

Legame fra Matrici Topologiche che descrivono il grafo orientato di

- Esempio. Consideriamo il grafo orientato in figura; utilizziamo

inoltre la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; si ha

13/04/2013
P+2

$\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T$; $\mathbf{i}_a = (i_4, i_5, i_6)^T$

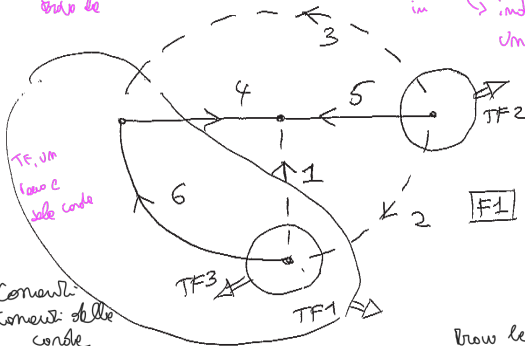
no elementi indipendenti solo il grafo
base spazio correnti
base spazio tensioni
hanno le dimensioni
con m-1 KT di TF associati ai rami

indipendenti: un albero non può contenere topologie implicite che i correnti sono indip.

e

$\mathbf{v}_c = (v_1, v_2, v_3)^T$; $\mathbf{v}_a = (v_4, v_5, v_6)^T$

condu
base spazio tensioni
le tensioni l-m+1 KV alle KF
base spazio tensioni



legge tra i e V

in → indipendente perché un albero non contiene maglie, se ci fosse, la somma $\sum v = 0$

indipendenti perché albero non contiene maglie, se ci fosse maglie, somma = 0

Tensioni vari albero, base spazio tensioni n-1 V indip

tra le altre l-m+1 (condu) con KV alle KF

il conduttore che: base spazio delle correnti è dato dalle correnti delle conda

$l-m+1$, i_1, i_2, i_3 sono indipendenti (un albero non può contenere topologie ⇒ correnti indip)

- esprimiamo $\mathbf{i}_a$ (correnti dipendenti) in funzione di $\mathbf{i}_c$ (correnti indipendenti); si ha dalle $n - 1 = 3$ KI ai TF:

*Breviario le correnti dipendenti dei
Vani dell'albero
partendo da quelle
indip. del coalbero*

$$i_4 + i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad \text{Vano 4}$$

$$i_5 + i_2 + i_3 = 0 \quad \text{Vano 5}$$

$$i_6 + i_1 - i_2 = 0 \quad \text{Vano 6}$$

$$V_c = B V_A$$

$$B V_A = V_c$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{A} \mathbf{i}_c$$

$A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$
dove $n-1$ correnti
dipendenti.

dove la prima matrice topologica dei TF associata

$$(n-1) \times (n-1) \quad (n-1) \times 1$$

$$A i_c = i_a$$

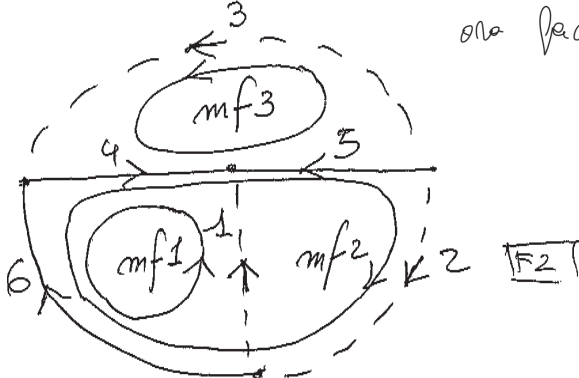
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

MATRICE TOPOLOG. DEI TF associata all'albero

$$\downarrow \quad i_4 = -i_1 + i_2 + i_3 \dots$$

descrive le KI ai TF

ora le
V indep.
sono quelle
dei rai



ora faccio discorso
analogo per
altri

- esprimiamo adesso $\mathbf{v}_c$ (tensioni dipendenti) in funzione di $\mathbf{v}_a$ (tensioni indipendenti); si ha dalle $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF:

$$v_1 - v_4 - v_6 = 0$$

$$v_2 + v_4 - v_5 + v_6 = 0$$

$$v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{B}\mathbf{v}_a$$

$$v_1 = v_4 + v_6 \dots$$

dove la seconda matrice topologica delle MF associ all'albero.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

Matrice topologica delle MF associ all'albero

$B \in \mathbb{R}^{(l-m+1)(l-m+1)}$

- Proprieta': si ha

$$\mathbf{B}^T = -\mathbf{A} \quad A = -B^T$$

- si puo' dimostrare che questa relazione e' valida in generale

• Matrice Top. dei TF e' legata a quella topologica delle KF.

• Se conosco le KI ai TF conosco anche le KV alle MF

vale in generale

Consideriamo il grafo orientato associato a un circuito;
supponiamo vi siano ℓ bipoli e n nodi; utilizziamo inoltre la
convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; scegliamo un albero
per ogni anche mischiata le convenzioni

implica conservare potenza istantanea
• **Teorema di Tellegen.** Sia $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un *vettore di numeri, non tensioni, che soddisfano le equazioni*
numeri che soddisfano vettore di numeri che (pensati come tensioni dei lati del grafo)
soddisfano alle KV alle MF; sia $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore
di numeri che (pensati come correnti dei lati del grafo) soddisfano
alle KI ai TF. Allora si ha
l'implicitamente ho scelto un grafo, un albero ecc

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

cioè i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ risultano fra di loro ortogonali.

