

# Circuiti del primo ordine

Mauro Forti

June 10, 2020

Variable di stato: tensione nei condensatori, <sup>↙</sup> e corrente negli induttori, <sup>↘</sup> la corrente  $i(t)$ , posso trovare lo stato energetico

Risolviame nel Dominio del Tempo Analisi

# Risposta libera

## • Scarica di C su R

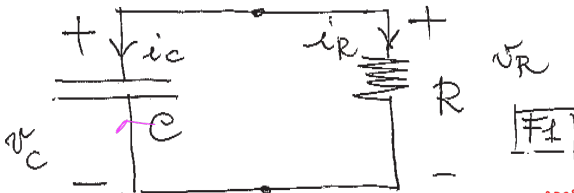
• C carico a  $t=0$ .  
• avviene un transitorio di scarica

si ha un transitorio di stato, in cui si scarica condensatore

• Consideriamo un circuito elementare RC senza generatori indipendenti; sia  $v_C(0) = V_0$ ; vogliamo determinare  $v_C(t)$  per  $t \geq 0$  analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la tensione su C ( $v_C$ ) e' la variabile di stato del circuito

abbiamo stato iniziale

tra  $v_C$  e  $i_C$  la variabile più importante è  $v_C$



• analogo come variabile di stato, la tensione sul condensatore

preso convenienza di chiamare variabile di stato.

• avendo la corrente su C non ho lo stato esplicito

di C • si ha dalla KV:  $v_C = v_R$  e dalla KI:  $i_R + i_C = 0$ , mentre le relazioni costitutive sono  $i_C = C dv_C/dt$  e  $i_R = v_R/R$ ; allora

$$-C \frac{dv_C}{dt} = \frac{v_C}{R}$$

$$v_C = v_R = \underbrace{R i_R}_{v_R} = -R i_C = -RC \frac{dv_C}{dt}$$

uso anche le eq. precedenti

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

$$\tau \frac{d}{dt} V_C + V_C = 0$$

Da risolvere così

$$\tau = \tau_{RC} = RC$$

Sono Secondi

Costante di Tempo del circuito RC Secondi

ci dice quanto è veloce il transitorio di scarico

→  $\tau$  piccolo, si scarica molto rapidamente il condensatore

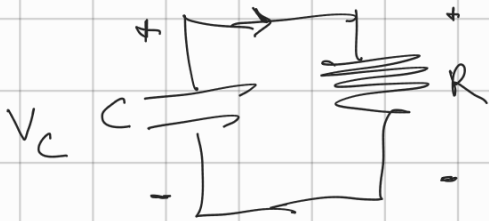
→  $\tau$  grande, si scarica più lentamente

Circuito RC si caratterizza con la

propria costante di tempo

io

RC Libera



$V_C$  variabile che varia nel circuito

$$V(0) = V_0$$

$$i(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$-V_C(t) + V_R = 0$$

$$V_C = - \underbrace{RC}_{\tau, \text{sec.}} \frac{dV_C(t)}{dt}$$

eq. caratteristica associata

$$\tau \frac{dV}{dt} + V_C = 0$$

$$\tau p + 1 = 0$$

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

$$V_C(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad k e^{p t} \quad \text{con } V(0) = V_0$$

$$k = V_0$$

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

• quindi, ponendo  $v_C = v$  il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\tau = RC$$

ho equaz. Cauchy  
con

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = 0$$

troviamo l'integrale generale dell'omogenea

con condizione iniziale

$$v(0) = V_0$$

quando ho eq omogenea, trovo integrale generale dell'omogenea  $\infty^1$  soluz. impongo la condiz. iniziale e trovo l'unica sol.

• con  $\tau = RC$  e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito  $RC$ ; si ha  $[\tau] = \text{sec}$

• e' un problema di Cauchy <sup>del primo ordine</sup> che ammette soluzione unica per  $t \geq 0$ ; <sup>si prende</sup> consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\frac{dv}{dt} (\rho) + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$$

$\text{sec}^{-1}$ ,  $\mu_z$   
Radice caratteristica

dove  $\rho$  e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

trovata la radice caract., l'integrale generale dell'omogenea son.

la sol. e' duque

$$v(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

e impongo che  
 $t=0 \quad v(0) = V_0$

dove  $k \in \mathbb{R}$ ; sono  $\infty^1$  soluzioni dell'omogenea

spazi vettoriale di dim 1



• imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

Ho trovato  
l'unica solus.  
di Cauchy

$$\Rightarrow v(0) = ke^0 = k = V_0$$

impongo ora le  
condiz. iniziali,  
cioè  $v(0) = V_0$   
e trovo  $k$

quindi la tensione nel circuito RC vale

Risposta libera

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

unico solus.  
del problema di Cauchy

Come evolve naturalmente questo circuito RC carico, senza forzare

• e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo;

non ci  
sono  
forzanti

rappresenta la scarica di C inizialmente carico sul resistore R

• in figura e' rappresentato l'andamento temporale della scarica; si ha  $v(\tau) \simeq 0.38V_0$ , cioè dopo  $\tau$  la tensione si e' ridotta al 38 % del valore iniziale; si ha anche  $v(4\tau) = 0.02V_0$ , cioè dopo  $4\tau$  la tensione si e' ridotta al 2 % della tensione iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa  $4\tau$

• la costante di tempo  $\tau$  determina la durata del transitorio ( $\tau$  piccolo transitorio veloce,  $\tau$  grande transitorio lento)

• la radice caratteristica  $\rho = -1/\tau$  ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche frequenza naturale del circuito RC

frequenza naturale del circuito

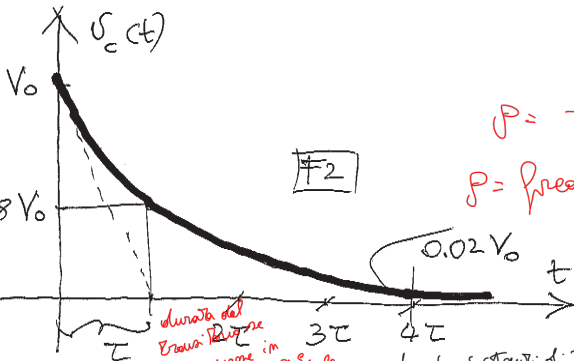
andamento

esponenziale

di segno scarica

Se  $V_0$  positivo

Tende asintoticamente a 0.



$$\rho = -\frac{1}{\tau}, \text{ sec}^{-1}$$

$\rho$  = Frequenza naturale del circuito

dopo una costante di tempo  $\tau$  siamo al 38% della Tensione  $V_0$

durata del Transitorio  
Si scarica in modo lineare e non esponenziale

dopo 4 costanti di tempo

dopo  $4\tau$  si esaurisce il transitorio

un transitorio pratico dura circa 4 costanti di tempo.

Dopo una costante di tempo, siamo già al 38% rispetto a  $V_0$ . Dopo  $4\tau$  è 2%.

$\Rightarrow$  Radice caratteristica  $\rho = -\frac{1}{\tau}$  HZ FREQUENZA NATURALE del circuito

$$\tau_{RC} = RC \quad \tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

- Scarica di  $L$  su  $R$

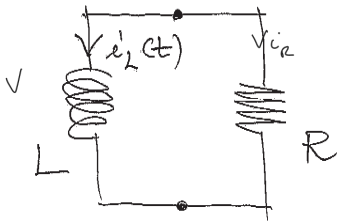
Variable di stato di  $L$  e'  $i_L$

- Consideriamo un circuito elementare  $RL$  senza generatori indipendenti; sia  $i_L(0) = i_0$ ; vogliamo determinare  $i_L(t)$  per  $t \geq 0$  analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la corrente in  $L$  ( $i_L$ ) e' la variabile di stato del circuito

$$V(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -R i_L$$

$$\frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L = 0$$



$$V_L = V_R \quad i_L = -i_R$$

[F3]

$$V_L = R i_R = -R i_L$$

$$-L \frac{di}{dt} = R i$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine (ponendo  $i_L = i$ )

Secondo

$$\frac{L}{R} \tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

Problema di Cauchy

$$p + \frac{1}{\tau} = 0$$

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

con condizione iniziale

$$i(0) = i_0$$

- con  $\tau = L/R$  e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito  $RL$ ; si ha  $[\tau] = \text{sec}$  *T massima agli elementi reattivi*
- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per  $t \geq 0$ ; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

*Se overcon  
L e C, transitorio  
dura di più*

dove  $\rho$  e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da *Freq. naturale*

$$i(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{tR}{L}}, \quad t \geq 0$$

dove  $k \in \mathbb{R}$ ; sono  $\infty^1$  soluzioni dell'omogenea

- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$i(0) = ke^0 = k = I_0$$

quindi la corrente nel circuito  $RL$  vale

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di  $L$  inizialmente carico sul resistore  $R$
- si ha  $i(\tau) \simeq 0.38 I_0$ , cioe' dopo  $\tau$  la corrente si e' ridotta gia' al 38 % del valore iniziale; si ha anche  $i(4\tau) = 0.02 I_0$ , cioe' dopo  $4\tau$  la corrente si e' ridotta al 2 % della corrente iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa  $4\tau$
- la costante di tempo  $\tau$  determina la durata del transitorio ( $\tau$  piccolo transitorio veloce,  $\tau$  grande transitorio lento)
- la radice caratteristica  $\rho = -1/\tau$  ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RL*

Collego  $C$  ad un resistore  $R$  carico a tensione  $V_0$ ;  $C$  e' tensione sul resistore per la corrente,  $C$  inizia a scaricarsi, la tensione si abbassa  
 $\Rightarrow$   $V$  e  $I$  vanno inibiti.  $\emptyset$ , stessa cosa per  $L$

$\Rightarrow \tau$  = Tempo che impiegheremo a scaricarsi il  $C$  <sup>il transitorio</sup> se  $V$  evolve  $C$  in corrente  
 con pendenza legata a  $\tau$

Prendo la tangente all'andamento,  $t=0$

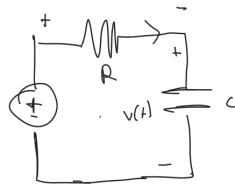
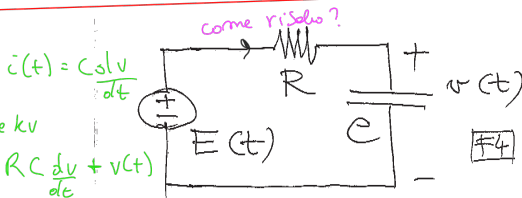
$$\tau_{RC} = RC$$

$$\tau_{LR} = \frac{L}{R}$$

$\tau$  e' proporzionale agli elementi resistivi, se prima  $R$  moltiplica, poi divide  
 dunque se cresco  $L$  o  $C$  il transitorio e' piu' lento

**Risposta forzata** = c'è un generatore e il comportamento è forzato

• Consideriamo un circuito RC con un generatore indipendente di tensione  $E(t)$ ; per risposta forzata in corrente si intende la risposta quando è presente il generatore indipendente e le condizioni iniziali sullo stato sono nulle, cioè  $v(0) = 0$ ; la risposta forzata è detta anche risposta allo stato iniziale nullo *eq. diff. affine*



