

INVECE DI METODO TABLÉAU, USO METODO DI ELIMINAZIONE

MMF

Le incognite sono le correnti, i cicli o delle
per Bipoli controllabili in
Corrente
mi serve
tipi di correnti
in corr.

eliminerò man mano le incognite

cioè nota la corrente / determiniamo univoc. la tensione.

! un generatore ind. di corrente non è controll. in corrente

dovrò usare Metodo esterno
ci saranno incognite in più

• Per ora non ci metto gen. ind. di corrente

Prendo un grafo orientato, scelgo un albero e individuo le MF

Prendo come var. ausiliarie

Scelgo come VAR AUSILIARIE CORR. CORDE

Variabili ausiliarie

$$i_c = \{i_1, i_2, i_3\}$$

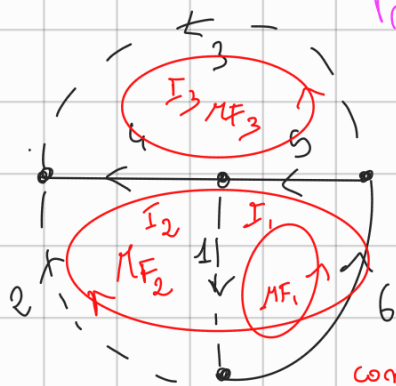
$l-m+1$ cor. cicliche

$$I = \{I_1, I_2, I_3\}$$

Correnti cicliche

• $l-m+1$ equos. MF

• in $l-m+1$ incognite
correnti cicliche



con esse
so scrivere

univoc

(1) $l-m+1$ kV mfp associato al mio albero

dopo ora scrivere le V in funzione delle
incognite (I)

$$\begin{cases} V_1 + V_5 + V_6 = 0 \\ V_2 - V_4 - V_5 - V_6 = 0 \\ V_3 - V_4 - V_5 = 0 \end{cases}$$

le incognite sono le I, non le V
Scego tensioni, non incognite
che ho scelto io

correnti del grafo

I_1, I_2, I_3
 i_1, i_2, i_3

(2) Esprimo $i_1, \dots, i_6$ in funzione delle variabili ausiliarie

(Si perché le var ausiliarie sono una base per lo spazio delle correnti)
posso farlo

$$i_1 = I_1$$

$$i_2 = I_2$$

$$i_3 = I_3$$

$$i_4 = -I_2 - I_3$$

$$i_5 = I_1 - I_2 - I_3$$

$$i_6 = I_1 - I_2$$

controllo quali correnti
premono...

io come somm. delle
correnti cicliche

metodo di eliminazione

elimino le correnti i_4, i_5, i_6

Cioè le correnti "

USANDO $N-1$ KI e i th

come usare
 $N-1$
KI e th
ai tagli f.

#METODO DI ELIM. STO scrivendo

correnti allora come correnti
dei rari

collego ora tensioni alle mie variabili

Sfrutto che bipoli controll. in corrente uso le relaz. costitutive.

3) Bipoli controllabili in corrente, esprimo $V_1, \dots, V_6$ in funzione di $i_1, i_2, \dots, i_6$

elimino tensioni in funzione delle correnti. Riprendo il circuito di Portenza

$$V_1 = V_{g2}$$

$$V_2 = 2R i_2 = 2R I_2$$

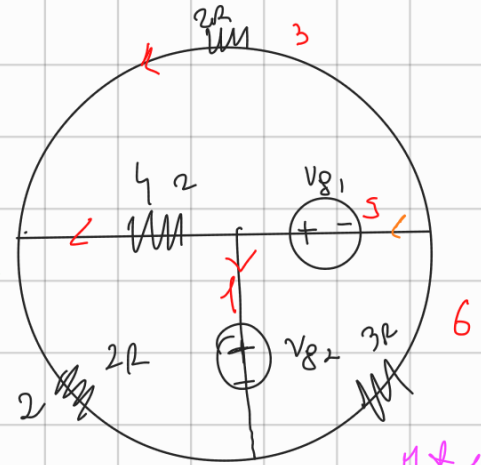
$$V_3 = 2R i_3 = 2R I_3$$

$$V_4 = R i_4 = R(-I_2 - I_3)$$

$$V_5 = -V_{g1}$$

$$V_6 = 3R i_6 = 3R(I_1 - I_2)$$

elimino le tensioni in funzione delle correnti



Ho usato $l-m+1$ KV alle NF, e $m-1$ KI ai TF

e le relaz. costitutive bipoli costitutive in corrente

Metodo di eliminazione: elimino le correnti dei rami dell'albero e per elimino le V rimanenti

Per arrivare al sistema risolutivo uso tutte le eq. possibili

Se ora sostituisco, ottengo il sistema risolutivo in funzione delle correnti

$$\Rightarrow \underline{R} \underline{I}_{cicliche} = \underline{V}_{gen. i. indipendenti Teselei}$$

INCOGNITE ALLA FINE: solo correnti WDF

dove

$$\underline{R} = R^{(l-m+1) \times (l-m+1)}$$

termini noti, gener. indep.