*Cio' è vero
inoltre potremmo
sugli elementi
del grafo*

v e i vettori $\in \mathbb{R}^6$

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_n i_n = 0$$

*in $\mathbb{R}^\ell$, i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ di dim ℓ , sono sempre
ortogonali.*

• Dimostrazione. Si ha

date per le relas. tra matrici topologiche

Scompongo i vettori del coilbero e albero

Scompongo

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{v}_c \ \mathbf{v}_a)^T \begin{pmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_a \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{v}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{i}_a}$$

$\mathbf{v}_c$, tensioni dip

$$= [\mathbf{B} \mathbf{v}_a]^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T [\mathbf{A} \mathbf{i}_c]$$

$$= \mathbf{v}_a^T \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{i}_c$$

$$= \mathbf{v}_a^T (\mathbf{B}^T + \mathbf{A}) \mathbf{i}_c = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_c = \mathbf{B} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{i}_a = \mathbf{A} \mathbf{i}_c \end{array} \right\} \begin{array}{l} kV \text{ a } \mu F \\ kI \text{ a } T F \end{array}$$

$\mathbf{i}_c$ dip. libero

$$\underbrace{\mathbf{v}_c}_{\text{tensione dip}} = \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{v}_a}_{\text{v indip}}$$

dato che $\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}$

} annullano v. dipo liberi

$$\mathbf{A} = -\mathbf{B}^T$$

Cosa implica?

principio conservazione potenza istantanea

da comp'do $\sum \text{pot erogate dai generatori indip} = \sum \text{pot assorbita dagli altri elementi.}$

Principio di conservazione della potenza istantanea (e energia)

Ma sono v e i effettive in un circuito

• Siano $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{i}(t)$ le tensioni e correnti effettive in un circuito ad un generico istante t ; dato che le tensioni soddisfano per ipotesi alle KV e le correnti alle KI possiamo applicare il Teorema di Tellegen e ottenere che

Usando convenzione utilizzatori.

$v_k(t) \cdot i_k(t)$ è la potenza istantanea assorbita dall'istante t del bipolo k

$$\mathbf{v}^T(t) \mathbf{i}(t) = \sum_{k=1}^{\ell} v_k(t) i_k(t) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k(t) = 0 \text{ W}$$

è la potenza istantanea assorbita dall'istante t del bipolo k

Convenzione utilizzatori

• Quindi è nulla, istante per istante, la somma delle potenze istantanee $p_k(t)$ assorbite dagli ℓ bipoli del circuito

Conv. Utilizzatori

• in sintesi KV, KI implicano Teorema di Tellegen che implica principio di conservazione della potenza istantanea e energia. Un circuito che assiomaticamente soddisfa a KV e KI verifica quindi automaticamente questi due principi fondamentali

Se integro la pot. ist.

di potenza e energia

> se valgono per ipotesi KV e KI

ho un circuito, se valgono KI e KV allora $\Rightarrow$

• altre conseguenze; consideriamo due istanti $t_1 \neq t_2$ e siano $\mathbf{v}(t_1)$ e $\mathbf{i}(t_1)$ (rispettivamente $\mathbf{v}(t_2)$ e $\mathbf{i}(t_2)$) le tensioni e correnti effettive in un circuito nei due istanti considerati; allora si ha

ortogonali anche a istanti diversi

$$\mathbf{v}^T(t_1)\mathbf{i}(t_2) = 0$$

sono vettori ortogonali

ortogonali anche ad istanti diversi

stesso grafo con elementi diversi

• siano C^a e C^b due circuiti diversi ma con lo stesso grafo ma elementi diversi; siano $\mathbf{v}^a(t)$ e $\mathbf{i}^a(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^a e $\mathbf{v}^b(t)$ e $\mathbf{i}^b(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^b ; allora

$$(\mathbf{v}^a)^T(t)\mathbf{i}^b(t) = 0$$

in uno un gen. sinusoidale l'altro ha l'opposto

ogni KV implica un vincolo

• interpretazione geometrica: KV implicano $\mathbf{v} \in \pi_v$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$); KI implicano $\mathbf{i} \in \pi_i$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$): i due sottospazi π_v e π_i di $\mathbb{R}^\ell$ sono fra di loro ortogonali.

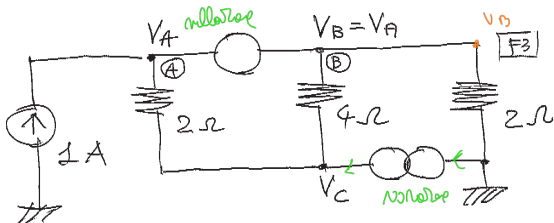
problema scalare è 0

ho un grafo orientato, KV implicano $l-n+1$ vincoli sulle V , $V \in$ sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$
KI implicano $m-1$ vincoli, $I \in$ sottosp.

prendo a caso un vettore di v e i , sempre ortog.

tutti i circuiti soddisfano KVL, da un cammino KVL e KCL e da loro

- Esempio. Verificare il Teorema di Tellegen per il seguente circuito con ao (nullo) (nullore)

