



UNIVERSITÀ DI SIENA

1240

ELETTROTECNICA

Appunti delle Lezioni

Corso di Laurea in
INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'INFORMAZIONE

No part of this publication may be reproduced or used in any manner without the prior written permission of the owner. To request permissions, contact the publisher at info@sbuch.it

Indice

1	Circuiti a Costanti Concentrate	3
1.1	Interconnessione di bipoli	3
1.2	Grandezze elettriche su un bipolo	3
1.3	Intensità di corrente	4
1.3.1	Osservazione	4
1.4	Tensione o differenza di potenziale	4
1.4.1	Osservazione	5
1.5	Versi coordinati per tensione e corrente	5
1.5.1	Convenzione degli utilizzatori	5
1.5.2	Convenzione dei generatori	6
1.6	Relazione costitutiva di un bipolo	6
1.7	Bipoli passivi o attivi	7
1.8	Resistore ideale	7
1.8.1	Corto circuito e circuito aperto	8
1.8.2	Interruttore ideale	8
1.8.3	Energetica di un resistore passivo	9
1.9	Condensatore ideale	9
1.9.1	Energetica del condensatore ideale	10
1.9.2	Osservazioni	10
1.9.3	Condensatore ideale in regime stazionario	11
1.10	Induttore ideale	11
1.10.1	Energetica dell'induttore ideale	12
1.10.2	Osservazioni	12
1.10.3	Induttore ideale in regime stazionario	13
1.11	Generatore indipendente ideale di tensione	13
1.11.1	Disattivare un generatore ind.te ideale di tensione	14
1.11.2	Energetica di un generatore ind.te ideale di tensione	15
1.12	Generatore indipendente ideale di corrente	15
1.12.1	Disattivare un generatore ind.te ideale di corrente	16
2	Leggi di Kirchhoff	17
2.1	Introduzione	17
2.2	Grafo orientato associato a un circuito	17
2.3	Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)	19
2.4	Superficie Gaussiana	19
2.5	Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)	19
2.5.1	Seconda versione della KI dalla fisica	20
2.6	Note sulla legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)	20

3	Bipoli Notevoli e Teorema di Millmann	23
3.1	Generatore indipendente reale di tensione	23
3.1.1	Confronto tra generatore ind.te ideale e reale di tensione	24
3.1.2	Interpretazione grafica	25
3.2	Generatore indipendente reale di corrente	26
3.3	Equivalenza fra bipoli	26
3.3.1	Equivalenza fra gen.re ind.te reale di tensione e di corrente	26
3.3.1.1	Verifica dell'equivalenza	26
3.3.1.2	Osservazioni	27
3.3.2	Equivalenza fra gen.re ind.te reale di corrente e di tensione	27
3.3.2.1	Verifica dell'equivalenza	27
3.3.3	Equivalenza tra serie e gen.re ind.te ideale di corrente	27
3.3.4	Equivalenza tra parallelo e gen.re ind.te ideale di tensione	28
3.4	Bipoli controllabili in tensione o in corrente	28
3.4.1	Bipoli controllabili in tensione	28
3.4.2	Bipoli controllabili in corrente	28
3.4.3	Osservazioni	29
3.5	Connessione serie fra bipoli	29
3.5.1	Esempio: serie fra n resistori	29
3.6	Connessione parallelo fra bipoli	31
3.6.1	Esempio: parallelo fra n conduttanze	31
3.7	Teorema di Millmann	32
3.7.1	Dimostrazione	33
3.7.2	Varianti del Teorema di Millmann	34
3.7.2.1	Variante 1	34
3.7.2.2	Variante 2	34
3.7.2.3	Variante 3	34
4	Reti due Porte	35
4.1	Definizione di n polo	35
4.2	Definizione di porta	36
4.3	Definizione di rete due porte	36
4.4	Relazioni costitutive di una rete due porte	36
4.4.1	Esempio: rete due porte resistiva	36
4.5	Potenza istantanea assorbita da una rete due porte	37
4.6	Rete due porte passiva o attiva	37
4.7	Reti due porte passive	37
4.7.1	Trasformazione ideale	37
4.7.1.1	Effetto di un trasformazione ideale su un resistore	38
4.7.1.2	Effetto di un trasformazione ideale su un condensatore	38
4.7.1.3	Effetto di un trasformazione ideale su un induttore	38
4.7.2	Trasformazione adattatore di resistenza	38
4.7.3	Giratore ideale	40
4.7.3.1	Effetto di un giratore ideale su un condensatore	40
4.8	Reti due porte attive	41
4.8.1	Generatore di tensione controllato in tensione (voltage-controlled voltage-source or VCVS)	41

4.8.2	Generatore di tensione controllato in corrente (current-controlled voltage-source or CCVS)	42
4.8.3	Generatore di corrente controllato in tensione (voltage-controlled current-source or VCCS)	42
4.8.4	Generatore di corrente controllato in corrente (current-controlled current-source or CCCS)	43
4.8.5	Generatori controllati per modellare dispositivi elettronici	43
4.9	Amplificatore operazionale (ao) ideale	45
4.10	Bipolo nullatore e bipolo noratore	46
4.10.1	Rappresentazione di ao con nullore	46
4.11	Amplificatore invertente con ao	46
4.11.1	Soluzione usando il modello con nullore	47
4.12	Amplificatore non invertente con ao	48
5	Principio di Sovrapposizione degli Effetti o detto PSE	50
5.1	Introduzione	50
5.2	Enunciato del PSE	51
5.3	Esempio 1	51
5.4	Nota importante	52
5.5	Esempio 2	53
6	Resistenza equivalente di un Bipolo senza Memoria, Lineare, Omogeneo	55
6.1	Bipolo di soli Resistori	55
6.2	Reti di soli resistori	56
6.2.1	Trasformazione Triangolo-Stella	56
6.2.2	Trasformazione Stella-Triangolo	56
6.2.3	Esempio	57
6.3	Resistenza equivalente di bipoli attivi	57
6.3.1	Esempio: determinare la resistenza equivalente	58
6.3.2	Esempio: determinare la conduttanza equivalente	59
7	Teorema di Thevenin e di Norton	60
7.1	Introduzione	60
7.2	Teorema di Thevenin	60
7.2.1	Esempio 1	61
7.2.2	Esempio 2	62
7.2.3	Dimostrazione del Teorema di Thevenin	63
7.2.4	Osservazione	64
7.3	Teorema di Norton	64
7.3.1	Dimostrazione del Teorema di Norton	65
7.3.2	Esempio	65
7.4	Presenza di generatori controllati e ao	66
7.5	Esempio: equivalente di Thevenin	67
7.5.1	Primo metodo risolutivo	67
7.5.2	Secondo metodo risolutivo	68
7.6	Esempio: equivalente di Norton	68
7.7	Metodo Topologico	69
7.7.1	Trasformazione di generatori ideali di tensione	70
7.7.2	Trasformazione di generatori ideali di corrente	72

8	Elementi di Teoria dei Grafi	74
8.1	Variabili Ausiliarie	74
8.2	Grafo orientato e nodo	74
8.3	Maglia	75
8.4	Taglio	75
8.5	Albero	76
8.5.1	Proprietà	76
8.6	Coalbero	77
8.6.1	Proprietà 1	77
8.6.2	Proprietà 2	77
8.7	Maglia Fondamentale (MF)	77
8.7.1	Tensioni Indipendenti	78
8.8	Taglio Fondamentale (TF)	79
8.8.1	Proprietà	80
8.8.2	Correnti Indipendenti	80
8.9	Correnti cicliche delle maglie di Maxwell	81
8.10	Metodo Totale del Tableau	82
9	Metodi di Analisi di Reti Resistive	83
9.1	Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)	83
9.2	Metodo Modificato di Analisi su Base MF	85
9.3	Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)	86
9.4	Metodo dei Nodi	88
9.5	Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA)	90
9.6	Analisi di reti con generatori controllati	91
9.6.1	Nodi con generatori controllati in corrente	91
9.6.2	Nodi con generatori controllati in tensione	92
9.6.3	Esempio: MF in presenza di generatori controllati	93
10	Teorema di Tellegen e Principio di Conservazione della Potenza	95
10.1	Legame fra Matrici Topologiche	95
10.1.1	Proprietà	96
10.2	Teorema di Tellegen	96
10.2.1	Dimostrazione	97
10.3	Principio di Conservazione della Potenza	97
10.3.1	Osservazione	97
10.3.2	Conseguenze	97
10.3.3	Interpretazione Geometrica	98
10.4	Esempio	98
11	Metodo dei Fasori	99
11.1	Richiami sui numeri complessi	99
11.2	Funzioni sinusoidali	100
11.2.1	Dominio del tempo	100
11.2.2	Dominio dei fasori	101
11.2.2.1	Interpretazione geometrica	101
11.2.2.2	Esempio 1	102
11.2.2.3	Esempio 1	102
11.3	Calcolo Fasoriale	103

11.4	Analisi in regime sinusoidale	104
11.4.1	Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale nel dominio del tempo	105
11.4.1.1	Resistore ideale	105
11.4.1.2	Induttore ideale	106
11.4.1.3	Esperimento 1	106
11.4.1.4	Esperimento 2	106
11.4.1.5	Condensatore ideale	107
11.4.1.6	Esperimento 1	107
11.4.1.7	Esperimento 2	107
11.5	Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale	108
11.5.1	Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori	108
11.5.2	Resistore ideale	109
11.5.3	Induttore ideale	110
11.5.3.1	Interpretazione geometrica	110
11.5.4	Condensatore ideale	111
11.5.4.1	Interpretazione geometrica	111
11.6	Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori	112
11.6.1	Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori	113
11.6.2	Diagramma fasoriale	114
11.6.2.1	Interpretazione fisica	115
11.6.3	Risposta in frequenza	115
11.6.4	Circuito RC serie	116
11.6.5	Impedenza e ammettenza di un bipolo	117
11.6.6	Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale	118
11.6.7	Esempio: circuito RL	119
11.6.8	Esempio: circuito RC	120
11.6.9	Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo	120
11.6.10	Circuiti risonanti RLC	120
11.6.10.1	Esempio 1	123
11.6.10.2	Esempio 2	124
12	Potenza in regime sinusoidale	126
12.1	Valore efficace di una grandezza sinusoidale	126
12.2	Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C	126
12.2.1	Resistore ideale	126
12.2.2	Induttore ideale	127
12.2.3	Condensatore ideale	129
12.3	Potenza in regime sinusoidale per bipolo generico	130
12.3.1	Potenza attiva e reattiva di un bipolo generico	131
12.3.2	Conclusione	133
12.4	Potenza apparente	133
12.5	Potenza istantanea	134
12.5.1	Esempio	134
12.6	Potenza attiva e reattiva	135
12.7	Potenza Complessa	136
12.7.1	Esempio	136
12.7.2	Potenza complessa degli elementi fondamentali	137

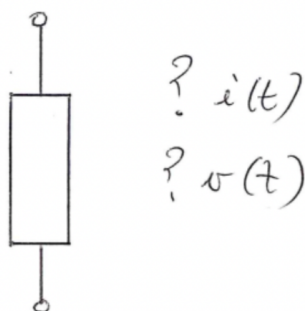
12.7.2.1	Resistore ideale	137
12.7.2.2	Induttore ideale	138
12.7.2.3	Condensatore ideale	138
12.7.2.4	Osservazione	138
12.7.2.5	Trasformatore ideale	138
12.7.2.6	Giratore ideale	139
12.8	Teorema di Boucherot	140
12.8.1	Esempio	140
12.8.2	Altre convenzioni	142
12.8.3	Esempio 1	142
12.8.4	Esempio 2	144

Capitolo 1

Circuiti a Costanti Concentrate

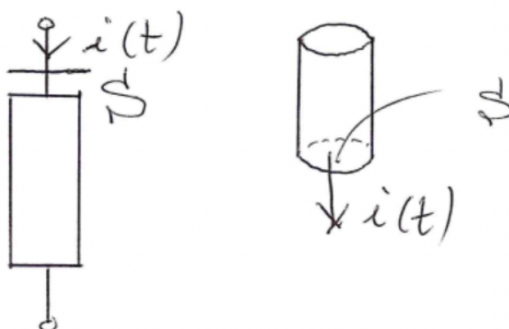
1.1 Interconnessione di bipoli

Consideriamo inizialmente circuiti e reti elettriche ottenute interconnettendo bipoli cioè elementi elettrici a due morsetti (poli o terminali). Ad esempio R rappresenta un resistore, L rappresenta un induttore e C rappresenta un condensatore. I morsetti da collegare sono indicati con due pallini aperti invece quando si collega un bipolo ad un altro elemento si indica con il pallino chiuso per far riferimento alla saldatura.



1.2 Grandezze elettriche su un bipolo

Le grandezze elettriche che ci interessano sono la tensione ai morsetti, la corrente che fluisce nel bipolo, la potenza elettrica e l'energia elettrica assorbita dal bipolo. Scegliamo ad arbitrio un verso di riferimento per la corrente indicandolo con una freccia ed inoltre consideriamo una sezione S su uno dei conduttori riportando la freccia.



1.3 Intensità di corrente

L'intensità di corrente all'istante t è data da

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}$$

dove $\Delta q(t)$ è la carica che attraversa S in Δt concordemente con il verso di riferimento indicato. Si ha che $i(t)$ è una grandezza scalare e algebrica (con segno).

1.3.1 Osservazione

Se la corrente è dovuta al moto di cariche positive (ioni) e il segno di $i(t)$ è positivo, posso ottenere ad esempio

$$i(t = 1 \text{ sec}) = +3 \text{ A (Ampere)}$$

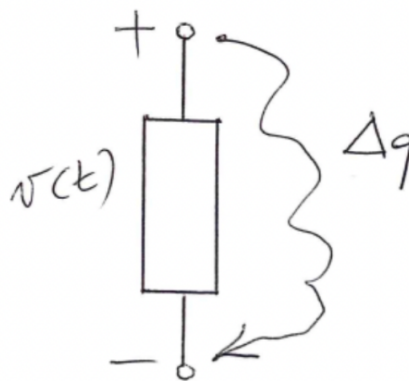
quindi il verso del moto delle cariche (verso vero della corrente) è concorde con la freccia. Se il segno di $i(t)$ è negativo, posso ottenere ad esempio

$$i(t = 2 \text{ sec}) = -4 \text{ A (Ampere)}$$

quindi il verso del moto delle cariche (verso vero della corrente) è discorde con la freccia. Segue che il verso di riferimento di $i(t)$ è fissato ad arbitrio, segue che il verso di riferimento di $i(t)$ e il segno di $i(t)$ permettono di determinare il verso effettivo di moto delle cariche detto il verso vero della corrente $i(t)$.

1.4 Tensione o differenza di potenziale

Scegliamo un verso di riferimento per la tensione, indicando con $+$ uno dei morsetti e con $-$ l'altro. Inoltre scegliamo un percorso che collega $+$ a $-$ e lo orientiamo da $+$ verso $-$. Sia Δq una carica elettrica infinitesima che si muove lungo il percorso orientato.



La tensione all'istante t è data da

$$v(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

dove ΔL è il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo il percorso orientato. Si ha che $v(t)$ è una grandezza scalare e algebrica (con segno).

1.4.1 Osservazione

Se il segno di $v(t)$ è positivo, posso ottenere ad esempio

$$v(t = 1 \text{ sec}) = +4 \text{ V (Volt)}$$

quindi il morsetto segnato con $+$ si trova a potenziale più alto rispetto a quello con $-$.

Se il segno di $v(t)$ è negativo, posso ottenere ad esempio

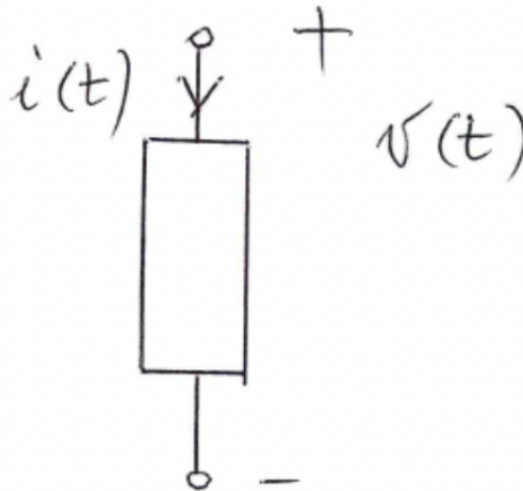
$$v(t = 2 \text{ sec}) = -5 \text{ V (Volt)}$$

quindi il morsetto segnato con $-$ si trova a potenziale più alto rispetto a quello con $+$. Segue che il verso di riferimento di $v(t)$ è fissato ad arbitrio, segue che il verso di riferimento di $v(t)$ e il segno di $v(t)$ permettono di determinare quale dei due morsetti si trova a potenziale più alto all'istante t cioè il verso vero della tensione.