per il # delle correnti indep, # NF

Come costruisco R e V

Dimensione del sistema

$$\underline{I}_{cicliche} \in R^{l-m+1}$$

INCOGNITE

$$\underline{V}_{gen. i. indep.} \in R^{l-m+1}$$

Termini noti:

• Maglia povera inizio della diag.

termini noti

che si conoscono come costruisco R e V

= Somma resistenze Maglia Favolabile k el. d'ignora tutto con il +

= Somma algebraica resistenze a comune tra MF_k e MF_k

$\Rightarrow$ ogni resistenza ha segno + se I_k e I_k le percorrono contemporaneamente. (hanno stesso verso)

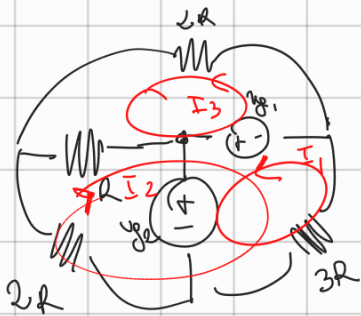
$$R_{kk} \quad k=1, \dots, l-m+1$$

$$R_{jk} \quad k \neq j$$

Segno - in caso celebrario.

V_k = Somma algebraica Tensioni generatrici
 $k=1, \dots, l-m+1$ indipendenti MF K . Ogni Tensione ha
 Segno $(+)$ se I_k esce dal $(+)$ del
 generatore, Segno $(-)$ altrimenti.
 Come se usoni come generati.

$\Rightarrow R = R^T$ Simmetrica (per rete di resistori e
 Per reti senza generatori
 convenuti. gen. di V)



es. Si sommano su questa resistenza con segno opposto

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{g1} - V_{g2} \\ -V_{g1} \\ -V_{g1} \end{pmatrix}$$

percorso resistenza in segno concorde

ovviam. sistema risolvibile dipende dalla scelta dell'albero ecc

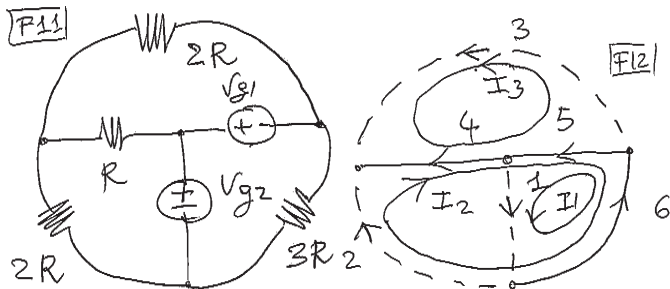
Provate I_1, I_2, I_3 , posso anche trovare correnti dei lati del grafo con $m-1$ KI ai TF e con le relaz. costitutive le Tensioni

questo variabili ausiliarie, Tono indicato e Trouo RWDa

- **Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)** *incognite sono le correnti delle corse/cicliche*
- Per reti di soli bipoli controllabili in corrente; in particolare reti di resistori e generatori indipendenti ideali di tensione *devono essere controllati in corrente*
- discutiamo il metodo con un esempio; associa alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MMF sono le correnti cicliche delle MF

$$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T$$

oppure equivalentemente le correnti $\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T$ delle corse. In generale si hanno $\ell - n + 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $\ell - n + 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 + v_5 + v_6 = 0$$

$$v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

$$v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

- Passo 2: esprimo le correnti dei lati del grafo (in generale sono ℓ) in funzione delle correnti delle correnti cicliche; e' sempre possibile in quanto le correnti cicliche sono una base per lo spazio delle correnti dei lati; nel far cio' uso $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 = l_1$$

$$i_2 = l_2$$

$$i_3 = l_3$$

$$i_4 = -l_2 - l_3$$

$$i_5 = l_1 - l_2 - l_3$$

$$i_6 = l_1 - l_2$$

• Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in corrente, posso esprimere le tensioni dei bipoli (ℓ) in funzione delle correnti dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in corrente

$$v_{g2} - v_{g1} + 3R(I_1 - I_2) = 0$$

$$v_1 = v_{g2}$$

$$v_2 = 2Ri_2 = 2RI_2$$

$$v_3 = 2Ri_3 = 2RI_3$$

$$v_4 = Ri_4 = R(-I_2 - I_3)$$

$$v_5 = -v_{g1}$$

$$v_6 = 3Ri_6 = 3R(I_1 - I_2)$$

$$3RI_1 - 3RI_2 = v_{g1} - v_{g2}$$

$$R - 3R \cdot 0 = v_{g1} \cdot v_{g2}$$

OK

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $\ell - n + 1$ equazioni nelle $\ell - n + 1$ incognite date dalle correnti cicliche delle MF; in questo caso $\ell - n + 1 = 3$; in forma vettoriale si ha

