se ho l'impedenza
e' facile trovare corrente e tensione

- Ulteriori trasformazioni:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e, se $\bar{\mathbf{Z}} \neq 0$, φ_z e' tale che

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad \sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

quindi

$$\tan \varphi_z = \frac{X}{R} \quad \varphi_z = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) \text{ se } R_{ps.R}$$

- viceversa

$$R = Z \cos \varphi_z; \quad X = Z \sin \varphi_z$$

- studiare le rimanenti formule di trasformazione

- Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale** *come si calcola $\bar{Z}$*
- Consideriamo un bipolo di cui si conosce $\bar{\mathbf{Z}}$ o $\bar{\mathbf{Y}}$ *impedenza del bipolo*
 - nota $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ vogliamo trovare $v(t)$; si ha

$$\underline{\bar{\mathbf{V}}} = V_M e^{j\varphi_v} = \underline{\bar{\mathbf{Z}}} \bar{\mathbf{I}} = Z e^{j\varphi_z} I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi

$$\underline{V_M = Z I_M}; \quad \underline{\varphi_v = \varphi_i + \varphi_z}$$

e

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

- nota $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ vogliamo trovare $i(t)$; si ha

$$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{Y}\bar{V} = Y e^{j\varphi_y} V_M e^{j\varphi_v}$$

quindi

$$\underline{I_M = Y V_M}; \quad \underline{\varphi_i = \varphi_v + \varphi_y}$$

e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y)$$

- possiamo anche scrivere

$$i(t) = \underline{I_M} \cos(\omega t + \varphi_i) = \underline{\frac{V_M}{Z}} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$$

$$I_M = \frac{V_M}{Z} \quad \varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$$

Osservazione: si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}}$$

e quindi

$$Z = \frac{V_M}{I_M}; \quad \varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

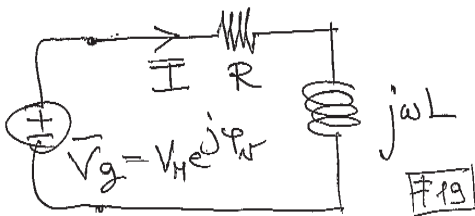
- il modulo dell'impedenza coincide con il rapporto delle ampiezze di tensione e corrente del bipolo; l'argomento dell'impedenza coincide con lo sfasamento tensione corrente
- studiare formule analoghe in relazione all'ammettenza

- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RL ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

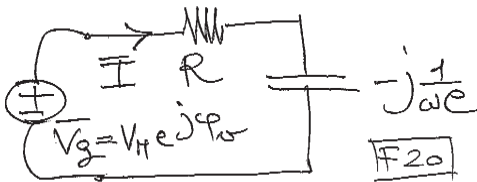


- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RC ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctan(1/(\omega CR))}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$



alliamo un bipolo d'impedenza

Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo

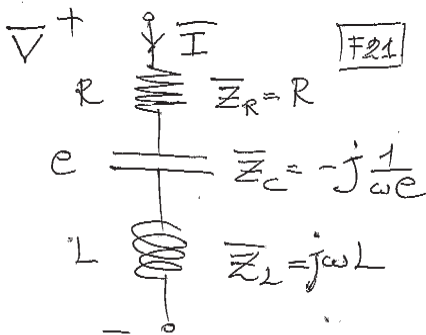
- Consideriamo l'impedenza

$$\bar{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

e supponiamo che il bipolo sia passivo ($R(\omega) > 0$)

- l'impedenza è di tipo *ohmico-induttivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \geq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente è in ritardo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- l'impedenza è di tipo *ohmico-capacitivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \leq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente è in anticipo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- come vedremo, l'impedenza di un bipolo può essere di tipo ohmico induttivo per certi valori di ω e di tipo ohmico capacitivo per altri valori di ω

- **Circuiti risonanti *RLC***
- Consideriamo il circuito risonante *RLC* serie in figura in regime sinusoidale a pulsazione ω



- l'impedenza vale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

- c'è un effetto di cancellazione fra X_L e X_C

Def. • *pulsazione di risonanza* ω_0 : pulsazione alla quale $X_L = X_C$, cioè' $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$; quindi