1.5 Versi coordinati per tensione e corrente

1.5.1 Convenzione degli utilizzatori

Fissato il verso di riferimento di $v(t)$ si ha che il verso di riferimento di $i(t)$ è tale che $i(t)$ entra dal morsetto $+$ ed esce dal morsetto $-$.



- La potenza elettrica assorbita dal bipolo t è

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ W (Watt)}$$

- L'energia elettrica assorbita dal bipolo in dt è

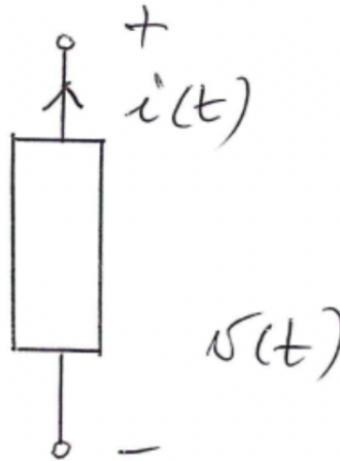
$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ J (Joule)}$$

- L'energia elettrica assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} dw(t) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ J (Joule)}$$

1.5.2 Convenzione dei generatori

Fissato il verso di riferimento di $v(t)$ si ha che il verso di riferimento di $i(t)$ è tale che $i(t)$ entra dal morsetto $-$ ed esce dal morsetto $+$.



- La potenza elettrica erogata dal bipolo t è

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ W (Watt)}$$

- L'energia elettrica elettrica dal bipolo in dt è

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ J (Joule)}$$

- L'energia elettrica elettrica dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} dw(t) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ J (Joule)}$$

1.6 Relazione costitutiva di un bipolo

La relazione costitutiva di un bipolo è un legame che il bipolo stabilisce fra la tensione e la corrente, è una legge che caratterizza completamente il comportamento elettrico del bipolo all'interno di un circuito. Per parlare di relazione costitutiva bisogna prima stabilire un riferimento elettrico per il bipolo, scegliendo un verso di riferimento per corrente e tensione, e poi scegliere la convenzione degli utilizzatori o dei generatori. Consideriamo per esempio un resistore che ha come relazione costitutiva

$$v(t) = Ri(t)$$

se usiamo la convenzione degli utilizzatori (legge di Ohm) mentre si ha

$$v(t) = -Ri(t)$$

se si usa la convenzione dei generatori.

1.7 Bipoli passivi o attivi

Consideriamo la convenzione degli utilizzatori. Un bipolo si dice passivo se

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' \geq 0$$

per ogni t e per ogni possibile esperimento (andamento tensione e corrente) che facciamo con il bipolo. Precisiamo che con $-\infty$ si indica l'istante in cui viene fabbricato il bipolo. Intuitivamente, l'energia complessivamente erogata dal bipolo al circuito a cui è collegato non può mai superare quella precedentemente assorbita. Ad esempio, per un condensatore C ci sono in generale intervalli di tempo in cui l'energia è assorbita (C si carica) ed altri in cui l'energia è invece erogata (C si scarica fornendo indietro energia al circuito). Se non vale la relazione precedente allora il bipolo si dice attivo. Un bipolo attivo ha al suo interno una sorgente di energia (ad esempio una pila o un alimentatore).

1.8 Resistore ideale

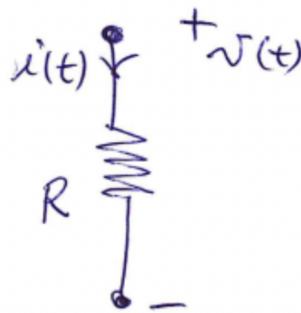
Consideriamo la convenzione degli utilizzatori. La relazione costitutiva (legge di Ohm) è

$$v(t) = Ri(t)$$

con R resistenza in Ω (Ohm). Oppure

$$i(t) = Gv(t)$$

con G conduttanza in Ω^{-1} .



- La potenza elettrica assorbita dal bipolo t è

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = Gv^2(t) \text{ W (Watt)}$$

- L'energia elettrica assorbita dal bipolo in dt è

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt \text{ J (Joule)}$$

- Passività

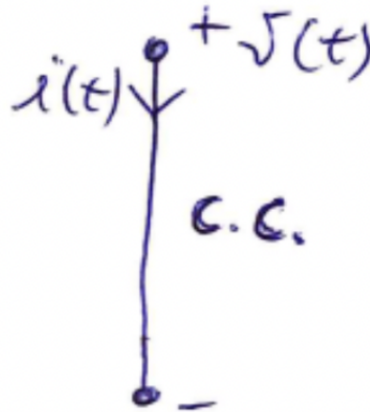
$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' = \int_{-\infty}^t Ri^2(t') dt' = \int_{-\infty}^t Gv^2(t') dt' \geq 0$$

Un resistore ideale è passivo se e solo se $R \geq 0$ oppure $G \geq 0$.

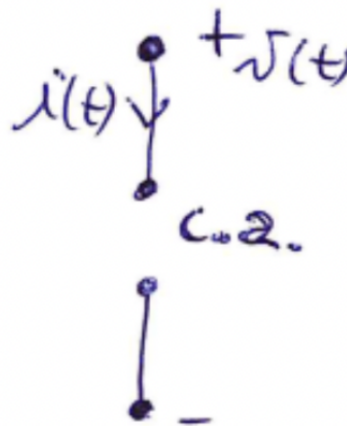
1.8.1 Corto circuito e circuito aperto

Un resistore ideale è un elemento adinamico cioè senza memoria perché si ha un legame istantaneo fra $v(t)$ e $i(t)$. Alcuni casi particolari sono

- corto circuito (c.c.): $R = 0 \Omega$ (Ohm), la relazione costitutiva è $v(t) = 0 \quad \forall i(t)$



- circuito aperto (c.a.): $G = 0 \Omega$ (Ohm), la relazione costitutiva è $i(t) = 0 \quad \forall v(t)$



1.8.2 Interruttore ideale

Un interruttore ideale è un corto circuito negli intervalli di tempo in cui è chiuso e un circuito aperto in quelli in cui è aperto. Inoltre si ha che un corto circuito, un circuito aperto e un interruttore ideale sono elementi inerti cioè

$$p(t) = 0 \quad \forall t$$

quindi essi non partecipano agli scambi energetici.

1.8.3 Energetica di un resistore passivo

Sia $R > 0$. L'energia elettrica assorbita da R in dt coincide con l'energia dissipata da R sotto forma di calore per effetto Joule. Si ha

$$dw = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt = dQ \geq 0$$

dove dQ è il calore sviluppato. Un resistore passivo è un puro dissipatore, esso trasforma tutta l'energia elettrica assorbita dw istantaneamente e integralmente in calore dQ (o in altre forme di energia non elettrica). Tale trasformazione è irreversibile, R non è capace di effettuare la trasformazione inversa e dQ è l'energia che esce definitivamente dal circuito.

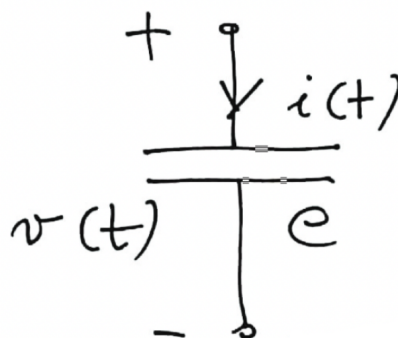
1.9 Condensatore ideale

Consideriamo la convenzione degli utilizzatori. La relazione costitutiva è

$$q(t) = Cv(t)$$

dove

- $q(t)$ è la carica sulle armature all'istante t
- C è la capacità in Farad del condensatore



- La relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale) è

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

dove $q(t)$ è detta variabile di stato di C .

- La relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale) è

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t')dt'$$

dove $v(0)$ è detta stato iniziale e $v(t)$ è detta variabile di stato di C .

Il condensatore ideale C è un elemento con memoria, per conoscere $v(t)$ devo conoscere $v(0)$ cioè la tensione iniziale su C e anche tutto l'andamento di $i(t)$ fra 0 e t .

1.9.1 Energetica del condensatore ideale

La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

dove

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ J (Joule)}$$

è l'energia assorbita al campo elettrico di C . Quindi la potenza istantanea è la derivata rispetto al tempo dell'energia del campo elettrico di C cioè

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

In termini differenziali, l'energia elettrica dw assorbita da C in dt coincide con la variazione di energia del campo elettrico di C in dt infatti

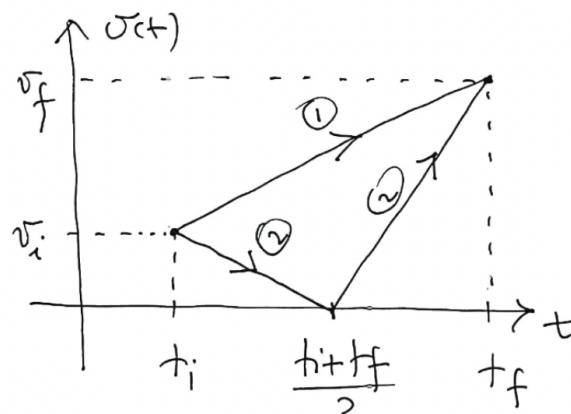
$$dw(t) = p(t)dt = dE_C(t) = d \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

1.9.2 Osservazioni

Il condensatore ideale è un elemento conservativo (accumulatore perfetto), immagazzina sotto forma di energia del campo elettrico tutta l'energia elettrica assorbita. La trasformazione da energia elettrica a energia del campo elettrico è completamente reversibile cioè C è capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo elettrico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di C), in particolare il condensatore ideale C è capace di fornire indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita. Il condensatore ideale infatti non dissipa durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore, l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito. In termini matematici, significa che dw è un differenziale esatto (differenziale di una funzione dello stato v) ed è analogo al lavoro compiuto dal campo elettrostatico (campo conservativo) in fisica infatti

$$dw = dE_C = d \left(\frac{1}{2} C v^2 \right)$$

Per esempio, calcolare l'energia elettrica assorbita dal condensatore ideale nell'intervallo $[t_i, t_f]$ per i due diversi andamenti di $v(t)$ in figura.



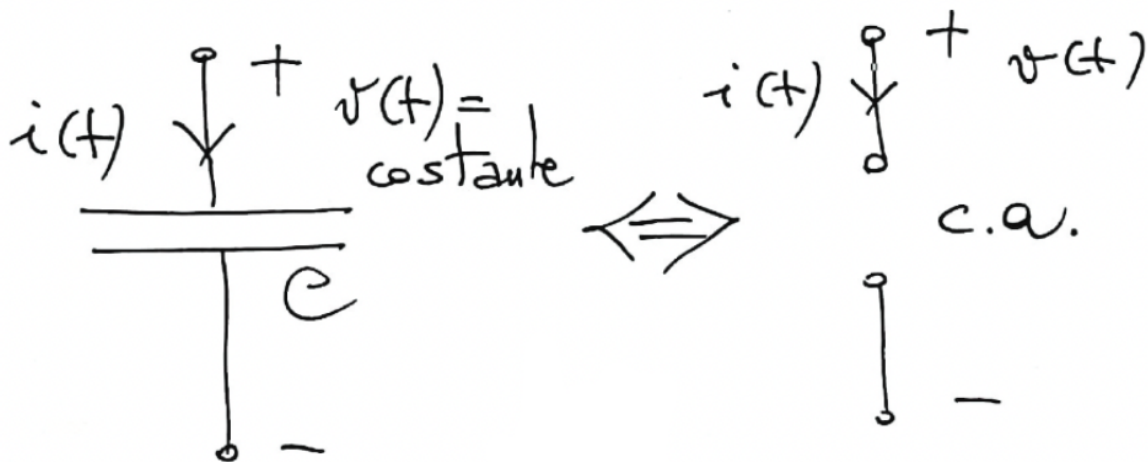
Si ha

$$w_{[t_i, t_f]} = \int_{t_i}^{t_f} p(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} v(t) i(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dw = \\ = \int_{t_i}^{t_f} dE_C = E_C(t_f) - E_C(t_i) = \frac{1}{2} C v_f^2 - \frac{1}{2} C v_i^2 \text{ J (Joule)}$$

Notare che l'energia elettrica assorbita dal condensatore ideale C dipende soltanto dallo stato iniziale v_i e dallo stato finale v_f ma non dall'andamento di $v(t)$ fra t_i e t_f .

1.9.3 Condensatore ideale in regime stazionario

Se $v(t)$ è costante e $i(t) = 0$ allora in regime stazionario il condensatore ideale C equivale a un circuito aperto (stessa relazione costitutiva).

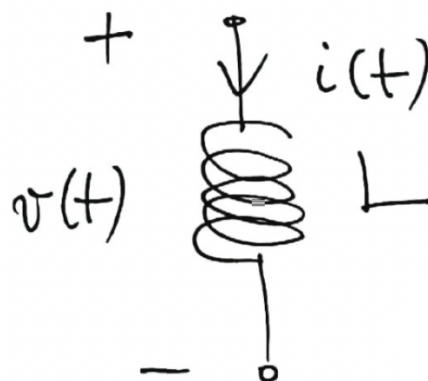


1.10 Induttore ideale

Consideriamo la convenzione degli utilizzatori. La relazione costitutiva è

$$\varphi(t) = L i(t)$$

con $\varphi(t)$ flusso del campo di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento all'istante t e L induttanza in Henry dell'induttore.



- La relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale) è

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

dove $\varphi(t)$ è detta variabile di stato di L .

- La relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale) è

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

dove $i(0)$ è detta stato iniziale e $i(t)$ è detta variabile di stato di L .

L'induttore ideale L è un elemento con memoria, per conoscere $i(t)$ devo conoscere $i(0)$ cioè la corrente iniziale su L e anche tutto l'andamento di $v(t)$ fra 0 e t .

1.10.1 Energetica dell'induttore ideale

La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)L \frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_L(t)$$

dove

$$E_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \text{ J (Joule)}$$

è l'energia assorbita al campo magnetico di L . Quindi la potenza istantanea è la derivata rispetto al tempo dell'energia del campo magnetico di L cioè

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_L(t)$$

In termini differenziali, l'energia elettrica dw assorbita da L in dt coincide con la variazione di energia del campo magnetico di L in dt infatti

$$dw(t) = p(t)dt = dE_L(t) = d \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

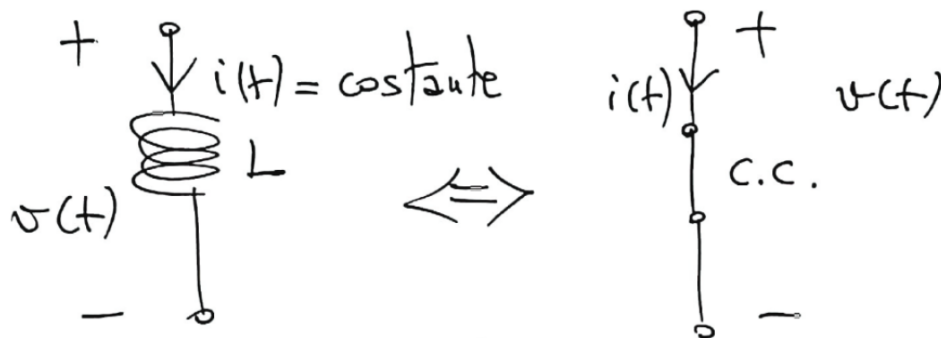
1.10.2 Osservazioni

L'induttore ideale è un elemento conservativo (accumulatore perfetto), immagazzina sotto forma di energia del campo magnetico tutta l'energia elettrica assorbita. La trasformazione da energia elettrica a energia del campo magnetico è completamente reversibile cioè L è capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo elettrico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di L), in particolare l'induttore ideale L è capace di fornire indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita. L'induttore ideale L non dissipa infatti durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore, l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito. In termini matematici, significa che dw è un differenziale esatto (differenziale di una funzione dello stato i) infatti

$$dw = dE_L = d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

1.10.3 Induttore ideale in regime stazionario

Se $i(t)$ è costante e $v(t) = 0$ allora il regime stazionario l'induttore ideale L equivale a un corto circuito (stessa relazione costitutiva).