• si può verificare che il circuito soddisfa all'equazione differenziale del primo ordine di tipo non omogeneo

*c'è un Termine Forzante*

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \underbrace{E(t)}_{\text{Termine Forzante}}, \quad t \geq 0$$

*eq. Diff. del primo ordine AFFINE*

con condizioni iniziali

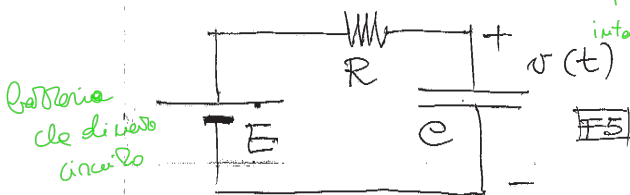
$$v(0) = 0$$

- tale problema di Cauchy ha soluzione unica *risolto eq. dif. Eeq. diff ha per se infinite sol, ma il problema di Cauchy associa un solo sol.*
  - dall'analisi sappiamo che *integrale generale dell'eq. aff. = integrale generale dell'omog. associata + integrale particolare dell'affine*
- $$v(t) = v_{\text{omogenea}}(t) + v_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_{\text{part.affine}}(t)$$
- Studia prima* dove  $v_{\text{omogenea}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$  *trovato prima* e' l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre  $v_{\text{part.affine}}(t)$  *scrittura di C e K* e' un integrale particolare dell'equazione affine *dell'affine*  $\Rightarrow$  *K ora sono di verso.* INTEGRALE PARTICOLARE DIPENDE dall'ecib.
- ovviamente l'integrale particolare dipende dalla forma della eccitazione  $E(t)$ ; puo' essere determinato usando ad esempio l'integrale di convoluzione *convoluzione con eccitaz. e risposta impulsiva*
- $$v_{\text{part.affine}}(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\sigma}{\tau}} E(\sigma) d\sigma$$
- integrale di convoluzione, tra eccitaz. circuit e la risposta impulsiva*
- oppure usando il metodo della trasformata di Laplace
- nel seguito vediamo come si determina  $v_{\text{part.affine}}(t)$  nel caso importante di eccitazioni costanti o eccitazioni sinusoidali

# Circuito RC con Eccitazione Costante es. batteria o poi Eccit. sinusoidale

- determiniamo  $v(t)$ , risposta forzata, per il circuito RC in figura con eccitazione costante  $E(t) = E$

*l'integrale particolare non stabile perche' circuito analogico stabile*  
*integr. partic. lo scopo della stessa forma dell'eccitazione*



- e' naturale cercare un integrale particolare costante, e cioe' *Costo integrale particolare della nota forma del circuito.*  
 'della stessa forma della eccitazione':

$$v_{\text{part.affine}}(t) = H = \text{costante} \quad \text{V} = H$$

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E = \text{costante}$$

- sostituendo ottengo

$$H = E$$

$\Rightarrow$   $\exists$  un integrale particolare costante prende' questo  $H = E$

e quindi

*verifico*

$$v(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + E \quad \text{v aff.}$$

$k$  Trovo con condiz. iniziali



- imponendo la condizione iniziale si ha

$k$  la Bvoo con condiz. iniziale

$$v(0) = k + E = 0$$

NEG. STAZ = stazion. forma dell'ecubo.

quindi  $k = -E$  e la risposta forzata vale

FORZATA = TRANS. FORZATO + NEG. STAZ

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

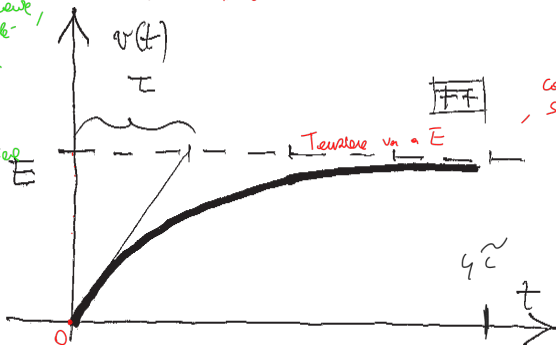
$$V(t) = E - E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

TRANSitorio: selezione dell'ingegner. omogeneo

Transitorio di carica di un condensatore con generatore e resistenza in serie

- e' il transitorio di carica di un  $C$  inizialmente scarico con una batteria di tensione  $E$ ; l'andamento temporale e' mostrato in figura

a resistenza serie e resistenza in serie



collegata E su C scarico, Scarico corrente o il condensatore inizia a caricarsi.

$\sim 4$  costanti di tempo per costi corini

collegato il generatore inizia a scorrere corrente, la tensione cresce finché non raggiunge la Tensione E

Sop  $4\tau$  la tensione differisce del 2% rispetto ad E

$$v(0) = 0$$

# Scomposizione della risposta forzata

- scriviamo la risposta forzata ad una eccitazione costante del circuito  $RC$  nella forma

$$v_{\text{forzata}}(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

dove

$$E = v_{\text{part.affine}} = v_{\text{regime stazionario}}$$

e' cio' che resta per  $t \rightarrow +\infty$  ed e' della stessa forma della eccitazione; invece  $-Ee^{-\frac{t}{\tau}}$  si dice parte transitoria della risposta forzata ed e' una soluzione dell'omogenea associata

- abbiamo ottenuto la scomposizione:

$$\text{Forzata} = \text{Transitorio} + \text{Regime Stazionario}$$

- oppure  $F = T + R$

$E$  dopo Transitorio,  $E$  a regime stazionario, dopo il Transitorio cio' che rimane dopo il transitorio,  $t \rightarrow \infty$

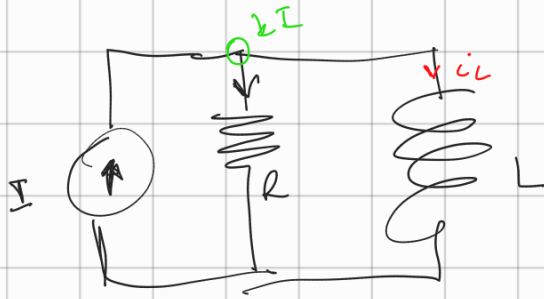
$$v_{\text{forzata}} = p. \text{transitoria} + E$$

$\text{e } t \rightarrow \infty$

$$V_F = T + R$$

Transitorio      costante

Carica di un induttore serico, risposta Forzato  $i_L = 0$



$$V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$I = \frac{V_L}{R} + i_L$$

$$I = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$i(t) = i_{\text{ing. generale}} + i_{\text{ing. particolare}} + i_{\text{affine}}$$

$i_{\text{generale}}$   $i_{\text{ing. particolare}}$

$$i_{\text{affine}} = H, \quad i_{\text{costante}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L} \quad M_2, \text{ freq. nat.}$$

$$I = H$$

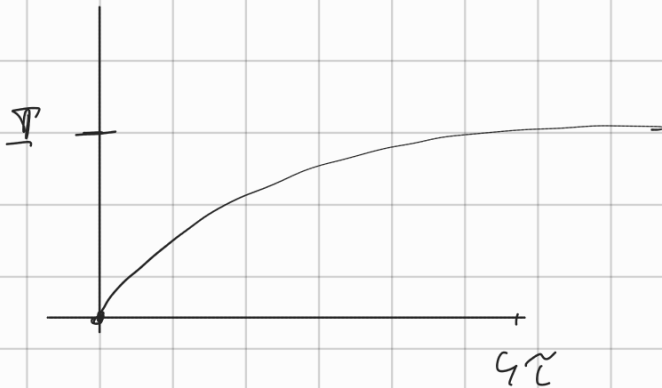
$$i_L(0) = 0$$

$$\Rightarrow i_{\text{ing}} = K e^{\rho t}$$

$$i(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + I = 0, \quad t=0$$

$$K = -I$$

$$i_{\text{For}}(t) = I (-e^{-\frac{t}{\tau}} + 1)$$



ha senso, L diventa un  
CC in reg. ser.  
, la corrente passa tutta  
di lì

## Circuito RL con eccitazione costante

- Mostrare che la risposta forzata in corrente del circuito RL in figura e' data da

*parte Transitoria*  
*risposta FORZATA*

$$i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

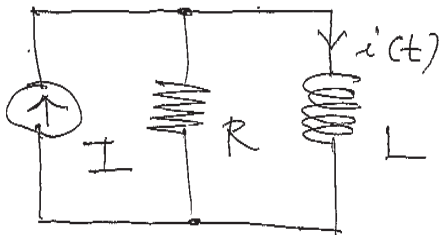
*integrale part. affine*

*arriva asintoticamente a I*

$I$  = corrente Regime Stazionario

con  $\tau = L/R$

- anche adesso vale la scomposizione  $F = T + R$



INTEGRALE PART.  
AFFINE = REGIME  
STAZ.



del nostro  
circuit

*cio' che resta*

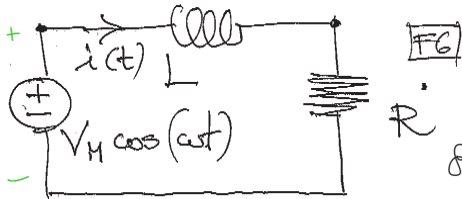
*di  $t \rightarrow \infty$ , della  
stessa forma  
dell'ecc'ito.*

*parte Transitoria:* particolare soln.  
dell'eq. omog. associata

# Risposta forzata ad eccitazioni sinusoidali

## • Circuito $RL$ con eccitazione sinusoidale

INDUTTORE SCAICO a



$$\varphi_V = 0$$

Forza: gen. indep  
ma  $i(0) = 0$

generazioni indipendenti e  
tutte var. stato = 0  
per  $t=0$

$$i(0) = 0$$

- Determinare  $i(t)$ , risposta forzata c'è il generatore, ma l'induttore deve essere scarico a  $t=0$   
 $i(0) = 0$
- Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy  
 $i$  var. stato

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t)$$

$\underbrace{L \frac{di}{dt}}_{V_L}$

eq. diff. affine più  
ordinaria

con condizione iniziale nulla sullo stato

$$i(0) = 0$$

devo trovare integ. particolare della somma forzata dell'eccitazione

• si ha anche in questo caso  $F = T + R$ , dove  $T$  e' una soluzione dell'omogenea associata mentre  $R$  e' un integrale particolare dell'affine che corrisponde alla risposta in regime sinusoidale; si ha allora

$$i_{\text{reg. sinus}} = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

quindi

$$i(t) = \underbrace{ke^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{trans. L, SO L, come decadenza generata}} + i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$$

dove  $\tau =$

integrale particolare  
particolare dell'affine  
= i regime

Metodo fornito proprio per trovare integrali particolari  
integrale particolare della stessa forma dell'affine.