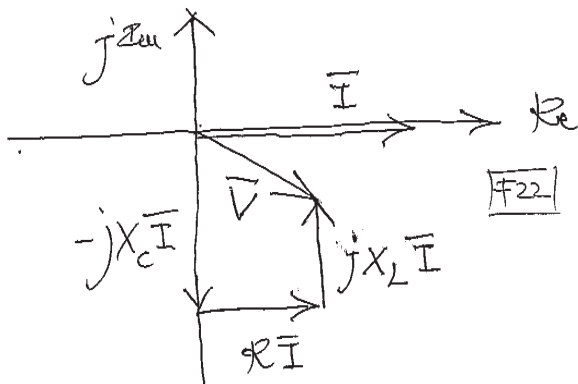
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

• *diagrammi fasoriali*. Supponiamo scorra una corrente $\bar{I}$ con $\varphi_i = 0$; vogliamo costruire graficamente la tensione $\bar{V}$ da applicare per far scorrere tale corrente; si ha

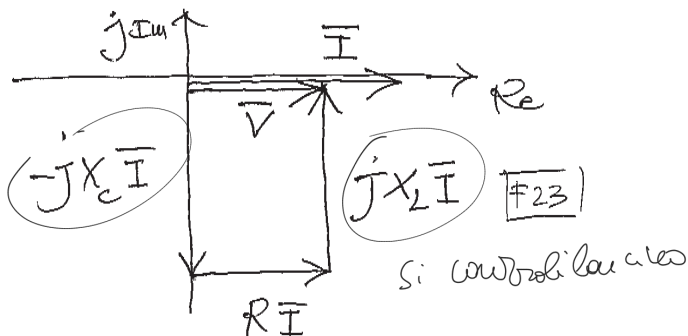
$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C + \bar{V}_L = R\bar{I} - jX_C\bar{I} + jX_L\bar{I}$$

$\bar{V}$ da applicare per far scorrere $\bar{I}$

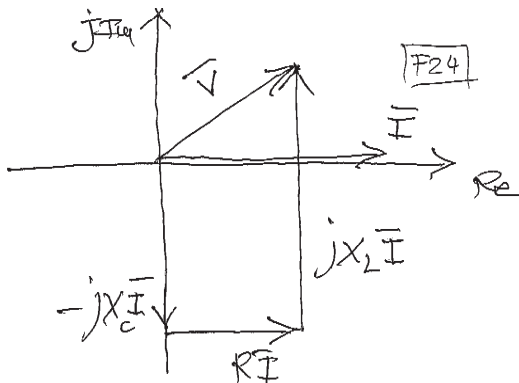
- 3 casi diversi
- Caso 1. $\omega < \omega_0$; in tal caso $X_L < X_C$, $X < 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico capacitivo (corrente anticipa tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Caso 2. $\omega = \omega_0$; in tal caso $X_L = X_C$, $X = 0$ e $\bar{\mathbf{Z}} = R$; quindi il comportamento e' di tipo resistivo (corrente in fase con la tensione)



- Caso 3. $\omega > \omega_0$; in tal caso $X_L > X_C$, $X > 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico induttivo (corrente ritarda rispetto alla tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Notare che un circuito RLC cambia drasticamente il suo comportamento al variare di ω passando da un comportamento ohmico-capacitivo ad uno resistivo e infine a uno ohmico-capacitivo

- Si ha

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$$

con

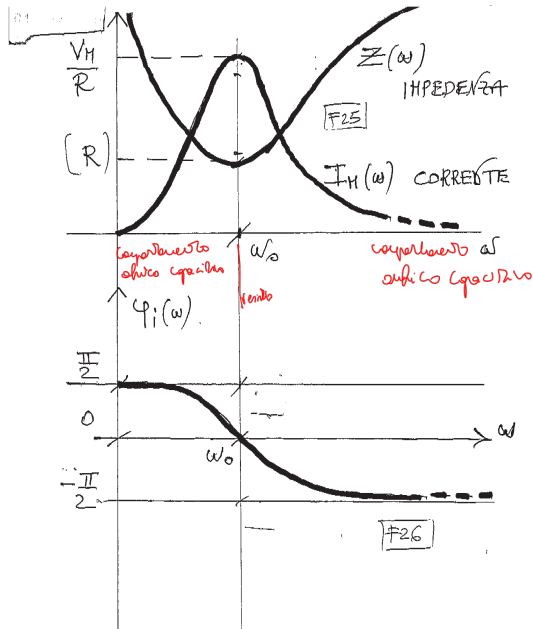
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi_z(\omega) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- la corrente assorbita in regime sinusoidale vale $i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$ con

$$I_M(\omega) = \frac{V_M(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_M(\omega)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