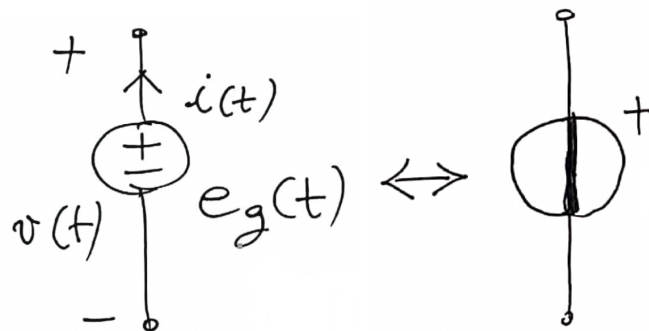


1.11 Generatore indipendente ideale di tensione

La relazione costitutiva di un generatore indipendente ideale di tensione è

$$v(t) = e_g(t)$$

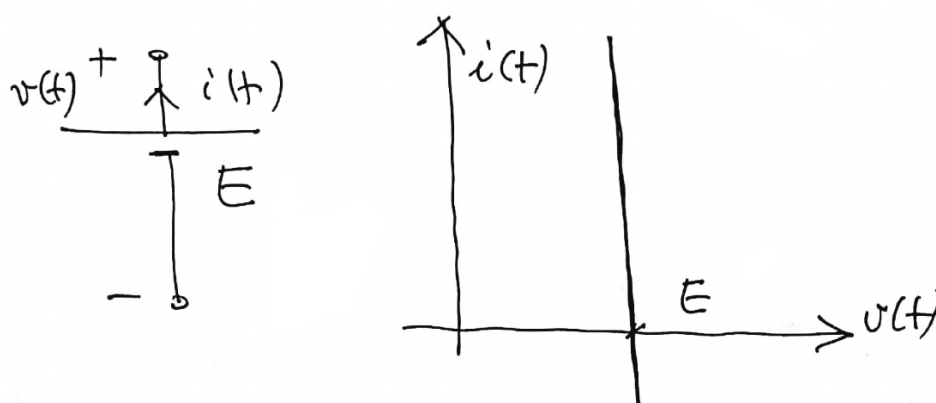
cioè la tensione impressa ai morsetti è una nota funzione del tempo $e_g(t)$.



Consideriamo, per esempio

- una batteria

$$e_g(t) = E = \text{costante}$$

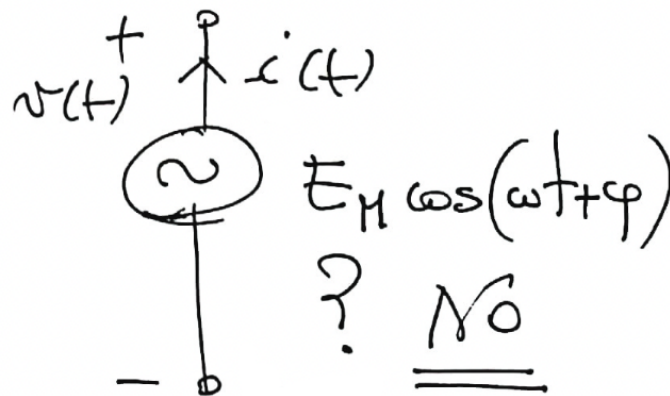


La caratteristica tensione corrente di una batteria $v(t) = E$ è una retta verticale, si ha che E è positiva se la batteria eroga corrente o negativa se assorbe corrente.

- un generatore di tensione sinusoidale o alternatore

$$e_g(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Nel caso dell'alternatore dobbiamo indicare uno dei morsetti del generatore con il $+$ e l'altro con il $-$ altrimenti siamo in una situazione ambigua. La rappresentazione nella figura che segue è ambigua e pertanto non va usata.



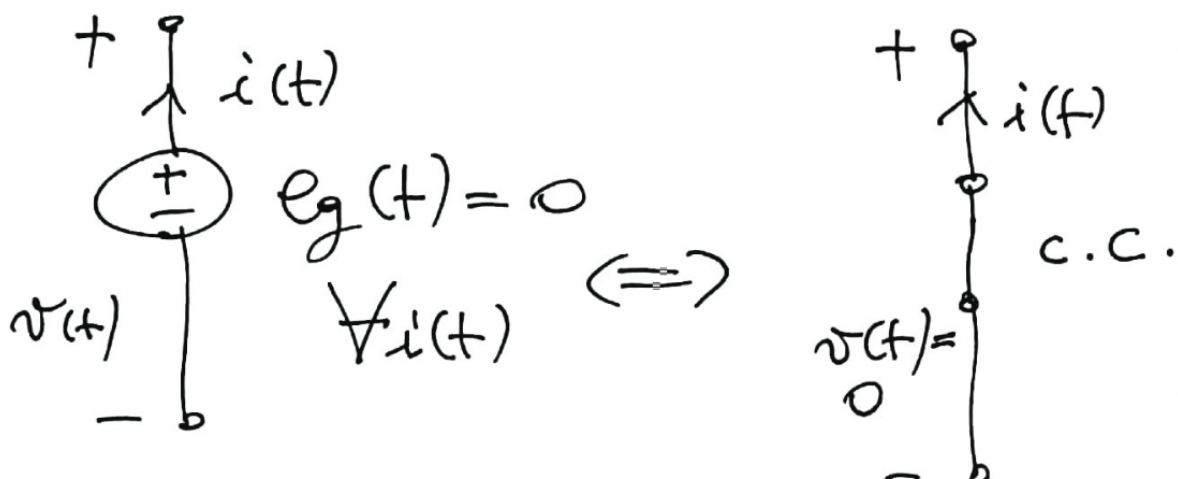
Per un generatore indipendente ideale di tensione è nota a priori la tensione $v(t)$ impressa ai morsetti mentre non è nota la corrente $i(t)$ erogata, la corrente $i(t)$ può assumere qualunque valore (è una grandezza non vincolata). Possiamo determinare la corrente solo quando il generatore è inserito all'interno di un circuito.

1.11.1 Disattivare un generatore ind.te ideale di tensione

Disattivare un generatore indipendente ideale di tensione significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$v(t) = e_g(t) = 0 \quad \forall i(t)$$

Segue che il generatore indipendente ideale di tensione equivale a un corto circuito.



1.11.2 Energetica di un generatore ind.te ideale di tensione

Un generatore indipendente ideale di tensione è l'interfaccia per eccellenza fra circuito (mondo elettrico) e mondo esterno, esso scambia energia elettrica in modo illimitato e completamente reversibile operando la conversione fra energia elettrica e altre forme di energia non elettriche (ad esempio energia chimica). Considerando la convenzione dei generatori, per una batteria di un'automobile (sistema elettrochimico) si ha

$$dw = dE_{chimica}$$

cioè energia elettrica scambiata con il circuito (dw) coincide con l'energia scambiata in modo reversibile con un sistema chimico ($dE_{chimica}$).

Il segno può essere positivo e negativo perché le batterie idealmente possono erogare o assorbire energia elettrica. Ad esempio, se si genera energia di legame chimico

$$dE_{chimica} > 0$$

allora una pari quantità di energia elettrica viene data al circuito quindi

$$dw = dE_{chimica} > 0$$

Se la batteria assorbe energia elettrica allora viene accumulata nella batteria una pari quantità di energia sotto forma di legami chimici

$$dw = dE_{chimica} < 0$$

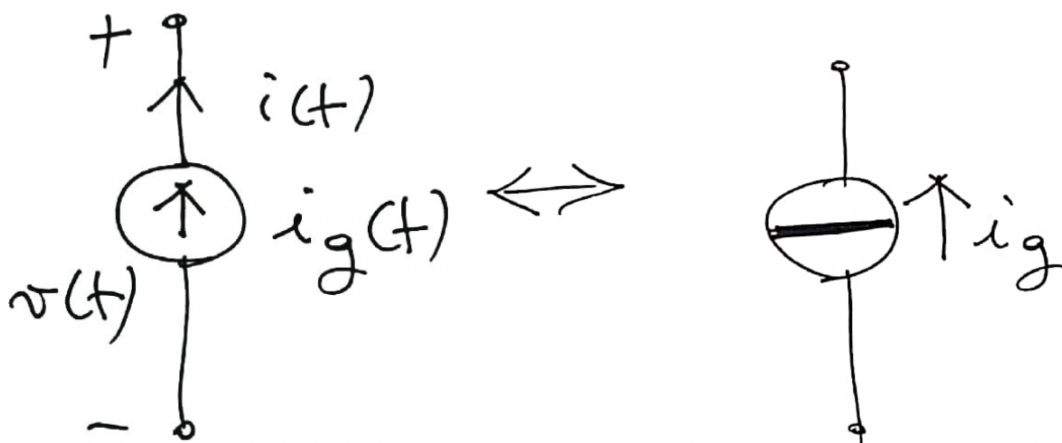
Inoltre durante tali processi di carica e scarica della batteria non vi è dissipazione.

1.12 Generatore indipendente ideale di corrente

La relazione costitutiva di un generatore indipendente ideale di corrente è

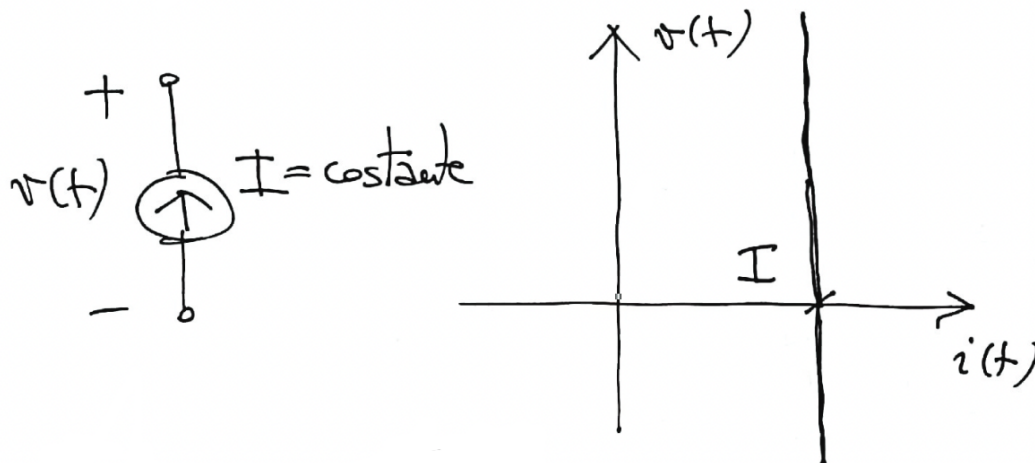
$$i(t) = i_g(t)$$

cioè la corrente impressa ai morsetti è una nota funzione del tempo $i_g(t)$.



Consideriamo, per esempio

- $i_g(t) = I = \text{costante}$



- un generatore di corrente sinusoidale

$$i_g(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

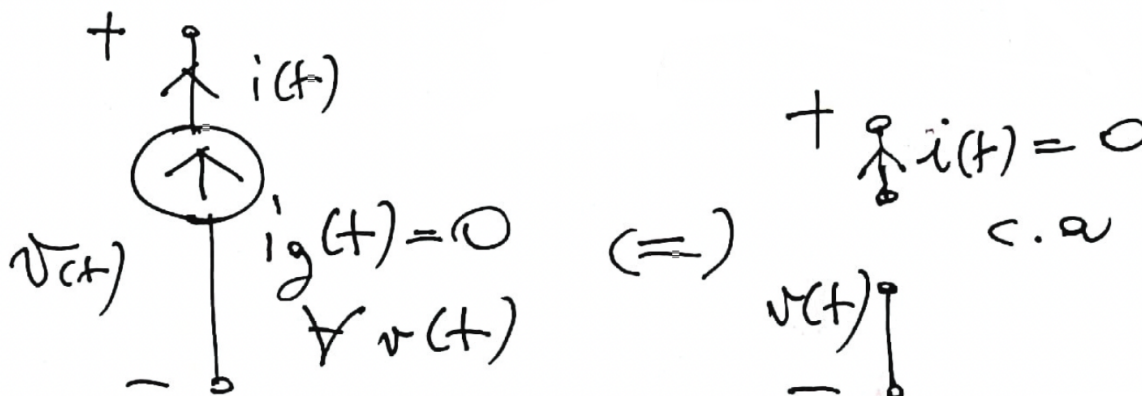
Per un generatore indipendente ideale di corrente è nota a priori la corrente $i(t)$ impressa ai morsetti mentre non è nota la tensione $v(t)$ ai morsetti, la tensione $v(t)$ può assumere qualunque valore (è una grandezza non vincolata). Possiamo determinare la tensione solo quando il generatore è inserito all'interno di un circuito.

1.12.1 Disattivare un generatore ind.te ideale di corrente

Disattivare un generatore indipendente ideale di corrente significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$i(t) = i_g(t) = 0 \quad \forall v(t)$$

Segue che il generatore indipendente ideale di corrente equivale a un circuito aperto



Capitolo 2

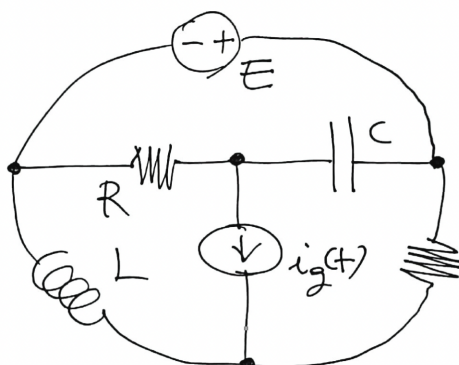
Leggi di Kirchhoff

2.1 Introduzione

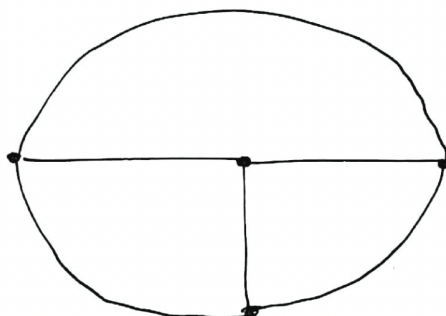
Per scrivere le leggi di Kirchhoff di un circuito bisogna preliminarmente stabilire un riferimento elettrico sul circuito, ciò si effettua assegnando un verso di riferimento (ad arbitrio) per ciascuna tensione e corrente degli elementi del circuito.

2.2 Grafo orientato associato a un circuito

Consideriamo un circuito con 6 bipoli e supponiamo che il circuito sia connesso.

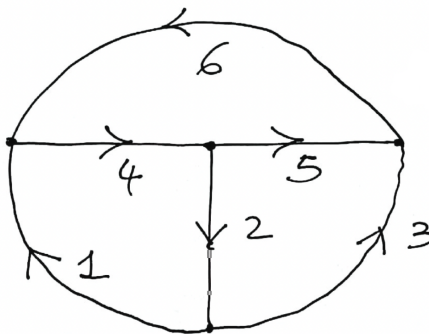


- Grafo: a ciascun bipolo facciamo corrispondere astrattamente un lato del grafo. In generale l è il numero di lati del grafo (numero di bipoli), in questo caso $l = 6$.

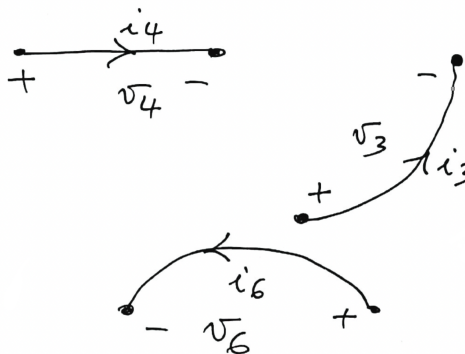


- Nodo: esso è un punto del grafo dove sono connessi due o più bipoli. In generale n è il numero di nodi, in questo caso $n = 4$.

- Grafo orientato: dobbiamo scegliere una numerazione per i lati del grafo e assegnare ad arbitrio un verso di riferimento per la corrente di ciascun lato indicando tale verso con una freccia, come indicato in figura.

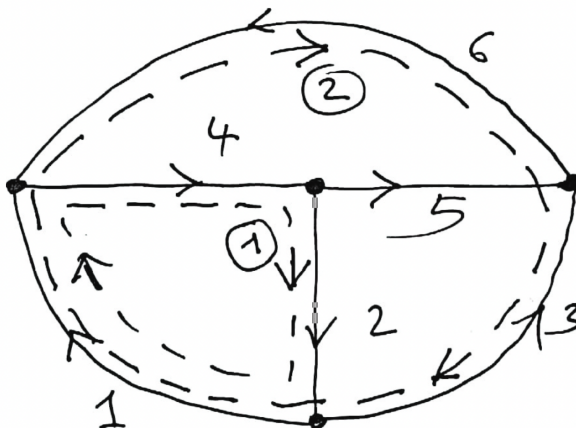


- Verso di riferimento della corrente e della tensione: supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ciascun bipolo. Segue che, fissato il verso di riferimento della corrente, resta automaticamente fissato il verso di riferimento della tensione di ciascun bipolo come riportato in figura.