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{g1} - v_{g2} \\ -v_{g1} \\ -v_{g1} \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvibile per il MMF e' del tipo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_{\text{cicliche}} = \mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$$

con $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(\ell-n+1) \times (\ell-n+1)}$ (matrice delle resistenze),
 $\mathbf{I}_{\text{cicliche}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$
 (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$
- R_{kk} ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma delle resistenze della maglia k
- R_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma algebrica delle resistenze a comune fra maglia k e maglia h ; ogni resistenza si prende col $+$ se I_k e I_h la percorrono in senso concorde, col $-$ altrimenti
- V_k ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma algebrica delle tensioni dei gen.ri ind.ti di tensione della MF k ; ogni tensione si prende con il $+$ se I_k 'esce dal morsetto $+$ del gen.re di tensione', col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{R}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$

*Se non ci sono generatori controllati
 e o incognite affittive*

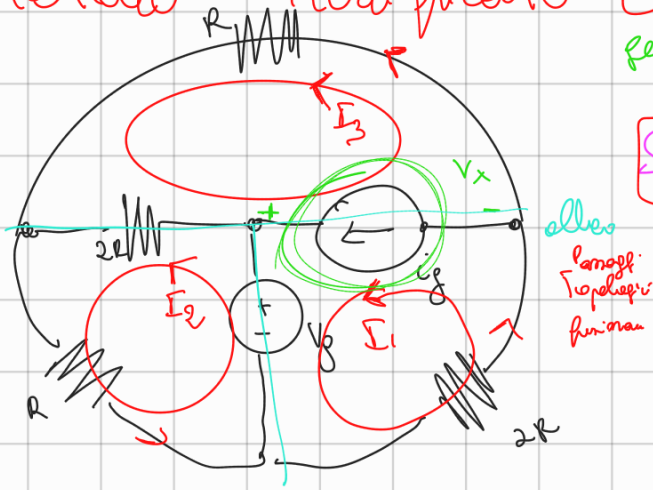
• Osservazione. Per ottenere il sistema risolvibile abbiamo usato tutte le KV ($\ell - n + 1$) al Passo 1, tutte le KI al Passo 2 ($n - 1$) e tutte le relazioni costitutive dei bipoli (ℓ) al Passo 3

• Osservazione. Una volta determinate le correnti cicliche, possiamo determinare indirettamente tutte le altre correnti e tensioni dei bipoli (pensarci!)] con KI e rel. cost.

• Osservazione. MMF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 correnti di ramo eliminiamo le correnti dei rami dell'albero, mentre al Passo 3 tensioni di ramo eliminiamo tutte le tensioni dei bipoli.

Se ho generato gli elementi per i controlli

Metodo Modificato (MISTO) analisi su box MF



gen. corrente non controll. in corrente

Se ho bipoli non controllabili in corrente

[Scego grafico orientato e albero]

- Passo ① Puntata pinto Topologico, KV delle MF
- Passo ② Puntata I in funzione delle correnti F
- Passo 3.. il generatore i_g non

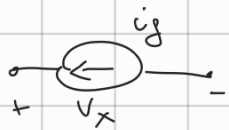
è controllabile in corrente
ho la corrente, ma non posso calcolare la tensione
 $i = I \quad V$

nota corrente non so la tensione

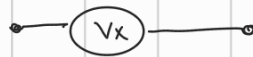
Va in crisi il passo 3

① introduco una incognita aggiuntiva allora

=> ③ VAR. AUSILIARIE I_1, I_2, I_3 + incognita aggiuntiva V_x
Segni + + variabili ed orientate sul generatore



=>



• Passo ①

lo facciamo diventare un gen. di Tensione

passo ②

• vincolo imposto sul gen. re corrente
-> VINCOLO IMPOSTO SULLE VAR. AUSILIARIE

vincolo imposto sulle variabili ausiliarie

① mi fidero che gen. corrente diventa un gen. di Tensione nota V_x

uso regola di prima
poi posso incidere

KV mF passo 1 il gen. di I è diventato di V , Solvo sistema risolvendo

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x + V_g \\ -V_g \\ -V_x \end{pmatrix}$$

ma V_x non può stare qui, è una incognita

Passo 2 vincolo

così la corrente, che impone un vincolo

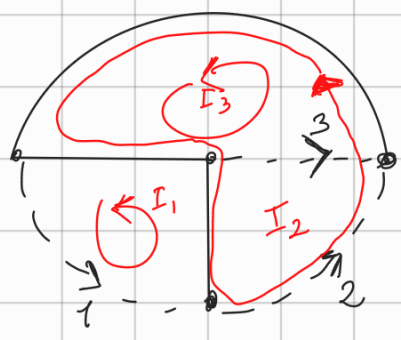
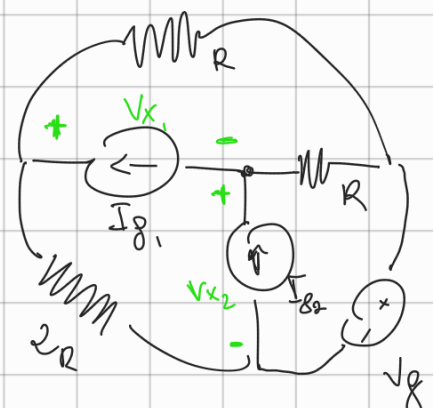
• $i_g = I_1 - I_3$ Vincolo corrente, che impone il generatore
mi ricordo che è un generatore corrente

• Corrente i_g impone un vincolo sulle incognite

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_g \\ -V_g \\ 0 \\ i_g \end{pmatrix}$$

eq. di vincolo
 imposto da vincolo
 \$V_x\$ non è un termine noto, ma incognita
 # incognite \$l-m+1\$
 + # gen. corrente indep.

