

Vedi da Sos. 10 per appunti

Potenza in regime sinusoidale

Mauro Forti

October 21, 2020

Potenza in regime sinusoidale

- Valore efficace di una grandezza sinusoidale
- Data $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$, il suo valore quadratico medio e'

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = V_M^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{V_M^2}{2}$$

- dove la media e' calcolata sul periodo $T = 2\pi/\omega$ della sinusoide
- il valore efficace ('root mean square (rms)') e' definito come

$$V_{\text{rms}} = V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \simeq \underline{\underline{0.707 V_M}}$$

- e' utile per esprimere potenze in regime sinusoidale
- se $V_M = 310 \text{ V}$ si ha $V = 220 \text{ V}$

valore quadratico medio
di una sinusoide di ampiezza V_M e' $\frac{V_M}{\sqrt{2}}$

Resistore si comporta in regime

Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C

con la sua potenza
effettiva

• Resistore Ideale

• Consideriamo un resistore ideale R soggetto a

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e quindi attraversato da $i(t) = V_M \cos(\omega t)/R$

• la potenza istantanea assorbita in regime sinusoidale in Watt e'

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \geq 0$$

Definiamo **POTENZA ATTIVA** come potenza media in un periodo

• consideriamo adesso la *potenza media* assorbita da R in un *un periodo* periodo T

POTENZA ATTIVA

Valore quadratico medio

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{V_M^2}{2}}$ W

quindi

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \boxed{\frac{1}{2} V_M I_M} = \frac{V^2}{R} = R I^2 = V I > 0$$

con V_{eff}

• la quantità P e' detta potenza attiva e si misura in Watt

Se moltiplico Potenza attiva per un periodo

- si ha

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt = E = \text{energia in Joule}$$

alla potenza attiva è associato un prof. di energia non reversibile

- quindi E in Joule è l'energia elettrica ~~assorbita~~ dal resistore in un periodo; tale energia è trasformata in altre forme di energia dal resistore (ad esempio, calore, luce, etc.)
- se conosco la potenza attiva posso trovare quindi l'energia elettrica trasferita al bipolo in modo irreversibile; la potenza attiva viene anche detta potenza reale o potenza utilizzata

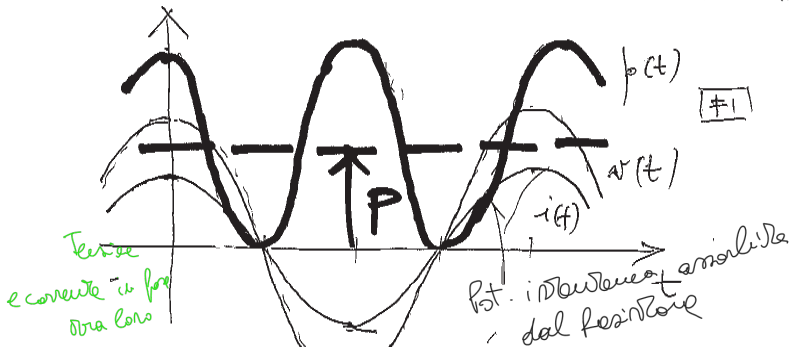
- consideriamo ad esempio una stufa da 1 kW alimentata alla frequenza $f = 50$ Hz. Il periodo è $T = 20$ msec. L'energia assorbita dalla stufa e trasformata integralmente in calore in un periodo a' pari a $1000 \times 20 \times 10^{-3} = 20$ Joule. L'energia assorbita in un secondo vale $50 \times 20 = 1000$ joule e quella assorbita in un'ora è $3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6$ Joule, che corrisponde per definizione a 1 kWh (chilowattora)

$$P_{OT} \text{ ATTIVA} = P_{OT} \cdot REALE = P_{OT} \text{ UTILIZZATA}$$

Potenza attiva, $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$, potenza media in un periodo

- la figura che segue riporta i diagrammi di $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ e la quantità P .

$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt$, energia el. assorbita in un periodo



$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m, \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}, \frac{1}{2} I_m^2 R$$

P potenza media assorbita in un periodo

● Induttore ideale

● Sia ancora $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ cosi' che

$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$; allora $= -\omega L \sin(\omega t + \varphi_i) =$

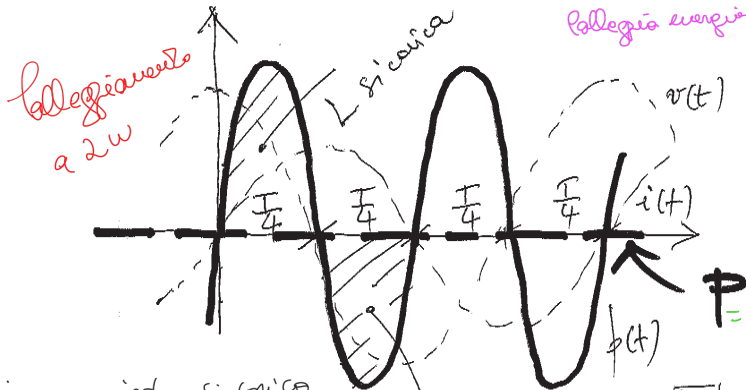
$$\varphi_i = \varphi_v - \pi/2 \quad L_M = \frac{V_M}{\omega I_M}$$

$$p(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{V_M^2}{2\omega L} \sin(2\omega t) \text{ W}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$$

Collegio energia con guai



Collegio energia
a 2ω

si carica

si scarica

in media
non trasferisce
energia ad
un induttore
ideale

$P = 0$ valore
medio

In un periodo si carica
e si scarica 2 volte

INDUTTORE NON ASSORBE POT. ATTIVA

NON DISSIPA, NON PUO' ASSORBIRE IN MEDIA ENERGIA

Lisbeth

$$a \quad v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

Search
Dissipor

il corpo reagiva, la vita indicava
al circolo Come si produce del

Come si produce del
Punto di vista della fot. in repensio:
7 sin

$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \omega \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$$

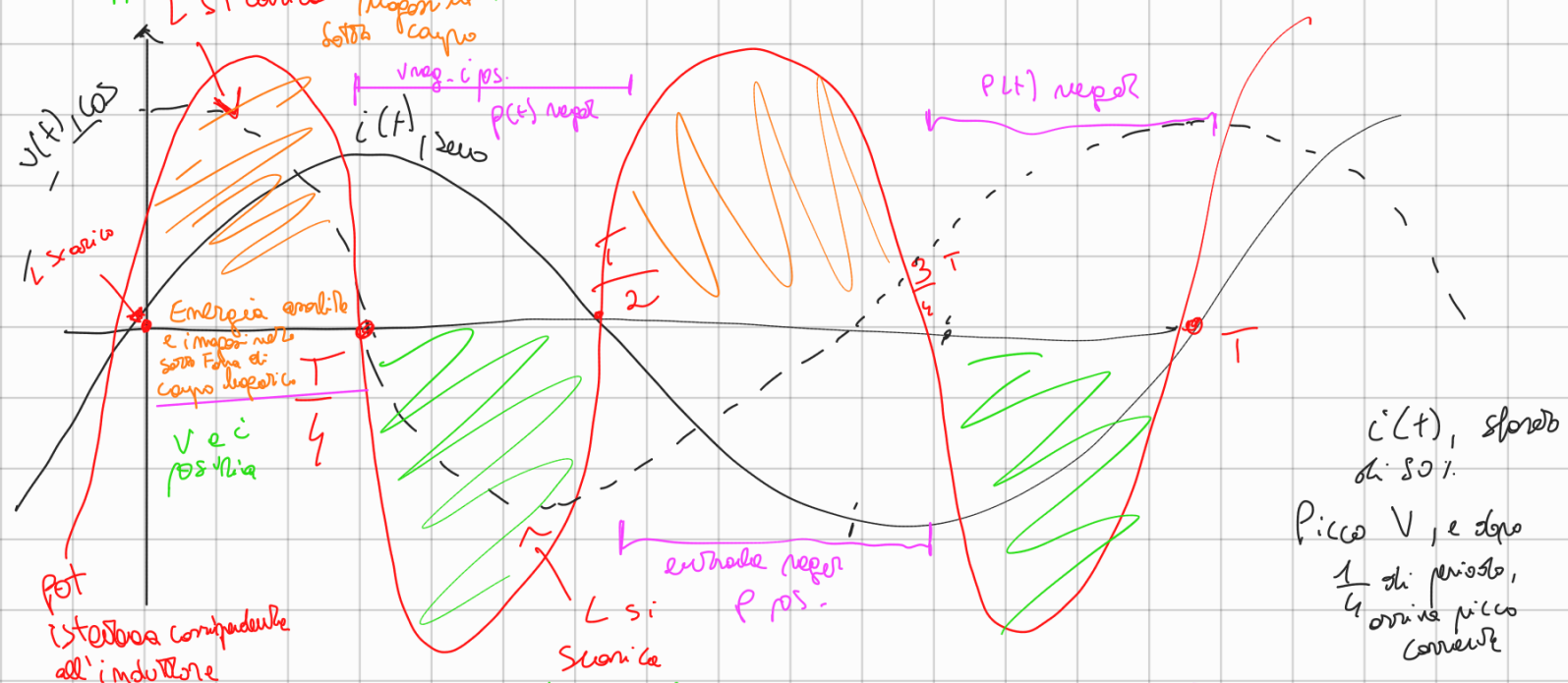
rimbollo 90°
sulla torsione

$$\cos \cdot \sin = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} \sin(2\omega t) \approx 0$$

ω_L
 pssa ~~caricato~~ energia
 applico $\downarrow$ tensione tipo caxxo
 e carica $\rightarrow$ energia

Tensione e corrente sfasati; picco corrente
assorbe dopo $\frac{1}{4}$ di periodo rispetto alla Tensione



$c(t)$, sloved
6.50%.

Picco V, e dopo
 $\frac{1}{4}$ di periodo,
ovvero picco
converso

Area sotto, energia
analizza nel quarto di periodo

- Valori molto basse potenza
Pot. attiva applicata

- Corrente zero, induttore scarico,

- Cemento crasso, pot. istantanea positiva, omide energia
 ↳ Si cola la, eu. ingross. come un corpo
 molle.

○ • Corrente sociale, L si scontra, non indietro
al limite l'energia in ogni

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ Watt}$$

Pot. ist aus

"vall'effia"
energia

INDUTTORE NON ASSORBE POTENZA ATTIVA

Portua ditiu On

L collegio energia tra campo elettrico e campo magnetico

Scambio REVERSIBILE di energia a media nulla su T fra generatore 1 e campo magnetico del'induttore

un periodo *Media del collegamento = 0* *che diventa induttore* *per dare forza di*

- l'energia scambiata 1 per ω va misurata V *perché energia e ω ridà energia*
- Q potenza REATTIVA di L *conta l'energia scambiata collegata, scambiata reversibile, da farla di*

$Q = \frac{1}{2} V_M I_M$ **VAR** " Misura CONVENZIONALE dello scambio reversibile *per ω e campo magnetico* **Più** **Scambi** e **più**

Var = Volt - ampere Reattivi *aumenta corrente nell'induttore*

Cioè trattasi di potenza scambiata ma NON utilizzata

E' importante, da Faradizio, aumentare il modulo della corrente, e se e' troppo serve un Refrattamento.

VAR = potenza scambiata reversibilmente
WATT: pot scambiata irreversibilmente, utilizzata

DIMOSTRAZIONE

$Q_L = 2 \omega E_L$ *media* *energia media su un periodo del campo magnetico* *Potenza reattiva induttore = 2ω Energia Media del campo magnetico dell'induttore*

$Q_L = \frac{1}{2} \omega L I_M^2$ **VAR** *$V_M = \omega L I_M$* *x_L ricordo che*

E_L media = $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i^2(t) dt$ *Energia campo magnetico* *Sostituisco*

= $\frac{1}{2} L \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt$ *e' il valore quadratico medio della corrente* *Vol qual. ωL : $\frac{1}{2} I_M^2$*

= $\frac{1}{4} L I_M^2$ *$\sqrt{\frac{1}{2}}$ ω I_M^2*

La potenza reattiva e' proporzionale all'energia mediamente scambiata su un periodo, e dipende da ω *Più velo. ang. ω Scambi, maggiore Q_L Più e' l'energia media campo magnetico, ω I_M^2*

Media su un periodo dell'energia di Tipo Maxwell $\omega = \frac{1}{4} L I_A^2$

• C ideale

due rispetto induttore

corrente $I_A = \omega C V_M$
e in anticipo di $\pi/2$ rispetto tensione

• $v(t) = V_M \cos(\omega t)$

$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2)$
 $= -\omega C V_M \sin(\omega t)$

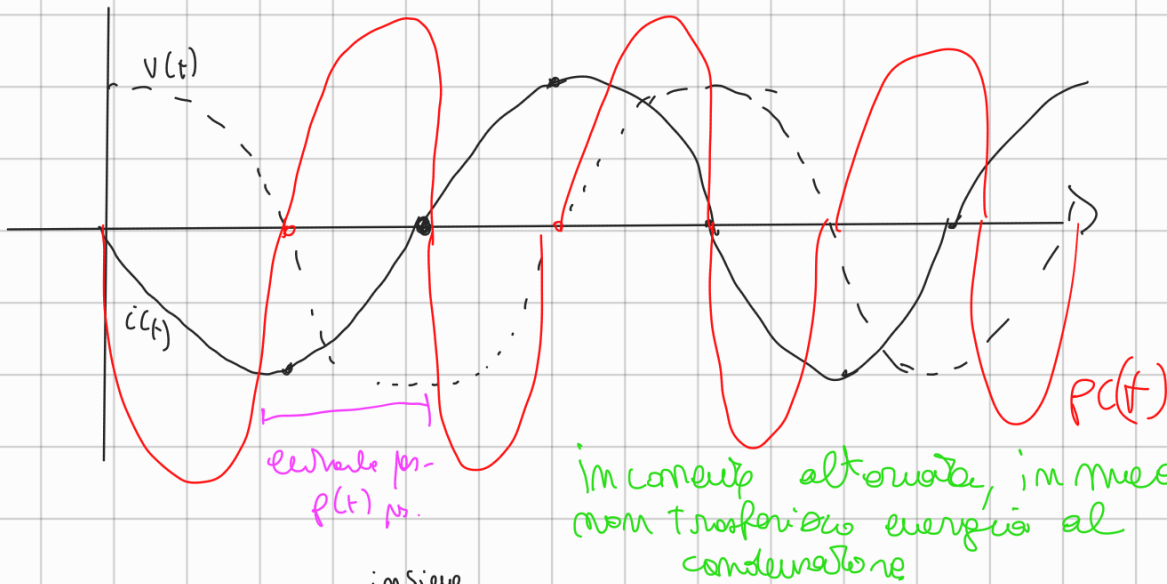
$-\frac{1}{2} \sin(\text{angolo doppio})$

$p_c(t) = v(t) i(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t)$

anche condensatore ha potenza attiva = 0 $\Leftarrow$ P. media su un periodo = 0

VIA

0



$P_c = 0 \text{ W}$

$-\sin(\text{angolo doppio...})$

• dove L si carica, C si scarica e viceversa

• L e C ^{insieme} scambiano energia con generatore
con **Fasi opposte**
Fisicamente

Se in un circuito abbiamo un condensatore e un induttore, e un generatore; negli intervalli dove L si carica, C si scarica... e viceversa

• Se il condensatore si scarica, eroga energia el. al circuito. L'induttore la usa per creare il campo magnetico. Colleggiamente di energia tra di loro

Se ci sono L e C, L'induttore ha bisogno di Potenza Reattiva ($Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M$) per creare il campo magnetico e quindi da il generatore e/o il condensatore se è vicino. **L ha bisogno di Potenza Reattiva per creare campo magnetico**

• I condensatori sono sorgenti di Potenza Reattiva se richiesta.