integrale particolare: associato  
fatti, scrivono corrente forata

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

$$\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

$$\frac{V_M}{Z_{RL}} e^{j\omega t - \varphi_2}$$

→ regime

• imponiamo adesso la condizione iniziale

Condiz. iniziale

si impone alla fine

$$i(0) = 0 = k + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

$\omega t = 0$

integrale particolare dell'affine

e quindi

$$k = -\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

integrale particolare

trovato k, so tutto

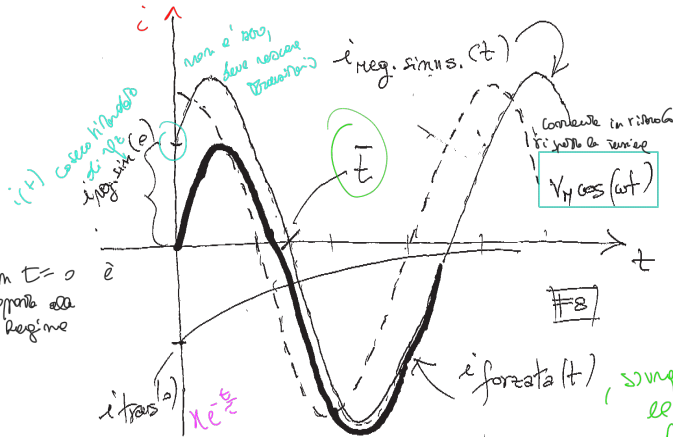
ora devo prendere quello che  
rimane per

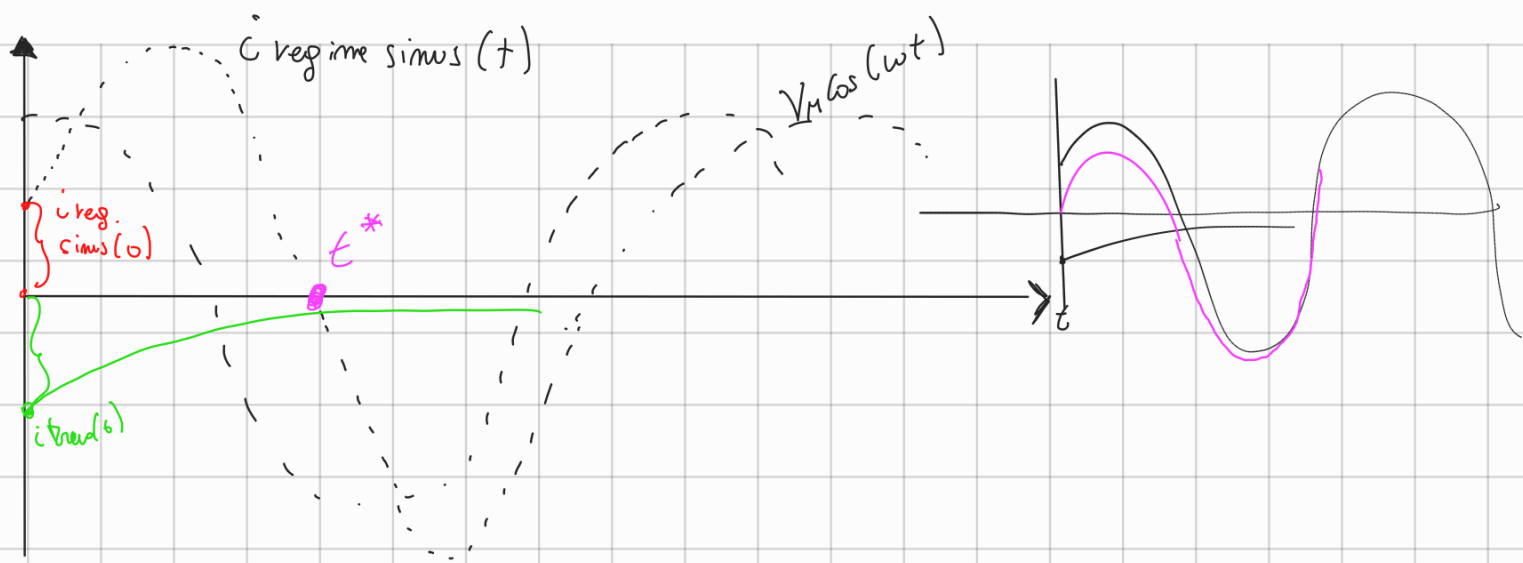
- da  $i(0) = 0$  si ha che *impongo una bc condizione iniziale*

$$i_{\text{transitoria}}(0) = -i_{\text{regime sinusoidale}}(0)$$

*Praticamente serve per cancellare la risposta in regime sinusoidale per  $t=0$*

- la seguente figura riporta gli andamenti della tensione del generatore, di  $i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$ , di  $i_{\text{transitoria}}(t)$  e di  $i(t)$  risposta forzata





parte transitoria di ampiezza uguale e opposta. i transienti per le risposte forzate devono contribuire la parte di regime

Se collego il circuito in questo  $t^*$  non avrei transitorio

- i transienti nascono perché da parte di regime per  $t=0$  non sono  $=0$ , se  $i_{regime} = 0$ , non ci sarebbe i transienti

Se collego circuito al picco di parte regime, avrei il transitorio massimo  
transitorio deve contribuire quella di regime  $t=0$

- Transitori annullano il regime in  $t=0$  per le risposte forzate

- Per far sparire transitori collego il circuito quando  $i(t) = 0$  per far tornare la condiz. al continuo  
Se regime è al max, il transitorio è max

Transitori nascono per far tornare le condiz. al continuo

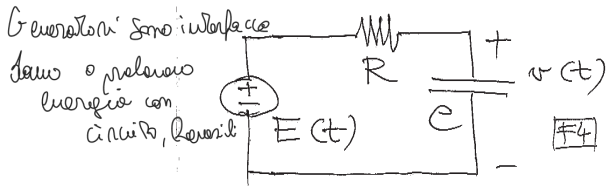
Si parla di risposta completa quando in un circuito RL, RC ecc. sono presenti generatori controllati e condensatori / induttori sono corti a  $t=0$



## Risposta completa 2 cause dei fenomeni esterni: vale sovrapp. effetti

- Consideriamo un circuito RC con un generatore di tensione  $E(t)$ .

Per risposta completa in corrente si intende la corrente quando e' presente  $E(t)$  e il condensatore e' carico a  $v(0) = V_0 \neq 0$



ha un  
volta carica  
a  $t=0$ ,  
energia contenuta  
nel capo el.  
del condensatore

frangere RL capiente  
parallelo

- vi sono quindi due cause: la causa 1 e' il generatore indipendente (sorgente esterna di energia); la causa 2 e' l'energia elettrica immagazzinata inizialmente in C ( $\frac{1}{2}CV_0^2$ )

- vale la seguente forma del principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta completa (C) e' data dalla risposta libera (L) piu' la risposta forzata (F); quindi  $C = L + F$

della linearita' del  
circuiti

$C$  completa = Risposta Libera + Risposta Forzata

Deriva dalla linearita' del circuiti

- facciamo una verifica per il circuito elementare  $RC$ ; la risposta completa e' l'unica soluzione del problema di Cauchy

$v_{com}$  = risposta completa

$$\tau \frac{dv_{com}}{dt} + v_{com} = E(t)$$

$$v(0) = V_0$$

- la risposta libera e' soluzione di *primo problema*

$$\tau \frac{dv_{lib}}{dt} + v_{lib} = 0$$

$$v_{lib}(0) = V_0$$

condiz. iniz.

- la risposta forzata e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{for}}{dt} + v_{for} = E(t)$$

$$v_{for}(0) = 0$$

condiz. iniz.

- sommando ottengo

$$\tau \frac{d(v_{lib} + v_{for})}{dt} + (v_{lib} + v_{for}) = E(t)$$

$$(v_{lib} + v_{for})(0) = V_0$$

Somma le equazioni, la derivata e' lineare

la derivata e' lineare

• quindi, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy iniziale si ottiene che

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t)$$

for = TRANS + regime

• **Esempio.** Nel caso di un circuito RC con eccitazione costante  $E$  otteniamo

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = \underbrace{V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Scarica}} + \underbrace{E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{Carica}}$$

Carica e Scarica non interferiscono nei circuiti lineari

• **Scomposizione in parti significative:** si ha  $C = L + F$  e  $F = T + R$ ; ma  $L$  e  $T$  sono soluzioni dell'omogenea; si definisce transitorio completo  $TC = L + T$ ; nel caso in questione

$$L = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; F = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); T = -E e^{-\frac{t}{\tau}}; R = E$$

Carica e Scarica non interferiscono ma di loro (vale solo per circuiti lineari)

eventual-  
solu-  
ziona-

$$TC = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Transitorio completo

Se valore espositivo non coincide con  $E_1$  deve essere un transitorio

FINE 1ª PARTE L2 2 08/05

# Comportamento a $t = 0$ di $L$ e $C$ LEE 11/05/23 Pt 1

• Consideriamo un condensatore  $C$  e supponiamo di conoscere lo stato a  $t = 0$ , cioè  $v(0) = V_0$ ; allora si ha

funzionante  $V$  è un  
a noi interessa  $t=0$

come si comporta  
 $L, C$   $t(0)$  e  $t \rightarrow \infty$

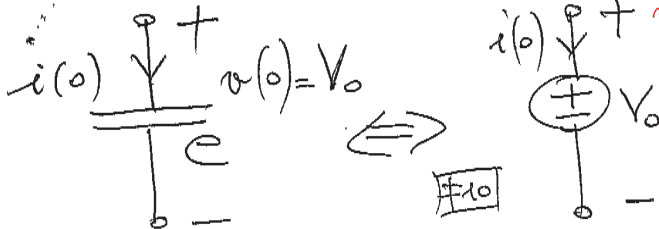
$v(0) = V_0; \forall i(0)$  che percorre il nostro condensatore  
ma questa è una relaz. costitutiva di un gen. indep. di tensione

quindi all'istante iniziale  $t = 0$  il condensatore equivale a un generatore di tensione ideale  $V_0$

$L$  e  $C$

Sono elementi  
dinamici

ma se mi  
concentro  
su un istante

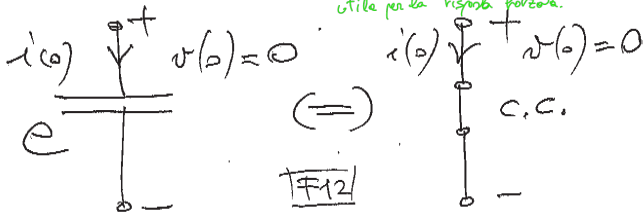


per studiare a  $t = 0$ ,  
lo sostituisco con generatore

Ci pone liberamente corrente

condensatore (storico) a  $t=0$ , è un C.C.

- se il condensatore e' scarico a  $t = 0$ , cioe'  $v(0) = 0$ , allora equivale a  $t = 0$  ad un corto circuito
- un condensatore scarico a  $t(0)$  e' come un cortocircuito utile per la risposta forzata.

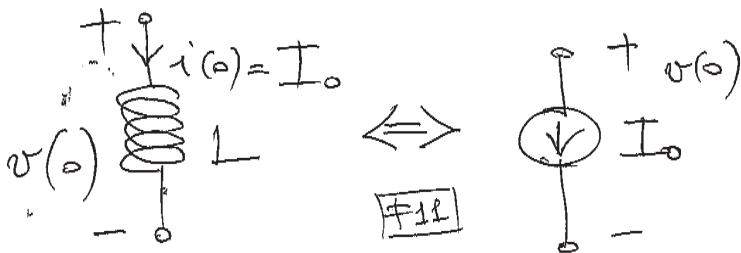


Se studiamo la risposta Forzata, C, e Scarico per def. a  $t=0$ , e' al R.M.  
gli effetti: un C.C.