Esercizio



Variabili ausiliarie: $I_1 = i_1$
 $I_2 = i_2$
 $I_3 = i_3$

$$I_{g1} = -I_2 - I_3 + I_1$$

$$I_{g2} = I_1 - I_2$$

Var. aus. aggiuntive: V_{x1}
 V_{x2}

(1) mi figuro ig_1 e ig_2 come gener. tensione di V noto, e modo separ

Passo 1 kv mF Scrivo sistema di equazioni nel circuito

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & R & R \\ 0 & R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{x1} + V_{x2} \\ -V_{x1} - V_{x2} + V_g \\ -V_{x1} \end{pmatrix}$$

Passo 2: vincoli imposti generatori di corrente sulle var. ausiliarie

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & R & R & 1 & 1 \\ 0 & R & R & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_{x1} \\ V_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_g \\ 0 \\ i_{g1} \\ i_{g2} \end{pmatrix}$$

$$i_{g1} = I_1 - I_2 - I_3$$

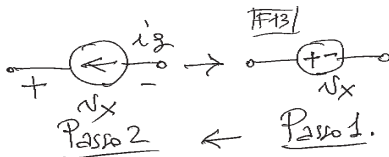
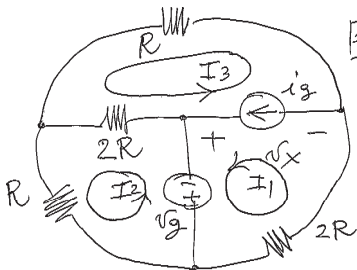
$$i_{g2} = I_1 - I_2$$

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & | & -1 & -1 \\ 0 & R & R & | & 1 & 1 \\ 0 & R & 2R & | & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_{X1} \\ V_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_g \\ 0 \\ i_{S1} \\ i_{S2} \end{pmatrix}$$

Metodo Modificato di Analisi su Base MF

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di corrente (bipoli non controllabili in corrente); in tal caso non possiamo ripetere il Passo 3 della precedente procedura
- vediamo come si fa con un esempio; non conosco la tensione sul gen.re di corrente i_g ; introduco quindi come incognita aggiuntiva la tensione v_x ai capi di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

I_1, I_2, I_3, v_x *aggiungo variabile ausiliaria*



i_g impone un vincolo sulle incognite

- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di corrente come se fosse un gen.re di tensione v_x ; mi riconduco così' ad una rete con sole resistenze e gen.ri di tensione; posso scrivere le seguenti KV

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{pmatrix}$$

Scrivo sistema di equazioni

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di corrente per scrivere una equazione aggiuntiva detta equazione di vincolo

$$i_g = I_1 - I_3$$

Scrivo corrente imposta da generatore con

- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, e' dato da

*generatore con
sopra la corrente
cicliche*

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ -v_g \\ 0 \\ i_g \end{pmatrix}$$

- il metodo descritto e' detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base maglie fondamentali*

Da lezione 8

Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)

no generatori di Tensione

generatori di corrente

- Si introduce, per dualita' rispetto al MMF, per reti di soli bipoli controllabili in tensione; in particolare reti di conduttanze e generatori indipendenti ideali di corrente

e conduttanze

$$V_{auxil.} = n-1 \text{ } V \text{ ai rami dell'albero}$$

- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MTF sono le tensioni dei rami dell'albero

VARIABILI AUSILIARIE $n-1$

$$V_a = (v_2, v_4, v_5)^T$$

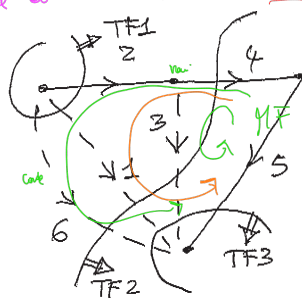
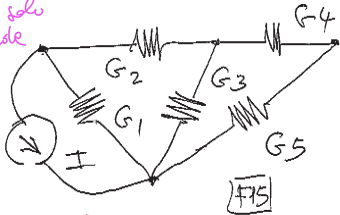
Sistema risolvibile
Case incognite

SOLO CONDUIT. E GEN. INDIP. DI CORRENTE

In generale si hanno $n-1$ incognite

$n-1$ incognite, scrivo $n-1$ KE associate ai TF del nostro albero

TF albero e solo corde



① Prendo grafo orientato, scelgo albero,

non a caso
Sistema risolvibile usando le $n-1$ V_{albero}

• mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $n - 1$; procediamo con 3 passi