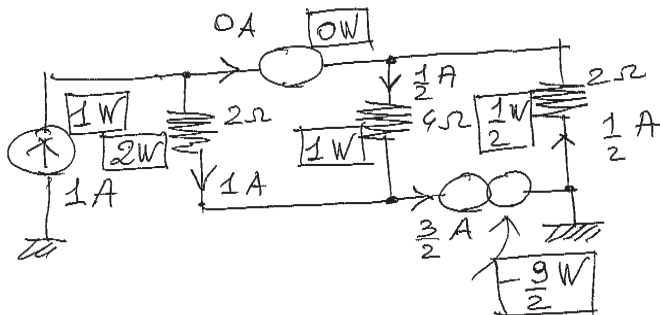


- determiniamo esplicitamente tutte le potenze elettriche assorbite dai bipolo presenti; si ha dalla KI al nodo A e al nodo B (rispettivamente)

$$1 = \frac{V_A - V_C}{2}; \quad \frac{0 - V_A}{2} = \frac{V_A - V_C}{4}$$

da cui $V_A = -1 \text{ V}$ e $V_C = -3 \text{ V}$

- nella figura sono indicate le correnti che fluiscono nei bipoli e le potenze istantanee assorbite



- si verifica che la somma delle potenze istantanee assorbite e' nulla, come previsto dal Teorem di Tellegen.

Verifichiamo Tellegen per il seguente circuito

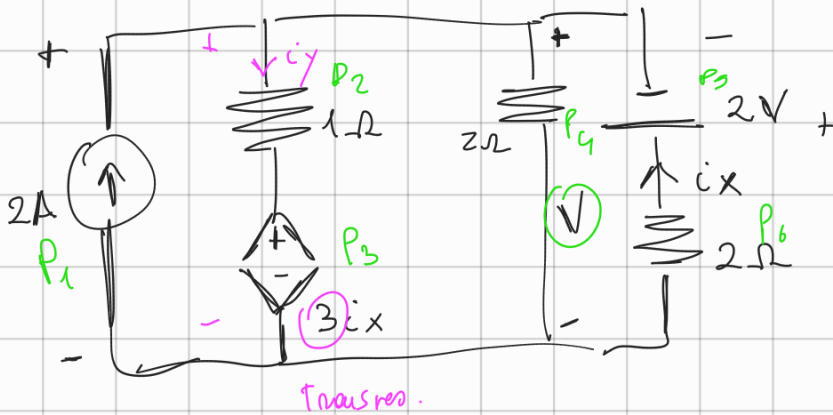
2) Trovo tutte $P_{istat. assorb.}$

faccio la somma e devo

fare ϕ

$$\Rightarrow \sum \text{pot. erogata dai gen. indep.} = \sum \text{pot. ass. abbiel.}$$

$$\sum \text{pot. ass.} = \phi$$



classica config. di Millman, faccio prima di conoscere i_x
e poi da seconda eq trovo i_x

• Introduco imp. V me lo figuro come indep
control generatore

$$V = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{3i_x}{1} - \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{3}{2} i_x + \frac{1}{2}$$

positivo, più verso alto

• Per i_x faccio una $lc V$ alla meglio di destra

$$V + 2i_x + 2 = 0 \Rightarrow V = -2i_x - 2$$

i_x verso alto, conv. per

Sostituisco

$$-2i_x - 2 = \frac{3}{2} i_x + \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2} - 2\right) i_x = \frac{1}{2} + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} i_x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow i_x = -\frac{5}{7} A$$

$$V = \frac{10}{2} - 2 = -\frac{4}{7} V$$

Prova i_y con kV

$$V = i_y + 3i_x, \text{ sostituisco } \Rightarrow i_y = \frac{11}{7} A$$

Si trovano le P. assol.

uso conv. util.

$$P_1 = -2 \cdot V = \frac{8}{7} W$$

$$P_2 = R I^2 = \frac{121}{49} W$$

$$P_3 = 3i_x \cdot i_y =$$

i_y conv. util.

$$= \frac{11}{2} \cdot 3 \cdot \frac{-5}{7} = -\frac{165}{49} W$$

$$P_4 = \frac{V^2}{R} = \frac{8}{49}$$

$$P_5 = 2 \cdot I_x = -\frac{10}{7} W$$

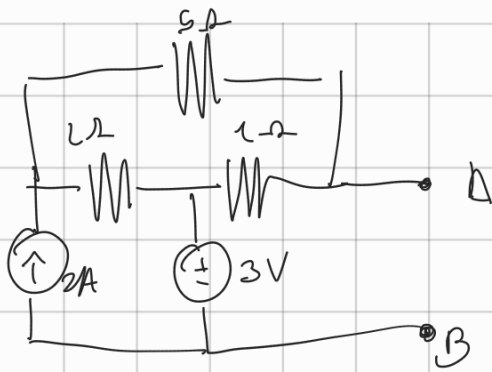
$i_x \uparrow$ conv. util.

$$P_6 = 2 \cdot i_x^2 = \frac{50}{49} W$$

$$\Sigma \text{ potenze} = 0$$

THEVENIN / NORTON con TRASFORMAZ.
CIRCUITALI (METODO TOPOLOGICO)