$\Rightarrow P_c = 0 \text{ W}$

• L C scambiano potenza con fase opposta con il generatore

(corrente Pot reattiva negativa per convenzione)

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M \quad \text{VAR}$$

Potenza reattiva di un condensatore

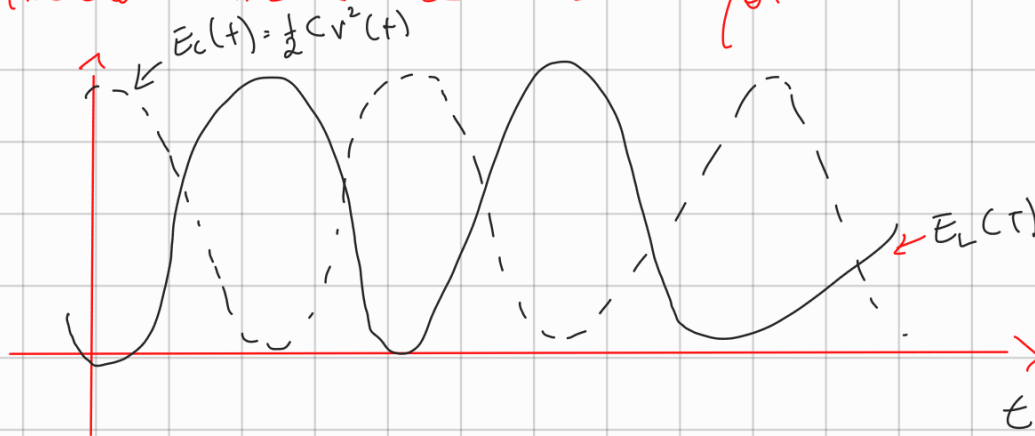
Pot. scambiata ma non utilizzata

- convenzionalmente vediamo il condensatore come sorgente di potenza reattiva

es. $Q_L = 100 \text{ var}$, Pot. di cui ha bisogno per creare campo magnetico, poi strappala da il condensatore, che è sorgente P. reattiva

- convenzionalmente C ha potenza reattiva negativa, ...
è una sorgente di potenza reattiva

mettiamo insieme le due pot.



Si vede bene che se C si scarica, si carica e magari l'energia passa da C

energia inductiva
c'era un ferro

Si stanno accumulando energia

anche per un condensatore vale

l'energia è sempre positiva.

$$Q_C = -2\omega E_C \quad \text{media}$$

l'energia è sempre positiva, il - dipende dal fatto che Q_C è negativo

$$\bar{E}_C \text{ MEDIA} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C V_M^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{2} C V_M^2 = \frac{1}{4} C V_M^2$$

Se dove entra un trasferimento di energia in altre forme dove per farla entrare un resistore, perde induttore e condensatore si "alleggeriano" energia.

$$I_M = \omega C V_M$$

$$-2\omega \frac{1}{4} C V_M^2 = Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2$$

un modello di un motore, non può essere solo induttore, non ci si riesce a trasferire energia IN MEDIA, dove per farla avere un resistore per poter trasferire energia in media. LC si alleggeriano "solo" energie

Fine les. 20/04/23

- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo, $T/4$ l'induttore assorbe energia ($p(t) \geq 0$) ma nel secondo quarto dà indietro tutta l'energia assorbita nel primo quarto ($p(t) \leq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- la potenza attiva assorbita da L vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M^2}{2\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta L e campo magnetico di L ; tecnicamente è importante misurare tale scambio energetico; ciò viene fatto introducendo la potenza reattiva dell'induttore

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M = VI = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi)

Recap Lezione 04/05/23

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \checkmark$$

pot. istantanea in regime sinusoidale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \checkmark$$

Pot Attiva = potenza media in
Pot. reale in un periodo

$T = \frac{2\pi}{\omega}$
se la moltiplico per un periodo T , ottengo un'energia,
o. l'energia assorbita dal resistore in un periodo e'
così $P_{attiva} \Rightarrow$ la valore pot media e dunque energia assorbita dal resistore in un periodo

Pot attiva, energia elettrica trasformata in altro tipo

$$P_{attiva resistore} = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_M^2 \dots \text{di energia, energia scambiata kWh} = \text{energia assorbita in 1 ora}$$

$= \frac{1}{2} V_M I_M$ non assorbe energia potenza istantanea la volta media zero

• Induttore: pot. attiva nulla, palleggia energia al generatore se vedo aumento e istantanea
non riusciamo a trasferire IN MEDIA energia ad un induttore ideale

• Potenza Reattiva = potenza scambiata reversibilmente **VAR**
proporzionale ad ω , 2ω
Scambi energia reversibile va misurato

• Condensatore: duale. $Pot. attiva = 0$
 $Pot. reattiva$, convenzionalmente negativa come se fosse sorgente
 $p(t)$ andamento uguale e opposto rispetto ad un induttore

Se condensatore e induttore insieme, si palleggiano energia
C riceve indietro il carico energia, può essere usata da L per creare campo magnetico.

$$Q_L = 2\omega E_L \text{ media}$$

da vedere per esp
p. reattiva dipende anche da ω

• P. attiva L e C se abbiamo un dispositivo che assorbe energia in media, compie lavoro in media, ci dona
energia resistore

Se abbiamo bipolo generico?

- si può mostrare che

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$$

dove

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt$$

e' l'energia media del campo magnetico di L; quindi Q_L e' proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} E_L^{\text{media}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{4} LI_M^2 \text{ Joule} \end{aligned}$$

potenza reattiva è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende dalla velocità del alleggerimento di energia

mentre, come visto, $Q_L = \frac{1}{2} \omega LI_M^2$.

- possiamo pensare a Q_L come una misura convenzionale della potenza che si deve impegnare per creare il campo magnetico dell'induttore

- **Condensatore ideale**

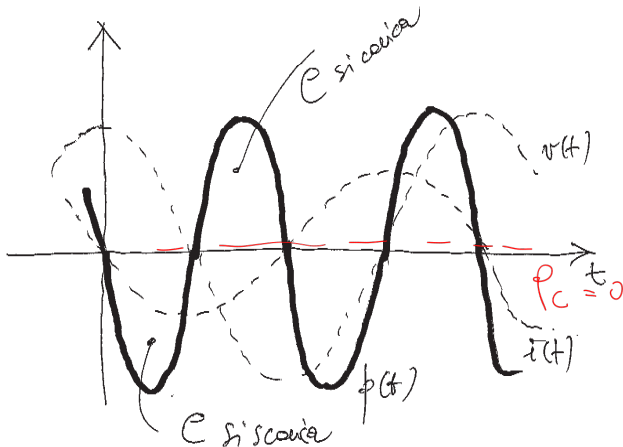
- Vale una trattazione duale rispetto a quella dell'induttore. Sia

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che

$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_M \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t) \text{ W}$$

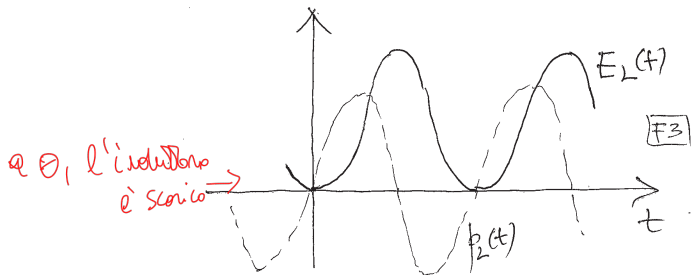
potenza
media è
zero
all'induttore



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ il condensatore eroga energia ($p(t) \leq 0$) mentre nel secondo quarto assorbe una quantità di energia pari a quella erogata nel primo quarto ($p(t) \geq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire

- notare che L e C scambiano energia con il generatore con fasi esattamente opposte

- cio' e' confermato dai diagrammi che seguono che mostrano la potenza istantanea assorbita da L ($p_L(t)$), quella assorbita da C ($p_C(t)$) e l'energia $E_L(t)$ e $E_C(t)$



parte dell'energia
del condensatore
viene iniettata
dall'induttore
per creare
corrente

- la potenza attiva assorbita da C vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \text{ W}$$

se abbiamo un dispositivo
che in media assorbe
energia, c'è un
rendimento

- vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta C e campo elettrico di C ; tale scambio energetico viene misurato convenzionalmente con la potenza reattiva del condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -VI = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi)
- notare che si attribuisce convenzionalmente segno negativo a Q_C ; in effetti in un circuito gli induttori hanno bisogno di impegnare (assorbire) potenza reattiva per creare il loro campo magnetico, mentre i condensatori funzionano da sorgenti (erogano) potenza reattiva

- si ha

$$Q_C = -2\omega E_C^{\text{media}}$$

Q_C proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo el. T, e dipende dalla velocità dello scalo

dove

$$E_C^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \text{ Joule}$$

e' l'energia media del campo elettrico di C; quindi Q_C e' proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo elettrico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene.

Se conosco potenza attiva posso trovare l'energia scambiata da un dipolo in una o più periodi

Voglio studiare brief energetico Verso il mio Bilancio energetico

in regime sinus. No 2 costituti:

Potenza sinusoidale per un bipolo generico

per un bipolo generico

p istantanea varia in funzione del tempo

per def.

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Pot. istantanea bipolo generico

introdurre

valgo. Consideriamo il dispositivo con 2 terminali

- Pot. attiva $\equiv$ Potenza media su un periodo T della sinusoidale

Pot. attiva

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt \text{ Joule}$$

Energia assorbita dal Bipolo in un intervallo T in un periodo T

Se in un periodo assorbe 1 Joule, in 10 periodi... 10 Joule

→ energia UTILIZZATA e trasformata in altre forme di
↑ TRASFERIMENTO IRREVERSIBILE energia (calore, energ. lumin., meccanica)
non può fare trasform. inversa

SINONIMI di

$$Pot. ATTIVA \Rightarrow Pot. MEDIA / Pot. REALE$$

SINONIMI

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se conosco pot. attiva, posso trovare energia assorbita dal bipolo in N periodi.

Supponiamo che V abbia $\varphi_V = 0$

Componente ATTIVA della corrente
Fosse solo un resistore
ci sarebbe solo I_a

POT ATTIVA BIPOLARE GENERALE



$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_V}$$

Fase 0

Parte reale e imag. dell'impedenza, positiva

Caso 1 # Bipolo amico - induttivo

Componente REATTIVA della corrente
Se fosse induttore ideale
PROIETTO

Sono in una situazione intermedia
Scompago $\vec{I}$ in componenti

Corrente ritardata rispetto
Tensione di un angolo di $-\frac{\pi}{2}$

Scompago $\vec{I}$ in componenti, proiettando

in media era non trasporta energia

Altri 2 componenti, uno che è componente di corrente che in media non trasporta potenza, CORRENTE SWATTATA, non trasporta watt

Voglio valore Pot ATTIVO associato al bipolo, valore separato potenza attiva trasportata dalla corrente in fase e quella in quadratura

$$P = P_a + P_r =$$

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

valuto ora potenza istantanea corrispondente alla corrente attiva

$$i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$$

in fase con la tensione

$$i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_{rM} \sin(\omega t)$$

Corrente ATTIVA

Corrente in ritardo di 30°

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt$$

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt$$

$$P = P_a + P_r$$

P_a = Potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione

P_r = Potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura da SLIPER per valori

$$V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{aM} + \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) dt$$

Potenza attiva trasportata dalla componente in fase della corrente

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V_{eff} I_{a,eff} > 0 \text{ W}$$

Componente in fase $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$I_{am} =$ corrente in fase della con
com la tensione

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt = 0$$

2 oscillazioni complete in un periodo
media $P_r = 0$ pot istantanea

La componente attiva della
corrente I_{am} $\rightarrow$ $P_a = \frac{1}{2} V_m I_{am}$
e vale $P_a = \frac{1}{2} V_m I_{am}$
TAPPONTA POT. ATTIVA

Indipendentemente dalla sua apertura, la corrente reattiva
non trasporta potenza attiva (dunque in media) al carico.

Scambio scambiato ma
in media $= 0$

I_r = corrente reattiva oziosa / spazzata

$$P_r = 0 \text{ Watt}$$

potenza attiva corrispondente alla
componente di corrente
in quadratura

I_r corrisponde ad uno scambio
reversibile tra conduttori, induttori
e generatori nel dipolo
scambiato a media nulla su un periodo

MISURA CONVENZIONALE SCAMBIO REVERSIBILE di

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_{rm} = V I_r \text{ VAR} = V_{eff} I_{eff}$$

energia a media nulla
su T fra generatore
(induttori e conduttori)
e carichi magnetici e elettrici
all'interno del dipolo

$$[Q] = \text{VAR}$$

come misurazione
lo scambio reversibile
di energia

Voltaggio
reattivi

Potenza scambiata ma
non utilizzata

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Watt: trasferimento irreversibile, energia usata

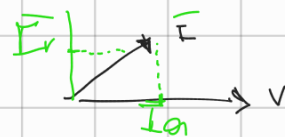
VAR = energia scambiata
(ma non utilizzabile), scambio reversibile

②

Caso ohmico-capacitivo

Stesso ragionamento

Corrente in anticipo
scompaggio, ritardo



$$P_a = \frac{1}{2} V_m \cdot I_{am} = V_{eff} I_{a,eff} \text{ W}$$

$$P_r = 0 \text{ W}$$

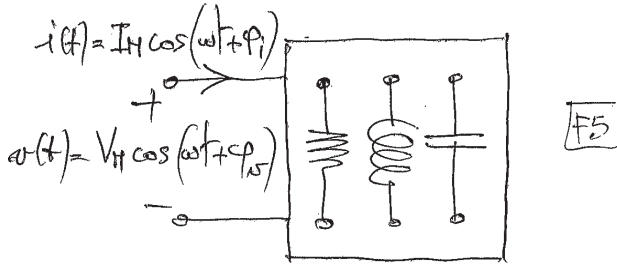
$$Q_c = - \frac{1}{2} V_m I_{rm}$$

Convenzione

Condensatori:
assorbono energia
reattiva
potenza reattiva

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente coordinata secondo la convenzione degli utilizzatori; vogliamo studiare la potenza in regime sinusoidale che viene assorbita dal bipolo

Consideriamo
Seno Superiore
energia



- la potenza istantanea assorbita dal bipolo in regime sinusoidale vale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \quad W$$

- siamo interessati alla potenza media su un periodo $T = 2\pi/\omega$

pot attiva assorbita dal bipolo

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

- la potenza media, misurata in Watt, e' detta anche potenza attiva o potenza reale e ha, come per il resistore, un importante significato fisico; infatti

$$PT = \int_0^T p(t) dt = E$$

dove E e' l'energia elettrica in Joule che viene trasferita irreversibilmente e assorbita dal bipolo in un periodo T ; se conosciamo la potenza attiva, siamo quindi capaci di trovare l'energia utilizzata dal bipolo in T , energia che viene trasformata in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)

Espressione della potenza attiva e reattiva di un bipolo

generico

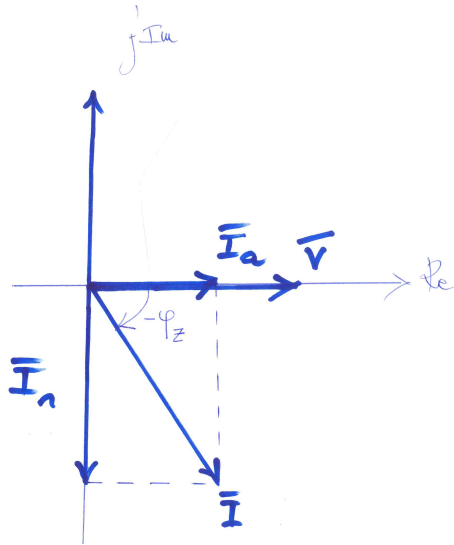
Bipolo generico, caratterizzato dalla sua impedenza

- Consideriamo un bipolo di tipo ohmico-induttivo di impedenza $\bar{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$. Applichiamo $v(t) = V_M \cos(\omega t)$, quindi $\bar{V} = V_M$ e' un vettore diretto lungo l'asse orizzontale. Come noto la corrente $\bar{I}$ e' in ritardo di un angolo $-\varphi_Z$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione

- proiettiamo $\bar{I}$ lungo una direzione parallela a $\bar{V}$ e una direzione ortogonale a $\bar{V}$. Otteniamo $\bar{I}_a$, detta componente di $\bar{I}$ in fase con $\bar{V}$ (o *componente attiva della corrente*), e $\bar{I}_r$, detta componente di $\bar{I}$ ortogonale a $\bar{V}$, o in ritardo rispetto a $\bar{V}$ di $\pi/2$ (o *componente reattiva della corrente*)

Dividiamo $\bar{I}$ in componenti, ottenendo

componente corrente attiva e corrente scambiata



- si ha $\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_r$ e quindi $i(t) = i_a(t) + i_r(t)$, dove

$$i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t) \text{ and } i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) = I_{rM} \sin(\omega t)$$

- si ha inoltre *componente in fase*

componente in quadratura

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = P_a + P_r$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt$$

Componente in fase trasporta potenza attiva

dove P_a e' la potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione e P_r e' la potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura

- valutiamo P_a ; si ha

$$\Rightarrow P_a = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt$$

$$\cos^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t) dt$$

Pot istant > 0

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_M I_{aM} + \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) \right] dt$$

2 oscillazioni complete in un periodo

- quindi

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0 \text{ W}$$

CONTRIB. NULLO P_a positivo

La componente attiva della corrente trasporta potenza attiva

- quindi la componente attiva della corrente trasporta potenza attiva (e quindi energia utile al carico)

- valutiamo adesso P_r ; si ha

e vale $\frac{1}{2} V_M I_{aM}$

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{rM} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{rM} \sin(2\omega t) dt$$

2 oscill. complete in un periodo

quindi



$$P_r = 0 \text{ W}$$

- indipendentemente dalla sua ampiezza, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva al carico; quindi ad essa non e' associato un trasferimento di energia utile al carico

• la componente reattiva della corrente e' detta anche corrente oziosa o corrente swattata

• da un punto di vista fisico la corrente reattiva modella uno scambio reversibile di energia, a media nulla su un periodo, fra generatore che alimenta il bipolo e campi elettrici e magnetici all'interno del bipolo (vedremo meglio con teorema di Boucherot)

• come misura convenzionale di tale scambio reversibile a media nulla si introduce la potenza reattiva

$$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r > 0 \text{ VAR}$$

alla corrente reattiva
e' associato uno
scambio reversibile
di energia a
media nulla, tra
generatore e
comp. el. e
magnetici
nel bipolo

• la potenza reattiva corrisponde a potenza scambiata ma non utilizzata; per tale motivo Q viene misurata in VAR

• la trattazione nel caso ohmico capacitivo e' analoga; si attribuisce pero' segno negativo alla potenza reattiva, cioe'

$$Q_r = -\frac{1}{2} V_M I_{rM} = -V I_r < 0 \text{ VAR}$$

Voglio studiare il trasferimento energetico con verso bipolo

Conclusion *sono 2 contributi:*



• Lo stato relativo al trasferimento energetico in regime sinusoidale verso il bipolo consta di due contributi:

1) Trasferimento irreversibile di energia elettrica (energia utilizzata) che puo' essere valutato tramite la potenza attiva

$\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$
sfasamento tra tensione e corrente

trovo P, moltiplico per T periodo e trovo energia trasferita in un periodo: P = 1/2 V_M I_{aM}
P_{eff} e' lo sfasamento, meno e' la P_{att}

$$P_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \underbrace{V \cdot I \cdot \cos(\varphi_z)}_{\text{pot. media}} = V I_a = \underbrace{V I \cos(\varphi_z)}_{V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_z)} = V I \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad \text{W}$$

$\cos \varphi_z$
 $\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$
Pot attiva dipende dallo sfasamento tra V e I

2) vi e' sovrapposto uno scambio reversibile di energia elettrica a media nulla su un periodo (energia scambiata ma non utilizzata) che puo' essere valutato tramite la potenza reattiva

POTENZA ATTIVA E REATTIVA SONO STRETTAMENTE COLLEGATE ALLO SFASAMENTO
VAR *sul V e I*

$$Q = \frac{1}{2} \underbrace{V_M}_{\text{ampiezza}} \underbrace{I_{rM}}_{\text{valore efficace}} = V I_r = \underbrace{V I \sin(\varphi_z)}_{\text{misurata}} = V I \sin(\varphi_v - \varphi_i)$$

- quando corrente e' quasi in fase con tensione, ho molta potenza attiva e poca potenza reattiva (bipolo quasi resistivo)
- al contrario se non sono in fase ho molta, es. n lo potenza reattiva, poca attiva

*Se $\varphi_z \rightarrow 0$ $P \gg Q$
 $\varphi_z \rightarrow \pi/2$ $Q \gg P$*

ci sono altri tipi di potenza per descrivere il comportamento del circuito
Potenza apparente : Tiene conto contemporaneamente di potenza attiva e reattiva

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = V_{eff} I_{eff} \quad VA \quad v_{eff} \cdot I \text{ efficace}$$

A è sempre positiva

$$[A] = \text{Volt-ampere} \quad VA$$

è una potenza, Tiene conto di Pot attiva e reattiva

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$P^2 + Q^2 = \left(\frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_z) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} V_M I_M \sin(\varphi_z) \right)^2$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad VA$$

Combinos. dello Sg

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\begin{cases} P = A \cos(\varphi_z) \\ Q = A \sin(\varphi_z) \end{cases}$$

$$P > 0 \quad |Q| > 0$$

$$A > P, |Q|$$

A è l'ipotenusa

Se Bipolare sia P e Q , allora necessariamente

- Si introduce la *potenza apparente* per bipolo generico *introdotta*

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} V_M I_M = VI \text{ (VA)}$$

che si misura convenzionalmente in volt-ampere (VA)

- si ha

$$P = A \cos(\varphi_z), Q = A \sin(\varphi_z)$$

e

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

cioè la potenza apparente è una combinazione di potenza attiva e reattiva

- notare che se $P, Q \neq 0$ allora si $A > P, Q$

Se bipolo *passivo*
sia potenza attiva che reattiva,

$$A > \text{sia di } P \text{ che } Q$$

Espressioni della potenza istantanea

• -

Altre espressioni della potenza istantanea.

- Si ha

$$\begin{aligned}
 V_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cdot I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \\
 p(t) = v(t)i(t) &= V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \frac{1}{2} \cos \text{ angolo diff} \\
 \cos \cdot \cos &= \frac{1}{2} \cos \text{ angolo diff} = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad \frac{1}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos \text{ angolo same} \quad + \frac{1}{2} \cos \text{ angolo same} \\
 &\quad + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) \quad \text{termine costante} \quad \text{termine variabile della pot. istantanea} \quad \text{Pot. Apparente}
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_A$

e quindi

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

parte variabile della potenza istantanea

- $p(t)$ ha un termine costante P pari alla potenza attiva e un termine variabile a pulsazione 2ω con ampiezza pari alla potenza apparente
- il termine variabile della potenza istantanea può causare problemi; p. es. un alternatore richiede una coppia pulsante per funzionare a frequenza costante; inoltre, lo stesso termine origina vibrazioni meccaniche indesiderabili

Potenza istantanea ha una media = P . e sovrapposta a P c'è la parte variabile di $p(t)$ a puls. 2ω e $\varphi_2 = \varphi_v + \varphi_i$ e come modulo = $P + \text{apparente}$

- **Esempio** Consideriamo un bipolo dato da L in serie R

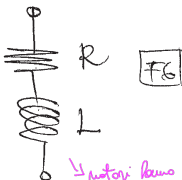
Esercizio
simpatico da ora

tipo motore, c'è una variazione
e induttore. Resistenza per l'attiva
e ha bisogno di un campo magnetico

$$P_R > 0$$

$$Q_L > 0$$

$$A = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2} > P_R, Q_L$$



modello
motore ed.

Potenza di R è quella che
serve tutto in p.t. meccanica

$P(t)$?

grafico $P(t)$

↳ motori hanno bisogno di induttori,

del campo magnetico, dobbiamo immaginare potenza reattiva per
creare campo magnetico

- in questo caso $P = P_R > 0$, $Q = Q_L > 0$ e $A > P, Q$;

l'andamento qualitativo della potenza istantanea $p(t)$ e' riportato
in figura

$$A = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2}$$

coseno θ di
potenza

- si noti che $p(t)$ varia fra un massimo

Pot. attiva = $P_{resistiva}$

$Q = Q_L$ induttivo, positive

in media la
potenza vale

$$p_{\max} = \underbrace{P + A}_{P_{attiva} + Q} = P + \sqrt{P^2 + Q^2} \quad W$$

coseno θ per $\theta < -1$

e un minimo

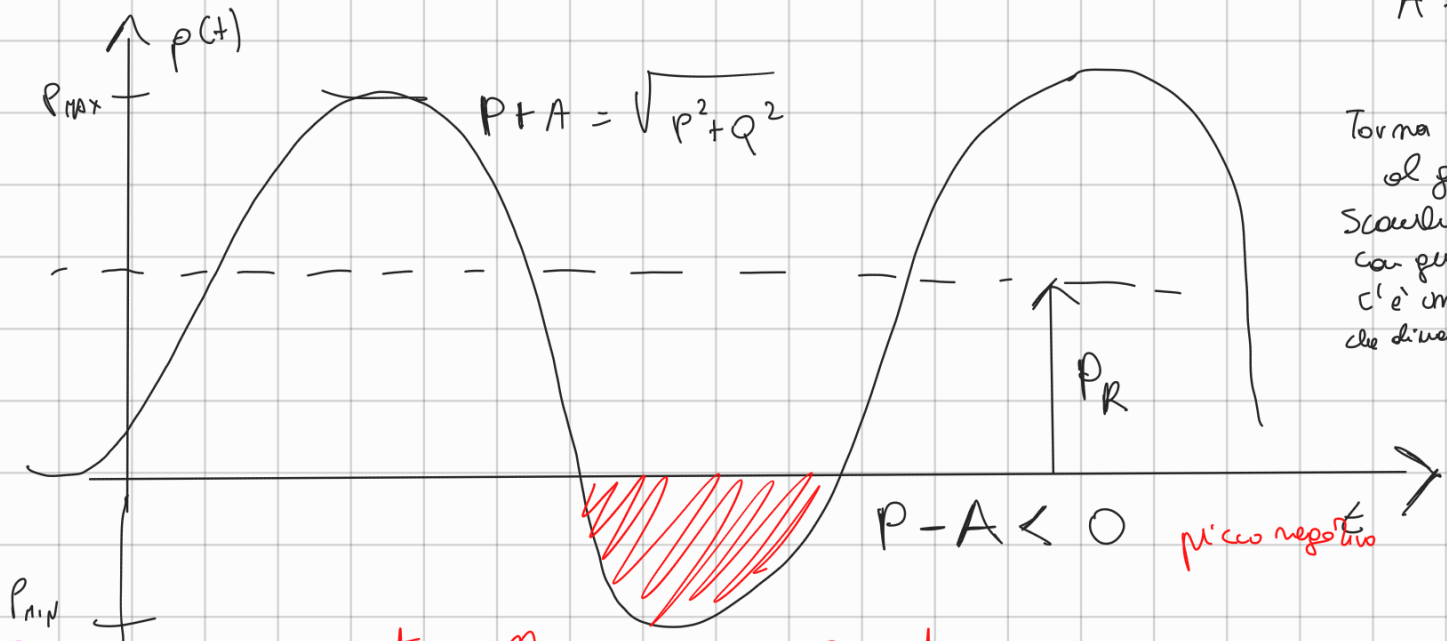
$$p_{\min} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0 \quad W$$

- ci sono intervalli di tempo in cui $p(t) < 0$; interpretare
fisicamente cosa accade in tali intervalli

ci si somma una sinusoide di Ampiera A

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$A > P_{\text{eff}}$$



Torna potenza al generatore, scambio di energia con generatore, c'è un induttore che diventa motore

c'è sempre un intervallo in cui la potenza ritorna obliquo al generatore ^{che diventa il motore} c'è potenza reattiva, ^{con induttore} la potenza è negativa in quell'intervallo ^{onda riflessa}

Il picco della potenza istantanea, $P_{\text{MAX}} = P + A$

Potenza neg. $\Rightarrow$ Torna potenza al generatore perché c'è pot. reattiva

Se aumenta la potenza reattiva, Q aumenta, il picco è più grande.

$\Rightarrow$ Carichi molto reattivi, rimangono molto vicino la potenza.

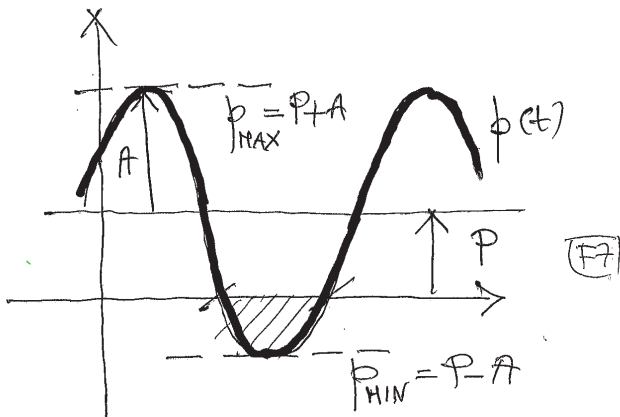
$\rightarrow$ Cresce potenza reattiva, cresce comunque di picco
Potenza scambiata ok,

• Potenza reattiva da moia, $\checkmark$ Potenza media è la stessa, ma se cresce Q , il picco max e minimo, il dispositivo deve sopportare un range maggiore

es. bon generatore

A parità di potenza ATTIVA, es. ho una casa da 10W, si, lui in media deve dare 10W, ma il picco della resistenza diventa più grande, deve sopportare un range di potenza maggiore

È un problema se la parte imag. dell'impedenza è in

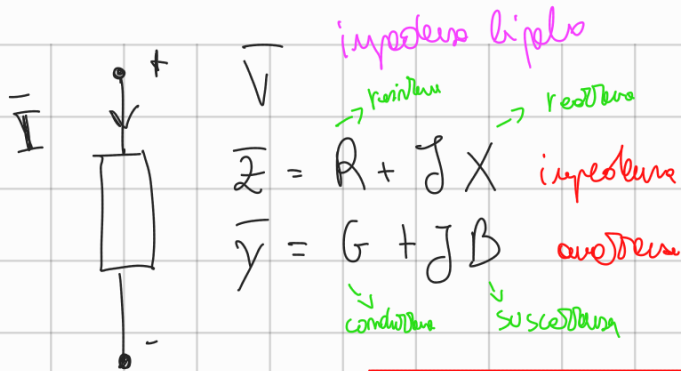


ANDALO NEL MONDO FASO21

Espressioni della potenza attiva e reattiva con i Fasori

usando i fasori

Abbiamo un bipolo, con i Fasori. L'impedenza ...



$$I_m e^{j\varphi_i} = \bar{I}$$

$$V_m e^{j\varphi_v} = \bar{V}$$

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2$$

$$P = \frac{1}{2} G V_m^2$$

$R =$ parte reale *impedenza bipolo*

Potenza attiva
 dipende solo da
 P. Reale dell'
 impedenza
 o ammettenza

pot. attiva

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_z)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{I}^*]$$

le potenze sono dipendevoli solo
 , ma complessi non si può fare
 $\bar{V} \bar{I}$, ma $\bar{V} \bar{I}^*$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{Z}] I_m^2$$

$$= \frac{1}{2} R I_m^2$$

Watt

Stessa
 Formula la
 bipolo

$\rightarrow$ parte reale impedenza
 del bipolo

Verifica Formule

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} V_m e^{j\varphi_v} I_m e^{-j\varphi_i}$$

conjug, calcoli segno
 φ_i argomento

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

φ_z
 $\cos(\varphi_z) + j \sin(\varphi_z)$
 ora uso
 eulers
 e prende
 parte reale

$$\textcircled{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{Z} \bar{I} \bar{I}^*]$$

$$= \frac{1}{2} I_m^2 \operatorname{Re} [\bar{Z}]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{Y}] V_m^2$$

Watt

$$= \frac{1}{2} G V_m^2$$

Se uso ammettenza
 lavora solo
 conduttanza per
 P.a.

numero complesso $\cdot$ coniugato =
 aprienna el quadrato

numero complesso $\cdot$ coniugato = aprienna²

Per ammettenza

Partendo
 da

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} (\bar{V} \bar{Y})^*]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^*]$$

$$= \frac{1}{2} V_m^2 \operatorname{Re} [\bar{Y}^*]$$

conjug. prodotto = prod. coniug.