Topologia Step • Passo 1: scrivo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero TF: un valore p tutte corde

ma ho le
corde, non le
correnti

$$i_1 + i_2 + i_6 = 0$$

corrente secondo

$$i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0$$

corrente ramo
albero che lo individua

$$i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$$

Topologia • Passo 2: esprimo le tensioni delle corde (in generale sono $l - n + 1$) equivale le correnti in funzione delle incognite Tensione albero sono loro
in funzione delle tensioni dei rami (V₁, V₄, V₅)
dell'albero; e' sempre possibile in quanto tali tensioni sono una base per lo spazio delle tensioni dei lati; nel far cio' uso $l - n + 1$
KV alle MF associate all'albero

Posso sempre farlo perché
le Tensioni dei rami
dell'albero sono una
base dello spazio
delle Tensioni
del grafico

in parallelo

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 + V_4 + V_5 \\ V_6 &= V_2 + V_4 + V_5 \\ V_3 &= V_4 + V_5 \end{aligned}$$

Per bipoli: controlla in corrente Tensioni
Scrivo $C_1, \dots, C_6$ in funzione delle rispettive
Elimino Tensioni corde

facendo
 $l - n + 1$
KV alle TF

Tipologia • Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in tensione, posso esprimere le correnti dei bipoli (i) in funzione delle tensioni dei bipoli; nel far ciò uso le i relazioni costitutive dei bipoli controllabili in tensione

Riprendo il circuito

$$i_1 = G_1 v_1 = G_1 (v_2 + v_4 + v_5)$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i_3 = G_3 v_3 = G_3 (v_4 + v_5)$$

$$i_4 = G_4 v_4$$

$$i_5 = G_5 v_5$$

$$i_6 = I$$

① ho usato $n-1$ KI ai TF

② ho usato $l-m+1$ KV alle MF

③ ho usato le rel. controll.

Elimino *Quelle conv.* Sfrutto che i bipoli sono controllabili in tensione
Sostituisco

Per arrivare abbiamo usato le $n-1$ KI ai TF (PI), $l-m+1$ KV alle MF e le rel.

non dipende dai meno t lat.

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $n-1$ equazioni nelle $n-1$ incognite date dalle tensioni dei rami dell'albero; in questo caso $n-1=3$; in forma vettoriale si ha (verificare)

SISTEMA RISOLVENTE conta solo numero di nodi

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{pmatrix}$$

uniche incognite solo le tensioni

- in generale il sistema risolvete per il MTF e' del tipo $\rightarrow$ Proviamo

Dimensioni della matrice
 $n-1$, poi delle Tensioni dei
 rami, non dipende dal # lati

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_a = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

non dipende dal numero di lati

le Tensioni dei
 Rami dell'albero,
 poi Tono di P2 e
 trova le altre

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze), $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$
 (vettore delle incognite), $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini
 noti)

TUTTO CIÒ È UOMO SE

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di ~~resistenza~~ ^{CORRENTE} e ~~conduttanza~~ ^{CONDUTTANZE} si
 può dare una regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$
- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$

• Osservazione. Per ottenere il sistema risolvete abbiamo usato
 tutte le KI al Passo 1, tutte le KV al Passo 2 e tutte le relazioni
 costitutive dei bipoli al Passo 3

• Osservazione. Una volta determinate le tensioni dei rami
 dell'albero, possiamo determinare indirettamente tutte le altre
 tensioni e correnti dei bipoli (pensarci!) <sup>trova le tensioni con le $n-1$ KV delle
 MF e relazioni costitutive</sup>

• Osservazione. MTF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2
 eliminiamo le tensioni delle corde, mentre al Passo 3 eliminiamo
 tutte le correnti dei bipoli

Scrivo tutte I in fusione
 delle V_i e l'unico le correnti

odi di base = Conduttanze e Generatori ideali Corrente

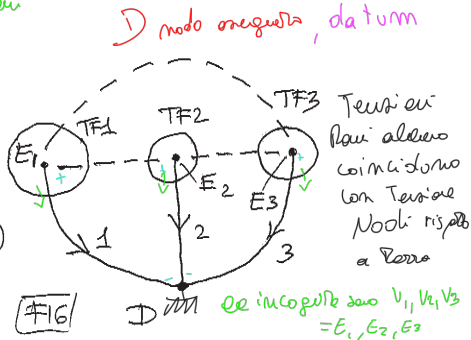
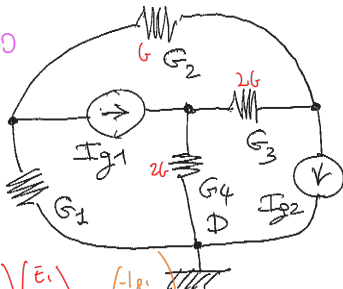
Metodo dei Nodi *caso particolare dei TF*

Si usa Metodo Nodi

• Il metodo dei nodi e' un caso particolare del metodo dei tagli. *SCELGO*
Cominciamo dal caso in cui sono presenti solo bipoli controllabili in *ALBERO*
tensione (conduttanze e gen.ri ind.ti di corrente) *PARTICOLARE*

● scegliamo un nodo di riferimento (nodo di terra, *e lo collego a Terra*, o Datum (D))
a cui viene attribuito potenziale $E = 0$; scegliamo poi un *albero*
stellato e cioe' un albero che collega ogni nodo direttamente a D;
infine orientiamo i rami dell'albero in modo che 'le frecce puntino
verso D *V. avv. n-1 V dei rami*