Il grafo orientato tiene conto di quanti bipoli ci sono e come sono interconnessi fra di loro cioè la topologia del circuito ma astrae dal tipo di elementi presenti.

- Maglia: scegliamo una maglia sul grafo cioè un percorso chiuso formato da lati del grafo e orientiamo la maglia in senso orario o antiorario.



2.3 Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)

La legge di Kirchhoff per le tensioni (KV) enuncia che è nulla, istante per istante, la somma algebrica delle tensioni dei lati che si incontrano percorrendo la maglia (algebrica significa che la tensione ha un segno). Ogni tensione si prende con il segno $+$ se concorde con il verso di percorrenza della maglia, con il segno $-$ altrimenti.

- Per la maglia 1 si ha

$$v_2 + v_1 + v_4 = 0$$

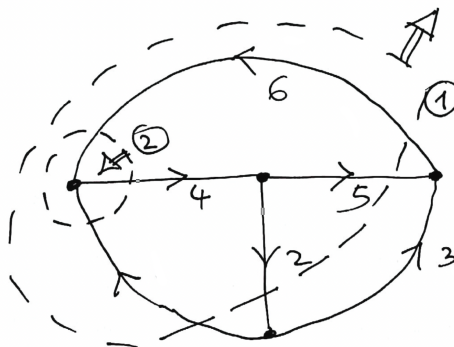
- Per la maglia 2 si ha:

$$-v_6 - v_3 + v_1 = 0$$

Ogni KV implica un vincolo di dipendenza fra le tensioni dei lati della maglia quindi $v_1(t), \dots, v_l(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro. Il problema è determinare quante KV indipendenti possiamo scrivere, di conseguenza anche determinare quante tensioni indipendenti ci sono per un grafo orientato. Vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KV indipendenti sono in generale pari a $l - n + 1$ quindi le tensioni indipendenti dei lati del grafo sono $l - (l - n + 1) = n - 1$.

2.4 Superficie Gaussiana

Una superficie Gaussiana è una linea chiusa che taglia i lati del grafo senza passare dai nodi. Consideriamo ancora il grafo orientato precedente, scegliamo una linea Gaussiana e orientiamo la linea scegliendo una normale positiva rivolta verso l'esterno o verso l'interno.



2.5 Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)

La legge di Kirchhoff per le correnti (KI) enuncia che è nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che intersecano la linea Gaussiana (algebrica significa che la corrente ha un segno). Ogni corrente si prende con il segno $+$ se concorde con la normale alla linea Gaussiana, con il segno $-$ altrimenti.

- Per la linea 1 si ha

$$i_5 - i_6 - i_1 + i_2 = 0$$

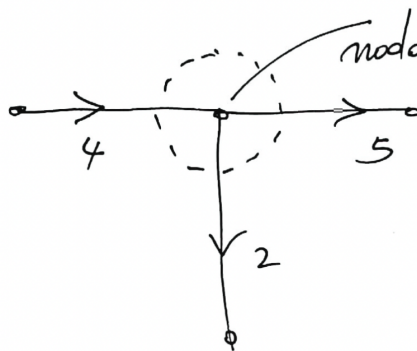
- Per la linea 2 si ha

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

Ogni KI implica un vincolo di dipendenza fra le correnti dei lati intersecati da una linea Gaussiana quindi $i_1(t), \dots, i_l(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro. Il problema è determinare quante KI indipendenti possiamo scrivere, di conseguenza anche determinare quante correnti indipendenti ci sono per un grafo orientato. Vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KI indipendenti sono in generale pari a $n - 1$ quindi le correnti indipendenti dei lati del grafo sono $l - (n - 1) = l - n + 1$.

2.5.1 Seconda versione della KI dalla fisica

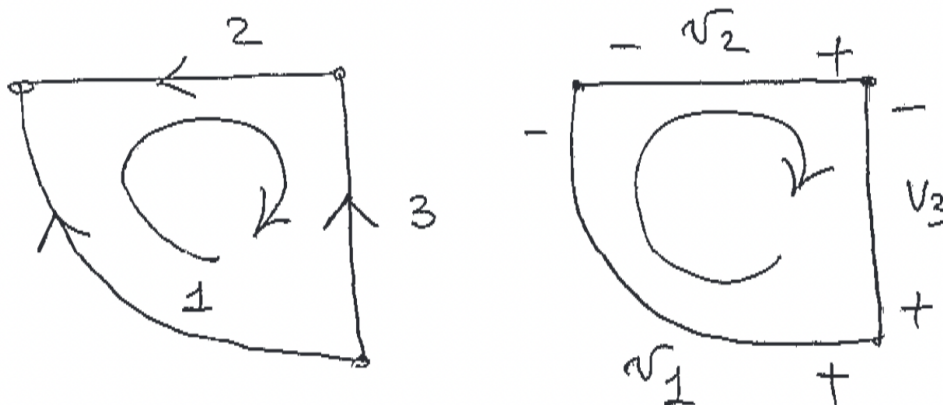
La seconda versione della KI enuncia che è nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono in un nodo. Ogni corrente si prende con il segno $+$ se esce dal nodo e con il segno $-$ altrimenti.



Si ha

$$-i_4 + i_2 + i_5 = 0$$

2.6 Note sulla legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)

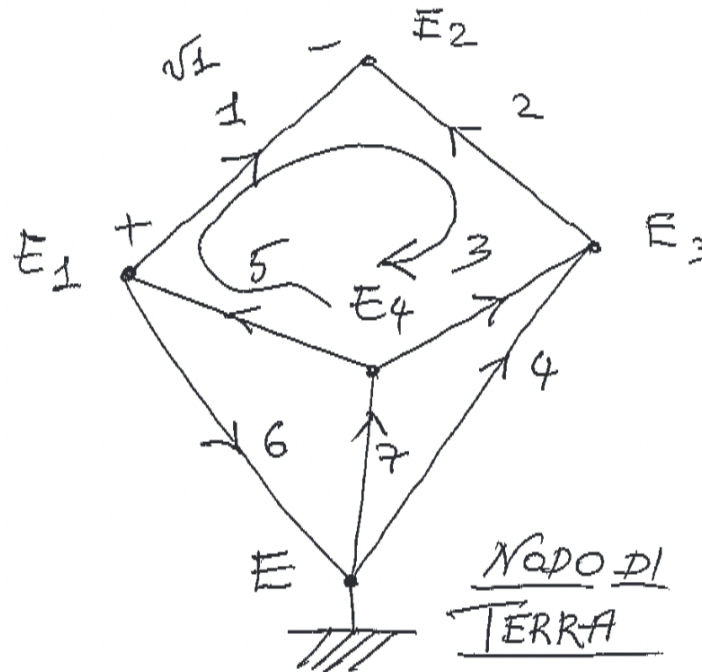


Per scrivere la KV a una maglia possiamo usare la regola nota (figura a sinistra) oppure possiamo sommare algebricamente le cadute di tensione che si incontrano percorrendo una maglia (figura di destra). Nel secondo caso, attribuiamo il segno $+$ alla tensione del bipolo k -esimo se incontro prima il $+$ della tensione v_K e il segno $-$ altrimenti. In ogni caso otteniamo

$$v_1 - v_2 - v_3 = 0$$

Consideriamo un grafo orientato e utilizziamo per ciascun lato la convenzione degli utilizzatori. Segue che lungo la maglia $\{1, 2, 3, 5\}$ si ha dalla KV che

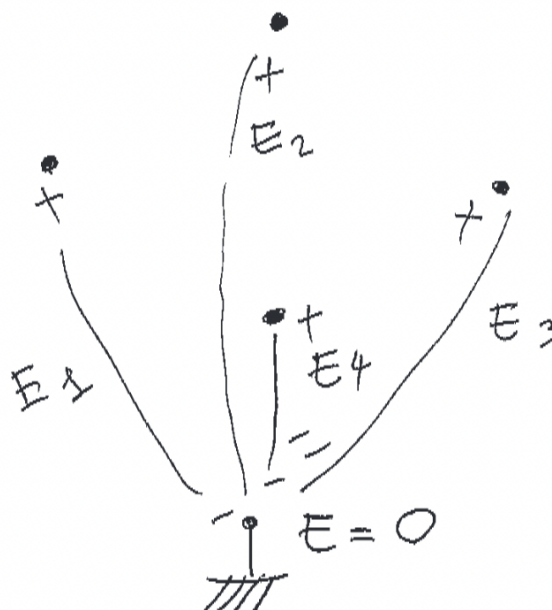
$$v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) + v_5(t) = 0 \quad \forall t$$



Ricordiamo che

$$v_1(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L_1}{\Delta q}$$

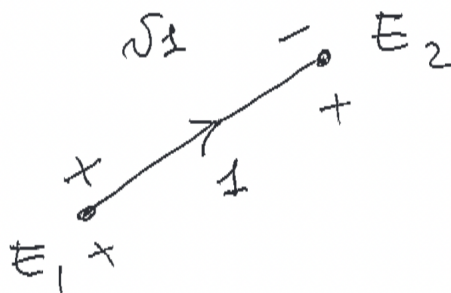
dove ΔL_1 è il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo un percorso che collega il segno $+$ al segno $-$ del bipolo 1. Analogamente per gli altri bipoli, si ha



Dalla KV segue che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico lungo una maglia del grafo è nullo, abbiamo a che fare quindi con un campo elettrico conservativo. Ne consegue che il lavoro è indipendente dal percorso lungo il grafo che facciamo passando da un nodo ad un altro, perciò ha senso parlare di tensione fra due nodi e anche di tensione (potenziale) di un nodo rispetto ad un nodo di terra a cui si attribuisce potenziale nullo. Ad esempio, il potenziale del nodo 1 rispetto a terra è dato da

$$E_1 = v_6 = -v_5 - v_7 = v_1 - v_2 - v_4 = \dots$$

e con ciò esprimiamo il potenziale di un nodo in funzione della tensione sui bipoli che si incontrano lungo un percorso qualsiasi che collega il nodo a terra. Noto il potenziale dei nodi E_1, E_2, E_3, E_4 segue che la tensione di un bipolo si esprime facilmente come differenza fra i potenziali dei nodi a cui è collegato. Ad esempio



Segue che

$$v_1 = E_1 - E_2$$

perché è la tensione del nodo che corrisponde al + di v_1 rispetto a terra cioè E_1 meno la tensione del nodo che corrisponde al - di v_1 rispetto a terra cioè E_2 . Segue che

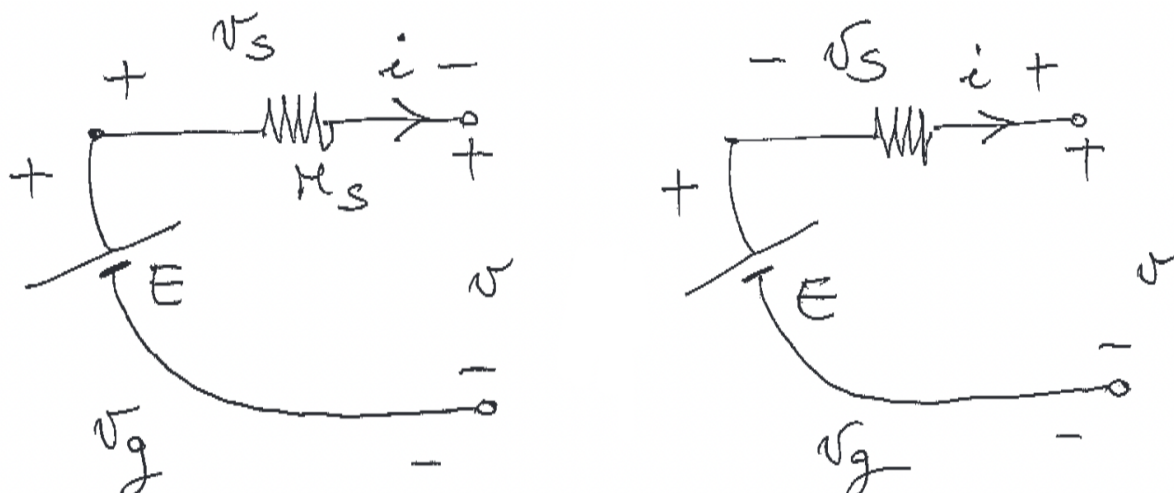
- $v_2 = E_3 - E_2$
- $v_3 = E_4 - E_3$
- $v_4 = 0 - E_3 = -E_3$
- $v_5 = E_4 - E_1$
- $v_6 = E_1$
- $v_7 = 0 - E_4 = -E_4$

Capitolo 3

Bipoli Notevoli e Teorema di Millmann

3.1 Generatore indipendente reale di tensione

Il generatore indipendente reale di tensione si modella con un generatore indipendente ideale di tensione in serie a una resistenza $r_s > 0$ detta resistenza interna.



Consideriamo la convenzione dei generatori, per una batteria (generatore indipendente ideale di tensione) si ha che la relazione costitutiva è

$$v = E - r_s i$$

Scrivendo la KV alla maglia, nel primo caso a sinistra, si ottiene

$$v - v_g + v_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_g = E \\ v_s = r_s i \end{cases}$$

Il risultato non dipende dalla scelta (peraltro arbitraria) dei versi, nel secondo caso a destra, si ottiene

$$\begin{cases} v - v_g - v_s = 0 \\ v_g = E \end{cases}$$

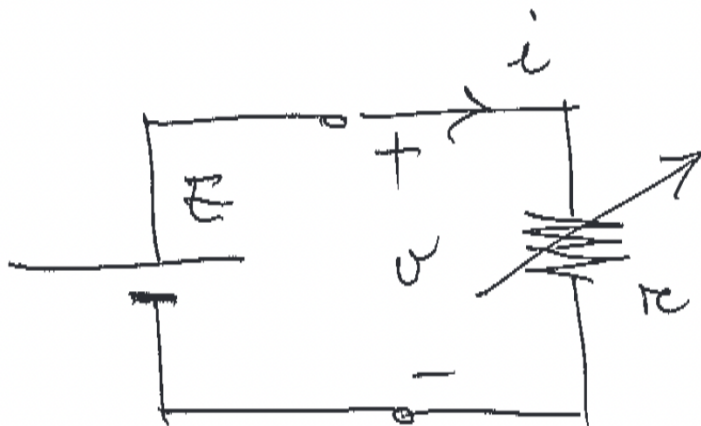
ma

$$v_s = -r_s i$$

3.1.1 Confronto tra generatore ind.te ideale e reale di tensione

- Generatore indipendente ideale di tensione (es. batteria), la relazione costitutiva è

$$v(t) = E \quad \forall i(t)$$

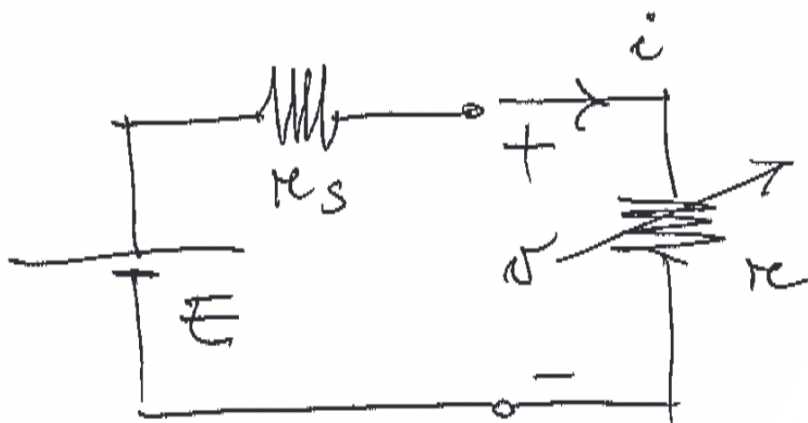


Il comportamento al variare del carico $r > 0$: $i = E/r$ non è limitata, la potenza fornita al carico $p = E^2/r$ non è limitata (tendono a ∞ per $r \rightarrow 0$).

- Generatore indipendente reale di tensione, la relazione costitutiva è

$$\begin{cases} v = E - r_s i \\ v = r i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{r + r_s}$$

che è limitata da E/r_s cioè corrente quando $r = 0$ o corrente di corto circuito.