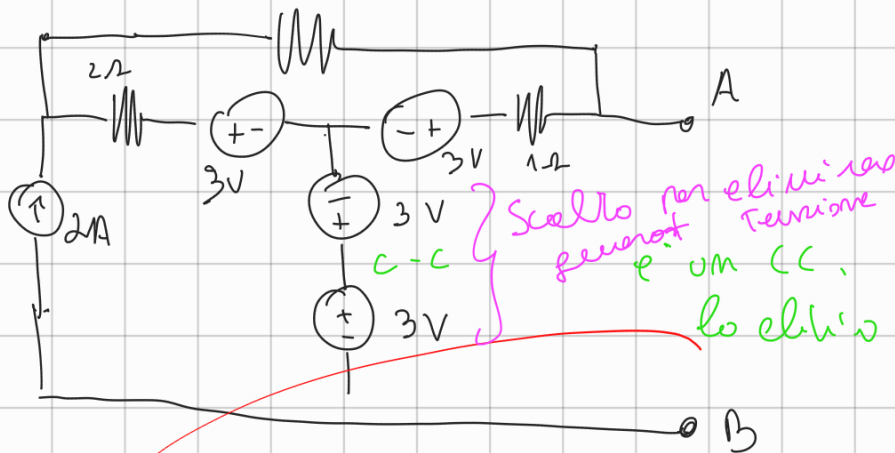
USO trasformos. a 7 cui 12V



diretta non lo so trasformare

TRUCC, funziona solo se non ci sono gen. controllati

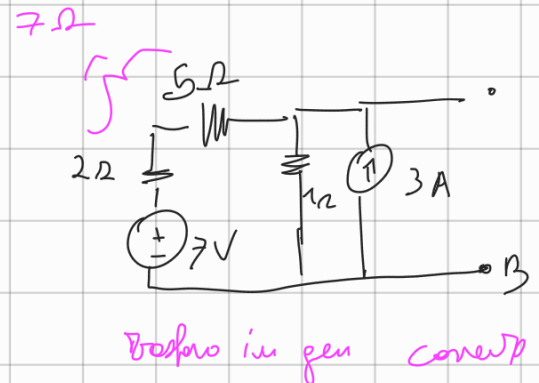
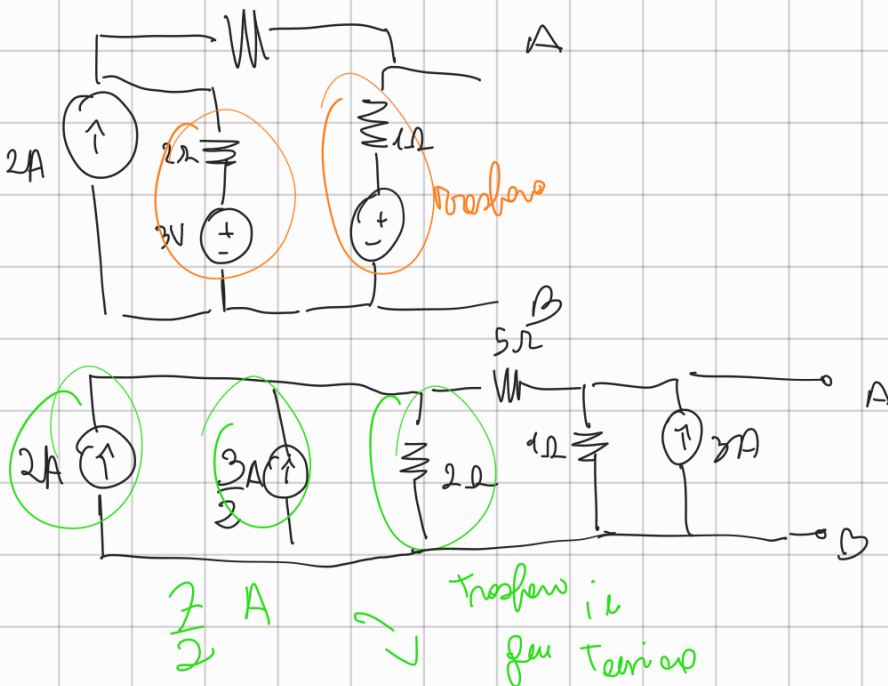
- Primo il modo a cui è collegata la batteria e faccio un taglio notevole dei generatori (di tensione)
- il primo lo inserisco per cancellare il gen



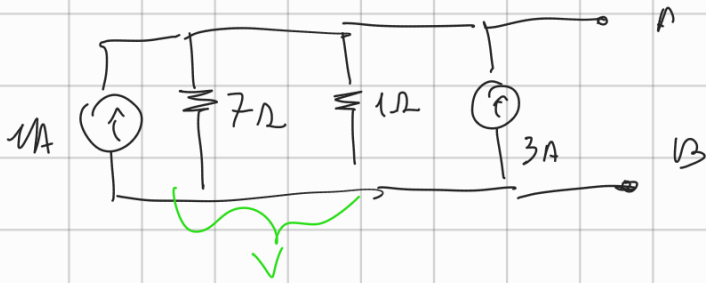
NON HO CAMBIATO KV ALLE MAGLIE

ai morsetti A-B non cambia niente

geni gen di V si può splittare in più parti nei punti in cui è collegato



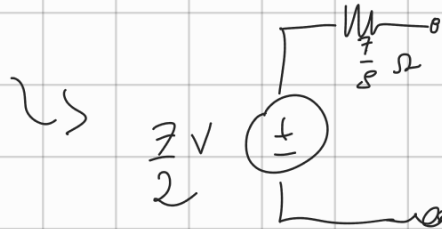
trasfero in gen controllati



Bipoli in parallelo
 si possono invertire
 tra loro
 invertendo i poli e
 lo senso