*Viene scelto
nodo di rif.
a Terra
Pot. assoluto = 0*



$$\begin{pmatrix} 2G & 0 & -G \\ 0 & 4G & -2G \\ -G & -2G & 3G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{g1} \\ I_{g1} \\ -I_{g2} \end{pmatrix}$$

*Applico ora
MTF =>*

*Per costruire ora i TF coincidono
con i Tagli nodali, usanti*

- applichiamo il MTF all'albero stellato; si nota che: *linea di Taglio nodale*
- le incognite (tensione dei rami dell'albero) coincidono con le *Le tensioni incognite sono dei m-1 nodi rispetto a Terra*
 $n-1$ tensioni dei nodi, $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, rispetto a D
- ogni TF e' una linea chiusa che contiene un solo nodo (taglio nodale) ed e' orientata positivamente verso l'esterno *come fisica? per coerenza*
- le KI per i TF si esprimono dicendo che e' nulla la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono su un nodo; ogni corrente si prende col $+$ se uscente dal nodo, con il $-$ se entrante nel nodo; sono $n-1$ KI per tutti i nodi eccetto il nodo di riferimento *KI al nodo di Terra NO, inutile perché è connessa linearmente alle precedenti*
- in generale il sistema risolvete per il metodo dei nodi e' del tipo *delle precedenti*

$$\mathbf{G}\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze),
 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ vettore delle incognite (tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento); $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini noti)

Come si costruisce $\mathbf{G}$?

$n-1$ eq in $n-1$ incognite

• per reti di soli generatori ind.ti ideali di corrente e conduttanze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$

- G_{kk} ; $k = 1, \dots, n - 1$: ^{in diagonale} somma delle conduttanze collegate al nodo k
- G_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, n - 1$: somma cambiata di segno delle conduttanze a comune fra nodo k e nodo h
- I_k ; $k = 1, \dots, n - 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma algebrica delle correnti dei gen.ri ind.ti di corrente collegati al nodo k ; ogni corrente si prende con il + se entrante nel nodo k , col segno $-$ altrimenti

• la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$

• e' un sistema di $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite; notare che la dimensionalita' del sistema non dipende da l

*verifica si puo' fare facendo un
KI nodo per nodo per*

*non dipende dal numero
bipoli*

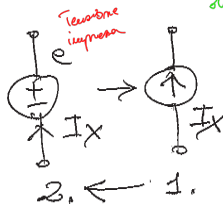
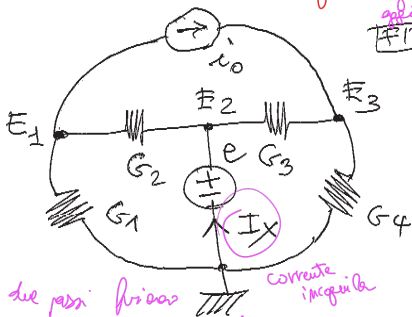
*Trovate Tensioni noti,
facile trovare tutte le altre
fonti*

Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA, 'modified nodal analysis')

incognite: tensioni variabili

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di tensione (bipoli non controllabili in tensione) Generatore di Tensione
- vediamo come si procede con un esempio; non conosco la corrente del gen.re di tensione e; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la corrente I_x di tale generatore; le variabili ausiliarie sono nesso random

4 eq. in 4 incognite Tensioni
 E_1, E_2, E_3, I_x corrente erogata dal generatore
maglia lo posso come generatore di corrente
incognita aggiuntiva
TF



i primi due passi finisco
 ① KI ai TF e le KV alle MF corrente incognita

passo 3, delle tensioni porre alle correnti, ma non tutti controllati a tutto

• Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di tensione come se fosse un gen.re di corrente I_x ; mi riconduco così ad una rete con sole conduttanze e gen.ri di corrente; posso scrivere le seguenti KI ^{il}

MI RICONDUKO AL CASO PRECEDENTE

Sistema
Risultato

Passo 1
Scrivo il
mio sistema
risolvere

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ I_x \\ i_0 \end{pmatrix}$$

• Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del gen.re ideale di tensione per scrivere una equazione aggiuntiva detta equazione di vincolo; in questo caso si ha semplicemente

vincolo imposto dal generatore

così come V_g

INTRODUKO EQ DI VINCOLO

$$E_2 = e$$

Sostituisco $E_2 = 0$

VINCOLO IMPOSTO DA V_g

mi ricordo
che c'è un
generatore
di tensione

Se fosse solo da E_1 e E_2
 $E_2 = E_1$

• abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

Sottoblocco

portandolo qui...