La potenza assorbita da r vale

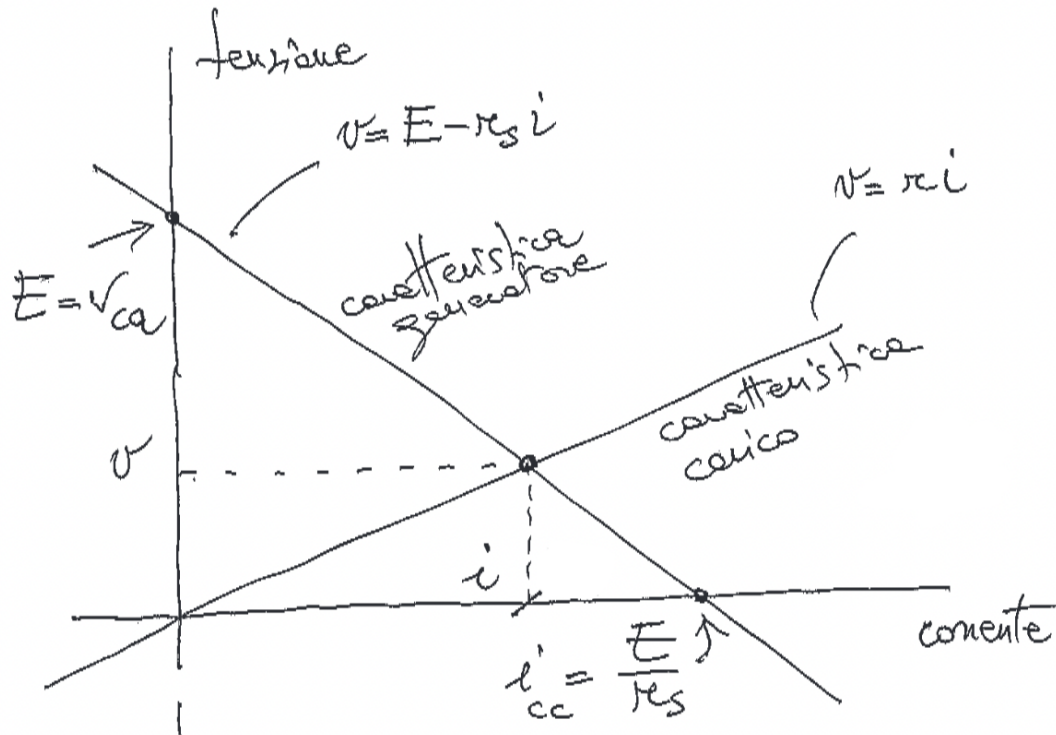
$$p = r i^2 = \frac{r E^2}{(r + r_s)^2}$$

Segue che p ha un massimo per $r = r_s > 0$ e la potenza massima vale

$$p_{max} = \frac{E^2}{4r_s} \text{ W (Watt)}$$

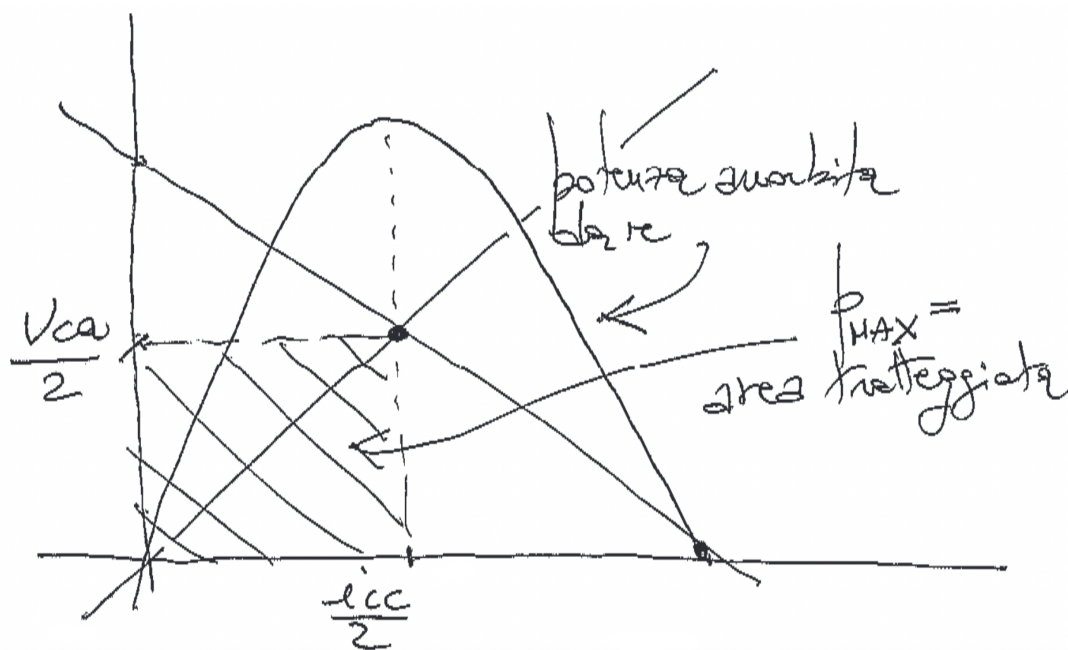
3.1.2 Interpretazione grafica

La tensione e la corrente ai morsetti si ottengono intersecando la caratteristica tensione-corrente del generatore reale $v = E - r_s i$ con la retta di carico $v = r i$.



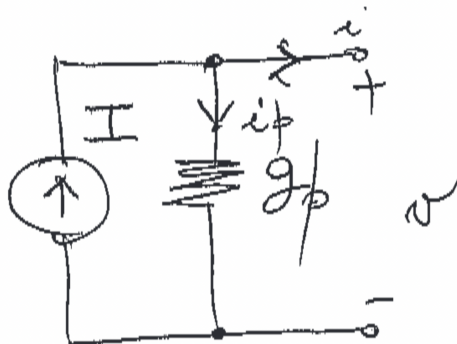
Al variare del valore r si ha che la corrente di corto circuito varia fra 0 e $i_{cc} = E/r_s$ e la tensione a circuito aperto fra 0 e $v_{ca} = E$. La potenza massima corrisponde a

$$i = i_{cc}/2 \quad \text{e} \quad v = v_{ca}/2$$



3.2 Generatore indipendente reale di corrente

Il generatore indipendente reale di corrente si modella con un generatore indipendente ideale di corrente in parallelo a una conduttanza $g_p = 1/r_p > 0$



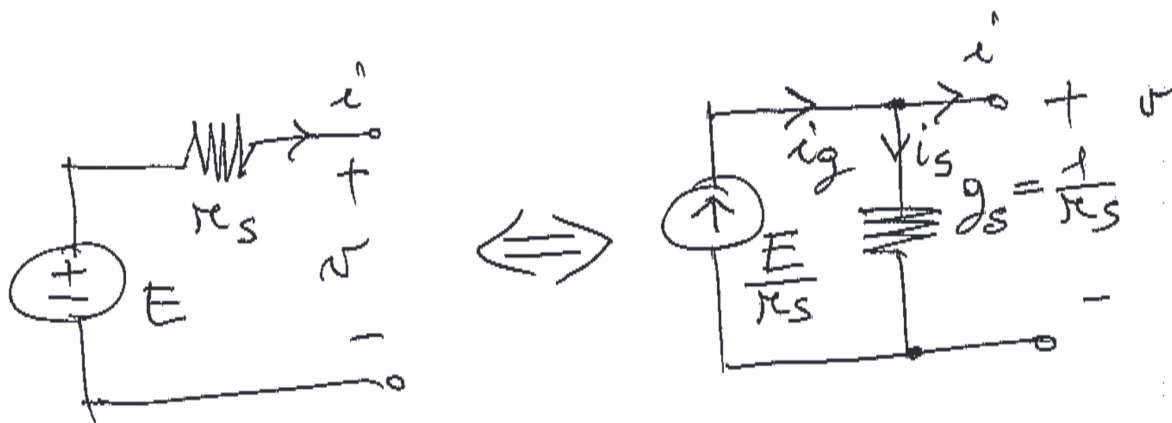
Consideriamo la convenzione dei generatori, per un generatore indipendente ideale di corrente si ha che la relazione costitutiva è

$$\begin{cases} i + i_p - I = 0 \\ i_p = g_p v \end{cases} \implies i = I - g_p v$$

3.3 Equivalenza fra bipoli

Due bipoli si dicono equivalenti esternamente se hanno la stessa relazione costitutiva cioè stabiliscono lo stesso legame fra tensione e corrente ai morsetti.

3.3.1 Equivalenza fra gen.re ind.te reale di tensione e di corrente



3.3.1.1 Verifica dell'equivalenza

Dalla KI al nodo otteniamo

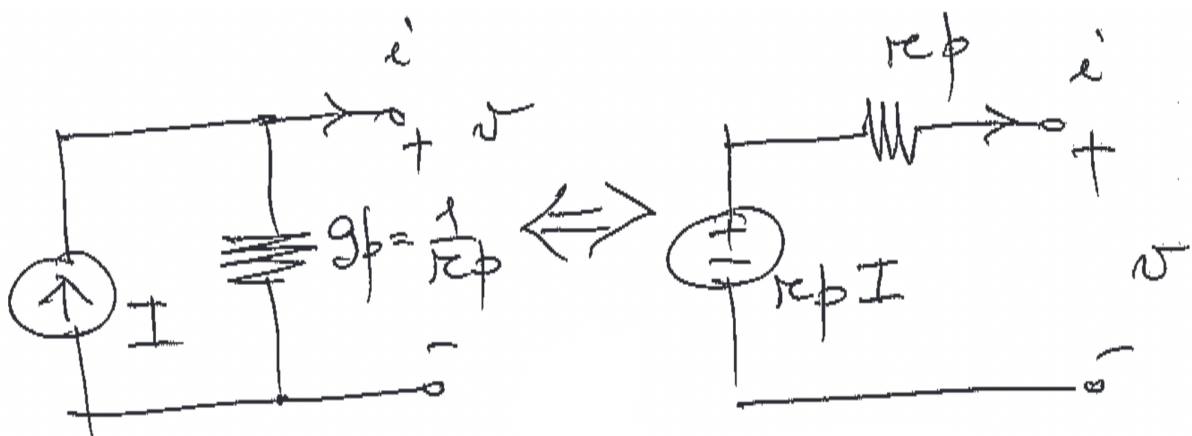
$$i_g = i_s + i \implies \begin{cases} i_g = E/r_s \\ i_s = v g_s = v/r_s \end{cases} \implies v = E - r_s i$$

che è la relazione costitutiva del generatore reale di tensione.

3.3.1.2 Osservazioni

L'equivalenza ai morsetti è esterna ma non interna. Supponiamo di avere il generatore indipendente reale di tensione a sinistra con cui alimentiamo un resistore di carico, poi lo scollegiamo e lo sostituiamo con il generatore indipendente reale di corrente. Si ha che il resistore non si accorge del cambiamento cioè tensione ai morsetti, corrente ai morsetti e potenza sul resistore rimangono le stesse di prima. Se invece facciamo dei confronti interni ai due generatori, quanto affermato in precedenza è errato e si può facilmente dimostrare: se considero il generatore di sinistra a circuito aperto si ha che la corrente che fluisce è 0 mentre se considero il generatore di destra a circuito aperto si ha che la corrente non è nulla ma è quella del generatore.

3.3.2 Equivalenza fra gen.re ind.te reale di corrente e di tensione



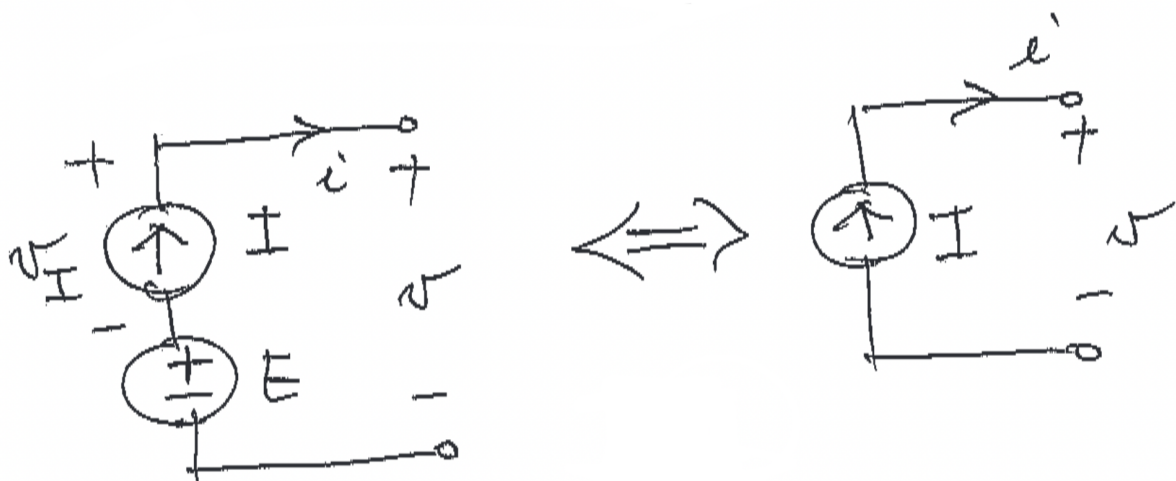
3.3.2.1 Verifica dell'equivalenza

Dalla KV al nodo otteniamo

$$v - r_p I + r_p i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{-v + r_p I}{r_p} = \frac{-v}{r_p} + I = I - g_p v \quad \text{con} \quad g_p = \frac{1}{r_p}$$

che è la relazione costitutiva del generatore reale di corrente.

3.3.3 Equivalenza tra serie e gen.re ind.te ideale di corrente

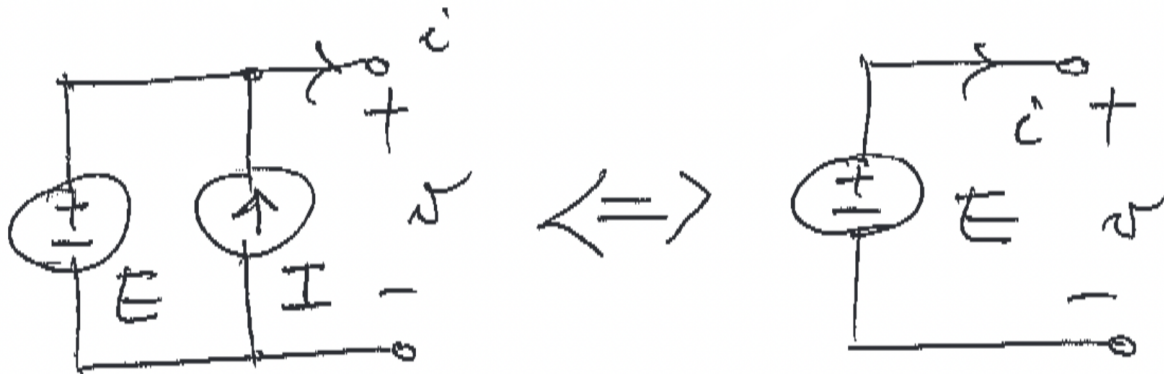


Il generatore di tensione E è ridondante (esternamente) infatti si ha che per la serie

$$\begin{cases} v = v_I + E & \forall v_I \\ i = I & \forall v \end{cases} \implies i = I \quad \forall v$$

che è proprio la relazione costitutiva di un gen.re ind.te ideale di corrente.

3.3.4 Equivalenza tra parallelo e gen.re ind.te ideale di tensione



Il generatore di corrente I è ridondante infatti si ha che per il parallelo

$$\begin{cases} v = I = E & \forall i \\ i = I_E + I & \forall v \end{cases} \implies v = E \quad \forall i$$

che è proprio la relazione costitutiva di un gen.re ind.te ideale di tensione.

3.4 Bipoli controllabili in tensione o in corrente

3.4.1 Bipoli controllabili in tensione

Un bipolo si dice controllabile in tensione se ha una relazione costitutiva del tipo

$$i = g(v)$$

cioè v è una grandezza indipendente e, nota v , conosciamo univocamente i .

3.4.2 Bipoli controllabili in corrente

Un bipolo si dice controllabile in corrente se ha una relazione costitutiva del tipo

$$v = f(i)$$

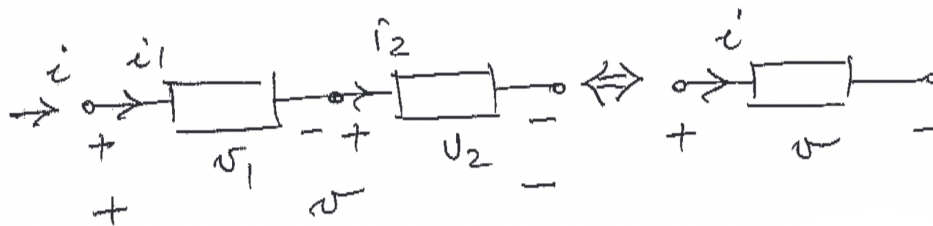
cioè i è una grandezza indipendente e, nota i , conosciamo univocamente v .