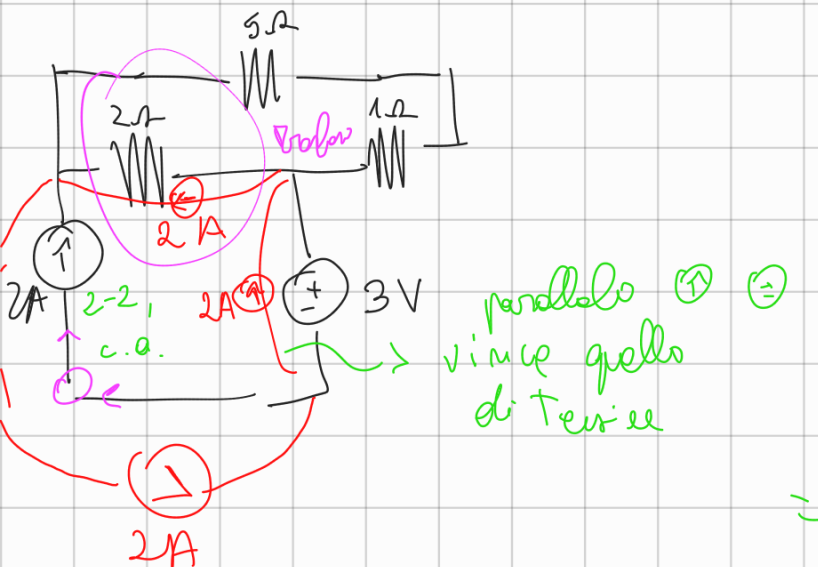


equiv. Norton



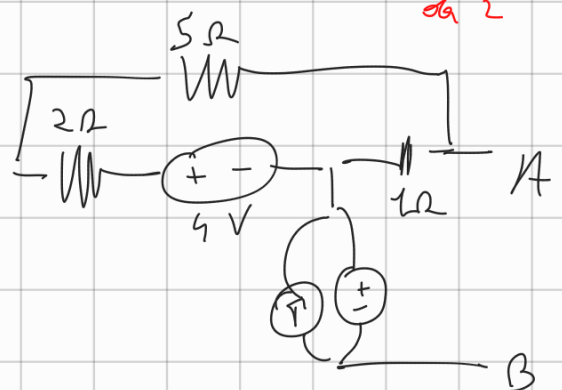
Dobbiamo aggiungere tutti i generatori quando
 sono i bipoli collegati a quel nodo

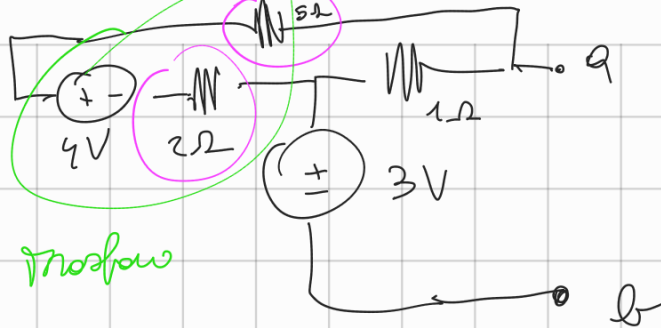
ALTRA POSSIBILITA, non faccio un taglio
 notevole ma inserisco maglia di generatori di corrente
 tutti percorsi dalla stessa corrente



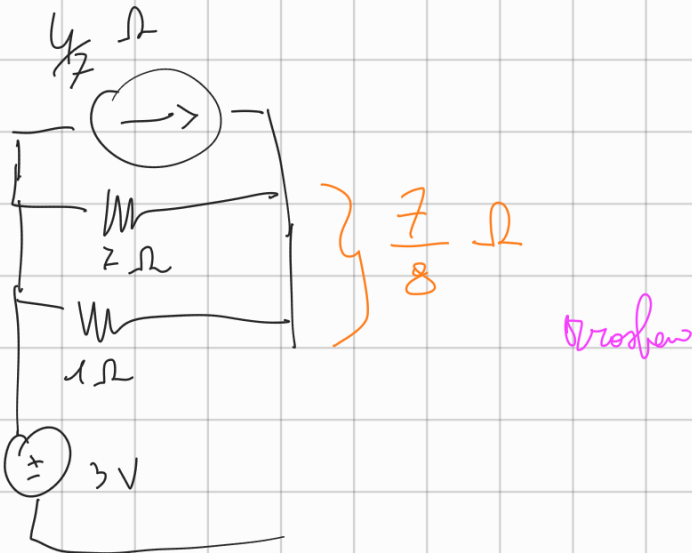
li aggiungo in modo che
 non cambia la K.I