Y e Y^* hanno stessa
 parte reale

- Consideriamo un bipolo di impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e ammettenza $\bar{Y} = G + jB$. Siano $\bar{V}$ e $\bar{I}$ i fasori di tensione e corrente coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori. La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere espressa in una delle seguenti forme equivalenti

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 \end{aligned}$$

- verifica: si ha

$$\bar{V} \bar{I}^* = V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_M I_M e^{j\varphi_z}$$

- inoltre

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z} \bar{I} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} I_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Z}]$$

e

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} (\bar{Y} \bar{V})^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Y}^*]$$

- analogamente, per la potenza reattiva assorbita dal bipolo si ha

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} V_M I_M \sin \varphi_z = \textcircled{1} \frac{1}{2} \text{Im}[\bar{V} I^*] \\
 &= \textcircled{2} \frac{1}{2} \text{Im}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 \quad \text{oppure} \\
 &= \textcircled{3} \frac{1}{2} \text{Im}[\bar{Y}] V_M^2 = -\frac{1}{2} B V_M^2
 \end{aligned}$$

parte imag. di imped. e ammettenza base segno quarto

parte reattiva

B

dove l'asterisco denota il complesso coniugato

> Se Bipolo unico induttivo, es. X positiva, B negativo

Per un Bipolo generico potenza attiva dipende solo da P. Reale dell'impedenza

mentre potenza reattiva dipende da parte immag. dell'impedenza

$$Q = \frac{1}{2} X I_M^2, \quad \text{parte imag. dell'impedenza}$$

Per Bip generico & per P. attiva,
 X reattiva per Q reattivo

• Modulo corrente
 Nei Fasori

Potenza Complessa

$$P_{attiva} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{V} \bar{I}^*]$$

$$P_{reattiva} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{V} \bar{I}^*]$$

nuovo capitolo che ha per Preale Potenza, e prima la P. reattiva
Lo posso scrivere in forma esp

- Definiamo la potenza complessa

Potenza complessa sul
morso Biele

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \quad \text{VA} \quad \text{volt-Aspre}$$

- si ha

Forma esplicita

$$\bar{P} = P + jQ$$

Parte reale = Potenza attiva
Parte imm = Pot. reattiva

- inoltre

che sono in forma esponenziale

$$P: \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^*$$

$$\bar{P} = \left(\frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_v} \right) \left(I_M e^{-j\varphi_i} \right) = \frac{1}{2} V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

e quindi

Forma esp

pot. apparente

$$\bar{P} = A e^{j\varphi_z} \quad \text{VA}$$

in un colpo solo ha tutto

- riassumendo: la potenza complessa ha come parte reale la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva; ha come modulo la potenza apparente e come argomento l'argomento dell'impedenza

cioè $\varphi_z = \text{sfasamento tensione corrente}$

Piano complesso come Piano delle potenze complessive

Potenza
Reattiva

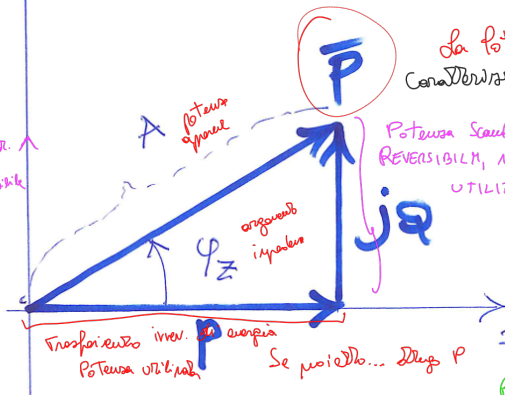
jQ
(VAR)

lo usiamo per fare bilanci
della potenza

La Potenza Complessa

Considera complessa il trasferimento di
energia in regime
sinusoidale

Potenza Scambi
REVERSIBILI, NON
UTILIZZATA

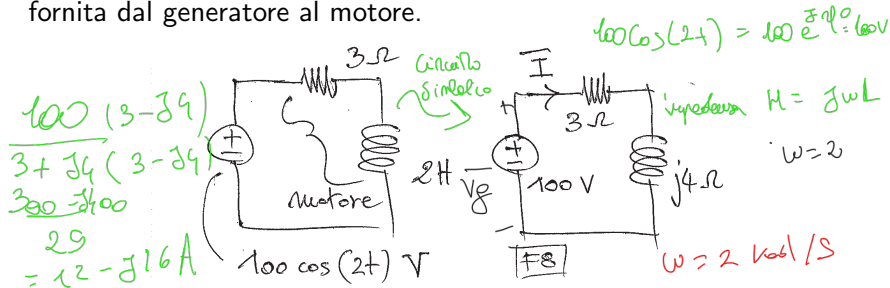


infatti:
 $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

P (W)
potenza attiva

- il trasferimento di potenza in regime sinusoidale può essere caratterizzato in modo completo riportando nel piano complesso $\bar{P}$, P , Q , A e φ_z . Otteniamo così il triangolo delle potenze (che è simile a quello delle impedenze)
- in questo contesto il piano complesso è inteso come piano delle potenze. La potenza attiva P (Watt) è sull'asse reale e rappresenta una cessione irreversibile di energia al carico; la potenza reattiva Q (VAR) è sull'asse immaginario e rappresenta uno scambio reversibile di energia con i campi elettrici e magnetici del carico
- ricordiamoci anche che la potenza attiva è ~~il tramite con cui si trasforma energia elettrica in altre forme di energia~~ (calore, energia meccanica, etc.)
- si noti in particolare che il triangolo rettangolo P , Q , A rappresenta geometricamente la nota relazione $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Esempio. Determinare la potenza istantanea, attiva e reattiva fornita dal generatore al motore.



- Consideriamo il circuito simbolico per il quale si ha

Per

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

da kV

- si ha $-\bar{V}_g + 3\bar{I} + j4\Omega \cdot \bar{I} = 0 \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{3+j4}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{100}{3+j4} = \frac{100(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)} = \boxed{12-j16 \text{ A}} \quad \bar{I}$$

quindi

$$\bar{P} = \frac{1}{2} 100(12 + j16) = 600 + j800 \text{ VA}$$

- allora $P = 600 \text{ W}$, $Q = 800 \text{ VAR}$ Pot attiva = 600 W
800 var
- si ha inoltre $A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA}$ e $\varphi_z = \arctan(4/3) \simeq 53^\circ$; allora ondata $\frac{800}{600}$

Pot istantanea, formula

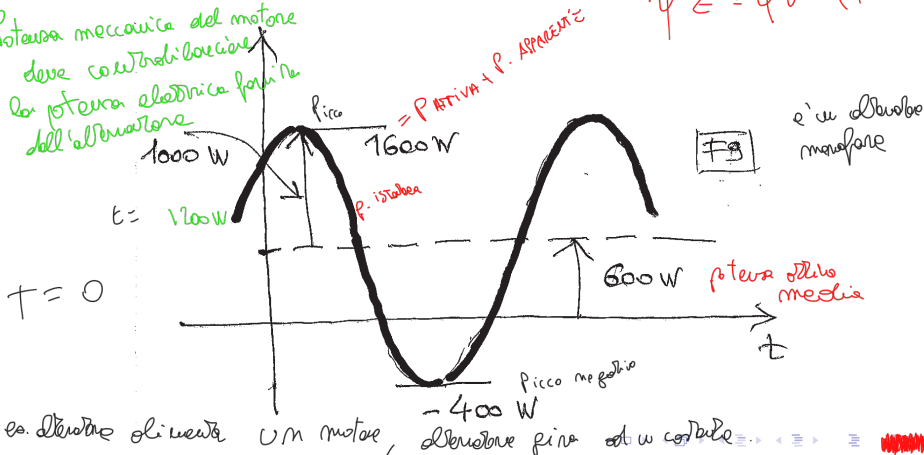
$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_z) = 600 + 1000 \cos(4t - 53^\circ) \text{ W}$$

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z$$

- notare che $p(t)$ varia fra un massimo $p_{\max} = P + A = 1600 \text{ W}$ e un minimo $p_{\min} = P - A = -400 \text{ W}$.

$$\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

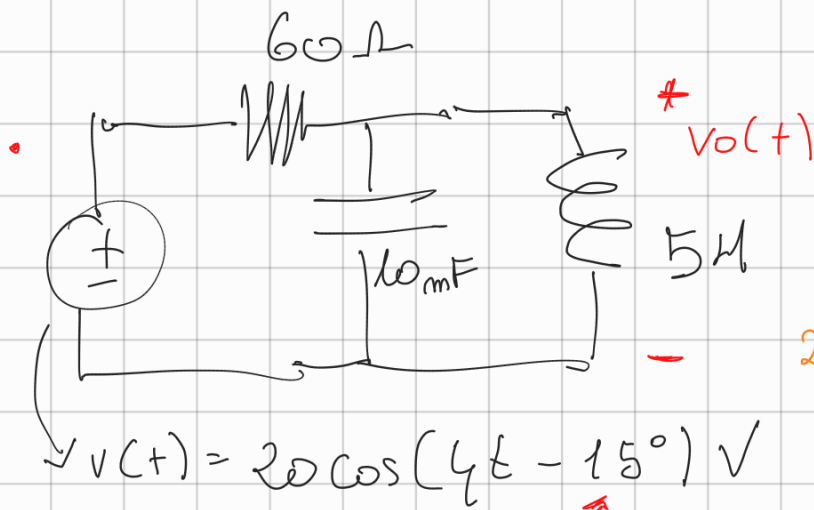
potenza meccanica del motore
deve controbilanciare
la potenza elettrica fornita
dell'alternatore



es. alternatore alimenta un motore, alternatore gira ed il motore...

Prima esercitazione Corrente alternata

$V_o(t) ??$



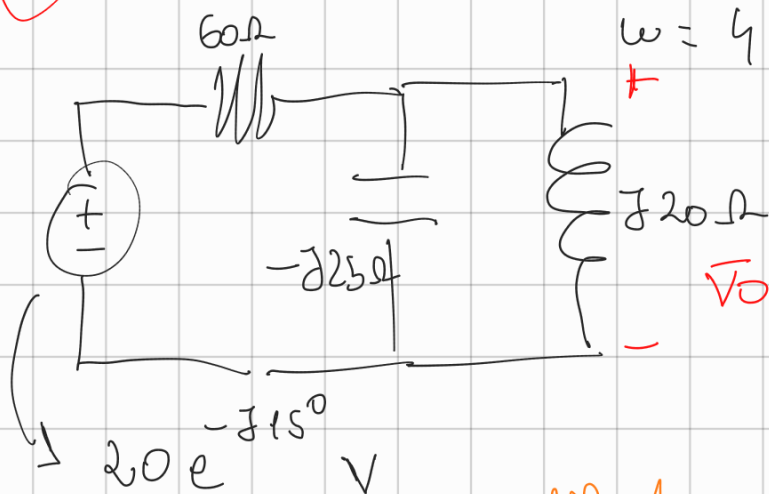
errore tipico, mischiare i due domini...

$$20 e^{-j45^\circ} = 20 (\cos(-15) + j \sin(-15))$$

generazione applica un tensore simbolico, v'è il numero del tensore sull'induttore

La fase la lascia in gradi, se poi vuoi vedere il cos ad un istante preciso, devi mettere $4t$ in radianti e -15 in gradi... e li scrivi in radianti.

(1) Circuito simbolico nel dominio di Laplace



$\omega = 4$ rad/s induttori e condensatori

hanno memoria in t ma sono impedenze nel dominio di Fasor

$$jX_L = j\omega L$$

$$-jX_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{4} = 25 \Omega$$

resistenza apparente alla freq. ω

$$Z_C \text{ impedenza condensatore} = -j25 \Omega$$

$$X_L = 4 \cdot 5H = 20 \Omega \text{ reattanza induttiva}$$

$$Z_L = j20 \Omega \text{ impedenza induttiva}$$

ma C e L sono impedenze...
 posso fare trasform. circuiti, per avere corrente
 con resistenza e impedenza in parallelo --
 e partizione di corrente. Moltiplico
 poi per impedenza induttiva e trova V_0

OPPURE

$$\frac{1}{\frac{8}{25} + \frac{-j}{20}} = \text{SILDES} = \frac{1}{\frac{-j}{100}} = 100j$$

Metto i due in parallelo, e faccio partizione tensione

$$Z_L \parallel Z_C = -j25 \parallel j20 = \frac{\text{Prodotto Impedenze}}{\text{Somma impedenze}} =$$

$$= \frac{j20 \cdot -j25}{j20 - j25} = \frac{j20 \cdot (-j25)}{-j5} = \underline{j100}$$

↑ corrente induttiva

→ impedenza puramente imag. di tipo induttivo perché impedenza imag.

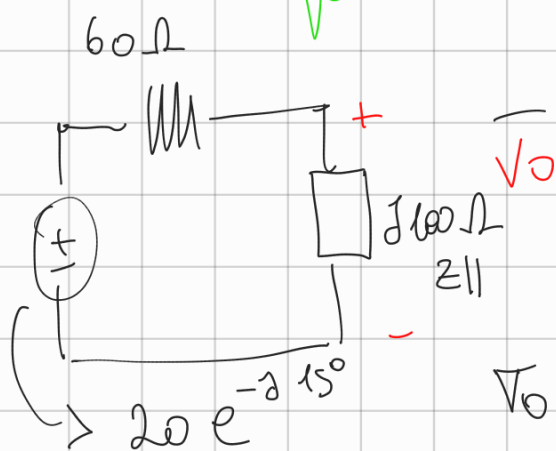
//110 non posso fare perché

$$G \neq \frac{1}{R} ! \quad \frac{1}{\frac{1}{R} + \dots + \frac{1}{R}} \quad \text{due forze}$$

forze antitetiche e' diverso

$$\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_n}} \quad \text{questo si}$$

voglio trovare V_0 , partizione tensione



$$V_0 = \frac{20 e^{-j15^\circ} \cdot j100}{60 + j100 \Omega}$$

diviso per 20

$$20 e^{-j15^\circ}$$

$$\frac{j100 (60 - j100)}{60 + j100 (60 - j100)}$$

devo trovare il fase, in forma exp

$$e^{-j15^\circ}$$

$$\frac{1000 + j6000}{j600 + 10000} = 20 e^{-j15^\circ} \cdot \frac{29 + j19}{34}$$

$$V_0 = V_{0M}$$

$$20(\cos -15^\circ) + 20j \sin(-15^\circ)$$

$$19,31 - j5,17 \dots$$

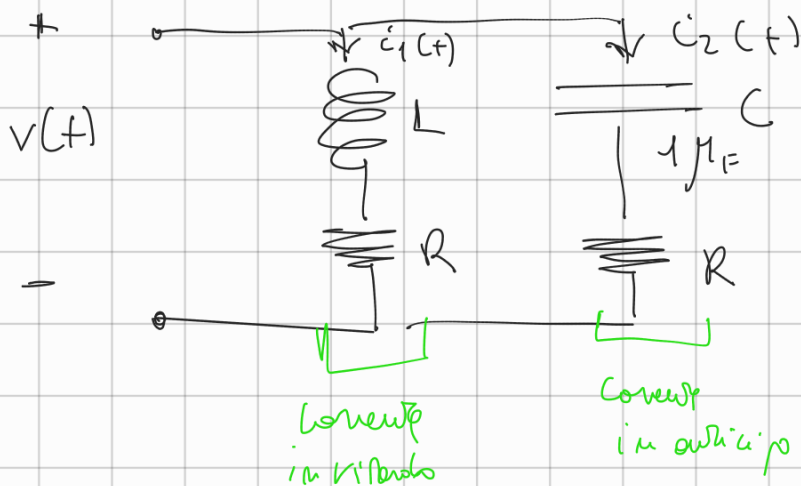
NON SO

Fare calcoli

$$v_0(t) = 17,15 \cdot \cos(\omega t + 3,4^\circ)$$

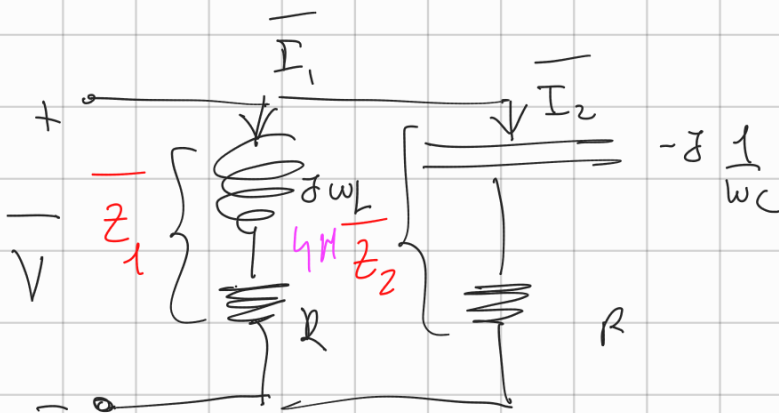
Esercizio 2 PT 10

Determinare ω in modo che $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in reg. sinusoidale



$$I_{1M} = I_{2M}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{j\omega L + R} = \frac{\bar{V}}{-j\frac{1}{\omega C} + R}$$