3.4.3 Osservazioni

- Un resistore ideale R è controllabile in entrambi i modi
- Un generatore indipendente ideale di tensione $v = v_g(t)$
 - è controllabile in corrente infatti la corrente i nel generatore è indipendente e, nota i , è nota la tensione $v_g(t)$
 - non è controllabile in tensione infatti la tensione $v = v_g(t)$ è stabilita dal generatore e quindi non è indipendente, inoltre nota $v_g(t)$ si ha che non è nota a priori la corrente i
- Un gen.re ind.te ideale di corrente è controllabile in tensione ma non in corrente
- Un gen.re ind.te reale di tensione (o di corrente) è controllabile in entrambi i modi
- Un corto circuito è controllabile in corrente ma non in tensione
- Un circuito aperto è controllabile in tensione ma non in corrente

3.5 Connessione serie fra bipoli

Due bipoli si dicono collegati in serie se hanno un nodo a comune a cui non sono collegati altri bipoli, la rappresentazione è

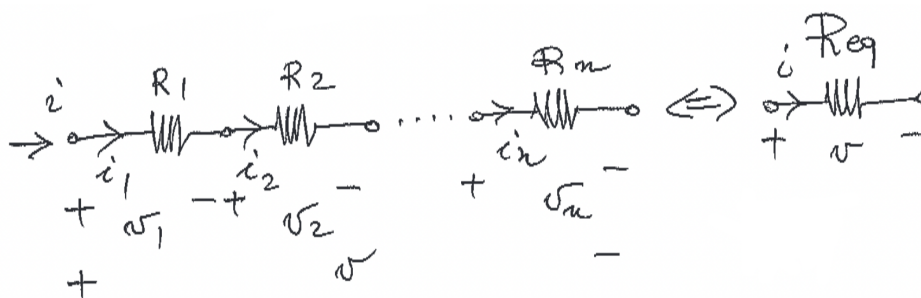


La relazione con cui si studia la serie (KI e KV) è

$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v = v_1 + v_2 \end{cases}$$

La definizione si estende immediatamente alla serie fra n bipoli. La serie ha sempre senso se tutti i bipoli sono controllabili in corrente.

3.5.1 Esempio: serie fra n resistori



Si ha

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = R_1 i_1 + R_2 i_2 + \dots + R_n i_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i = R_{eq} i$$

La serie equivale a un resistore di resistenza

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Si ha

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

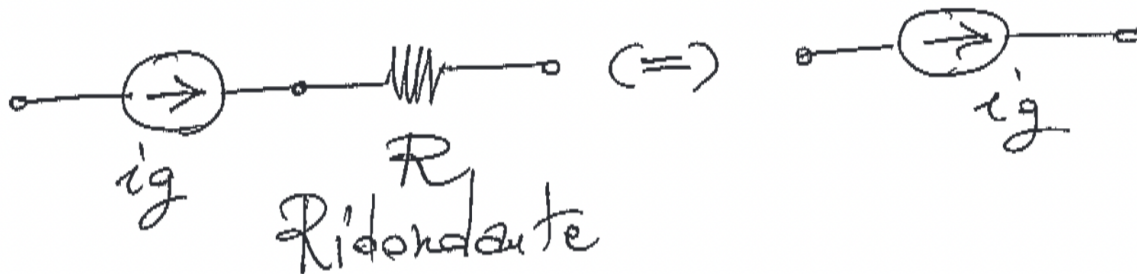
e quindi la tensione sui singoli resistori può essere trovata con la formula

$$v_k = R_k i_k = R_k i$$

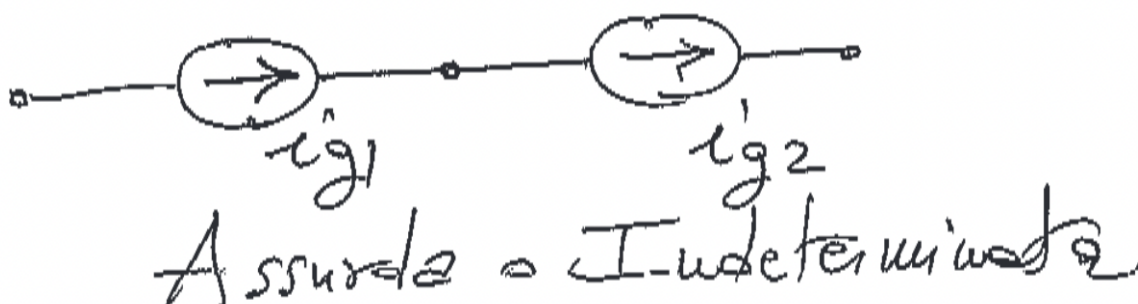
quindi si ottiene la regola del partitore di tensione

$$v_k = \frac{v R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Se un bipolo non è controllabile in corrente allora la connessione può essere ridondante cioè esternamente uno dei bipoli può essere eliminato.

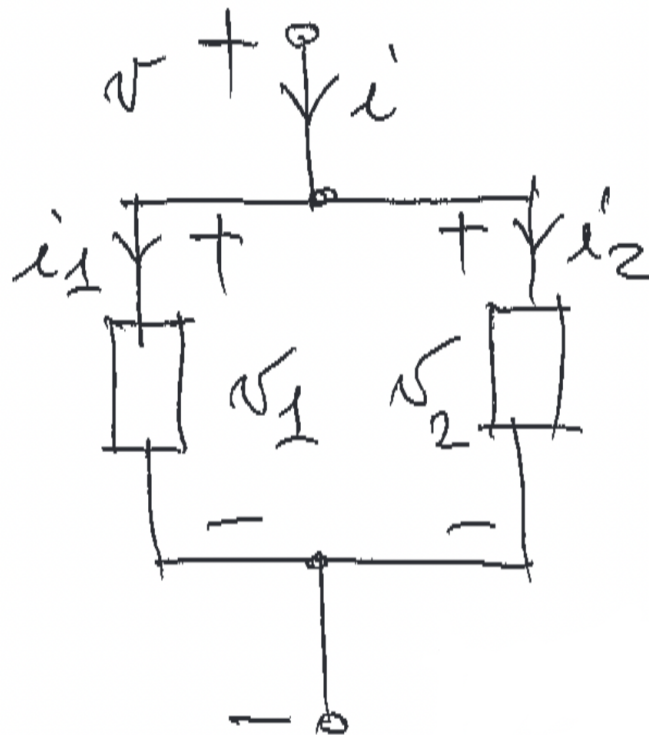


Supponiamo che entrambi i bipoli siano non controllabili in corrente, in questo caso la connessione serie è assurda se $i_{g1} \neq i_{g2}$ (viene contraddetta dalla KI) oppure indeterminata se $i_{g1} = i_{g2}$ (il potenziale del nodo centrale può assumere qualunque valore).



3.6 Connessione parallelo fra bipoli

Due bipoli si dicono in parallelo se sono collegati fra la stessa coppia di nodi.

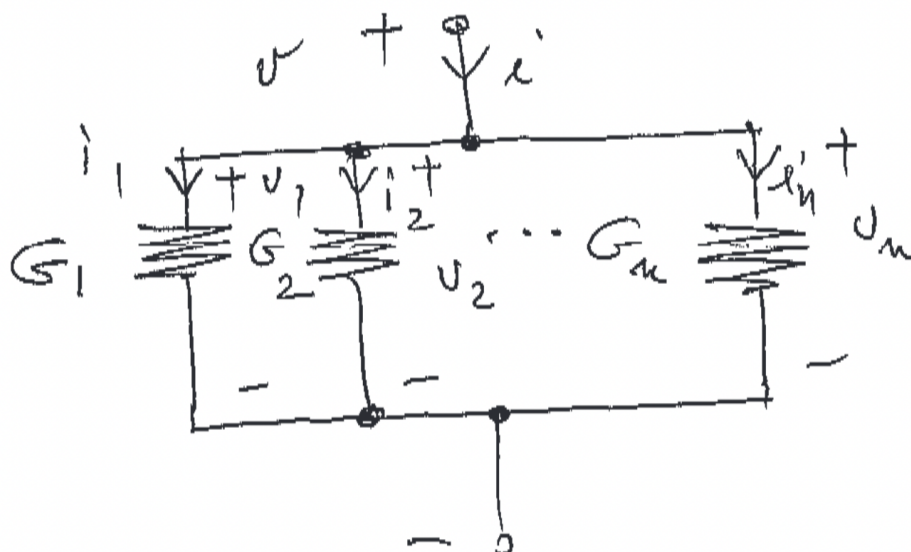


La relazione con cui si studia la serie (KI e KV) è

$$\begin{cases} v = v_1 = v_2 \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

La definizione si estende immediatamente alla parallelo fra n bipoli. La serie ha sempre senso se tutti i bipoli sono controllabili in tensione.

3.6.1 Esempio: parallelo fra n conduttanze



Si ha

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots + G_n v_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) v = G_{eq} v$$

Il parallelo equivale a una conduttanza di valore

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

Si ha

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

e quindi la corrente nelle singole conduttanze può essere trovata con la formula

$$i_k = G_k v_k = G_k v$$

quindi si ottiene la regola del partitore di corrente

$$i_k = \frac{i G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

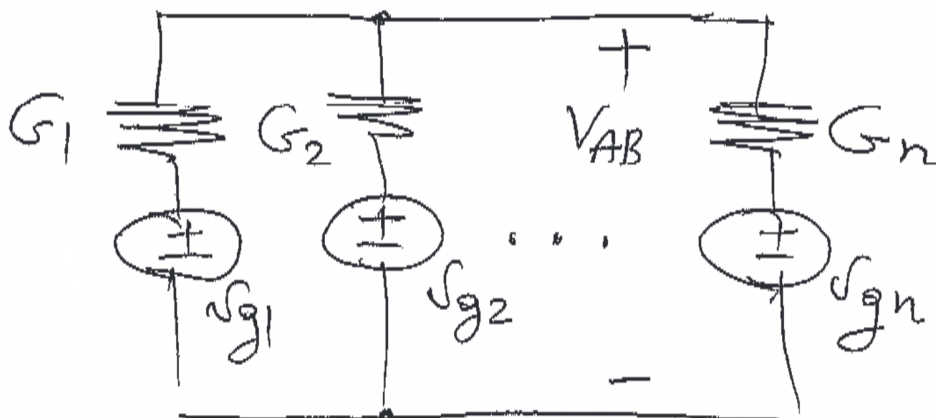
Inoltre

- Se un bipolo non è controllabile in tensione allora la connessione può essere ridondante cioè esternamente uno dei bipoli può essere eliminato.
- Supponiamo che entrambi i bipoli siano non controllabili in tensione, in questo caso la connessione parallelo è assurda oppure indeterminata.

3.7 Teorema di Millmann

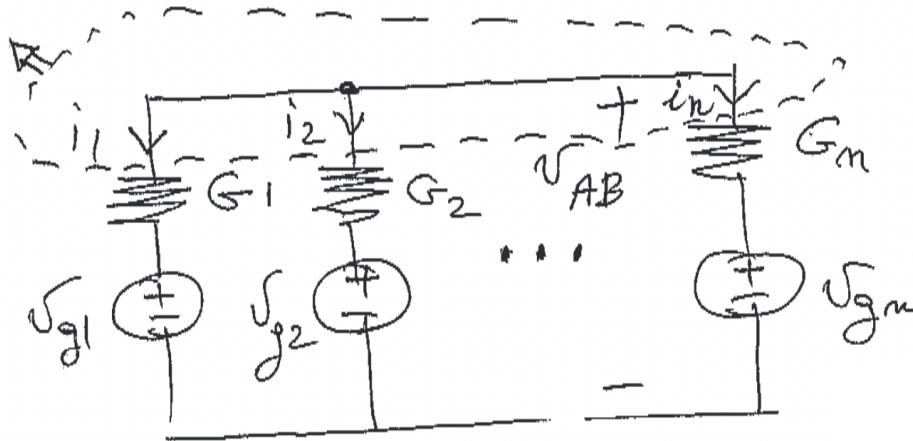
Consideriamo una configurazione con n generatori indipendenti reali di tensione in parallelo fra di loro. La tensione v_{AB} si può determinare con la seguente formula

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + \dots + v_{gn} G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$



3.7.1 Dimostrazione

Consideriamo la configurazione precedente, indichiamo il verso della corrente e una linea guassiana scegliendo una normale rivolta verso l'esterno.



Applicando KI alla superficie Gaussiana tratteggiata si ha

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$$

Isoliamo il generatore k-esimo



e si ha

$$v_{AB} = \frac{1}{G_k} i_k + v_{gk}$$

che implica

$$i_k = v_{AB} G_k - v_{gk} G_k$$

Sostituendo si ottiene

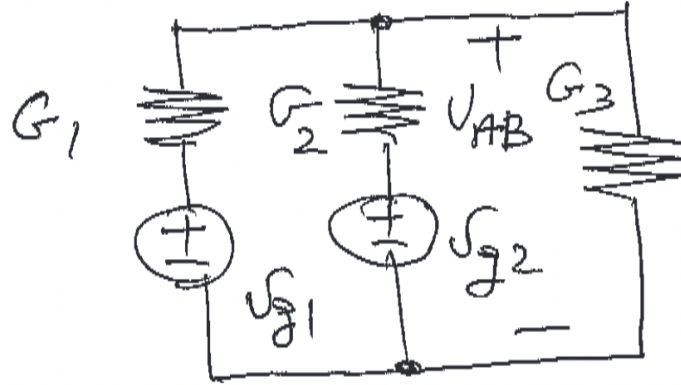
$$v_{AB}(G_1 + G_2 + \dots + G_n) - (v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + \dots + v_{gn}G_n) = 0$$

e quindi risulta la tesi.

3.7.2 Varianti del Teorema di Millmann

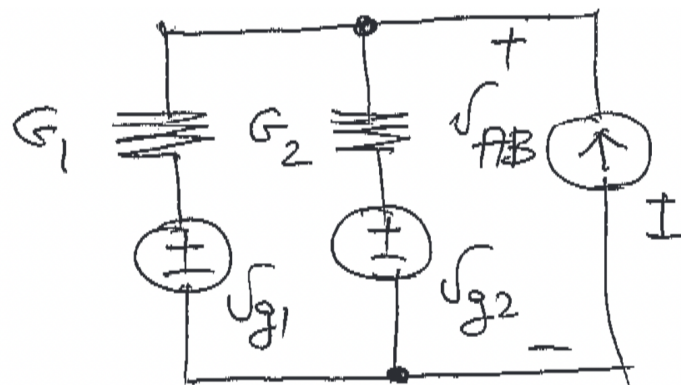
3.7.2.1 Variante 1

$$v_{AB} = \frac{v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$



3.7.2.2 Variante 2

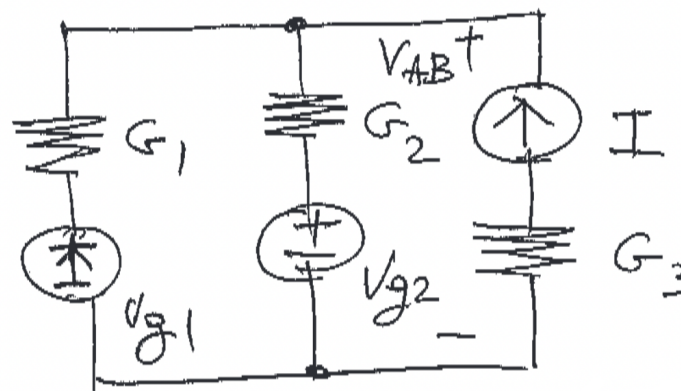
$$v_{AB} = \frac{v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + I}{G_1 + G_2}$$



3.7.2.3 Variante 3

$$v_{AB} = \frac{v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + I}{G_1 + G_2}$$

dato che G_3 risulta essere ridondante esternamente.