- Consideriamo un induttore  $L$  e supponiamo di conoscere lo stato a  $t = 0$ , cioè  $i(0) = I_0$ ; allora si ha

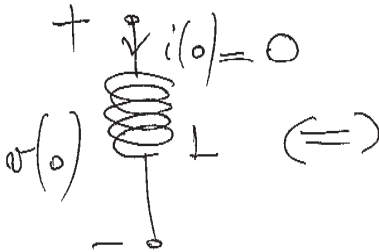
$$i(0) = I_0; \quad \forall v(0) \quad \text{tensione al morsetto}$$

quindi all'istante iniziale  $t = 0$  l'induttore equivale a un generatore di corrente ideale  $I_0$

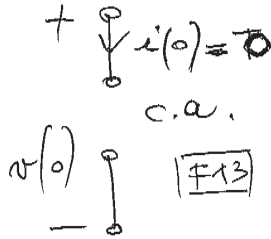


- se l'induttore e' scarico a  $t = 0$ , cioe'  $i(0) = 0$ , allora equivale a  $t = 0$  ad un circuito aperto

regime forzato,  $t \rightarrow \infty =$  c.a.



$(\Rightarrow)$



elementi reattivi, elementi senza memoria in  $t=0$  (o in un istante  $t$ )

Gli elementi reattivi, per un  $t$  fissato sono elementi senza memoria. L'analisi vale solo in quell'istante

$t \rightarrow \infty$  regime costante, dopo in  
transitorio, raggiunge un  
regime stazionario

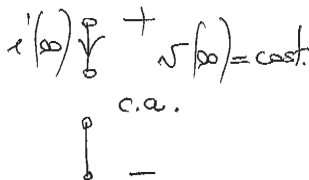
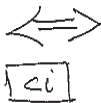
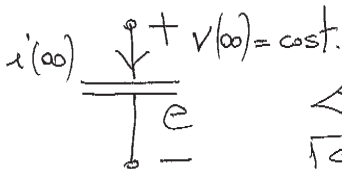
# Comportamento per $t \rightarrow \infty$ di $L$ e $C$ 2 casi: per. costanti o sinus.

• interessano i due casi: a) il circuito raggiunge un regime stazionario dove tutte le tensioni e correnti divengono costanti per  $t \rightarrow \infty$ ; Tensioni e correnti divengono costanti  
 b) ~~il circuito raggiunge un regime sinusoidale dove tutte le tensioni e correnti divengono sinusoidali a pulsazione  $\omega$  per  $t \rightarrow \infty$~~

a)  $C$  in regime stazionario: si ha generatore costante esaurito il transitorio, raggiunge un regime stazionario  
C in Risposta Forzata  $t = 0$ , è un C.C.  
 $t \rightarrow \infty$  è un C.C.  $i(\infty) = 0$ ;  $\forall v(\infty) = \text{costante}$  Va in direzione Costante

usando relaz. costitutiva  $C$

quindi  $C$  equivale ad un circuito aperto



↓  
 il condensatore diventa un circuito aperto

Se studio risposta forzata:  $t = 0 \Rightarrow \text{C.C.}$   
 $t \rightarrow \infty \Rightarrow \text{C.C.}$



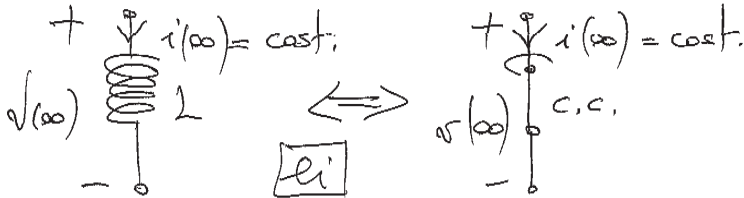
L in regime stazionario: si ha *ie duale*

*Se  $i \rightarrow \text{costante}$ ,  
 $v = 0$*

$$v(\infty) = 0; \quad \forall i(\infty) = \text{costante}$$

quindi L equivale ad un corto circuito

*L in R<sub>For</sub>  $t=0$ , c.c.  
L in Regime Staz.  $t \rightarrow \infty$ , c.c.*



*per risposta forata  $t=0$  circuito aperto  
 $t \rightarrow \infty$  c.c.*

C in regime e' una impedenza  $-jX_C$

$$L \sim jX_L$$

b) • C in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore  $\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$

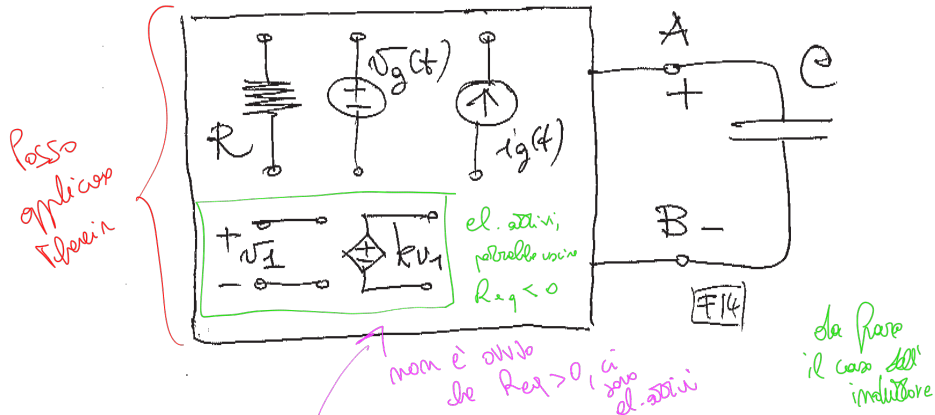
avrei la sua  
impedenza, soltanto  
usare i fasori

• L in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore  $\bar{Z}_L = j\omega L$

elementi reattivi fanno della impedenza

Def. **Circuiti del primo ordine** Bipolo AB che alimenta o C o L

- Sono costituiti da un bipolo AB senza memoria che alimenta un C o un L (un solo elemento reattivo)



- consideriamo il caso con un solo C; supponiamo che il bipolo AB sia controllabile in corrente; consideriamo l'equivalente di Thevenin e supponiamo  $R_{eq} > 0$

Possiamo applicare  
 il sistema è stabile, in transitorio efferente  $\rightarrow 0$   
 Scegliamo C posso fare l'equiv. Thevenin

• ci riconduciamo allora al problema di Cauchy già studiato

$k e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$   
↑  
transitori  
visti prima  
esplode l'exp

$R > 0$  allineati  
il "transitorio" non  
andrebbe a 0  
Sistema non  
stabile

che soddisfa la seguente eq. diff

$$\tau_{eq} \frac{dv}{dt} + v = V_{eq}(t)$$

$$v(0) = V_0$$

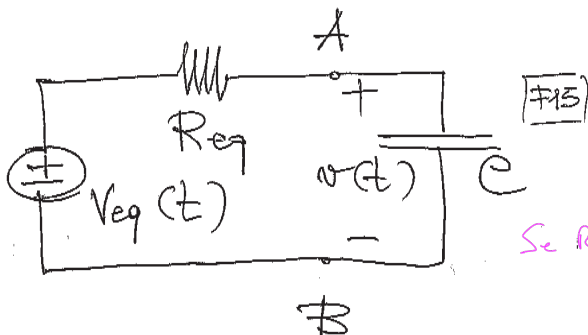
$V_{eq}$  conduttore  
condensatore  
condiz. iniziale

Se  $R_{eq}$  fosse 0.....

risultano allo  
stesso cui B  
di prima

dove  $\tau_{eq} = R_{eq} C$

Ci siamo ricaduti al caso di prima  
in cui  $V < V_{eq}(t)$  e non E



Se  $R_{eq} = 0$ ??

• si parla di risposta libera se  $V_{eq}(t) = 0$  e  $V_0 \neq 0$ ; forzata se  $V_{eq}(t) \neq 0$  e  $V_0 = 0$ ; completa se  $V_{eq}(t) \neq 0$  e  $V_0 \neq 0$

Condensatore Scarico

① Supponiamo che

nella stabilità

$$v_g(t) = V_g = \text{costante}$$

$$i_g(t) = I_g = \text{costante}$$

Generatori indip.  
in continuo

$V_{eq}$ : stesso conduttore e stesso Tenore a circuito  
aperto. Se i generati sono costanti  
 $V_{eq}$  sono costanti. Allora risolviamo il circuito

$V_{eq} = V_{c.c.}$ , risolvo il circuito e la trova,  
ricorrendo conduttori ad una RC, RL

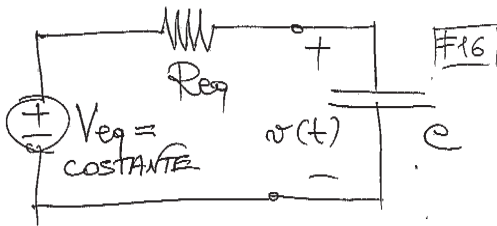
# Circuiti del primo ordine con eccitazioni costanti

- Supponiamo che i generatori indipendenti all'interno del bipolo AB imprimano tensioni e/o correnti costanti; in tal caso si ha

(1)

$$V_{eq}(t) = V_{eq} = \text{costante}$$

Se ci sono gen.  
costanti  $V_{eq} = \text{cost}$   
ALTRIMENTI NO!



- così' ci siamo ricondotti a un caso già' studiato; quindi si ha

**FORMA SOLUZIONE**

*Libera*  
 $L: v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$   $t \rightarrow \infty$   
V pole da 0 e tende a  $V_{eq}$   
Carica cap.  $C$  e  $\tau_{eq}$

*Forzata, carica Condensatore*  
 $F: v(t) = V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$  all'infinito tende a  $V_{eq}$ .