Le fasi NON

sono uguali, ma le ampiezze possono

uno è un RC, corrente in anticipo, uno è

$$\bar{Z}_1 = j\omega L + R$$

$$\bar{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C} + R$$

RL corrente in ritardo

rispetto a tensione

$$Voglio che I_{1M} = I_{2M}$$

Valore per la cui tensione la "batteria di 10V" genera 4 A
 applico al dipolo una V di ampiezza V_M

$$I_M = \frac{V_M}{Z} \Rightarrow I_{M1} = \frac{V_M}{Z_1} \text{ modulo impedenza}$$

$$I_{M2} = \frac{V_M}{Z_2}$$

valgano allora che

$$Z_1 = Z_2 \text{ (moduli)}$$

la tensione è uguale

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\bar{Z}_2 = R - j \frac{1}{\omega C} \rightarrow \text{modulo}$$

R è la stessa, dunque

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \omega^2 LC = 1$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

È la pulsaz. di risonanza!

$$X_L = X_C$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{2}$$

$$\omega = 500 \text{ rad/s.}$$

② Disegnare l'impedenza fornita da un condensatore

Sappiamo $\varphi_v = 0$ corrente circula in ritardo
 rispetto rispetto a tensione

$$\Rightarrow \varphi_{I_1} = \varphi_V - \varphi_Z = -\arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_1$$

$$\varphi_1 = -\varphi_Z \text{ se } \varphi_V = 0$$

corrente RC e' in anticipo rispetto alla tensione

$$\varphi_{I_2} = \varphi_Z - (-\arctg\left(\frac{1}{R\omega C}\right))$$

$$\varphi_1 = \varphi_V - \varphi_Z$$

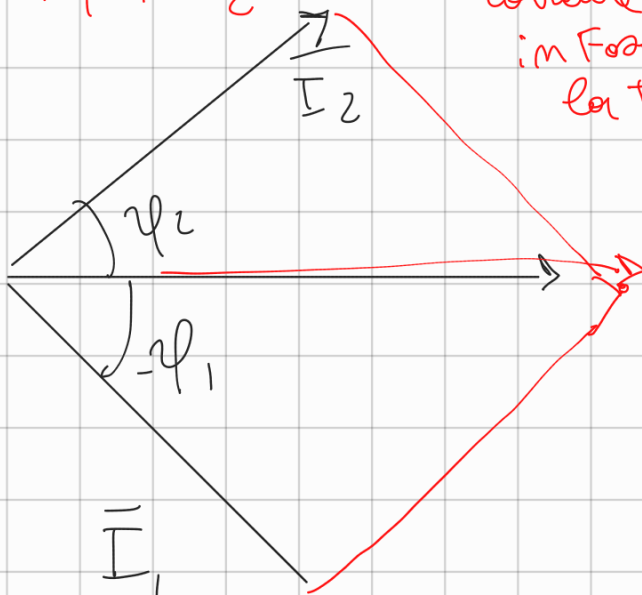
$$\varphi_Z = -\arctg\left(\frac{1}{R\omega C}\right)$$

$$\hat{z} = -\partial \omega C$$

$$-\arctg = \arctg(-\dots)$$

φ_1 e φ_2 sono uguali e opposti. R e' uguale, reattanze uguali e opposte, ω uguale (?)

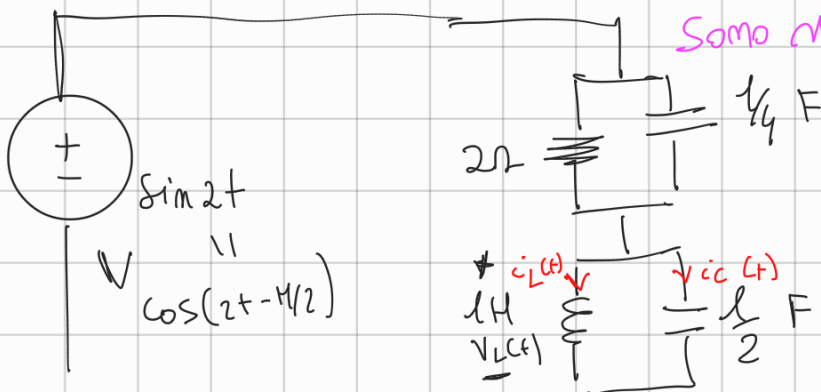
$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 =$ sommavole la corrente e' in fase con la tensione



a quella pulsarica ho una corrente in fase con la tensione, capacitiva puramente resistiva, L e C si cancellano! Ma loro "specie di risonanza"

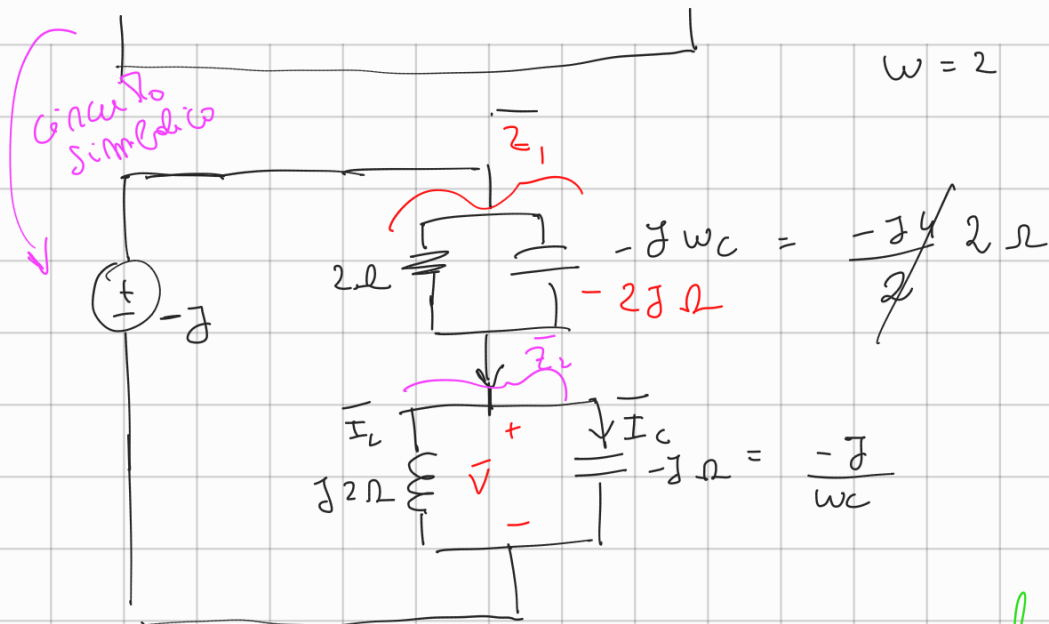
> stessa espressione => lunghezza vettori uguali

Albero ed. da esercizi. Ricondizionare PT2
Determina $\vec{V}$, $\vec{I}_L$ e $\vec{I}_C$
Sono nel dominio del tempo



$$1 e^{-j\pi/2} = \cos(-90) + j \sin(-90)$$

$$= -j$$



$\bar{I}_L, \bar{I}_C, \bar{V}?$

ho fatto a caso

$$\bar{Z}_1 = 2 \parallel -2j \Omega = \frac{-4j}{2-2j} = \frac{-2j}{(1-j)} \cdot \frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{-2j(1+j)}{1+j-j-j^2} = \frac{-2j+2}{2} = 1-j \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{2j(-j)}{2j-j} = \frac{2}{j} = -2j$$

$$\bar{V} = \frac{-j \cdot -2j}{-2j+1-j} = \frac{-2}{1-3j} = \frac{-2(1+3j)}{(1-3j)(1+3j)} = \frac{-2-6j}{1-9j^2}$$

$$= \frac{-2-6j}{10} = -\frac{2}{10} - \frac{6j}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3j}{5} = -\left(\frac{1+3j}{5}\right)$$

$$= 0,63 e^{j251^\circ} = 0,63 e^{-j109^\circ} = \frac{-1-3j}{5} \leftarrow \text{entrambi negativi...}$$

$$\arctg\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}\right) + \pi$$

$$v(t) = 0,63 \cos(2t + 251^\circ)$$

$$71^\circ + 180^\circ =$$

e' quello

Truppa
perche' reale negl

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{j2} = \frac{-1-3j}{10j} = \frac{-j(-1+3j)}{10} = \frac{j(-3)}{10} = 0,32 e^{j161,6^\circ}$$

attento! i. reale negl

$$i_c(t) = 0,32 \cdot \cos(2t + 162) \text{ A}$$

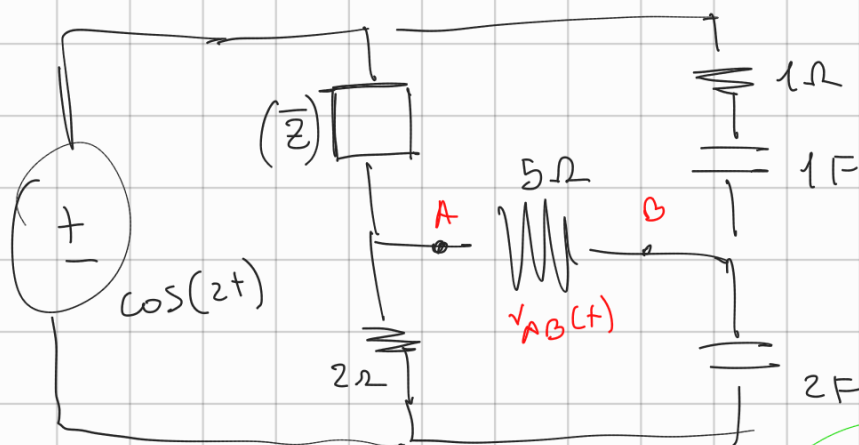
$$\bar{I}_c = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{V}}{-j} = \frac{-1 - 3j}{-j} = j(-1 - 3j) = \frac{-j + 3}{5}$$

$$\bar{I}_c = 0,63 e^{-j18} \text{ A}$$

$$i_c(t) = 0,63 \cos(2t - 18,4)$$

Segue esercitazione PT2

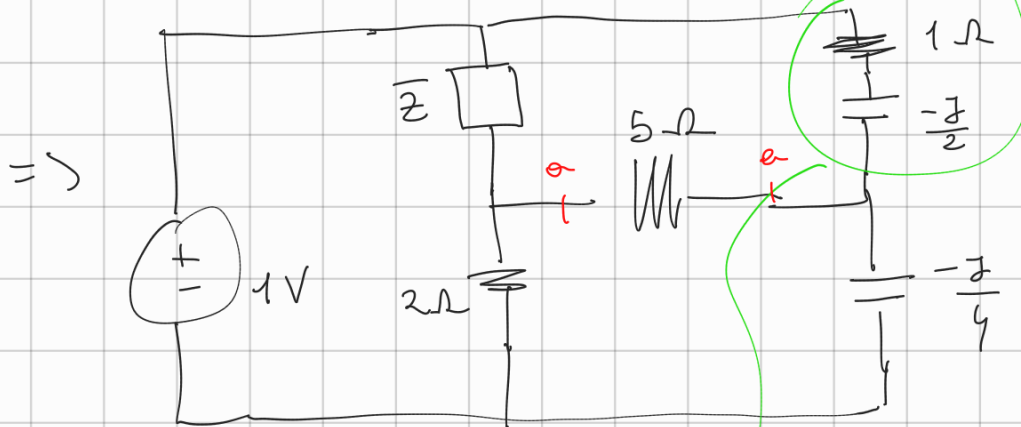
Ponte corrente alternata



ottenire $\bar{Z}$

C.c. V_{AB} sia nulla

Se ponte bilanciato, non può correre corrente, dunque non c'è caduta di tensione



$$\bar{Z}_c = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2} = \frac{-j}{4}$$

nel dominio del Tempo

Condiz. Bilanciamento Ponte

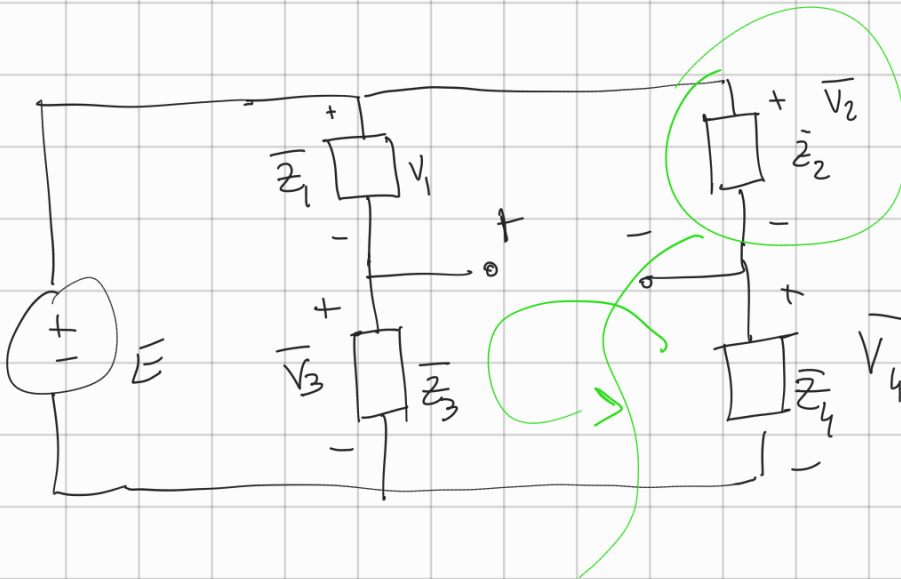
$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$$

(dalla teoria)

$$\bar{Z}_1 = 1 - \frac{j}{2}$$

Comunque usiamo Thevenin. Faccio equiv. Thevenin
e impiego ... *ri faccio da capo per la Terna*
che $V_{eq} = 0$ Dov'è V_{eq}
di Thevenin = 0

Thevenin finisce
anche nei posti



$$V_{eq} = V_3 - V_4$$

$$V_3, \text{ partizione Terna: } \frac{E \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} \quad V_4 = \frac{E \cdot \bar{Z}_4}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_4}$$

$V_3 - V_4 + V_{eq} = 0$ con $V_{eq} = 0$

$$V_3 = V_4 \Rightarrow \bar{Z}_3 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_4) = \bar{Z}_4 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)$$

$$\bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \cancel{\bar{Z}_3 \bar{Z}_4} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_4 + \cancel{\bar{Z}_4 \bar{Z}_3}$$

$$\bar{Z}_2 \bar{Z}_3 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_4$$

CONDIZ. BILANCIAM.
PONTE

$\Rightarrow$ Ritorniamo al circuito

$$\Rightarrow \bar{Z} \cdot -\frac{1}{4} \delta = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \delta\right)}^{\frac{1}{\bar{Z}_1}} \cdot 2 \quad \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} = 4 + 8j$$

$$\bar{Z} = \frac{2 - j}{-\frac{1}{4}j} = \frac{8 - 4j}{-j} = 8j + 4$$

era da aspettarsi, $\bar{Z}$ è il reciproco di Z visto rispetto ai terminali

$$\bar{Z} = 4 + 8j \Rightarrow \text{circuit diagram with } 4\Omega \text{ resistor and } 8j \text{ inductor in parallel}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{Z}$$

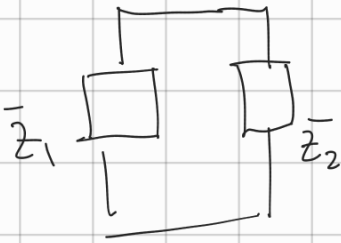
$$\omega = 2$$

$$\omega L = 8 \Rightarrow L = 4 \text{ mH}$$

è positivo, per forza è induttore

• in parallelo?

due bipoli in parallelo c.c. $\bar{Z} = 4 + 8j$



$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = 4 + 8j$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{R_2 + jX_2}} = \dots$$

$$Z_1 = R_1 + jX_1$$

$$\frac{1}{R_1 + jX_1} = \frac{4}{80} \Rightarrow R_1 = 20 \quad \frac{1}{jX_1} = -10j$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_1 R_1 + jX_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2 R_2 + jX_2} = \frac{4 - 8j}{16 + 64} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10}j$$