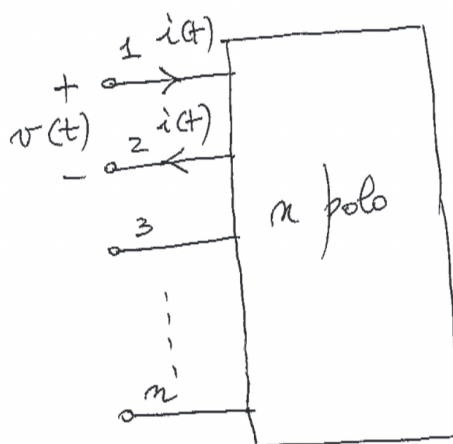


Capitolo 4

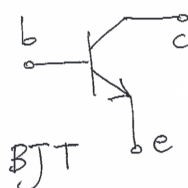
Reti due Porte

4.1 Definizione di n polo

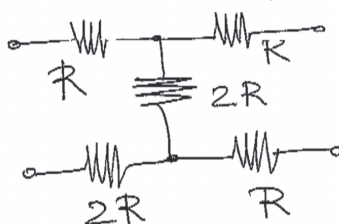
Un n polo è un elemento a n terminali (cioè n poli) con i quali può essere collegato ad un circuito esterno. La rappresentazione è



Per esempio, un BJT è un tripolo (bipolar junction transistor).



Un esempio di quadripolo è la rete in figura.



Un altro esempio di quadripolo sono due induttori mutuamente accoppiati.

4.2 Definizione di porta

Una porta è una coppia di morsetti tale che la corrente che entra in un morsetto è uguale, istante per istante, a quella che esce dall'altro morsetto.

4.3 Definizione di rete due porte

Una rete due porte è un quadripolo tale che una coppia di morsetti $(1 - 1')$ forma una porta e, di conseguenza, l'altra coppia di morsetti $(2 - 2')$ forma anch'essa una porta.



Introduciamo quattro grandezze elettriche di porta

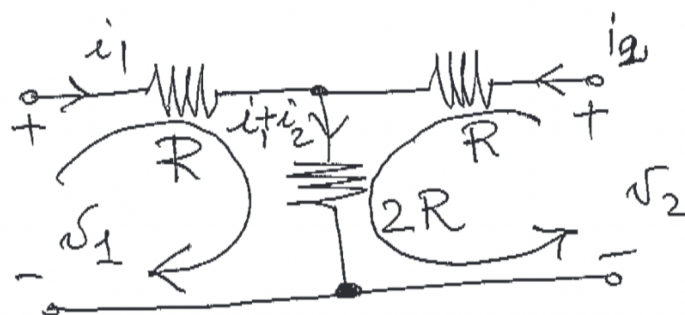
- correnti i_1, i_2 di porta
- tensioni v_1, v_2 di porta

Notare che v_1 e i_1 (v_2 e i_2) hanno versi coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori.

4.4 Relazioni costitutive di una rete due porte

Le relazioni costitutive di una rete due porte sono date da due legami indipendenti che la rete stabilisce fra le quattro grandezze di porta v_1, v_2, i_1, i_2 .

4.4.1 Esempio: rete due porte resistiva



Da KV alla maglia 1 si ha

$$v_1 = Ri_1 + 2R(i_1 + i_2)$$

e da KV alla maglia 2 si ha

$$v_2 = Ri_2 + 2R(i_1 + i_2)$$

Le relazioni costitutive possono quindi essere scritte nella forma

$$\begin{cases} v_1 = 3Ri_1 + 2Ri_2 \\ v_2 = 2Ri_1 + 3Ri_2 \end{cases}$$

4.5 Potenza istantanea assorbita da una rete due porte

La potenza istantanea assorbita da una rete due porte è la somma delle potenze istantanee alla porta 1 e 2 cioè

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \text{ W (Watt)}$$

da cui possiamo trovare l'energia elettrica dw assorbita in dt o in un certo intervallo di tempo. Se definiamo il vettore delle correnti di porta e il vettore delle tensioni di porta

$$I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

allora $p(t)$ è data dal prodotto scalare fra $V(t)$ e $I(t)$ cioè

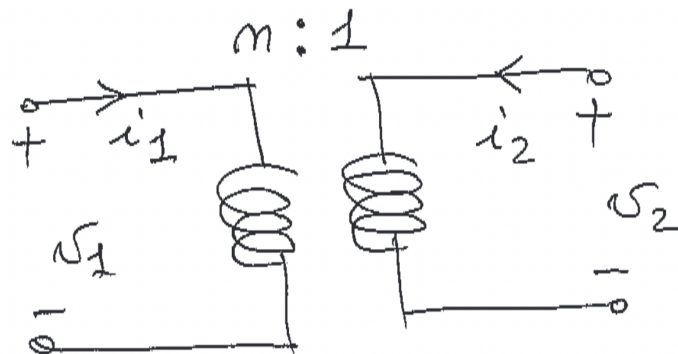
$$p(t) = \langle V(t), I(t) \rangle = V^T(t) \cdot I(t)$$

4.6 Rete due porte passiva o attiva

La definizione di rete due porte passiva o attiva è analoga a quella di un bipolo passivo o attivo. Parleremo di rete due porte passiva se qualunque esperimento si faccia sulla nostra rete due porte la rete non può mai erogare a circuito più energia di quella che ha precedentemente assorbito (stessa definizione data per un bipolo sostituendo la potenza istantanea con quella ottenuta dal bipolo).

4.7 Reti due porte passive

4.7.1 Trasformazione ideale



Si ha un rapporto di trasformazione $n = N_1/N_2$ dove N_1 (N_2) è il numero di spire del primo (secondo) avvolgimento. Questo è un modello idealizzato di un trasformatore ideale, si hanno due bobine accoppiate magneticamente da nucleo ferromagnetico ad elevata permeabilità relativa μ_r .

- Le relazioni costitutive sono

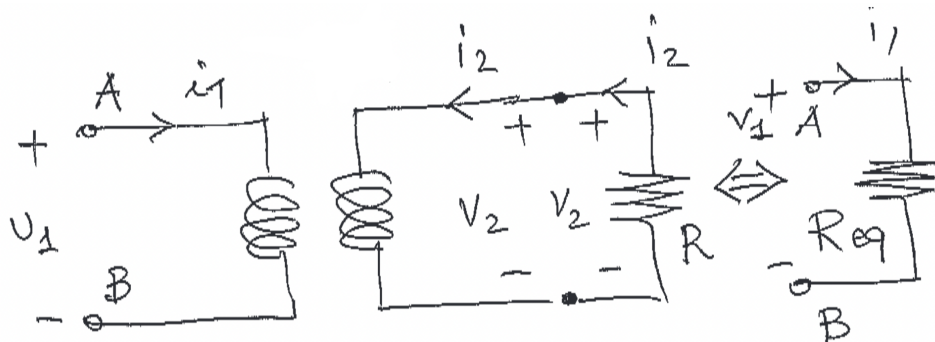
$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$

- Il trasformatore ideale è una rete due porte senza memoria
- La potenza istantanea assorbita vale

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = n v_2 \left(-\frac{1}{n} i_2 \right) + v_2 i_2 = 0 \text{ W (Watt)}$$

- Il trasformatore ideale è passivo
- Il trasformatore ideale è inerte cioè non partecipa agli scambi energetici dato che la potenza istantanea assorbita è nulla

4.7.1.1 Effetto di un trasformazione ideale su un resistore



Si ha

$$v_1 = n v_2 = n (-R i_2) = n R (n i_1) = n^2 R i_1 = R_{eq} i_1$$

quindi il bipolo AB dato dal trasformatore chiuso sulla porta 2 su un resistore R trasforma lo stesso resistore in resistore di resistenza $R_{eq} = n^2 R$

4.7.1.2 Effetto di un trasformazione ideale su un condensatore

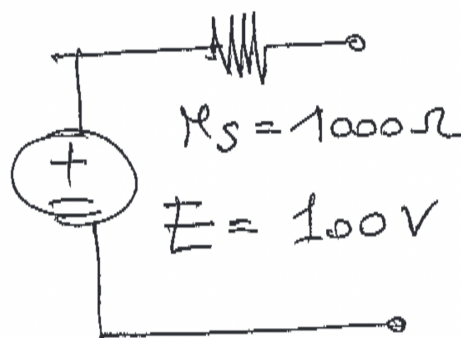
Il bipolo AB trasforma lo stesso condensatore in un condensatore di capacità $C_{eq} = C/n^2$

4.7.1.3 Effetto di un trasformazione ideale su un induttore

Il bipolo AB trasforma lo stesso induttore in un induttore di induttanza $L_{eq} = n^2 L$

4.7.2 Trasformazione adattatore di resistenza

Consideriamo il seguente generatore reale di tensione



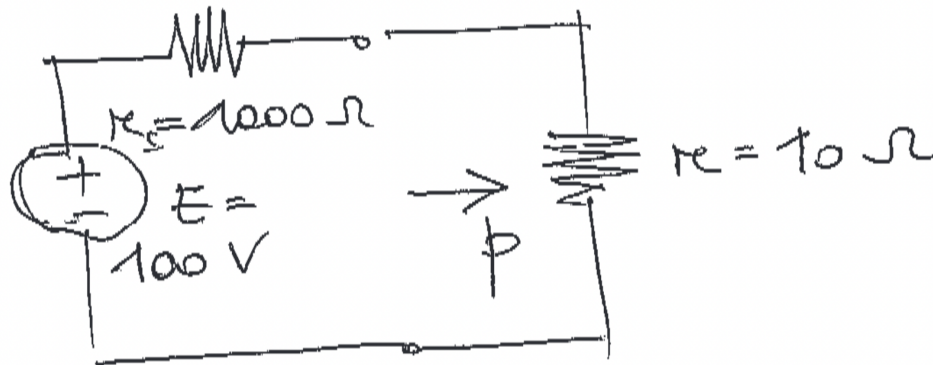
- La potenza massima che può erogare è data da

$$p_{max} = \frac{E^2}{4r_s} = \frac{100^2}{4 \cdot 1000} = 2.5 \text{ W (Watt)}$$

- La resistenza di carico che assorbe la massima potenza è

$$r = r_s = 1000 \Omega \text{ (Ohm)}$$

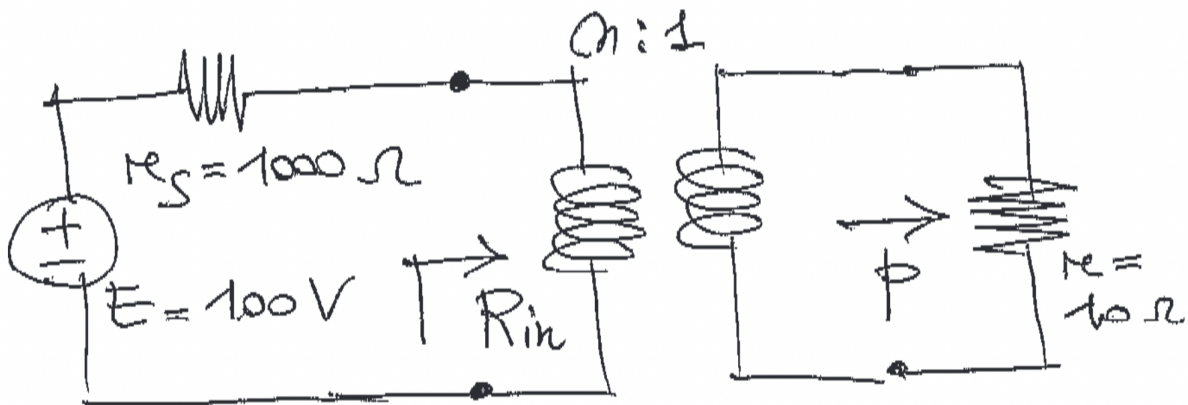
Supponiamo che il generatore alimenti una resistenza $r = 10 \Omega$ (Ohm) come in figura.



Quindi $r \ll r_s$ e si ha

$$p \ll p_{max} \implies i = \frac{100}{1010} \approx 0.1 \text{ A} \implies p = ri^2 \approx 10 \cdot 0.1^2 = 0.1 \text{ W}$$

Per ovviare a questo problema possiamo usare un trasformatore che adatta il livello di resistenza del carico a quello del generatore



L'equazione del progetto è

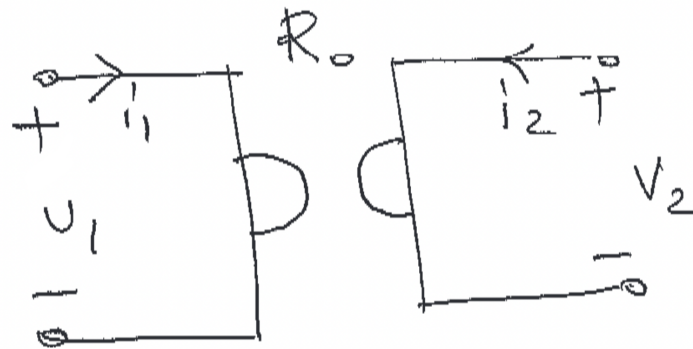
$$R_{in} = n^2 r = r_s \implies n = \sqrt{\frac{r_s}{r}} = 10$$

Il primario del generatore assorbe p_{max} ed essendo il trasformatore trasparente alla potenza istantanea fornisce p_{max} al carico. Il carico r assorbe quindi la massima potenza

$$p_{max} = 2.5 \text{ W}$$

L'inserzione del trasformatore adatta la resistenza di carico a quella del generatore e migliora di un fattore 25 il trasferimento di potenza al carico.

4.7.3 Giratore ideale



- Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} v_1 = -R_0 i_2 \\ v_2 = R_0 i_1 \end{cases}$$

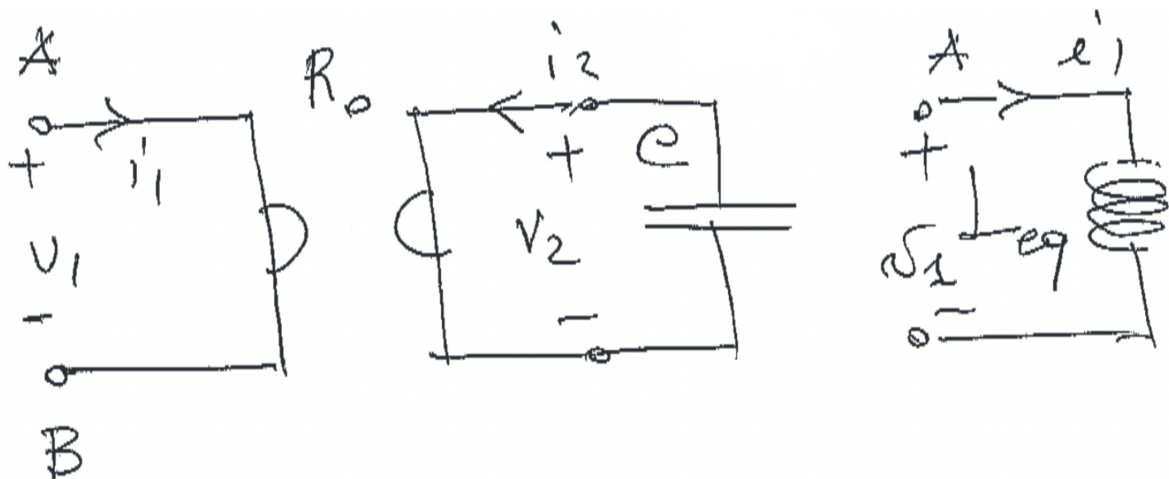
dove R_0 in Ohm è detta resistenza di girazione.

- Il giratore ideale è una rete due porte senza memoria
- La potenza istantanea assorbita vale

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = -R_0 i_2 i_1 + R_0 i_1 i_2 = 0 \text{ W (Watt)}$$

- Il giratore ideale è passivo
- Il giratore ideale è inerte cioè non partecipa agli scambi energetici dato che la potenza istantanea assorbita è nulla

4.7.3.1 Effetto di un giratore ideale su un condensatore



Si ha

$$v_1 = -R_0 i_2 = R_0 C \frac{dv_2}{dt} = R_0^2 C \frac{di_1}{dt} = L_{eq} \frac{di_1}{dt}$$

quindi il giratore trasforma il condensatore ideale C in un induttore ideale di induttanza

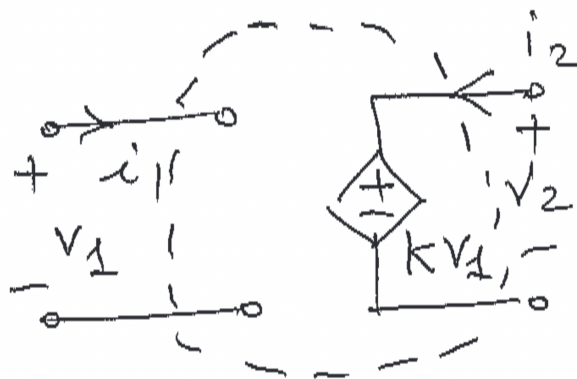
$$L_{eq} = R_0^2 C$$

che è detto induttore sintetico.