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 & -1 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ 0 \\ i_0 \\ e \end{pmatrix}$$

V_g

(1) INCOGNITE: le tensioni E_1, E_2, E_3 *incognita* *Tensione ai nodi*
e in più penso il più inol. di tensione come gen. di corrente,
introduco I_x *(verso random)*

- il metodo descritto e' detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base nodi*; e' uno dei metodi piu' utilizzati in pratica (ad esempio nel simulatore di circuiti SPICE)

inizio con metodo dei nodi

Presenza di Generatori Controllati $\Rightarrow$ Metodo Nodi

- Esempio (Nodi con generatori controllati di corrente). Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3 (attenzione, v_x non e' una variabile ausiliaria e non deve apparire nel sistema risolvete finale)

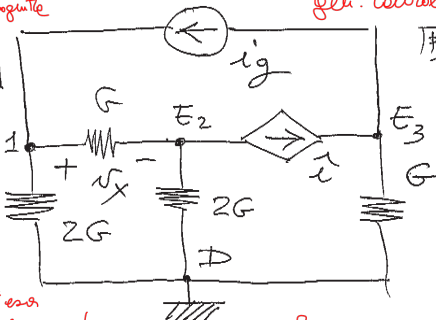
valori costitutivi, ultima cosa che uso

non aumenta le incognite

$$\hat{i} = G v_x$$

condizione

$$v_x = E_1 - E_2$$



gen. controllato di cor. e'

controllato di cor. e' controllato in tensione, non introduce incognite aggiuntive

Problema: Scrivere sistema risolvete da base nodi per questo circuito

controllato o no, non mi cambia

- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; scrivo quindi le KI ai nodi

Come se mandasse una corrente nota

Scrivo sistema indep.

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -\hat{i} \\ \hat{i} - i_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -(G E_1 - G E_2) \\ -G E_1 + G E_2 \end{pmatrix}$$

come se mandasse corrente nota

- Passo 2. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato e esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

• Passo 2 = Scrivo la grandezza di controllo in funzione delle incognite $(E_1, E_2, \dots)$

2) USO RELAZ COSTITUTIVA del GEN controllato $\hat{i} = Gv_x = G(E_1 - E_2)$

- sostituendo arrivo al sistema

punto a SX

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ -G & G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \end{pmatrix}$$

- notare che il generatore controllato influisce sulla matrice $\mathbf{G}$ rendendola (in generale) non-simmetrica

incognite non incrementano, ma matrice non più simmetrica

• passo 2

SCRIVO GRANDEZZE DI CONTROLLO IN FUNZIONE DELLE VARIABILI SCELTE, LE INCOGNITE

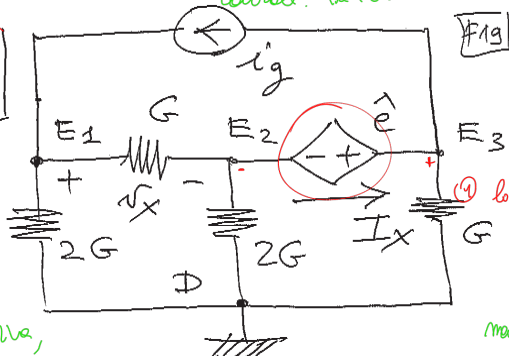
• Esempio (Nodi con generatori controllati di tensione) Caso più complesso

Generatore controllato Tensione, non controll. in Tensione

Tensione impressa

$$\hat{e} = 2\sqrt{x}$$

ultima eq da usare



Ho bisogno di 3 eq.

lo posso usare come generatore costante che impone I_x

(1) introduco incognita aggiuntiva, corrente del generatore

#19b

3.

←

2.

←

1.

ma se lo posso usare, mi trovo in un rete

lo posso usare indipendentemente di tensione introduco incognita aggiuntiva I_x

me lo posso usare come generatore costante che impone I_x

scrivo sistema di equazioni

- Passo 1. Penso il generatore controllato di tensione come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base nodi introducendo una incognita aggiuntiva data dalla corrente di tale generatore di tensione; le variabili ausiliarie sono quindi

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$

- Posso scrivere le KI

Scrivo ora il sistema N-3 equazioni

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -I_x \\ I_x - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Esprimo il vincolo imposto dal generatore di tensione $\hat{e}$: *ritorno indietro e scrivo l'eq. di vincolo imposto dal generatore*

② EQUAZ. VINCOLO

$$\hat{e} = E_3 - E_2$$

VINCOLO imposto dal generatore

mi ricordo che è controllato

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di tensione ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$V_x = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$$

$$\hat{e} = 2v_x = 2(E_1 - E_2)$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