*Completa = sovrapposizione di Libera e Forzata*  
 $C = L + F: v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$

*Scarica che si sovrappone alla carica di C*

- possiamo scrivere la completa (ma anche la libera e forzata, pensarci!) nella seguente forma

raccomando

$V_0$  e  $V_{eq}$  transito  
in exp

Forma Sol. Circuito  
Primo ordine excit.  
costante

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

$$= V_{eq} + [V_0 - V_{eq}]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

$$= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

Soluz. o'pende da  $V_0$ ,  $V_{eq}$   
e  $\tau$  "valore in 0"  
 $t \rightarrow \infty$

C dipende da  $V(0)$ ,  
valore in regime  
staz. e  $\tau_{eq}$   
 $\tau_{eq} = R_{eq}C$

$$v(\infty) + v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} - v(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove  $v(\infty) = V_{eq}$

- la completa dipende quindi da tre parametri: il valore all'istante <sup>(1)</sup> iniziale <sup>(2)</sup>  $t = 0$ , il valore in regime stazionario per  $t \rightarrow \infty$  e la costante di tempo equivalente  $\tau_{eq}$  <sup>(3)</sup> radice dell'impedenza <sup>dato iniziale</sup>  $\rightarrow$  imped. statica <sup>affine</sup>
- l'andamento tipico e' riportato nella figura che segue

anche se vogliamo la Forzata.  $\rightarrow$  costante iniziale, costante finale

- $v(t) = V(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + V(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  e ci si va con una certa costante di tempo

ANDAMENTO TIPICO di una Resp. completa

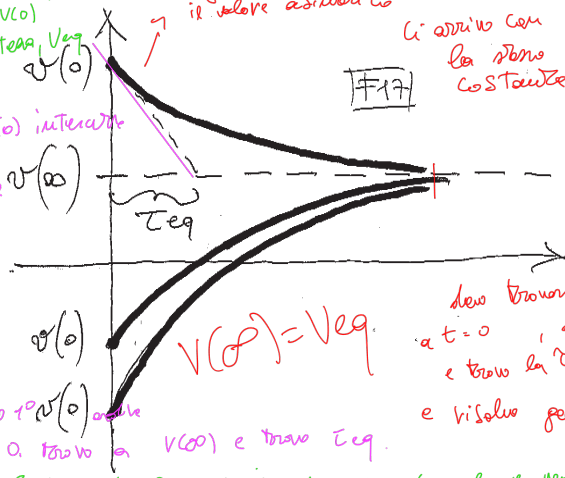
risposte complete,  
iniziali da diversi  $V(0)$   
 $V(\infty)$  e se ne la stessa  $V_{eq}$

metodo tangente a or  
tangente intercetta  
il valore asintotico

le sol. parte da  
 $V(0)$  e arriva  
a  $V(\infty)$  tramite  
un exp

ci arriva con  
la stessa  
costante di tempo

F17



Tangente da  $V(0)$  intercetta  
il valore asintotico  
dopo una costante  
di tempo

$$V(\infty) = V_{eq}$$

devo trovare  
a  $t=0$ , a  $t \rightarrow \infty$   
e trovo la  $T_{eq}$

e risolvo geometricamente

Per risolvere circuito  $V(0)$  anche

trovo la soluzione in 0. trovo a  $V(\infty)$  e trovo  $T_{eq}$ .

ricordo analisi a  $t=0$ , poi immagine staz.  $t \rightarrow \infty$  e poi devo trovare  
la  $T_{eq}$ , con + bene o boh

- l'analisi di un circuito del primo ordine con eccitazioni costanti e' perciò condotta in tre passi: 1) analisi all'istante iniziale  $t=0$ ; 2) analisi in regime stazionario per  $t \rightarrow \infty$ ; 3) determinazione della costante di tempo equivalente

anche ea forzosa, parte da  $V(0)=0$ ,  $V(\infty)$  e la stessa  $T_{eq}$  e' la stessa



- si puo' dimostrare che anche la libera e la forzata sono 'della stessa forma'; inoltre, e' della stessa forma l'andamento di qualunque altra grandezza elettrica nel circuito; ad esempio, se consideriamo la corrente in un resistore avremo

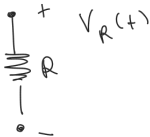
$$i_R(t) = i_R(\infty) + [i_R(0) - i_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

LA COSTANTE  
DI TEMPO E'  
SEMPRE LA  
STESSA

- notare che  $\tau_{eq}$  e' la stessa per tutte le grandezze elettriche.

Una volta trovata la costante  
di tempo e' la stessa

Es. dentro un bipolo



tutte le grandezze elettriche nel circuito  
hanno quella forma visto su

$$V_R(t) = V_R(0)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_R(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

1<sup>a</sup> forma

partendo da un valore 0, passando un valore a  $\infty$ , raccolto  
tra i 2 e trovato un'espressione

Se sono dentro ad  
un bipolo, trovo

$V_R$  sul resistore dentro bipolo, o  $i_R$  ...

del circuito partendo da un valore a 0, tendendo a  $\infty$  ecc.

Valore & grandezza elettrica nel circuito

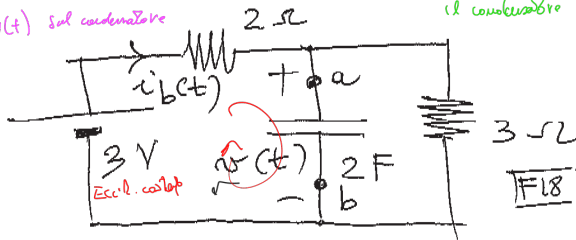
Tutte le grandezze elettriche

1 MODI NATURALI del circuito zero  
sempre gli stessi

**Esempio.** Determinare  $i_b(t)$  per  $t \geq 0$ , risposta completa, sapendo che  $v(0) = 4 \text{ V}$

*Contenuto energia della batteria  
Prima la carica lo sistema precedente  
circolo del primo ordine, un solo elemento reattivo e circuito costante a 2 resistenze*

Varie di stato è  $v(t)$  sul condensatore  
Non  $i_b(t)$



il condensatore è uguale a 4V  
Vissimo  
Entro la serie  
precedente

- Metodo 1). Determino la variabile di stato  $v(t)$  e poi, indirettamente  $i_b(t)$  (che non è variabile di stato)
  - troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab; si ha  $\tau_{eq} = R_{eq}C = 12/5 \text{ s}$ ; allora la risposta completa in tensione è  $\frac{9}{5} \text{ V}$ .
- 3\*3 part. top. Thevenin  
5 n eq, 6 n  
scollago condensa  
stacco C  
Req*

$$v(t) = 4e^{-\frac{5t}{12}} + \frac{9}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{12}}) = \frac{9}{5} + \frac{11}{5}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

*v0* *v eq*

- infine

*riciclaggio nella  
maglia*

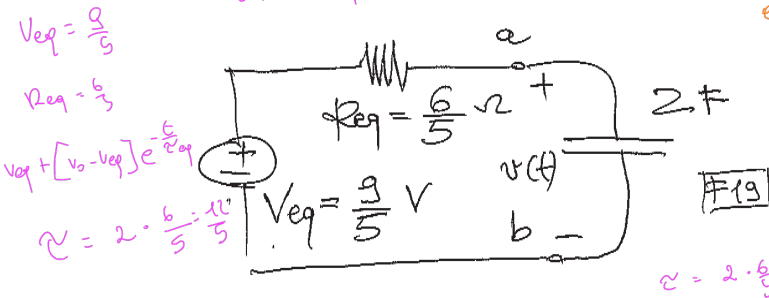
$$i_b(t) = \frac{3 - v(t)}{2} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

*da kV 3 = 2 i(t) V(t)  
i(t) = \frac{3 - v(t)}{2}*

circuito eq. di Thevenin

equiv. Thevenin

ho la forma  
esplicita  
della sol.



agei problema elettrico e delle sbona forma

- Metodo 2). Per un circuito del primo ordine con eccitazione costante la forma della corrente e' del tipo trovando la costante di tempo

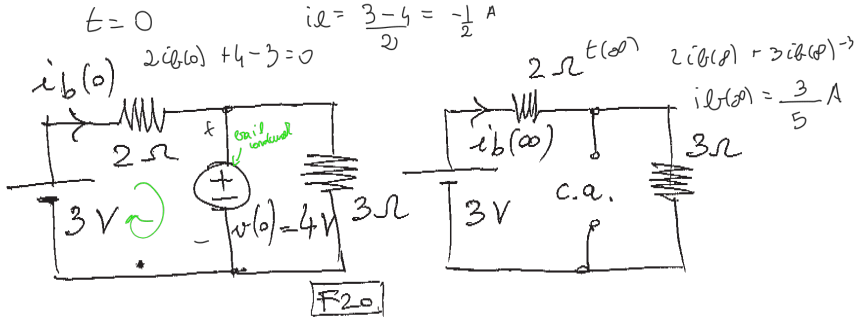
sollec.  
da questa  
forma

$$i_b(t) = i_b(\infty) + [i_b(0) - i_b(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

Supponi che  
la forma e'  
questa

trovo così  $\tau_{eq}$

Faccio analisi  
 $t=0$  |  $t=\infty$



- analisi a  $t = 0$ ; il condensatore e' un generatore di tensione  $V_0$  quindi

$3 - 4 = -1$

$$i_b(0) = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

- analisi per  $t \rightarrow +\infty$ ; il condensatore e' un circuito aperto quindi

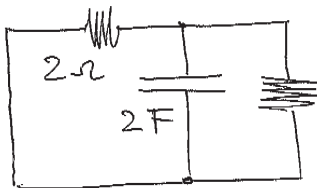
$$i_b(\infty) = \frac{3}{5} \text{ A}$$

valore di regime  
 Steady State

$\tau$ , tempo generatore di ip

$\tau$  SOLUZIONE OMOGENEA

per  $\tau$ ,



è un plus sull'origine,  
cioè risponde libera,  
[21] dunque prende il  
generatore;

valore evolutivo  
libero

- per determinare  $\tau_{eq}$  si nota che

C si scarica sul parallelo  $2 \parallel 3 \Omega$   $ke^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$

→ rigata naturale  
sol. omogenea, cioè a generatore  
spegn.

e' una soluzione dell'omogenea; studiamo allora il circuito in  
evoluzione libera disattivando la batteria; noto allora che C si  
scarica sul parallelo fra 2 Ohm e 3 Ohm; si ha quindi

$$\tau_{eq} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \text{ s}$$

parallelo

- infine

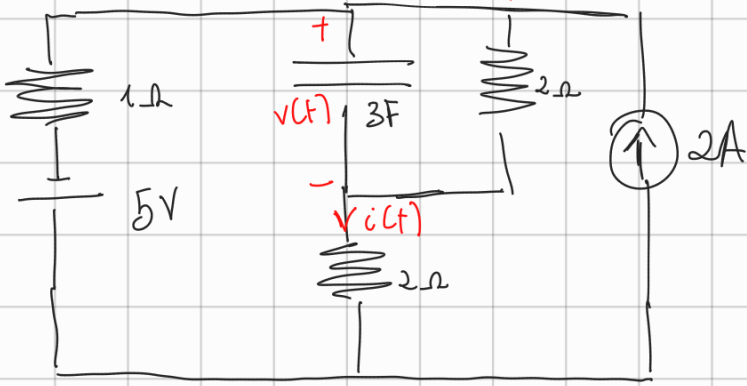
$$i_b(t) = \frac{3}{5} + \left[ -\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right] e^{-\frac{5t}{12}} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10} e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0.$$

valore di res. stop.

trans. completo

quello  
incluso sia  
parte transitoria  
e libera

# Altro Esempio



- $v(0) = 2V$
- ?  $i(t)$   $L, F, T, R$  stazionario di regime

Se avessimo  $i(0) = 3A$  non posso dire niente, non è variabile di stato,

serve variabile di stato e tensioni dei generatori indip. Per definire UNIVOCAM. IL TRANSIT.

potrei anche semplificare il circuito vedendolo in g.d. corrente che è in parallelo all'altro... Com Eq Thevenin

potrei scollare il condensatore, faro Thevenin... oppure farlo direttamente

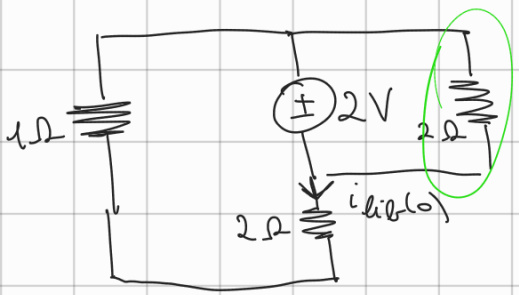
2° metodo condens. carico, spegno generatori

$$i_{lib}(t) = i_{lib}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{lib}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{18}}$$

un aspetto vado a 0, spegnendo i generatori e lavoro a versioni...