in questa
 esce corrente da
 2 e si entra corrente
 da 2

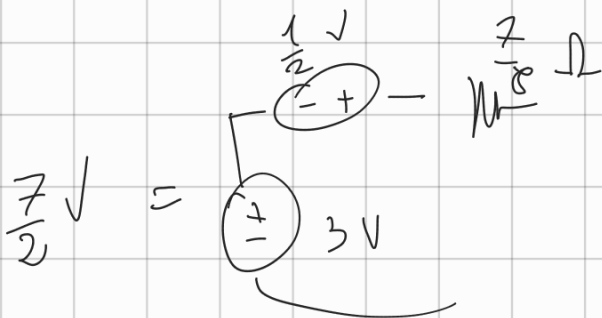




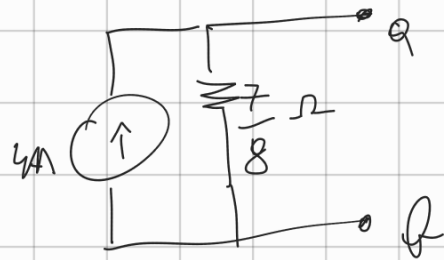
7Ω



Thevenin

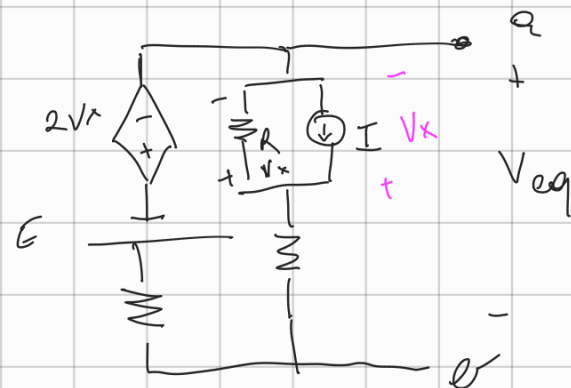


=>



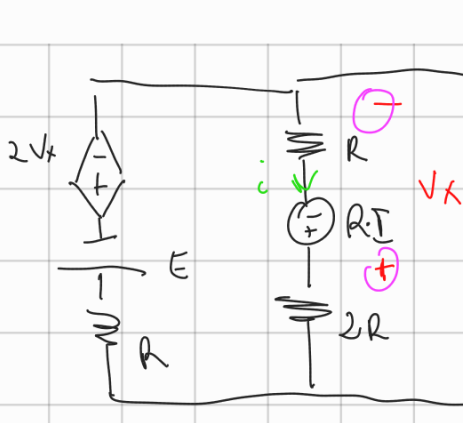
Esercizio 4 C N. 4

trovare thevenin con definizione



trovare V_k in funzione delle grandezze note
 E, R, I o V_{eq}
 posso farlo al passo 1 o 2, ma V_x
 va eliminato

sempre delicato trasformare parti grandezze controllo ma V_x e'
 non solo la tensione sul bipolo, ma anche sull'altro



trovo V_x con una V

$$V_x = R i - R I$$

$$V_{eq} = R i - R I + 2 R i$$

$$V_{eq} = -V_x + 2 R I \quad V_x = R i - R I$$

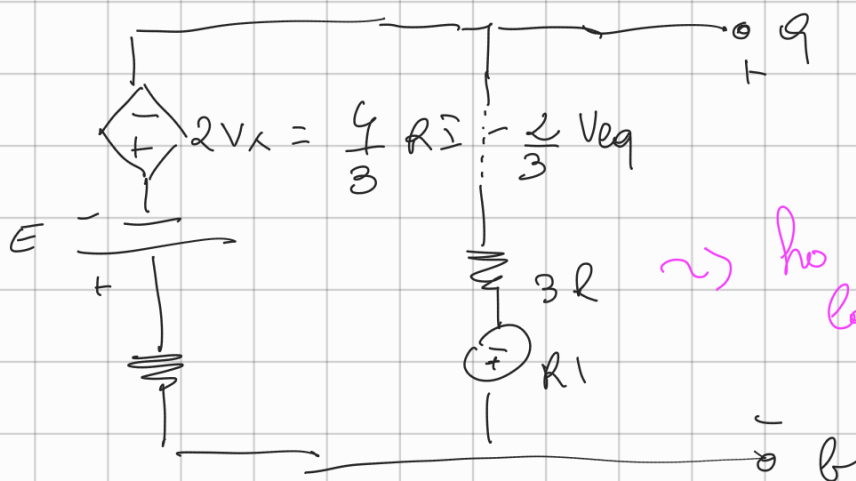
$$i = \frac{V_{eq} + R I}{3 R}$$

$$V_x = -R i + R I$$

$$= -\left(\frac{V_{eq} + R I}{3}\right) + R I$$

$$V_x = -\frac{V_{eq}}{3} + \frac{2}{3} R I$$

ho elimin. le grandezze di controllo



ho flipato la serie

Millman

entranti
i per
il segno verso
altro

$$V_{eq} = \frac{E + \frac{4}{3} R I - \frac{1}{3} V_{eq}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3 R}} - \frac{R I}{3 R}$$