$X \rightarrow -B$
con la
segna

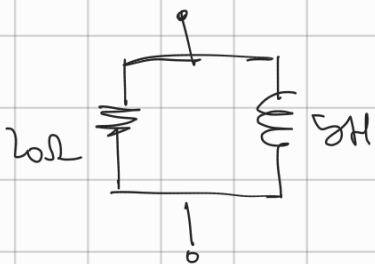
$$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10}j$$

$$\bar{Z} = 4 + 8j$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} = 4 + 8j$$

$$R = 20 \Omega$$

$$\omega = 2 \quad L = 5 \text{ mH}$$



dalle Formule

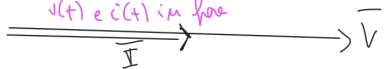
alternativa $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{1(R - jX)}{R^2 + X^2}$

$$\frac{4 - 8j}{16 + 64}$$

Potenza complessa degli elementi fondamentali

nei circuiti

$v(t)$ e $i(t)$ in fase



$$\bar{P}_R = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P_R + jQ_R = \frac{1}{2} R \bar{I} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R I_m^2 + j0$$

$$P_R = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} G V_m^2 = R I_m^2 = G V_m^2$$

$$Q_R = 0 \text{ VAR}$$

Pot meccanica = $\omega p_{me} \cdot \omega$

Alternatori monofase, ω costante, ma $p(t)$ varia, devo applicare una ω_{pila} variabile che segue questo andamento

Resistenza puramente reale
Potenza attiva

$\frac{1}{2} \omega_i$ - $\frac{1}{2} \omega_i$
 $\ln e$ - $\ln e$

Se invece $p(t)$ variabile è una complicazione non facile.

mi aspetto pot attiva positiva e pot reattiva = 0

- Resistore ideale *corrente e tensione proba ma loo*
- si ha

*Pot complessa
Resistor*

$$\bar{P}_R = \overset{\text{pot attiva}}{P_R} + \overset{\text{pot reattiva}}{jQ_R} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R \bar{I} \bar{I}^* = \frac{1}{2} R I_M^2 \quad \text{VA}$$

Legge ohm
 $\bar{I} = I_M e^{j\varphi_I}$
 $\bar{I} \bar{I}^* = I_M^2 e^{j\varphi_I - \varphi_I} = I_M^2 e^{j0}$

quindi

$$P_R = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 = R I^2 = G V^2 \quad \text{W}$$

Usando valori eff.
 $R I_{eff}^2 = V_{eff}^2 G$

*Potenza complessa
= Potenza attiva,
più potenza
reattiva*

e

$$Q_R = 0 \quad \text{VAR}$$

- un resistore ideale assorbe solo potenza attiva, mentre la potenza reattiva impegnata e' nulla (non vi e' energia scambiata)

Induttore

corrente ritarda 90° rispetto tensione

$Q > 0$

$P_L = 0$ in ogni ist.

$$\bar{P}_L = \overset{\text{pot attiva}}{P_L} + \overset{\text{pot reattiva}}{jQ_L} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} j\omega L \bar{I} \bar{I}^* = 0 + \frac{1}{2} j\omega L I_M^2$$

*non c'è scambio di
energia in media
energia dell'induttore*

$$\Rightarrow P_L = 0 \quad \text{W} \quad \text{pot attiva} = 0$$

$$Q_L = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} X_L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{X_L} \quad \text{VAR}$$

- Induttore ideale *Stesse formule resistenze, ma invece di R ho reattive*
- si ha

$$\bar{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} j \omega L \bar{I} \bar{I}^* = j \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VA}$$

quindi

$$P_L = 0 \text{ W}$$

$$V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

e

*Formula come resistore
solo che invece della resist
ho reattanza, invece di
R I^2, ho X_L I^2
e ho
Pot. reattiva
non attiva*

$$Q_L = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = X_L I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{X_L} \text{ VAR}$$

*Pot. reattiva L:
ho X_L, conosco
I_{eff} ... X_L I^2*

• un induttore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

$$\bar{P}_L = jQ_L$$



*Corrente anticipa di 90° la tensione in quanto che P_{att} = 0 cos φ mod = mod cos φ
Q sin φ < 0*

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P_c + jQ_c = \frac{1}{2} \bar{V} (j \omega C \bar{V})^* = \frac{1}{2} \bar{V} \omega C (-j) \bar{V}^* = \\ &= -j \frac{1}{2} \omega C V_M^2 \end{aligned}$$

Pot attiva P_c = 0 W Parte reale = 0

$$Q_c = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = \dots = \frac{-V_{eff}^2}{X_C} = (-) X_C I_{eff}^2 \text{ VAR}$$

Condensatore e' sorgente di pot. reattiva

*Leve negative, e' segno della reattiva
Sorgenti < 0
Pot. reattiva capacitiva*

- Condensatore ideale
- si ha

Es. se ho gen. ideale $\bar{V}_0$ posso erogare qualsiasi P e Q , non c'è
 $\hookrightarrow V(t) = V_M \cos(\omega t)$ può erogare qualunque P e Q richieste $\rightarrow$ posso condensatore o induttore, variando C o L
 l'obiettivo è il pot

$$\bar{P}_C = P_C + jQ_C = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{V} (j\omega C \bar{V})^* = -j \frac{1}{2} \omega C V_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_C = 0 \quad W$$

e

$$Q_C = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{I_M^2}{\omega C} = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \quad \text{VAR}$$

- un condensatore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva è nulla (non vi è potenza utilizzata)

- mettiamo anche in evidenza che un induttore ha una potenza reattiva positiva. *necessaria per generare il campo magnetico* Tale potenza e' impegnata per creare il campo magnetico dell'induttore }
- invece un condensatore ha una potenza reattiva negativa, e' cioe' una sorgente di potenza reattiva (una sorgente di potenza magnetizzante)
- quando L e C sono presenti in uno stesso circuito, la potenza reattiva necessaria a L puo' essere in parte, o completamente, fornita da C ; discuteremo ulteriormente questo fatto in relazione al problema del rifasamento di carichi industriali }

*potenziale
energia tra loro...*

V, i generatore ideale non hanno
limiti sulla P_{attiva} / $P_{reattiva}$
erogata

Reti 2 porte in Reg. sinus.

• Trasformatore ideale *Spiega che bisogna andare alla potenza istantanea*

• consideriamo un trasformatore ideale e cioè, una rete due porte caratterizzata da

e

$$\begin{cases} v_1(t) = n v_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \end{cases}$$

valore segno *senza segno*

dove $n = N_1/N_2$ e' il rapporto di trasformazione (N_1 e N_2 sono le spire del primo e secondo avvolgimento)

Sarà proporzionale alla potenza attiva e reattiva
Non ha bisogno di Q per creare campo magnetico induttore intorno

veniva scritto

nei Foxor

$\bar{I}_1$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ n:1 \end{cases}$$

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{n} \bar{I}_2$$

$\bar{I}_2$

Pot. reattiva, potenza necessaria per creare campo magnetico

compensazione di pot reattiva

L e C si collegano energia tra loro

*Potenza complessa
 Rete due porte,
 Somma delle potenze complesse*

$\bar{V}_1$

$\bar{V}_2$

lineare

simbolico

• sappiamo che $p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t)(-\frac{1}{n}i_2(t)) + v_2(t)i_2(t) = 0$ per ogni t , quindi il trasformatore ideale e' trasparente alla potenza istantanea

• per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = n\bar{V}_2, \bar{I}_1 = -\frac{1}{n}\bar{I}_2$$

nel dominio dei fasori

• la potenza complessa assorbita vale

pot complessa porta 1 e 2

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

$$= \frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{I}_1^* + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^*$$

$$= \frac{1}{2}n\bar{V}_2\left(-\frac{1}{n}\bar{I}_2^*\right) + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* = \boxed{0 \text{ VA}}$$

la pot ass. complessa e' 0

$V_1 = nV_2 \quad I_1 = -\frac{1}{n}I_2$

• quindi un trasformatore ideale e' trasparente sia alla potenza attiva che alla potenza reattiva

pot. attiva e reattiva assorbita e' 0.

Se vedo entrare $P_{reattiva}$, vedo uscire la stessa Q dalla porta 2

non serve Q per creare campo magnetico

non si scambiano... $P_{attiva} = 0$

quello vede pero... hanno perdite all'interno

No pot. attiva, trasformatore non ideale

- Giratore ideale *rete passiva ... non assorbe pot. attiva ma assorbe pot. reattiva* $p = 0$
 - consideriamo un giratore ideale e cioè una rete due porte $Q \neq 0$
- caratterizzata da

$$v_1(t) = -R_0 i_2(t)$$

$$\bar{V}_1 = -R_0 \bar{I}_2$$

e

$$v_2(t) = R_0 i_1(t)$$

$$\bar{V}_2 = R_0 \bar{I}_1$$

dove R_0 in Ohm e' il rapporto di girazione

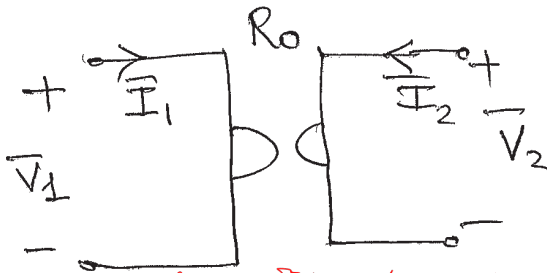
giratore, es. condensatore
(pot. Q negativa), es. trasforma
in un induttore.

Afferisce cioè accoda due
assorbe pot. reattiva di

Tipo induttivo

Trasforma Q di un tipo in
un altro, non

+18 può essere trasformato
alla P. reattiva



Giratore trasforma potenza reattiva da un tipo ad un altro
non può essere trasformato alla potenza reattiva

Giratore e Trasformatore sono la medesima rete 2 porte
perché trasformanti alla PCT) istantanea

- sappiamo che anche il giratore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

trasformata di Fourier
e' lineare

$$\bar{V}_1 = -R_0 \bar{I}_2, \bar{V}_2 = R_0 \bar{I}_1$$

- la potenza complessa assorbita vale

Potenza complessa

$$\begin{aligned} \bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2} \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2} R_0 \bar{I}_2 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} R_0 \bar{I}_1 \bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2} R_0 [\bar{I}_1 \bar{I}_2^* - \bar{I}_1^* \bar{I}_2] \\ &= j R_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad \text{VA} \end{aligned}$$

energia immaginaria
 $j 2 \ln[I_1, I_2]$

sono l'uno il coniugato dell'altro

numero complesso - il suo coniugato

potenza immag

$R_0 = 0$, j 2 volte pot. mag.

- quindi un giratore ideale e' trasparente alla potenza attiva ($P = 0$); non e' invece trasparente alla potenza reattiva che vale

pot. reattiva

$$Q = R_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad \text{VAR.}$$

$$a + bi - a + bi = 2bi$$

Tallegen nel caso alternato.

Teorema di Boucherot (conservazione della potenza attiva, reattiva e complessa)

es. generatori e condensatori

C assorbe $Q = -10 \text{ Var}$

generatori assorbe $+20 \text{ Var}$

L'apparente non si conserva, perché sono moduli;

non si possono salvare i moduli dei numeri complessi.

Tallegen caso sinusoidale

non posso salvare moduli
numeri complessi

posso fare bilanci di potenze,
non di moduli

Teo Boucherot

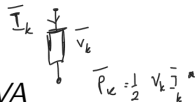
Pot. Apparente

NON si conserva.

posso salvare P e Q dei
bipoli, non posso salvare
le A , pot. apparente

• Consideriamo una rete con ℓ bipoli in regime sinusoidale a pulsazione ω . Utilizziamo per ogni bipolo k la convezione degli utilizzatori per coordinare i fasori $\bar{V}_k$ e $\bar{I}_k$. Si ha allora (teorema di Boucherot)

Fasori Tensione e Corrente Bipolo k-esimo coordinato secondo conv. util



$$\sum_{k=1}^{\ell} \bar{P}_k = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \sum_{k=1}^{\ell} (\underline{P}_k + j\underline{Q}_k) = 0 \quad \text{VA}$$

Pot complessa ASSORBITA Bipolo k-esimo

Somma Pot. complessa = 0 VA

Pot. complessa assorbita

vale cioè' la conservazione della potenza complessa

• ne consegue che vale anche la conservazione di potenza attiva

Somma Pot. complessa assorbita da tutto il nostro bipolo = 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\ell} P_K = 0 \quad \text{W} \end{array} \right.$$

se prendiamo le parti reali

Pot complessa ha significato fisico

hanno dunque un significato fisico, si conservano

e della potenza reattiva

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\ell} Q_K = 0 \quad \text{VAR} \end{array} \right.$$

se prendiamo le parti immaginarie

sostanziamo il principio di conservazione di potenza

Valido per principio di conservazione

Versione esercizi

• in un circuito in cui sono presenti R, L, C e un certo numero di generatori di tensione e/o corrente possiamo scrivere *il Teo di Boudart*

caso conv. per generatori $\rightarrow$ *pot. attiva erogata dal generatore i-esimo*

$$\sum_{\text{gen.ri}} P_{s,i} = \sum_{\text{resistori}} P_{R_i} = \sum_{\text{resistori}} R_i I_i^2$$

gli unici che assorbono pot. attiva sono i resistori

potenze attive dei generatori non sui resistori LC non assorbono

potenza reattiva

$$\sum_{\text{gen.ri}} Q_{s,i} = \sum_{\text{induttori}} Q_{L_i} + \sum_{\text{condensatori}} Q_{C_i}$$

di $Q_{s,i}$

vanità se si indichino conduttori

$$= \sum_{\text{induttori}} \omega L_i I_i^2 + \sum_{\text{condensatori}} (-\omega C_i V_i^2)$$

negativa

una possibile equazione

1) Generatori non erogano *pot. reattiva* se non ci sono L e C

2) *Generatori* non erogano Q se in media $E_L^{\text{media}} = E_C^{\text{media}}$

$$= 2\omega \left[\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} - \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}} \right] \text{VAR}$$

con media calcolata su un periodo

rispettivamente

dove $P_{s,i}$ (risp., $Q_{s,i}$) e' la potenza attiva (risp., potenza reattiva) erogata dal generatore i -esimo

Generatori non interagiscono in risonanza pot. reattive Q e L si cancellano

Potenza reattiva $= 2\omega E_L^{\text{media}} = 2\omega E_C^{\text{media}}$

Legge Ohm

Q e energia media $Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$

media su periodo

dove $E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i^2(t) dt$

Se si bilanciano Energie Cal. e Meccaniche

non devono intervenire i generatori

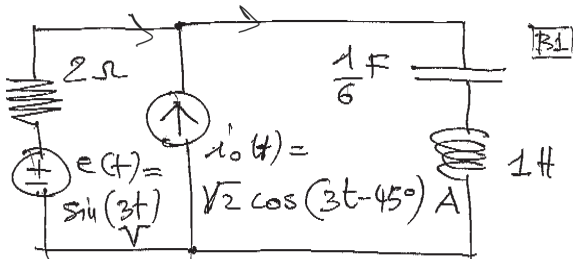
- notare che, nel complesso, i generatori non hanno bisogno di erogare potenza reattiva al circuito se L e C si compensano, cioè l'energia media di tipo elettrico è pari a quella di tipo magnetico

$$\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} = \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}}$$

- ciò accade ad esempio in condizioni di risonanza.

Si sceglia L e C da loro energia.
Bilancio..