$i_{lib}(0)$  come prima conico, spegno i generatori indipendenti

in aspetto che  $i_{lib} \rightarrow \infty$  vado a zero... e poi si scarica

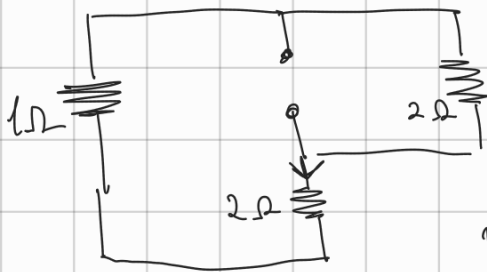


estremamente non conta

$$i_{lib}(0) = -\frac{2}{3} A$$

$2i + 1i + 2V = 0$

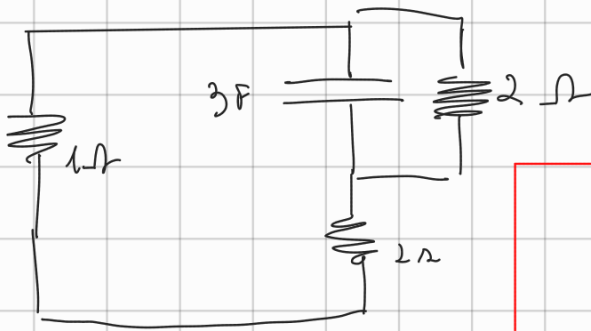
$i_{lib}(\infty)$



$i_{lib}(\infty) = 0$

non può scorrere corrente se non c'è tensione

$\tau$ , evoluzione libera, spegno i generatori



$$\tau_{eq} = RC$$

$$R_{eq} = \frac{6}{5} \Omega \quad \tau_{eq} = \frac{18}{5} \text{ sec.}$$

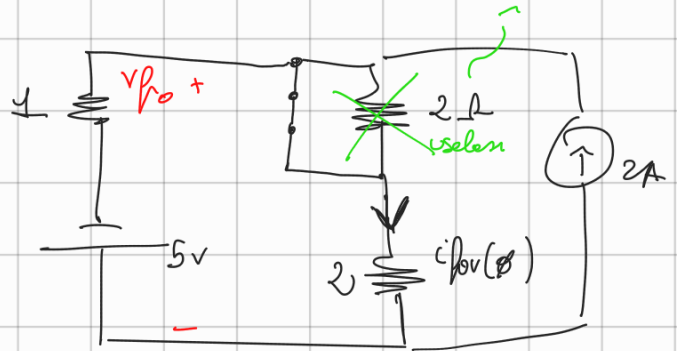
• Forzata : accesi generati  
c.suonico

tutte rigate per tutte grandezze  
elettriche hanno stessa forma

$$i_{for}(t) = i_{for}(0)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{for}(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = \text{costante}$$

$t = 0$ , C.C. nella  
Forza e' un C.C.

• Troviamo il Millman

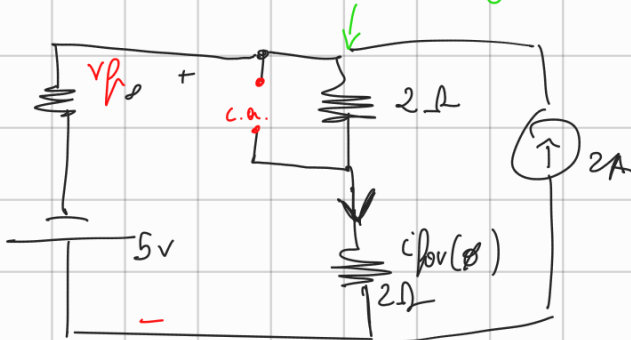


$$V_{fo} = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2 \text{ V}$$

$$i_{fo} = \frac{V_{fo}}{2} = -1 \text{ A}$$

$i_{fo} \neq 0$ ,  $i$  non  
è costante di  
stato

$t \rightarrow \infty$ , regime stazionario  
viene in gioco



$$V_{fo} = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{\frac{5}{4}} = -\frac{12}{5} \text{ V}$$

$$i_{fo} = \frac{V_{fo}}{4} = -\frac{3}{5} \text{ A}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow i_{for}(t) &= i_{for}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_{for}(\infty) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}) = \\
 &= -1 e^{-\frac{5}{18} t} - \frac{3}{5} (1 - e^{-\frac{5}{18} t}) \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

parte costante vincola  $\neq I(\infty)$       Transitorio  $(-1 + \frac{3}{5}) e^{-\frac{5}{18} t}$

Regime  
Stazionario

$$= -\frac{3}{5} A$$

$$\text{Transitorio} = \frac{-2}{5} e^{-\frac{5}{18} t} A$$

Per Transitorio e regime, stesso modo  
Per la risposta forzata

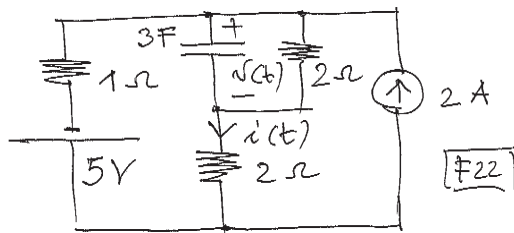
//  $i_b(t)$  non è  $\emptyset$ . la forzata partiva da  $\emptyset$ , e qui  
Per definizione nella Forzata,  $V_{in, Stato} = 0$

$i$  nel resistore NON È variabile  
di Stato quindi a  $t=0$  il  
valore può essere diverso da  $\emptyset$   
per la risposta forzata

$$I_{comp} = \text{Transitorio} + i_{libera}$$

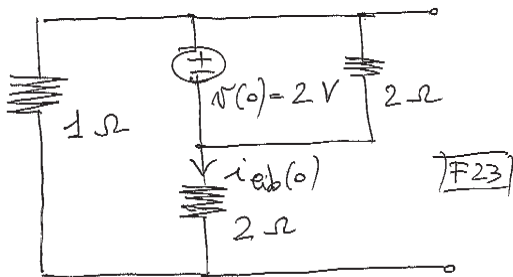


- **Esempio.** Determinare  $i(t)$ , parte libera, forzata, transitoria e di regime; si ha  $v_C(0) = 2\text{ V}$



- per la libera si ha

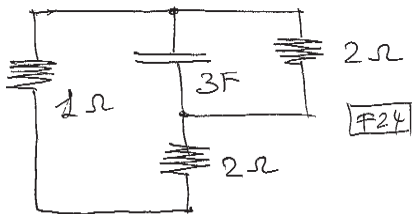
$$i_{\text{lib}}(t) = i_{\text{lib}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{lib}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$



- dalla 'istantanea del circuito a  $t = 0$ ', dove  $C$  e' un generatore di tensione  $v_C(0) = 2\text{ V}$ , si ha

$$i_{\text{lib}}(0) = -\frac{2}{3}\text{ A}$$

mentre  $i_{\text{lib}}(\infty) = 0$



- infine

$$\tau_{eq} = 3 \times \frac{6}{5} = \frac{18}{5} \text{ s}$$

- quindi

$$i_{lib}(t) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

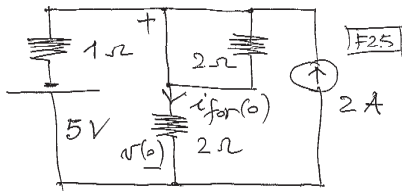
- la forzata puo' essere scritta come

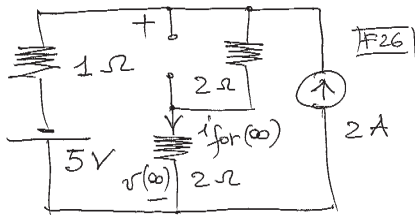
$$i_{\text{for}}(t) = i_{\text{for}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{for}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$

- istantanea a  $t = 0$  ( $C$  e' scarico a  $t = 0$ ): si ha

$$v(0) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = -2 \text{ V}$$

quindi  $i_{\text{for}}(0) = -1 \text{ A}$





- studiamo adesso il regime stazionario per  $t \rightarrow +\infty$ ; si ha

$$v(\infty) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{12}{5} \text{ V}$$

e  $i_{\text{for}}(\infty) = -12/(5 \times 4) = -3/5 \text{ A}$ ; quindi

$$i_{\text{for}}(t) = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

Fine  
LGE  
PT1  
11/05/23

- il primo termine rappresenta la parte di regime stazionario, mentre il secondo e' la parte transitoria della forzata.

Fimora nessuna discontinuità... evoluzione libera, nessun elemento che cambia la topologia

180523

- **Transitori che conseguono ad un evento critico** *apertura e chiusura di interruttori*
- Finora abbiamo studiato risposta libera, forzata, completa per

$t > 0$  in evoluzione continua; vogliamo adesso studiare i transitori che conseguono ad un evento critico

- Evento critico: apertura o chiusura di uno o più interruttori oppure discontinuità sulla tensione o corrente impressa da uno o più generatori indipendenti di tensione e/o corrente *più mezzi sono equivalenti*

- cominciamo studiando alcune proprietà delle variabili di stato *tensione ai condensatori = ricerca a trovare lo stato energetico di C se cambia*  
(tensioni sui condensatori e correnti negli induttori)

- **Proprietà**: Se la corrente  $i_C(t)$  è una funzione limitata in  $[t_a, t_b]$ , allora la tensione  $v_C(t)$  è continua in  $(t_a, t_b)$ ; *Se è limitata V non può fare salti*

analogamente, se la tensione  $v_L(t)$  è una funzione limitata in  $[t_a, t_b]$ , allora la ~~tensione~~ *corrente*  $i_L(t)$  è continua in  $(t_a, t_b)$  *proprietà var. stat.*

- cenno alla verifica: sia  $t_0 \in (t_a, t_b)$  e  $\epsilon > 0$  piccolo; si ha *Se voglio una V discontinua ho bene la non limitabilità*

*Supponiamo per assurdo che v sia discontinua*

$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| = \left| \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} i_C(t') dt' \right| \leq \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} |i_C(t')| dt'$$

*Supponiamo che v sia discontinua*

quindi essendo  $|i_C| \leq M$  *per ipotesi i\_C è limitata*  $\Rightarrow$  per proprietà di monotonia dell'integrale

$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| \leq (2M\epsilon)/C \rightarrow 0$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ , *Se i\_C è discontinua e limitata*

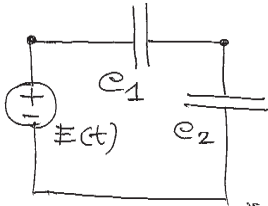
- **Rete RLC degenere:** e' una rete che contiene una maglia di soli condensatori e/o generatori indipendenti ideali di tensione, oppure un taglio di soli induttori e/o generatori indipendenti ideali di corrente