svalgo il
cortoc

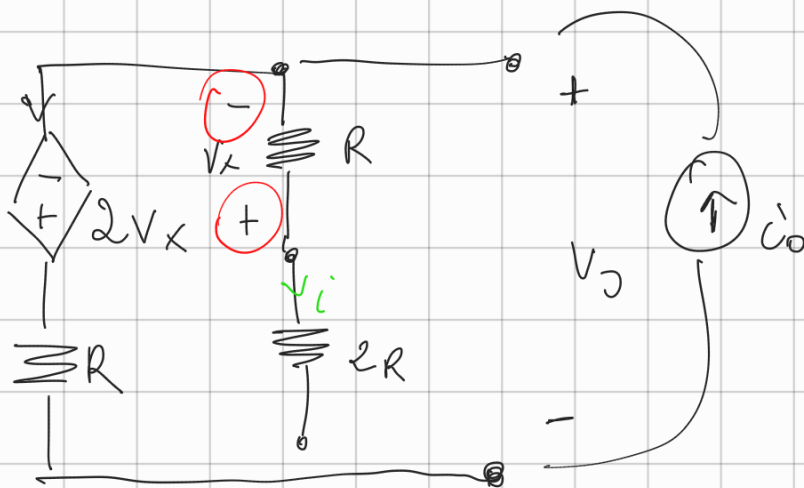
moltiplica
e divido
per 3

$$\frac{-3E - 4RI + 2V_{eq} - RI}{R \frac{4}{2}} = \frac{-\frac{3}{4}E - RI + \frac{1}{2}V_{eq} - \frac{RI}{4}}{1} = V_{eq}$$

$$V_{eq} = -\frac{3}{2}E - 2RI - \frac{RI}{2}$$

$$V_{eq} = -\frac{3}{2}E - \frac{5}{2}RI$$

Req. senza gen. corrente, trova Bipolo eqv. associato



trova $R_{eq} = \frac{V_o}{I_o}$

Per V_o ... ho un partizione di Tensione

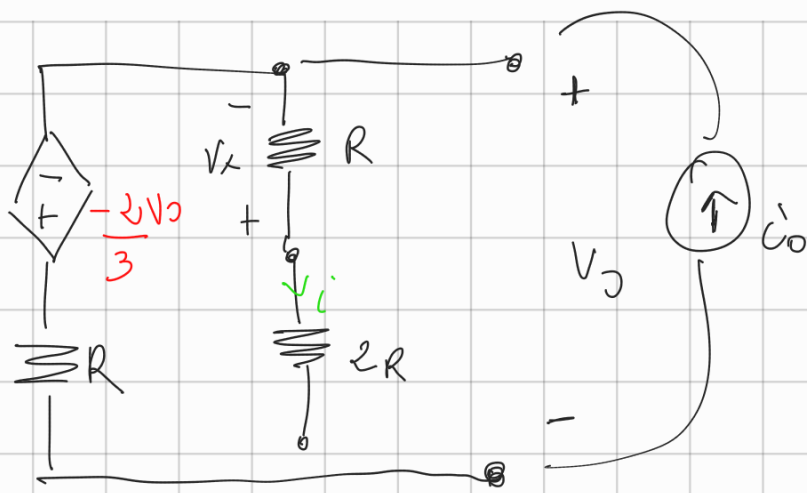
$$V_x = \frac{-V_o \cdot R}{3R} = -\frac{V_o}{3}$$

V_x
-

$2V_x = -\frac{2}{3}V_o$; Ho config. Millman

$$\frac{\frac{2}{3R}V_o + I_o}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} \Rightarrow \frac{V_o}{I_o} = \frac{3R}{2}$$

R_{eq}



Milman

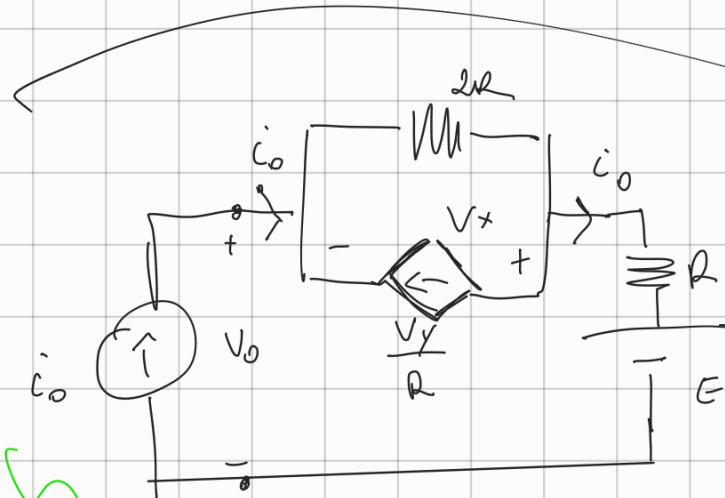
$$V_0 = \frac{-\frac{2}{3} V_0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} + i_0$$

$$= \frac{\frac{2}{3} V_0}{\frac{4}{3R}} + i_0$$

$$= \frac{\frac{2}{R} V_0 + 3 i_0}{\frac{4}{R}} = \frac{\frac{1}{2} V_0 + 3 R i_0}{1} = V_0$$