Esempio. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura



$$\sqrt{2} \sin(3t - 45^\circ) = \sqrt{2} e^{-j45^\circ} = \sqrt{2} (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + j \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- consideriamo il circuito simbolico associato e usiamo il teorema di Millmann per determinare $\bar{V}$; si ha

$$\bar{V} = \frac{-\frac{j}{2} + 1 - j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}} = \frac{8 + j}{5} \text{ V}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{6}{3} = 2$$

$$-jX_C = -2j$$

Verifica Boucherot

Fasore seno

$$X \quad 1e^{-j\frac{\pi}{2}} \downarrow$$

$$\cos(3t - \frac{\pi}{2})$$

Rapp. fasoriale

$$\omega = 3$$

$$\sqrt{2} e^{-j45^\circ} = \sqrt{2} (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ))$$

$$= \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + j - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 1 - j$$

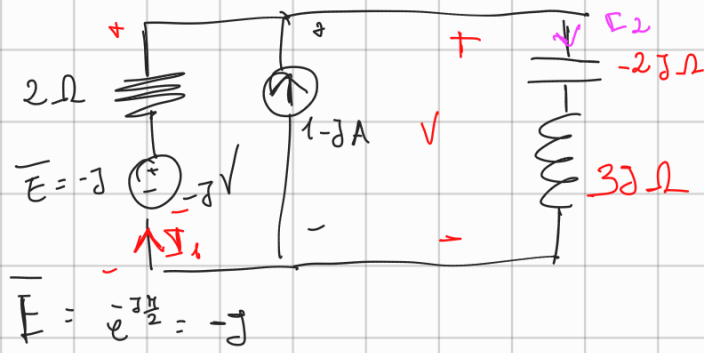
$$\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - j$$

$$\frac{1}{6} F \rightarrow X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{6}} = 2 \Omega$$

$$Z_C = -jX_C$$

$$X_L = \omega L = 3 \Omega$$

$$Z_L = jX_L$$



$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{\frac{-j}{2} + (1-j)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3j-2j} \right)} = \frac{\frac{-j}{2} + (1-j)}{\frac{1}{2} - j} = \frac{\frac{-3}{2}j + 1}{\frac{1}{2} - j} \cdot \frac{(\frac{1}{2} + j)}{(\frac{1}{2} + j)} = \\ &= \frac{\left(\frac{-3}{2}j + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + j \right)}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{-3}{4}j + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + j}{\frac{5}{4}} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}j + 2}{\frac{5}{4}} = \frac{j+8}{5} \bar{V} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}j + 2$$

$$= \frac{j+8}{5} \bar{V}$$

$\Rightarrow$ Potenza complessa erogata dal generatore
potenziale e corrente

$$\begin{aligned} P_{\text{gen. erog.}} &= \frac{1}{2} \bar{V} (1-j)^* = \frac{1}{2} \left(\frac{j+8}{5} \right) (1+j) = \frac{1}{2} \left(\frac{j}{5} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5} + \frac{8}{5}j \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5}j + \frac{7}{5} \right) = \frac{8}{10}j + \frac{7}{10} \text{ VA} \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{8}{10}j \text{ VA}$$

una kV per $\bar{I}_1$, $\frac{j+8}{5} = -2\bar{I}_1 - j \Rightarrow \frac{j+8+5j}{5} = -2\bar{I}_1$

$$\Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{6j+8}{-10} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \text{ A}$$

$$P_{\text{gen. tens. erog.}} = \frac{1}{2} (-j) \cdot \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j \right) = -\frac{j}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} j \right) =$$

$$= \frac{4j}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} j \text{ V.A}$$

$$I_M = \sqrt{a^2 + b^2} \quad I_M = a^2 + b^2$$

$$P_{\text{ASS. RES}} = \frac{1}{2} I^2 \left(\frac{16}{25} + \frac{8}{25} \right) = 1 \text{ W}$$

trovo I_2 con KI

$$I_2 = I_1 + (1-j) = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5} j + 1 - j = \frac{1}{5} - \frac{8}{5} j \text{ A } I_2$$

reattanza

aperta al generatore I_1

①

$$Q_L = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{64}{25} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{65}{25} = \frac{195}{50} = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

$$Q_L = \frac{1}{2} X_L I_M^2$$

$$Q_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{64}{25} \right) = -\frac{65}{25} = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

$X_C = 2$

Condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} X_C I_M^2$$

sempre

pot. reattiva

ora lo sono tutte

Somma potenze reattive generati

$$\frac{39}{10} - \frac{26}{10} = \frac{13}{10} \text{ Q}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} - \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

Q gen I

Q gen V

$$\frac{4}{10} + \frac{8}{10} = \frac{39}{10} - \frac{26}{10}$$

pu

LCC

$$c \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \text{ W} = 1 \text{ W}$$

• bifaccio il circuito e elemento per elemento calcolo la potenza ASS / erogate.

ora es. via via Parte 2

• Bipo Negativo assorbibile assorbe

$$\bar{P} = S + jS \text{ VA}$$

quanto vola P istantanea?

$$A = \sqrt{25 + 64} = 9.4$$

no bipo che analizziamo $\bar{P} = S + jQ \quad V_A = A e^{j\varphi_z}$ $P(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_v)$ Pot. istantanea di picco medio?

$P = 5 \text{ W}$ $P_A = \text{Re}[\bar{P}]$ $p(t) = P + A$

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

$$P_{\text{MAX}} = P + A$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{25 + 64} = 9,43$$

$$P_{\text{MAX}} = 5 + 9,43 = 14,43$$

$$P_A = A \cdot \cos(\varphi_z)$$

$$P_{\text{MIN}} = 5 - 9,43 = -4,43$$

dove $\varphi_z = \arctg(\frac{Q}{P})$
però... $P = P_{\text{real}}$

Supponiamo che $\varphi_v = 0$

risultato $p(t)$

$$\varphi_v - \varphi_i = \varphi_z$$

in questo caso, $\varphi_v = 0 \Rightarrow \varphi_i = -\varphi_z$

$$\bar{P} = A e^{j\varphi_z} = 9,43 e^{j \arctg(\frac{8}{5})} = A e^{j 58^\circ}$$

$$\varphi_i = -57^\circ$$

$p(t)$ dunque...

$$p(t) = 5 + 9,43 \cos(2\omega t - 57^\circ)$$

un bipolo reale 10 kVA ($\varphi_z = 36^\circ$) con $\varphi_z = 36^\circ$

Fattore di potenza $= 0,8 = \cos(\varphi_z)$ $\varphi_z = 36^\circ$
è di tipo induttivo-capacitivo
in ritardo $\varphi_z = -36^\circ$

Tensione sul bipolo vale $220 \text{ V}_{\text{eff}}$, ricavare

Potenza attiva, reattiva, complessa della corrente e
impedenza complessa del bipolo

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

$$V_{eff} = 220 V$$

$$P? \quad Q? \quad I_m? \quad \bar{Z}?$$

$$A = V \Rightarrow I = \frac{A}{V} = \frac{10 \cdot 10^3}{220} = 45,45 A \quad \text{No } V_{eff} \text{ e } I_{eff} \quad I_{eff} = \frac{A}{V_{eff}}$$

$$I_m = \sqrt{2}(45,45) = 64,3 A \quad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{ATTIVA} = P_{app} \cdot \cos(\varphi_2) =$$

$$= A \cdot \cos(\varphi_2) = 10 \cdot 10^3 (0,8) = 8 \text{ kW}$$

$$Q = A \sin(\varphi_2) = 10 \cdot 10^3 (0,6) = 6 \text{ KVAR}$$

impedância? P real e Q imm $\circ$ Modelo e argumento.

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_2} = Z e^{j(36,87^\circ)}$$

$$\varphi_2 = 36,87^\circ$$

$$Z = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{220}{45,45} \simeq 4,84 \Omega$$

$$\bar{Z} = 4,84 e^{j36^\circ}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V}{I}$$

$$\bar{Z} = 4,84 e^{j(36,87)} = 3,87 + j2,98 \text{ ohm}$$

$\rightarrow$ como ohms imped

horários com a fórmula

$$P = \text{Re}[\bar{Z}] \cdot I_{eff}^2 = 3,87 \cdot (45,45)^2 = 8 \text{ kW}$$

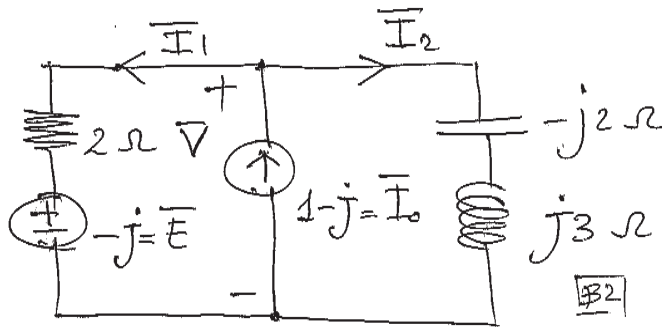
Verificar

Si tem

$$Q = \text{Im}[\bar{Z}] \cdot I_{eff}^2 = 2,98 \cdot (45,45)^2 = 6 \text{ k[VAR]}$$

Sum 8 mag 2023
Fime





• allora

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V} + j}{2} = \frac{4 + j3}{5} \text{ A}$$

e

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 - \bar{I}_1 = \frac{1 - j8}{5} \text{ A}$$

- la potenza *erogata* dal generatore di corrente vale

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}_0^* = \frac{7 + j9}{10} \text{ VA}$$

e quella erogata dal generatore di tensione

$$\bar{P}_e = -\frac{1}{2} \bar{E} \bar{I}_1^* = \frac{3 + j4}{10} \text{ VA}$$

- inoltre la potenza assorbita dal resistore vale

$$P_R = \frac{1}{2} 2 I_{1M}^2 = 1 \text{ W}$$

quella assorbita da L vale

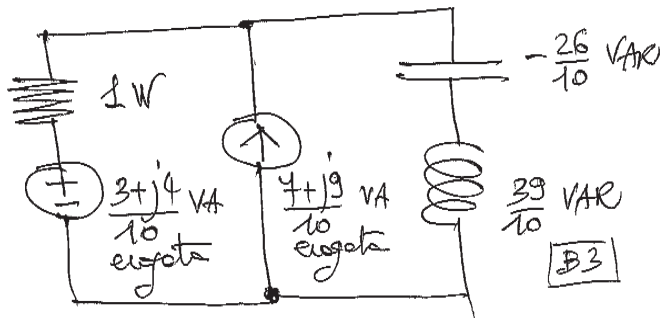
$$Q_L = \frac{1}{2} 3 I_{2M}^2 = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

e quella assorbita da C

$$Q_C = -\frac{1}{2} 2 I_{2M}^2 = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

- e' verificato il teorema di Boucherot

- conviene riportare quanto ottenuto in una figura



Da Leo. 11/05/23

Alcune convenzioni

- Abbiamo definito

Fasore corrente

$$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} \quad A$$

$$\bar{V} = \dots$$

Usiamo Fasori
V con valori
efficaci

- a volte utilizzeremo negli esercizi questa notazione

NOTAZ. Fasoriale
nuova

$$\bar{I} = I_{\text{rms}} e^{j\varphi_i} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi_i} = \cancel{I e^{j\varphi_i}} A_{\text{eff}}$$

valore efficace

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

dove il modulo del fasore corrisponde al valore efficace; per evitare
ambiguità ~~va esplicitamente indicata l'unità di misura, e cioè~~
Ampere efficaci

- con la seconda notazione si ha ad esempio che la potenza
complessa è semplicemente espressa da

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* \quad VA_{\text{eff}}$$

Prima era

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \quad VA$$

Da Def. 11

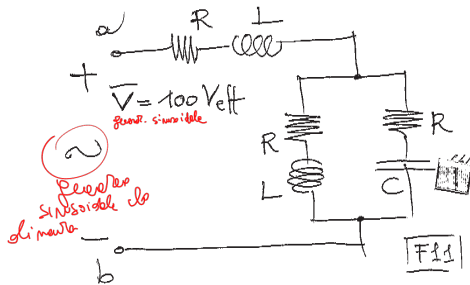
Bilancio di Pot. a regime sinusoidale

Esempio. Determinare potenza attiva e reattiva assorbita dal bipolo ab (in regime sinusoidale a pulsazione ω); verificare inoltre la validita' del teorema di Boucherot; e' noto che $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ Ohm} = R$

ω non e' necessario per i conti per le potenze

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \Omega$$

*globalmente quanto assorbe il dipolo?
(ovviamente la pot. attiva va ai resistori)*



Facile vedere che la SOMMA POT potenze ATTIVE dei resistori e la POT REATTIVE degli LC ...

Trovo potenza complessa su morsetti, Brava Parte reale e imag. e Brava P e Q

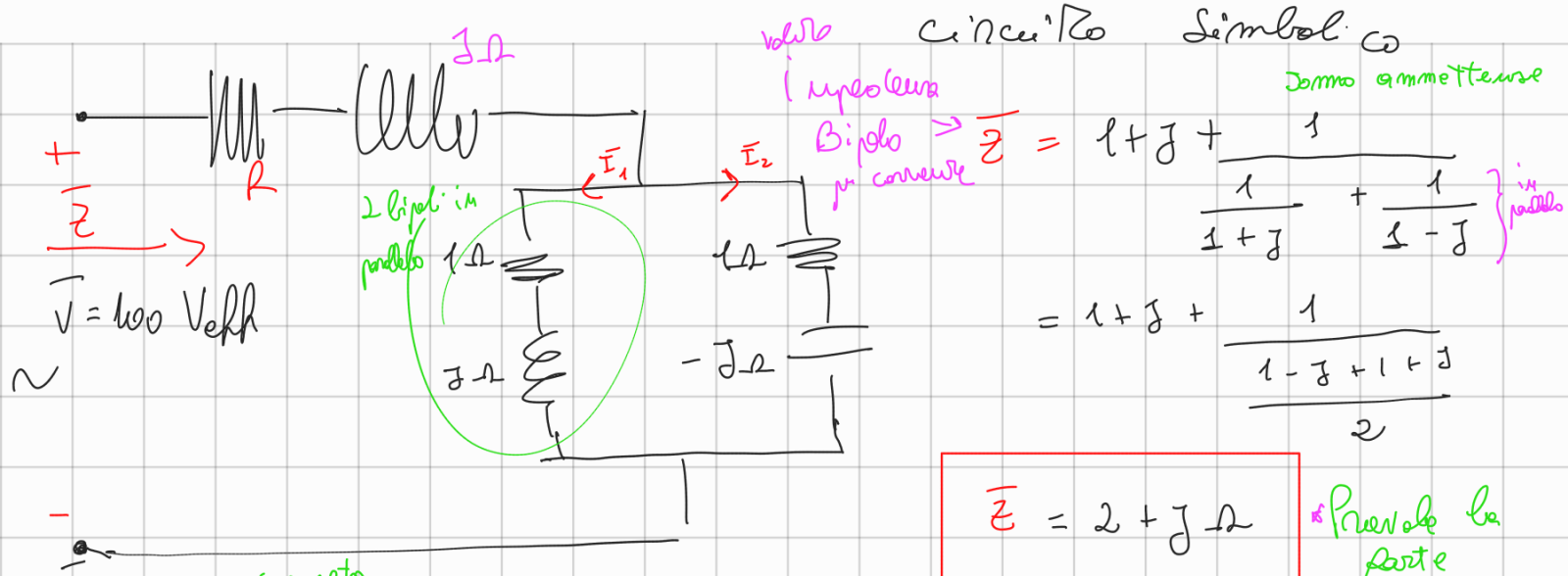
- consideriamo il circuito simbolico associato, per quale

$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = 2 + j \text{ Ohm}$$

e

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2 + j} = 40 - j20 \text{ Aeff}$$



$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}}$$

$$= 1 + j + \frac{1}{1 - j + 1 + j}$$

$$= 1 + j + \frac{1}{2}$$

$\bar{Z} = 2 + j \Omega$

* Prova la parte induttiva

* Bipolo di tipo ohmico induttivo

con note di ora

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2+j} \cdot \frac{(2-j)}{(2-j)} = \frac{100}{5} (2-j) = 40 - j20 \text{ A eff}$$

Potenza complessa

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* = 100 \times (40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