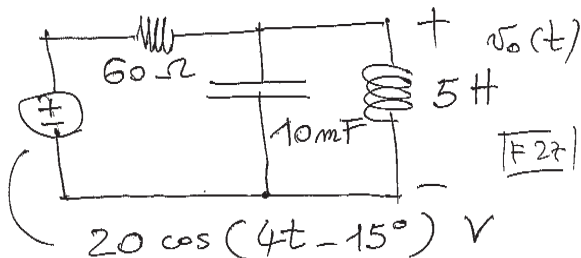
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v(\omega) - \varphi_z(\omega) = \varphi_v(\omega) - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- *risposta in frequenza*; assumiamo per semplicità $V_M(\omega) = V_M$ e $\varphi_v(\omega) = 0$ e disegniamo gli andamenti della risposta in ampiezza $I(\omega)$ e in fase $\varphi_i(\omega)$; riportiamo anche per convenienza $Z(\omega)$

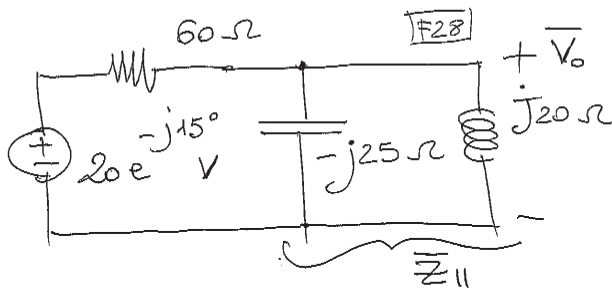


- si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine; notare che un circuito RLC serie offre la minima impedenza alla pulsazione ω_0 di risonanza, pulsazione alla quale l'ampiezza della corrente assorbita risulta massima.

Esempio. Determinare $v_o(t)$ in regime sinusoidale per il circuito in figura.



- Notare che la fase della tensione del generatore e' espressa in gradi invece che in radianti; nei calcoli che seguono dobbiamo comportarci di conseguenza



- Si ha

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ohm}; \quad X_L = \omega L = 20 \text{ Ohm}$$

quindi otteniamo il circuito simbolico in figura che possiamo analizzare con i metodi delle reti resistive; in particolare

$$\overline{Z}_{||} = -j25 || j20 = j100 \text{ Ohm}$$

- dalla regola del partitore di tensione

$$\bar{\mathbf{V}}_o = 20e^{-j15^\circ} \times \frac{j100}{60 + j100} = 17.15e^{j16^\circ} \text{ V}$$

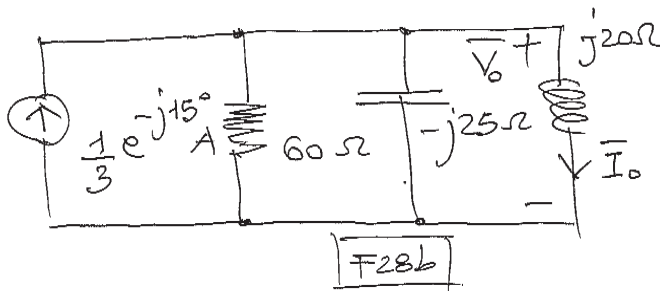
- la tensione in regime sinusoidale vale quindi

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 16^\circ) \text{ V.}$$

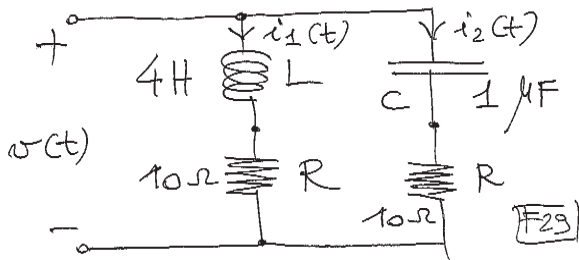
- Metodo alternativo: trasformo il generatore reale di tensione in uno reale di corrente a trovo $\bar{I}_o$ con la regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_o = \frac{e^{-j15^\circ}}{3} \frac{\frac{1}{j20}}{\frac{1}{60} + \frac{1}{-j25} + \frac{1}{j20}}$$

e poi $\bar{V}_o = j20\bar{I}_o$; verificare che si ottiene lo stesso risultato precedente



- **Esempio.** Determinare ω in modo che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in regime sinusoidale.



- da cui $X_L = X_C$ ossia

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/sec}$$

- problema: disegnare un diagramma fasoriale alla ω ottenuta assumendo $\varphi_v = 0$ e interpretare il risultato.