Caso particolare, Rete degenere

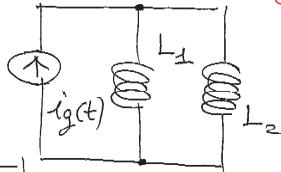
Se i limiti  
v'e continue

- ad esempio

appena applico una discontinuita', (V discontinua)  
↓  
tutte e due saranno  
discontinue



deg



Se voglio, intanto

solo genero id di  
condensatori e induttori

IN CASO DI  
RETI DEGENERI  
NON VALE  
CONTINUITA'

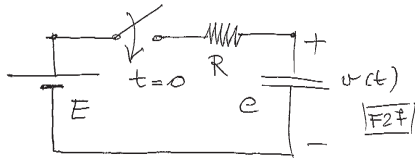
solo VARIABILI  
DI STATO

- Proprieta' di continuita' delle variabili di stato:** in una rete non degenera le variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti degli induttori) sono continue in presenza di eventi critici
- tale proprieta' deriva dal fatto che in una rete non degenera le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono funzioni limitate in corrispondenza di eventi critici
- non maglie e di condensatori  
e/o topologie di induttori*
- es. Condensatore, secondo circuito,  
la corrente sono limitata, la tensione continua*
- non fa uoscilla in corrispondenza di un evento critico*
- nel seguito studiamo transitori supponendo che vi sia un evento critico all'istante critico  $t = 0$

*evento critico come interruzione o discontinuita' della  
Tensioni  
inversa*



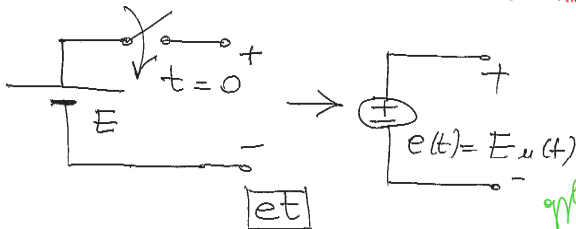
- Consideriamo un circuito elementare  $RC$ ; supponiamo  $C$  scarico per  $t < 0$ ; l'interruttore si chiude a  $t = 0$ ; vogliamo determinare  $v_C(t) = v(t)$  per  $t \geq 0$



chiudo tensione, applico  
una Tensione  
discontinua

- si noti che chiudere l'interruttore equivale a applicare una tensione a gradino  $e(t) = Eu(t)$  con  $u(t) = 0$  per  $t < 0$  e  $u(t) = 1$  per  $t > 0$

chiudere interruttore = come applicare Tensione  
discontinua



applico Tensione  
discontinua

Varie di  $RC$  continuo all'evento critico

- per  $t > 0$  il circuito soddisfa alla nota equazione

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

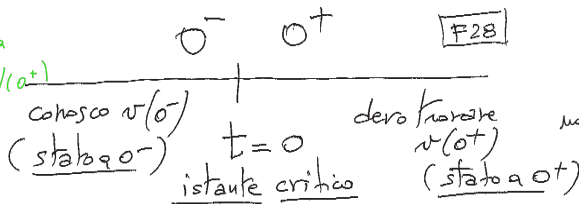
$$v(0^+) = ?$$

Conosco  $v(0^-)$  per cui ora scrivo la condizione

ho bisogno dello stato a  $v(0^+)$  per risolvere

ma  $v$  è continua  
 $\Rightarrow v(0^-) = v(0^+)$

Rete non  
 degenera



è come risposta forzata!

ma  $v$  è continuo, dunque anche a  $v(0^+)$  è scritto

- notare che conosciamo lo stato a  $t = 0^-$ , cioè  $v_C(0^-) = 0$ ;
- però per risolvere l'equazione differenziale devo conoscere lo stato a  $t = 0^+$  ! A tal fine uso il fatto che il circuito *non è degenera* e quindi lo stato si conserva all'istante critico, quindi  $v(0^+) = v(0^-) = 0$  e

era scritto a 0, sarà scritto anche a  $0^+$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0$$

- si tratta quindi di una risposta forzata per cui, *la solve*

*Carica di C*

$$v(t) = \underbrace{E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}_F, \quad t > 0$$

- si ha inoltre

*derivate*

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} i_C(0^-) &= 0^- \\ i_C(0^+) &= \frac{E}{R} \end{aligned}$$

*$i_C(t)$   $t=0^+$  vale  $\frac{E}{R}$  ma sia  $\frac{E}{R} \neq 0$*

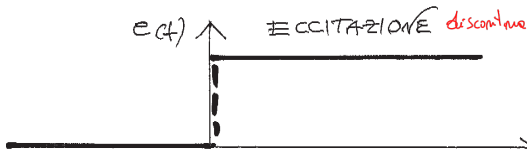
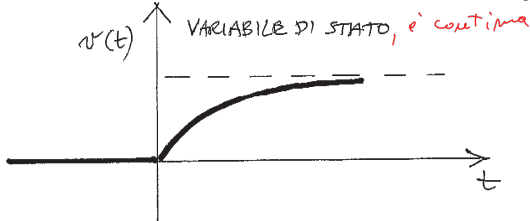
*$i > 0$   $t < 0$ , intervallo  
generico*

- lo scenario e' quindi rappresentabile come in figura: l'eccitazione  $e(t) = Eu(t)$  e' discontinua in  $t = 0$ , la variabile di stato  $v(t)$  e' continua in  $t = 0$  mentre  $i_C(t)$ , che non e' variabile di stato, e' discontinua in  $t = 0$ ; questo e' lo scenario tipico che possiamo aspettarci in una rete non degenerare in corrispondenza di un istante critico.

*perche'  $i_C(0^+)$  non  
salta a  $\frac{E}{R}$ ?*

*perche' subito  $\frac{E}{R}$ , C a  $0^+$  e' scarico, e' un CC.*

*$\frac{E}{R}$  e' la corrente che scorre nella ruggia*



$V$  per  $C$  e  $I$  per  $L$  ←

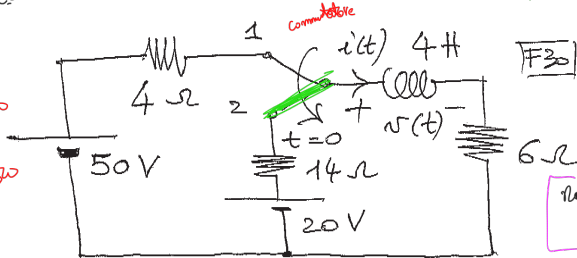
applica variabile di stato solo alla grandezza che lo sono...

**Esempio.** L'interruttore, da lungo tempo nella posizione 1, viene commutato a  $t = 0$  nella posizione 2. Determinare  $i(t)$  e  $v(t)$  per  $t > 0$

regime staz. = induttore c.c. ....

$C_L$  var. staz.

$V_L$  non e' var. staz.



dopo commutazione, transitorio

$v(t)$  no variabile di stato

a  $t=0$  cambia il generatore

dopo commutazione ci sono 2 rami, non si conserva

Note non degenerare, lo stato si conserva

• consideriamo il seguente schema

Asse dei tempi

transitorio finito  
L e' in c.c.

(RSTAZ1)  
regime stazionario  
a  $t=0^-$

L e' in c.c.

(RSTAZ2)  
regime stazionario  
a  $t \rightarrow \infty$

stato a  $0^-$   
 $i(0^-)$

istante critico

stato a  $0^+$   
 $i(0^+) = i(0^-)$   
SA

F31

due regimi staz. diversi

• determiniamo lo stato a  $t = 0^-$  considerando che il circuito ha raggiunto un regime stazionario e quindi  $L$  e' un corto circuito a  $t = 0^-$ ; si ha

*l'induttore e' un c.c.*

$$i(0^-) = \frac{50}{10} = 5 \text{ A} \quad \frac{50}{4+6}$$

• il circuito non e' degenere per cui lo stato si conserva fra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

• per  $t > 0$  analizziamo il seguente circuito in evoluzione continua; si ha

*l'induttore e' carico dall'avvolgimento critico = risposta completa*

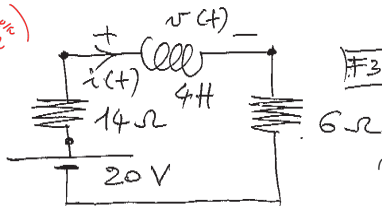
$$\tau = \frac{1}{5} \text{ s}$$

*circuito del piro mulo*

$$i(t) = i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 5e^{-5t} + 1 - e^{-5t} = 1 + 4e^{-5t}, \quad t > 0$$

*risposta completa*  
 $i(t) = 5e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

*$i(\infty)$  completo quando l'induttore e' un c.c.*



*$i(\infty)$ ,  $L$  e' un c.c.*  
 $i(\infty) = \frac{20}{16+6} = 1 \text{ A}$

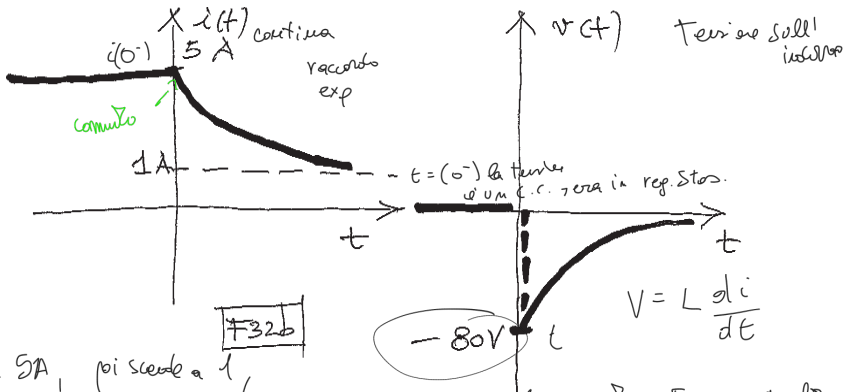
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \text{ sec}$$

- per  $t > 0$  si ha anche

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -80e^{-5t} \text{ V}$$

$-20e^{-5t} \cdot 4 \text{ Henry}$

- gli andamenti di  $i(t)$  e  $v(t)$  sono riportati in figura; notare che  $v(t)$  e' discontinua all'istante critico
- disegno analogico



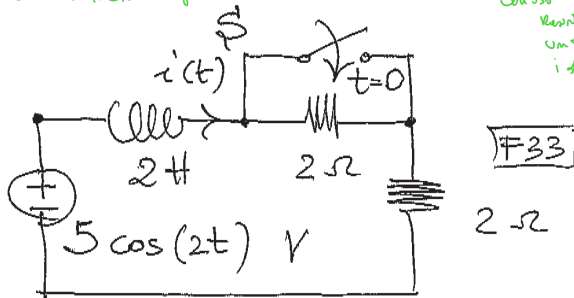
Corrente 5A, poi scende a 1,

Tensione tende ad opporsi alla diminuzione di corrente, Forza controelctrom.  $i(t)$  scende, forza controelctrom. tende ad opporsi al valore di corrente

**Esempio.** L'interruttore S, aperto da lungo tempo, si chiude a  $t = 0$ . Determinare  $i(t)$ ,  $t > 0$ , risposta completa. Dopo  
l'uso