4 kW saranno assorbiti da un bipolo

$$\bar{I} = 40 - j20 \text{ A eff}$$

Bipolo assorbe 4 kW, e Q = 2 kVAR

Verifico ora Buchholz

Grande potenza attiva e reattiva

Per un resistore

efficace in un resistore

WATT

moduli di 20

VAR

VAR

$$P_R = R \bar{I}_R^2$$

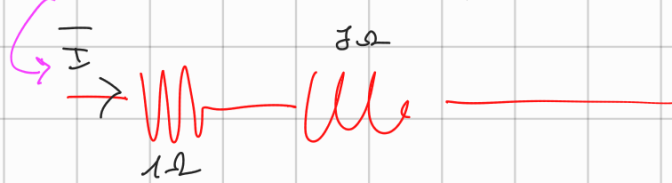
$$Q_L = X_L \bar{I}_L^2$$

$$Q_C = -X_C \bar{I}_C^2$$

valore eff con

$$\bar{I}^2 = 2000 \text{ A eff}$$

1600 + 400



→ 2 kW potenza attiva del resistore

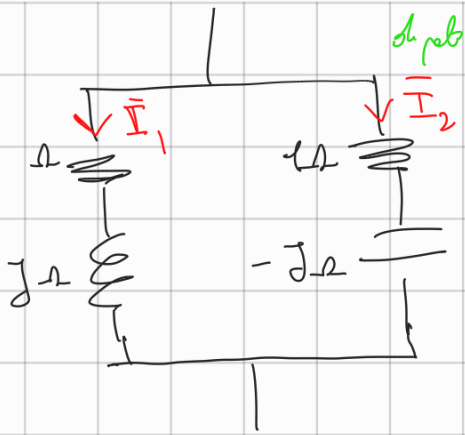
→ 2 kVAR Pot. Reattiva dell'induttore

$X_L = 1$

Regola partizione corrente

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{1}{1+j} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}}$$

senza averlo

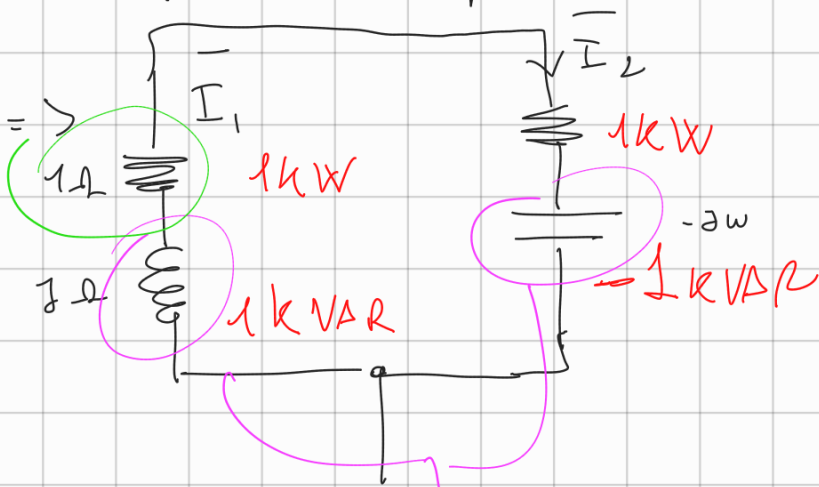


$$= \frac{(40 - j20)}{1 + j} \cdot \frac{(1 - j)}{(1 - j)}$$

$$= \frac{(40 - j20)(1 - j)}{2} = \frac{40 - 20 - j40 + j20}{2}$$

$$= 10 - j30 \text{ A eff}$$

• $I_1^2 = 1000 \text{ A eff}$



$\frac{0}{2} \text{ Brown}$
 $I_2 \text{ come } \bar{I} - \bar{I}_1$

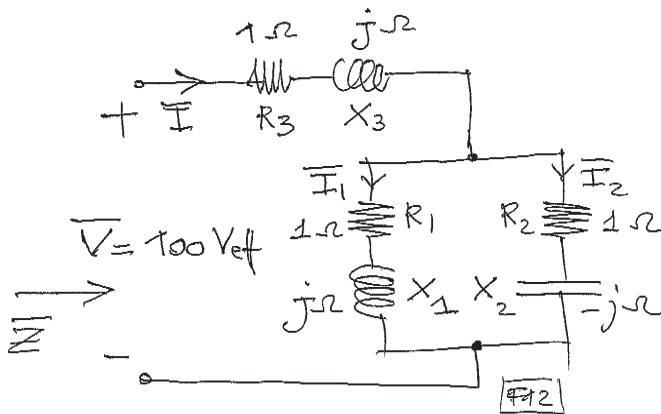
$I = 1000 \text{ A eff}$
 $I_2 \text{ sola } 1000 \text{ A eff}$

Teorema

Sono bilanciati, il condensatore sta
 energia reattiva all'induttore, il
 generatore non interviene, si collegiamo sopra

2 kW di Pa vanno sulle 3 resistenze i 2 k var vanno
 sulle prime

L e C sono bilanciati, scambiare energia tra loro
 ordine



• allora

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}^* = 100(40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

e quindi

$$P = 4 \text{ kW}; \quad Q = 2 \text{ kVAR}$$

energia del generatore

- verifichiamo adesso Boucherot; si ha dalla regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = (40 - j20) \frac{1-j}{2} = 10 - j30 \text{ Aeff}$$

e quindi

$$\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 30 + j10 \text{ Aeff}$$

- valutiamo potenze attive e reattive assorbite dai bipoli R, L, C ; si ha $I_1^2 = 1000$, $I_2^2 = 1000$ e $I^2 = 2000$; quindi

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1 \text{ kW}; P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1 \text{ kW}; P_{R3} = R_3 I_3^2 = 2 \text{ kW}$$

e

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = P = 4 \text{ kW}$$

- inoltre

$$Q_{X1} = X_1 I_1^2 = 1 \text{ kVAR}; Q_{X2} = -X_2 I_2^2 = -1 \text{ kVAR}$$

$$Q_{X3} = X_3 I_3^2 = 2 \text{ kVAR}$$

e quindi

$$Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3} = Q = 2 \text{ kVAR}$$

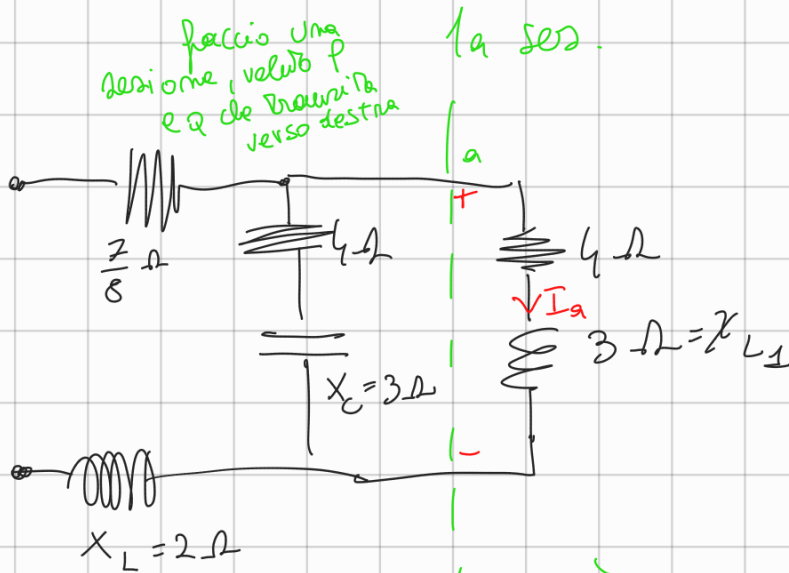
- il teorema di Boucherot e' verificato.

Esercizio da computer

Tiro lineare di distribuzione di Fox

.... senza usare fasori

Per via energetica con
Boucléot, no FASOM,
non ho neanche i dati
necessari



faccio una
sezione, valuto P
e Q che entrano
verso destra

1a sez.

ho il valore eff di Ia
il modulo
 $I_a = 20 A$ eff

trovo le pot. attive
e reattive delle varie
sezioni

$$P_{aa} = 4 \times I_a^2 = 1600 W$$

$$Q_{aa} = 3 \cdot I_a^2 = 1200 VAR$$

Poi entro nella
sezione b...

1) Ia eff = corrente in modulo

P_{aa}
 Q_{aa}

Proviamo la Tensione
qui non serve la minima
sezione. Non voglio il nome della
tensione ma voglio il valore eff Veff

positivo
perché
ho in modulo

> Valore Potenza Apparente della stessa sez.

per trovarmi la Tensione
della sezione

voglio la Tensione in valore eff,
il modulo

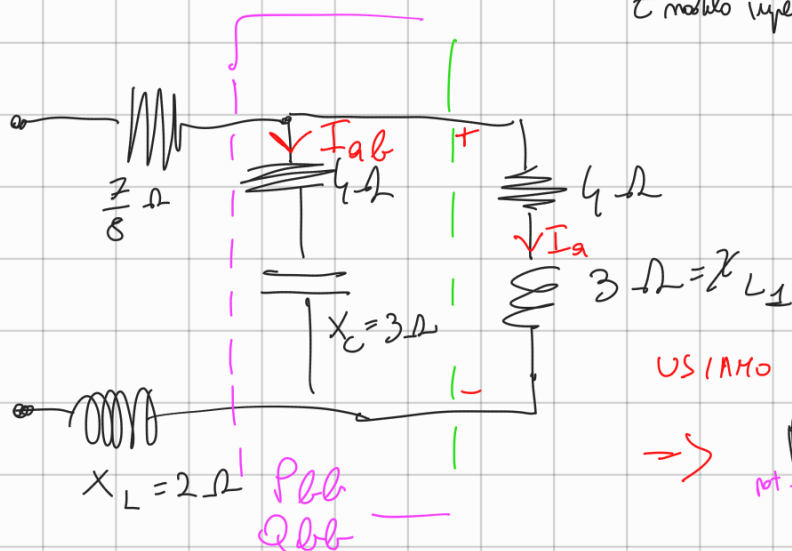
$$A_{aa} = \sqrt{P_{aa}^2 + Q_{aa}^2} = 2000 VA$$

$$= V_a I_a \quad A = V_{eff} I_{eff}$$

$$\Rightarrow V_a = 100 V_{eff}$$

$$\frac{2000}{20} = 100 V_{eff}$$

è modulo impedenza bipolo che ho nel bipolo



$$I_{ab} = \frac{V_a}{Z} = \frac{100}{5} = 20 A_{eff}$$

$$Z = 4 - j3 \Omega \quad \text{NON } 4+3!$$

me faccio il modulo ed è 5

$$Z = 5 \Omega$$

USIAMO BUSCHENOT
P. sez. precedente

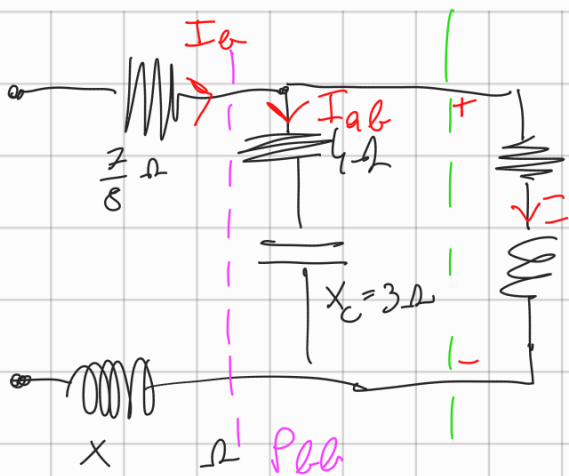
$$\Rightarrow P_{bb} = P_{aa} + 4 \times I_{AB}^2 = 3200 W$$

$$\leftarrow Q_{bb} = Q_{aa} - 3 I_{AB}^2 = 0 VAR$$

sono in risonanza

stessa reattanza, stesso
corrente in valore eff

più proprio ho usato A per trovare
V, ora lo uso per trovare I



2) $\Rightarrow A_{bb} = \sqrt{P_{bb}^2 + Q_{bb}^2} = 3200 \text{ V.A}$
 conosco V_{eff} , $P_{ot \text{ generale}}$, know I_{eff}
 $= V_{eff} I_{eff}$

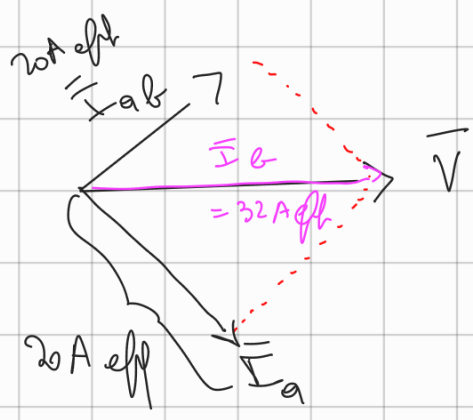
$I_b = 32 \text{ A}_{eff}$

SONO MODULI

$I_b + I_{AB} + I_a$

$I_e = I_{ab} + I_a$
 somma fasoriale,
 non so cosa fanno le fasi.

NON POSSO Sommare valori
 efficaci, sto sommando
i moduli.

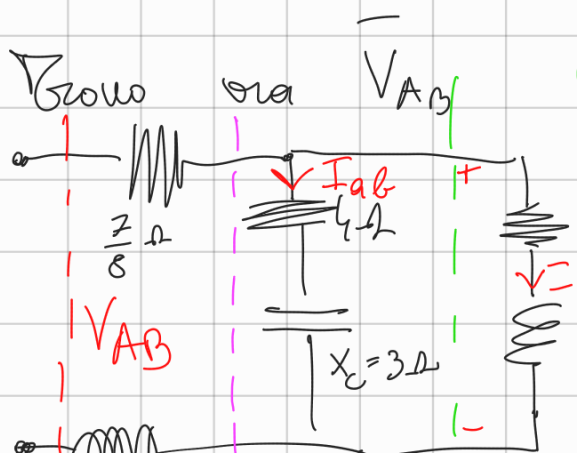


non e' vero che somma dei coseni
 e' la cosa dei moduli.

Verifico ora Boucherot

$P_{AB} = P_{bb} + \frac{2}{8} \times I_e^2 = 4096 \text{ W}$

$Q_{AB} = Q_{bb} + 2 \times I_e^2 = 2048 \text{ VAR}$



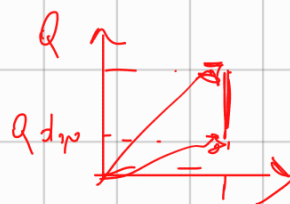
(posso per la pot. generale)

$A_{AB} = \sqrt{P_{AB}^2 + Q_{AB}^2} = 4580$
 $= \frac{I_b}{32} V_{AB}$ in val. eff.

mai sommare

somma dei valori
efficaci di
grandezze sinusoidali,
in quanto sono moduli.

$$\rightarrow V_{AB} = 143 \text{ V.}$$



$$Q_c = Q_{in} - Q_{dp}$$

$$\omega C V_{eff}^2 = P_{tg \varphi_z} - P_{tg \varphi_{cor}}$$

=> rifasamento ora a 0,95

condensatore collegato tra morse A e B

potenza reattiva Q_{AB}

$$C_{cor} = \frac{P_{AB} \tan \varphi_z - P_{AB} \tan \varphi_{cor}}{\omega V_{AB}^2}$$

$$\omega = 314 \text{ rad/sec}$$

$$= 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$$

Q reattiva

dopo

rifasamento?

Se si conosce

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 4300$$

$$e I_{cor} = \frac{A}{V} = 30 \text{ A}$$

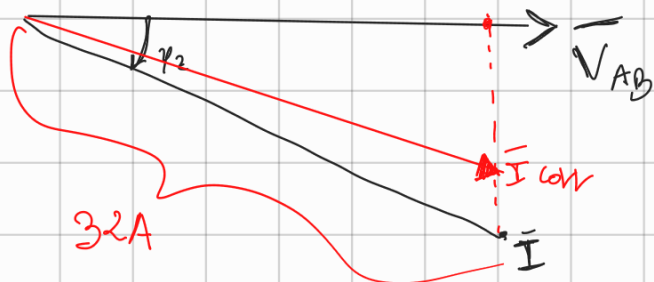
$$= \frac{2048 - 4096 \tan(\varphi_{cor}^{18^\circ})}{\omega V_{AB}^2} = \frac{2048 - 1311}{314 \cdot 143^2}$$

$$= 1,19 \cdot 10^{-4} = 119 \mu\text{F}$$

$$115 \cdot 10^{-6}$$

Diagramma fasoriale
 $\varphi_z = 0$

Ci manca
l'angolo per



$$\tan \varphi_z = \frac{Q_{AB}}{P_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{2} = 27^\circ$$

e' corretto

$$P_{app. \text{ min}} = V \cdot I_{min}$$

$$P_{app. \text{ dopo}}$$

$$V \cdot I_{cor}, P_{nom \text{ cavi}}$$

Bravo Papparelli dopo / Veff

- Analizziamo il circuito iniziando dalla sezione aa e poi procedendo verso le sezioni a monte
- sezione aa):

$$P_a = 4I_a^2 = 1600 \text{ W}; Q_a = 3I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

- allora

$$A_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} = 2000 = V_a I_a = 20 V_a \text{ VA};$$

da cui $V_a = 100 \text{ Veff}$. Inoltre

$$I_{AB} = \frac{V_a}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{V_a}{5} = 20 \text{ Aeff}$$

- sezione bb): dal teorema di Boucherot

$$P_b = P_a + 4I_{AB}^2 = 3200 \text{ W}; Q_b = Q_a - 3I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

- quindi

$$A_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} = 3200 = V_a I_b = 100 I_b \text{ VA}$$

da cui $I_b = 32 \text{ Aeff}$

- sezione di ingresso AA): si ha

$$P_A = P_b + \frac{7}{8} I_b^2 = 4096 \text{ W}; Q_A = Q_b + 2 I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$

- si ha anche

$$A_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 4580 = V_A I_b = 36 V_A \text{ VA}$$

da cui $V_A = 143 \text{ V}$.

- *Osservazione importante:* si ha da KV $\bar{I}_b = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_a$, pero'

$$I_b = 36 \neq I_{AB} + I_a = 20 + 20 = 40 \text{ A}$$

- **non si possono sommare i valori efficaci di grandezze sinusidali**



- interpretare usando un diagramma fasoriale.