alle fine
dipendenza
che rappresenta
la quarta equazione del sistema risolvete

variabili ausiliarie e delle correnti incognite del generatore

$$2E_1 - E_2 - E_3 = 0 \quad \Leftarrow E_3 - E_2 = 2(E_1 - E_2)$$

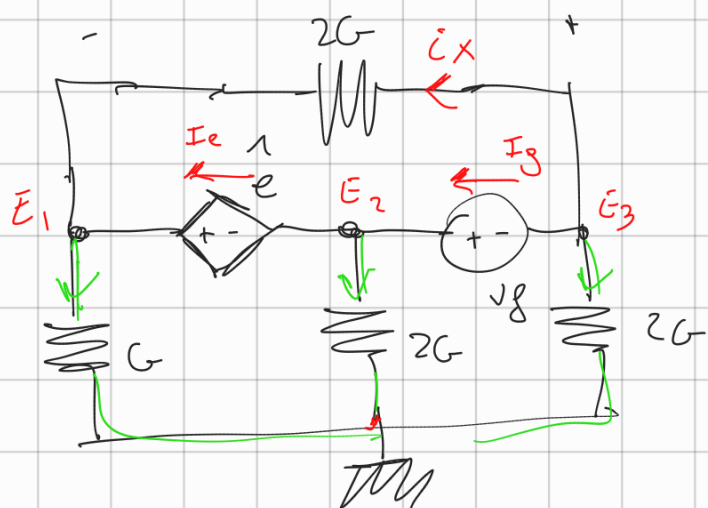
- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 4 equazioni nella variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 & 0 \\ -G & 3G & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Incognite: Tensioni nodi note e correnti
dei generatori (controllato o no)
di Tensione

=> ora per la 4 equaz. devo unire più passaggi, il 2° e il 3°

Es. Les. 8. NOD1 con gu. controll.
e non si teneva



$$e^1 = \frac{1}{G} i_x$$

(1) incog. pp. I_e e I_g

Ten. in Forz. di
gener.:

$$\begin{bmatrix} 3G & 0 & -2G \\ 0 & 2G & 0 \\ -2G & 0 & 4G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_e \\ I_g - I_e \\ -I_g \end{bmatrix}$$

$$i_x = (E_3 - E_1) 2G$$

(2) Eq. di v8 cal.

$$v_8 = E_2 - E_3$$

$$e^1 = E_1 - E_2$$

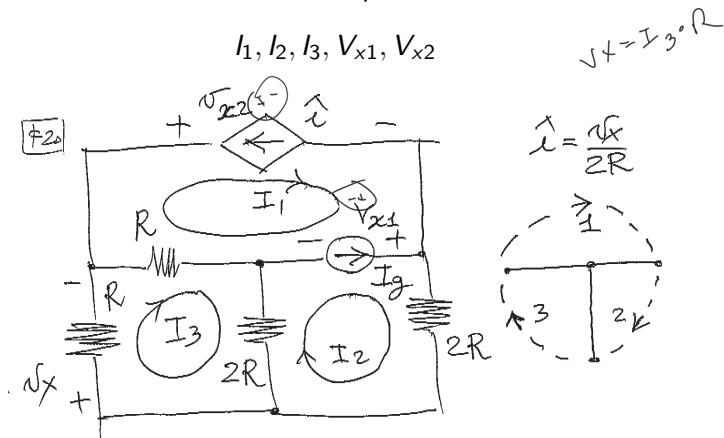
(3) Scriv. equaz. controll. in) fu. alle u'e con. es.

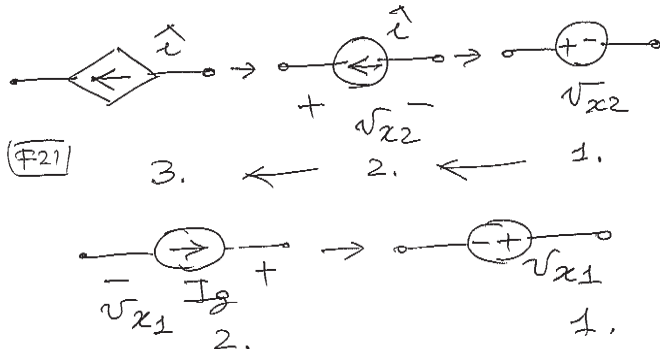
$$e^1 = \frac{1}{G} i_x = 2[E_3 - E_1] = E_1 - E_2$$

$$2E_3 - 2E_1 - E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow -3E_1 + E_2 + 2E_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3G & 0 & -2G & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2G & 0 & 4G & 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_e \\ I_g \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_8 \end{bmatrix}$$

- Esempio (MF in presenza di generatori controllati).
- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base MF introducendo una incognita aggiuntiva data dalla tensione su tale generatore di corrente; anche per il generatore di corrente I_g introduco come incognita aggiuntiva la tensione ai suoi morsetti; le variabili ausiliarie sono quindi





Posso scrivere le KV

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R \\ 0 & 4R & -2R \\ -R & -2R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_{x1} - V_{x2} \\ V_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Vincoli imposti dai generatori di corrente:

$$I_g = -I_1 + I_2; \quad \hat{I} = -I_1$$

la prima fra queste relazioni e' la quarta equazione del sistema risolvibile

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$V_K = I_3 \cdot R$$

$$\hat{i} = \frac{v_x}{2R} = \frac{R I_3}{2R} = \frac{I_3}{2}$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo $0 = \frac{I_3}{2} + I_1$

$$\frac{I_3}{2} = -I_1$$

$$I_1 + \frac{I_3}{2} = 0$$

$$I_1 = -\frac{I_3}{2} + I_2$$

che rappresenta la quinta equazione del sistema risolvibile

- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 5 equazioni nelle variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R & 1 & 1 \\ 0 & 4R & -2R & -1 & 0 \\ -R & -2R & 4R & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_g \\ 0 \end{pmatrix}$$