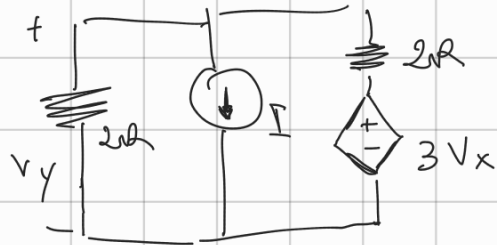
$$V_0 = \frac{-3R i_0}{2}$$

$$R_{eq} = \frac{3}{2} R$$



~~Exerc.~~ 4B

Thevenin AB
com Método
Rápido



coloca gerador
conecta pr
método Rápido

Para V0 com uma kV

$$V_0 = -V_x + R i_0 + E$$

$$\underline{V_x = -V_0 + E + R i_0}$$

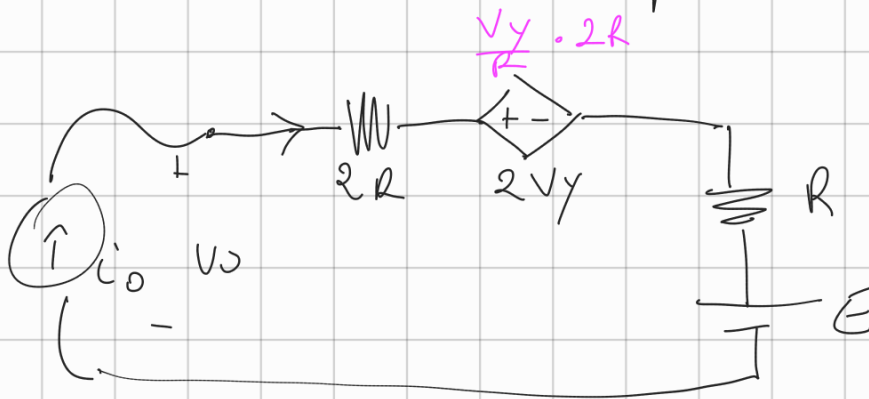
Prova V_y com
Millman

$$V_y = \frac{-I + \frac{3V_x}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{3}{2} V_x - RI$$

$$V_y = \frac{3}{2} (-V_0 + E + R i_0) - RI$$

$$V_y = -\frac{3}{2} V_0 + \frac{3}{2} E + \frac{3}{2} R i_0 - RI$$

• Transformo circuito sopra



$$V_0 = 2R i_0 + 2V_y + R i_0 + E$$

Sostituisco V_y a V_0

$$// V_y = -\frac{3}{2} V_0 + \frac{3}{2} E + \frac{3}{2} R i_0 - RI //$$

$$= -\frac{3}{2} (2R i_0 + 2V_y + R i_0 + E) + \frac{3}{2} E + \frac{3}{2} R i_0 + \frac{3}{2} E - RI$$

$$= -3R i_0 - 3V_y + \cancel{\frac{3}{2} R i_0} - \cancel{\frac{3}{2} E} + \cancel{\frac{3}{2} E} + \cancel{\frac{3}{2} R i_0} + \frac{3}{2} E - RI$$

$$V_1 = -\frac{3}{4} R i_o + \frac{3}{4} E - \frac{R I}{2}$$

No...

$$V_o = \underbrace{\frac{3}{2} R i_o}_{R_{eq}} + \underbrace{E - \frac{R}{2} I}_{V_{eq}}$$

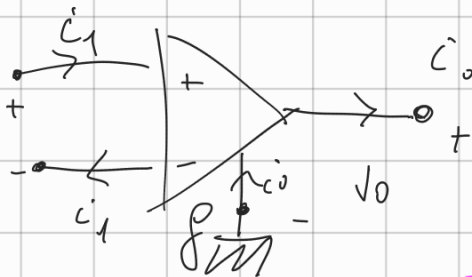
Ho trovato

Fine Les. 9

A. O. ideale, era definito

quadrupolo ^{funziona come} rete a 2 porte

Il suo guadagno
infinito, se
 V_1 è nei
limiti
di inviluppo.



rispetto a Terra

ci sta retroazione affinché i nodi di
Siano allo stesso pot. rispetto a Terra

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

rete 2 porte, 2 variab.
costituit.

Assintoto grandissimo di uscita

V_o = tensione di uscita V , conv. generatore

$V_o \cdot i_o$ = pot. erogata

i_o = corrente uscita risucchiata dal morsetto di Terra

Se esso converge,
deve essere più
alta di una

Lo rappresenta con modello e morsetto



V_0, i_0, V_o

nessun legame
tra V_o e i_o

$V_o \cdot i_o$ è la POTENZA EROGATA

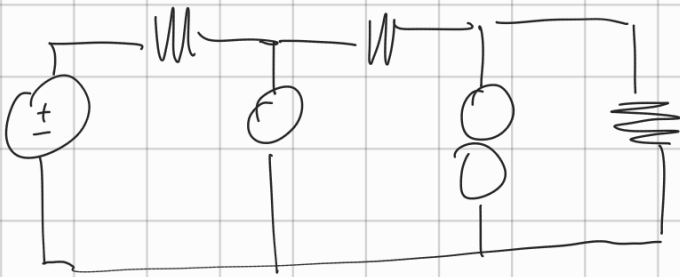
modellazione, ingresso
modellazione, uscita operaz.

Il circuito,
non collegato
a Terra

uscita collegata
a Terra

i morsetti sono allo stesso potenziale rispetto a Terra

Amplific. invertente



abbiamo un nodo ai nodi
per analisi, cioè sono
i nodi di cui non
conosciamo il potenziale
 E_1, E_2 , tensioni non incognite
 V_1, V_2
 V_0 incognita, V_L

KI escluso nodi di uscita degli op-amp., o a cui
sono collegati: per tensione, rimane solo un
nodo,
 $i_1 = i_2$...

Vado a SLIDE LEZ 3