*Circolo non separato*

*Chiuso interruttore,  
resistenza in CC, ci sono  
un trasformatore, che raccorda  
i due diversi regimi*



- vale il seguente schema

*induttore  
↳ carico*

Reg. Sin. 1      Risposta Completa      Reg. Sin. 2 non c'è più resistenza

*uso  
f33*

$$0^- \rightarrow i(0^-) \quad t=0 \quad 0^+ \rightarrow i(0^+) = i(0^-)$$

*Var. di stato*

*evento  
critico*

**F34**

*continua  
var. stato*

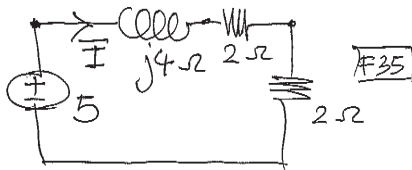
altro trasformatore che  
raccorda i due regimi

*Reg. sinusoidali diversi, ci sono un trasformatore che raccorda  
i due regimi*



USO Fasi per  $i(0^-)$

$\omega = 2$



- determiniamo lo stato  $i(0^-)$ ; dal circuito nel dominio dei fasori ottengo

$$\bar{I} = \frac{5}{4 + j4} = \frac{5}{8}(1 - j) \text{ A}$$

quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}e^{j0}] = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A}$$

- il circuito non e' degenero per cui

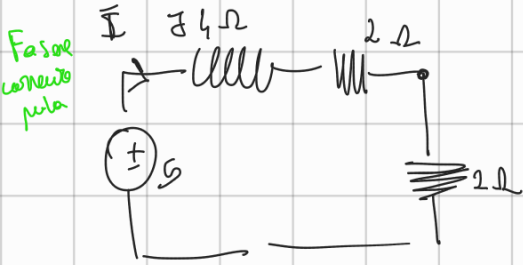
*Se si introduce  
solo il valore in 0*

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{5}{8} \text{ A}$$

*Si conserva var. Stato*

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

$t = 0^-$  reg. sin 1 uso Fasori



$$\bar{I} = \frac{5}{4+j4} = \frac{5}{4} \frac{1}{1+j(1-1)} = \frac{5}{4} \frac{1-j}{2} = \frac{5(1-j)}{8}$$

moltiplico per coniugato

$$i(t) = \text{Re}[\bar{I} e^{j\omega t}]$$

solo interessato al valore in 0

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A} = i(0^+) \quad \bar{I} e^{j2t} \text{ "0"}$$

continuità - var. stato

Chiudo ora circuito  $t \gg 0$

$$C = L + F = L + T + \text{Regime sin 2} = \text{T.C.} + \text{Regime sin 2}$$

soluzione dell'equazione



$$i(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + I_{R2} \cos(2t + \varphi_{i2})$$

Reg. sinusoidale 2

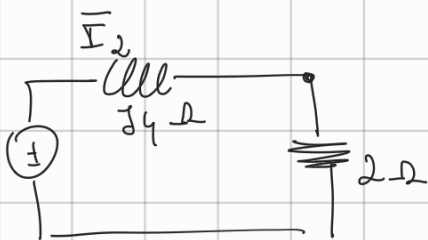
$$\tau = \frac{L}{R} = 1 \text{ sec} \quad \frac{2}{\omega} = \tau$$

Forma solus.  $t \gg 0$

- K si trova sempre per ultimo, fa tornare le condiz. iniziali, il regime e' indipendente dalle condiz. iniz.
- contorno in modo che non ci sia discontinuità in corrente

$t \rightarrow \infty$  reg. sin 2

Si parte sempre dal regime, qui con i fasori



$$\bar{I}_2 = \frac{5}{2+j4} = \frac{5}{2} \frac{1}{1+j2} = \frac{5}{2} \frac{1-j2}{5} = \frac{1-j2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j 63.4^\circ} \text{ A}$$

$$k e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ)$$

corrente e in ritardo rispetto alla tensione, e' un RL

• Trovo k, Condiz. iniziali, c. i.  $t = 0^+$  • k = bilancio a  $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ) \Rightarrow k \approx 0.125$$

valore in 0+

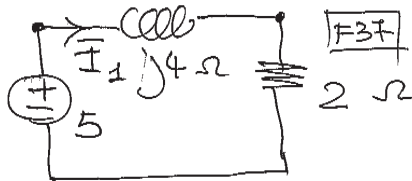
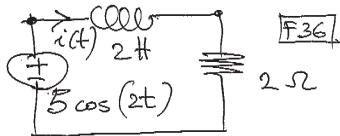
$$i(t) = 0.125 e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A} \quad t > 0$$

sol. unica dell'eq. diff.

- per  $t > 0$  il circuito diventa quello in figura; si ha  $C = L + F$ , oppure  $C = TC + R$  (regime sinusoidale), quindi

$$i(t) = ke^{-t/\tau} + I_M \cos(2t + \varphi_i)$$

con  $\tau = L/R = 1 \text{ sec}$



- per il secondo regime sinusoidale

$$\bar{I}_1 = \frac{5}{2 + j4} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(63.4^\circ)}$$

*SCRIVO bene  
Formula Matematica*

- Regime e' indipendente da Cond. iniziale, Trans il regime.

*Traslo il regime,  
Rimangono le  
Costanti arbitrarie  
de caratterizzano  
il Transitorio*

- quindi

$$i(t) = ke^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}$$

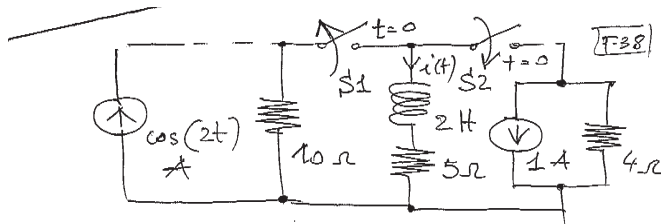
- infine determiniamo  $k$  con le condizioni iniziali

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ)$$

da cui  $k \simeq 0.125$ . Riassumendo

$$i(t) = 0.125e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}, \quad t > 0.$$

**Esempio.** L'interruttore S1, chiuso da lungo tempo, si apre a  $t = 0$ , mentre S2, aperto da lungo tempo, si chiude a  $t = 0$ . Determinare  $i(t)$ , parte libera e parte forzata, per  $t \geq 0$

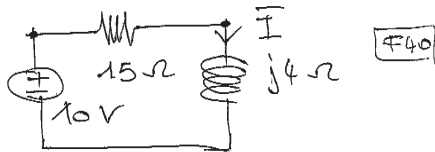
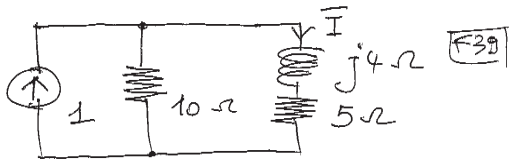


- troviamo lo stato in regime sinusoidale a  $t = 0^-$ ; si ha

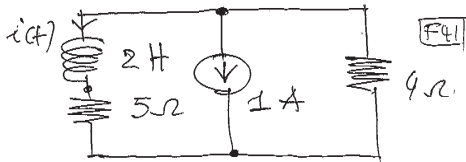
$$\bar{I} = \frac{10}{15 + j4} = \frac{10(15 - j4)}{241} \text{ A}$$

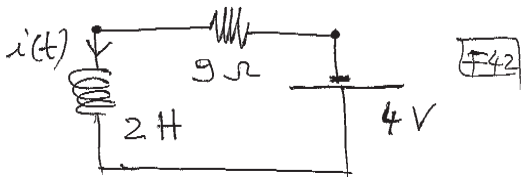
quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{150}{241} \text{ A}$$



- per  $t > 0$  il circuito diviene





- quindi  $\tau_{eq} = L/R_{eq} = 2/9$  sec e

$$i_{lib}(t) = i(0^+)e^{-9t/2} = i(0^-)e^{-9t/2} = \frac{150}{241}e^{-9t/2}, \text{ A}; \quad t \geq 0$$

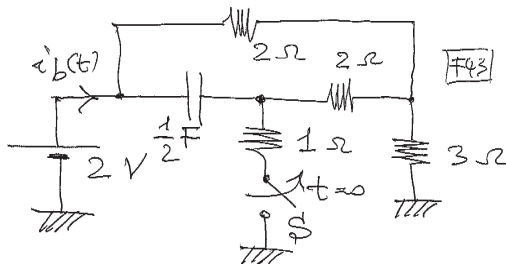
- inoltre

$$i_{for}(t) = i_{for}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{eq}})$$

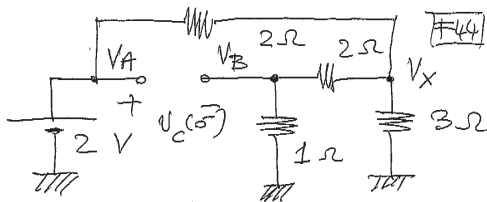
quindi

$$i_{for}(t) = -\frac{4}{9}(1 - e^{-9t/2}) \text{ A}; \quad t > 0.$$

**Esempio.** L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a  $t = 0$ .  
Determinare  $i_b(t)$ , per  $t \geq 0$ , risposta completa



- consideriamo il circuito in regime stazionario a  $t = 0^-$





- si ha  $v_C(0^-) = V_A - V_B$ , inoltre

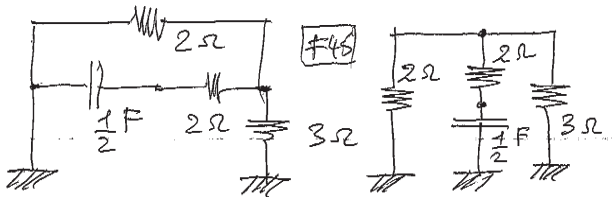
$$V_x = 2 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7} \text{ V}; \quad V_B = \frac{V_x}{3} = \frac{2}{7} \text{ V}$$

quindi  $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12/7 \text{ V}$  (rete non degenere)

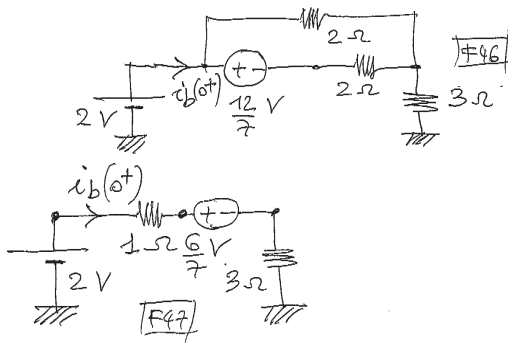
- per  $t > 0$  si ha

$$i_b(t) = i_b(0^+)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_b(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- per  $\tau_{eq}$  considero il seguente circuito, per cui  $\tau_{eq} = 8/5 \text{ sec}$



- si ha  $i_b(\infty) = 2/5$  A (... disegnare il circuito per  $t > 0$  e verificare)
- per  $i(0^+)$  considero l'istantanea a  $0^+$



- allora dalla KV ottengo  $2 = 4i_b(0^+) + 6/7$ , quindi  $i_b(0^+) = 2/7$
- A. Riassumendo

$$i_b(t) = \frac{2}{7}e^{-\frac{5t}{8}} + \frac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{8}}) \text{ A}; \quad t > 0.$$