4.8 Reti due porte attive

I generatori controllati (dipendenti o pilotati) sono generatori di tensione (o corrente) dove la tensione (corrente) impressa non è una funzione nota a priori ma dipende dalla tensione o dalla corrente in un altro elemento del circuito. Studiamo quattro tipi diversi di generatori, si tratta in ogni caso di reti due porte senza memoria e attive.

4.8.1 Generatore di tensione controllato in tensione (voltage-controlled voltage-source or VCVS)



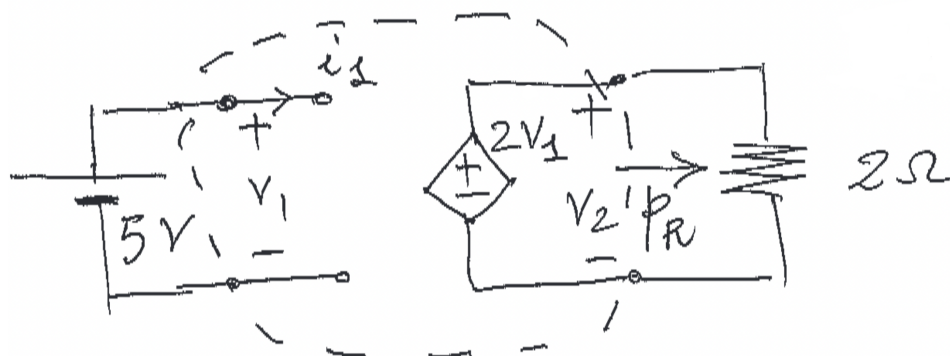
Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = k v_1 \end{cases}$$

dove

- v_1 è la grandezza di controllo
- v_2 è la grandezza controllata
- k (senza dimensioni) è detto parametro di controllo

Il generatore sulla porta 2 imprime una tensione $k v_1$ che dipende dalla tensione v_1 sulla porta 1. La scatola tratteggiata rappresenta simbolicamente un dispositivo che preleva la tensione v_1 fra due opportuni morsetti del circuito (voltmetro ideale), la moltiplica per k e la applica alla porta 2 in un altro punto del circuito. Solitamente non viene rappresentato in modo esplicito il dispositivo che effettua questa operazione di accoppiamento fra due punti diversi del circuito. Inoltre la rete due porte è attiva, consideriamo



La potenza elettrica alla porta 1 cioè

$$p_1 = v_1 i_1 = 0 \text{ W (Watt)}$$

dato che $i_1 = 0$ ed inoltre si ha

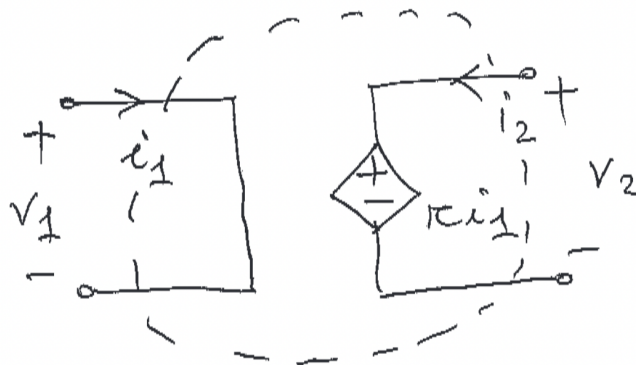
$$v_2 = 2v_1 = 10 \text{ V (Volt)}$$

La scatola (VCVS) eroga alla batteria una potenza elettrica

$$p_R = \frac{v_2^2}{2} = 50 \text{ W (Watt)}$$

Nel dispositivo VCVS vi è una sorgente interna di energia (batteria) che non viene esplicitamente rappresentata, per come funziona fisicamente un VCVS preleva energia dalla sorgente interna ed è capace di fornirla al resistore funzionando da rete due porte attiva.

4.8.2 Generatore di tensione controllato in corrente (current-controlled voltage-source or CCVS)

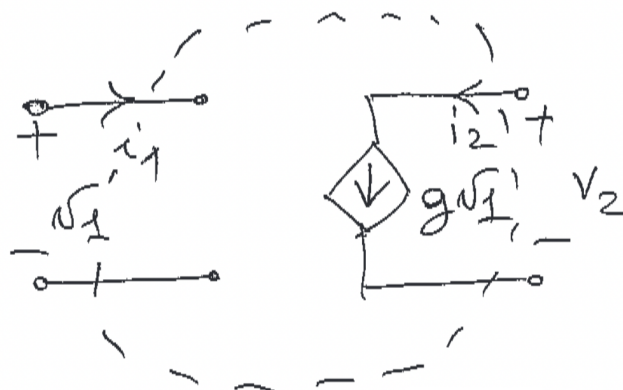


Le relazione costitutive sono

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = r i_1 \end{cases}$$

dove i_1 è la grandezza di controllo e v_2 è la grandezza controllata, inoltre r (dimensioni di Ohm) è detto parametro di controllo (trans-resistenza). Osserviamo che sulla porta 1 vi è un amperometro ideale che misura la corrente i_1 .

4.8.3 Generatore di corrente controllato in tensione (voltage-controlled current-source or VCCS)

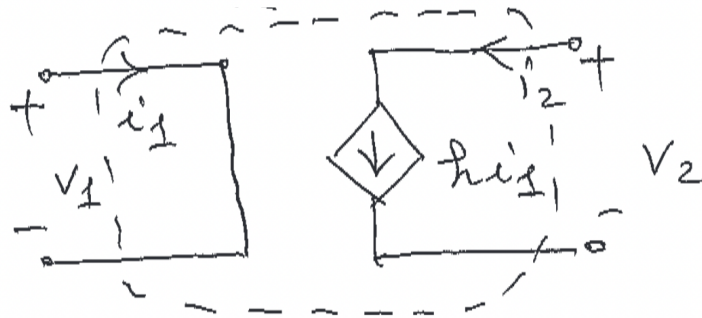


Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = gv_1 \end{cases}$$

dove v_1 è la grandezza di controllo e i_2 è la grandezza controllata, inoltre g (dimensioni di Ohm^{-1}) è detto parametro di controllo (trans-conduttanza).

4.8.4 Generatore di corrente controllato in corrente (current-controlled current-source or CCCS)



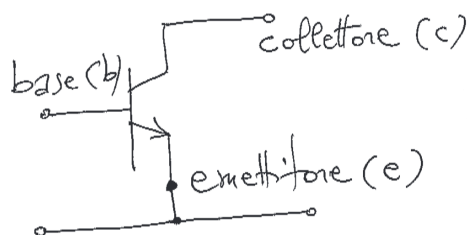
Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = hi_1 \end{cases}$$

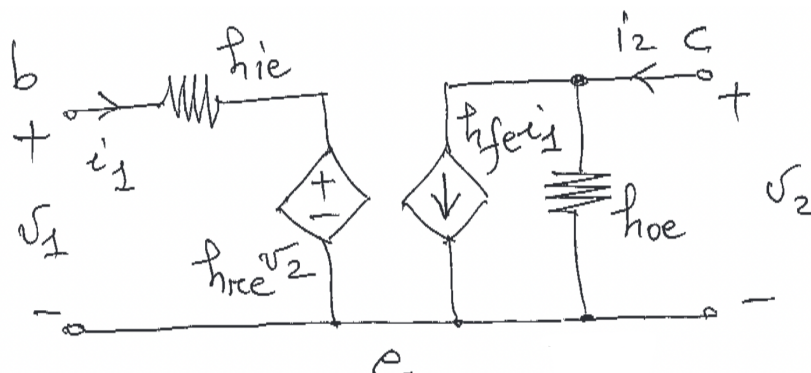
dove i_1 è la grandezza di controllo e i_2 è la grandezza controllata, inoltre h (senza dimensioni) è detto parametro di controllo.

4.8.5 Generatori controllati per modellare dispositivi elettronici

Consideriamo un BJT (bipolar junction transistor) cioè un tripolo con tre morsetti: una base (b), un emettitore (e) e un collettore (c).



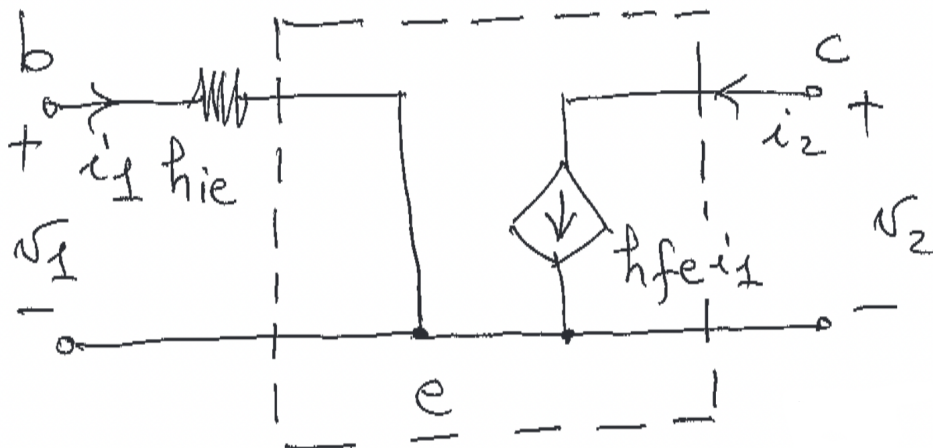
Nella configurazione a emettitore comune lo rappresentiamo come rete due porte.



Un modello che possiamo usare è quello per piccoli segnali a parametri ibridi a emettitore comune, fa uso di una resistenza h_{ie} , una conduttanza h_{oe} , un CCCS con parametro di controllo h_{fe} e un VCVS con parametro di controllo h_{re} . Questi parametri dipendono dal punto di funzionamento del BJT, alcuni valori tipici

- $h_{ie} = 1000 \, \Omega$
- $h_{fe} = 100$
- $h_{oe} = 10^{-6} \, \Omega^{-1}$
- $h_{re} = 10^{-5}$

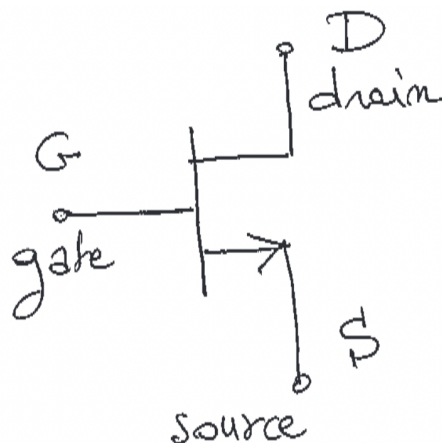
Un modello semplificato si ottiene assumendo l'analisi per $h_{re} = 0$ ed inoltre $h_{oe} = 0$ quindi il BJT diventa (a parte il resistore h_{ie}) un CCCS con parametro di controllo h_{fe} .



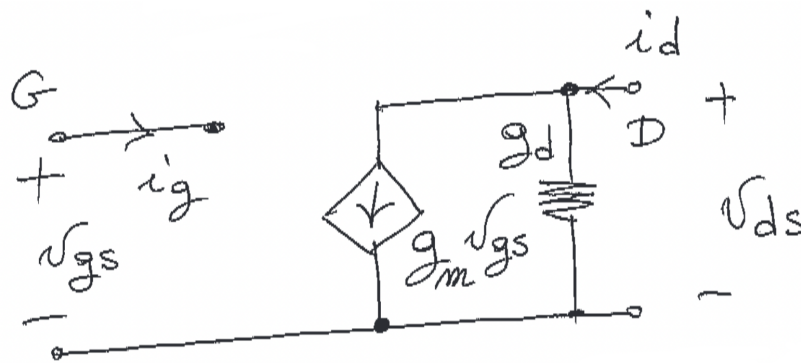
Le relazioni costitutive del modello semplificato sono

$$\begin{cases} v_1 = h_{ie} i_1 \\ i_2 = h_{fe} i_1 \end{cases}$$

dato che $h_{fe} \gg 1$ segue che il BJT è fondamentalmente un amplificatore della corrente di base (risulta che i_1 è uguale alla corrente di base). Consideriamo un circuito equivalente per piccoli segnali di un FET (field effect transistor)



e sostanzialmente, a parte la conduttanza di drain g_d , è un VCCS

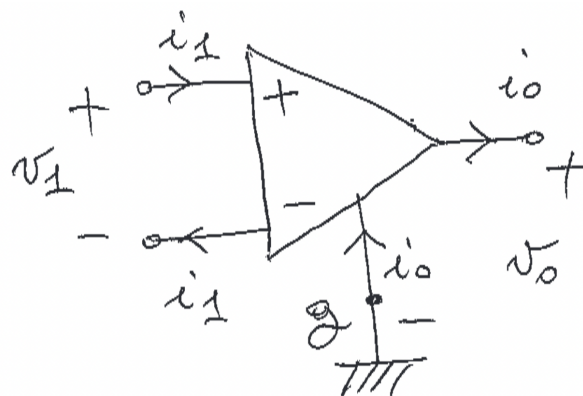


Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} i_g = 0 \\ i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds} \end{cases}$$

4.9 Amplificatore operazionale (ao) ideale

L'amplificatore operazionale ideale è una rete due porte senza memoria.



Le relazioni costitutive sono

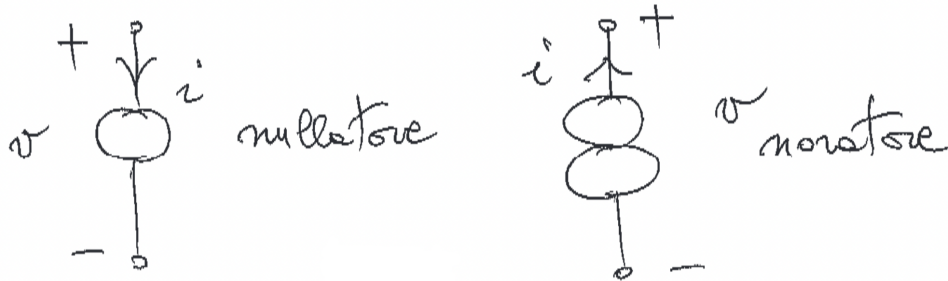
$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

La differenza di potenziale fra morsetto + e - dell'amplificatore operazione è nulla, la corrente assorbita dal morsetto + e dal - dell'ao è nulla. Segue che

- la tensione v_o e la corrente i_o alla porta 2 possono assumere qualunque valore e non sono fra di loro vincolare
- v_o e i_o possono essere determinate solo quando conosciamo il circuito dove viene usato l'amplificatore operazionale
- un modello idealizzato di un amplificatore reale, il modello è ben approssimato se l'amplificatore operazionale funziona in bassa frequenza (banda audio) e il funzionamento dell'amplificatore operazionale è di tipo lineare (non in saturazione)
- uno dei morsetti della porta 2 (g) è collegato al nodo di terra (ground) ed inoltre abbiamo usato la convenzione dei generatori per la porta 2

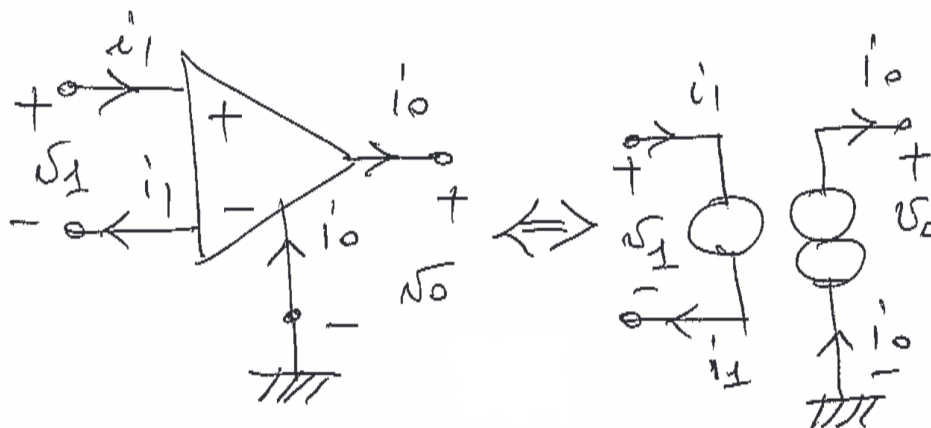
4.10 Bipolo nullatore e bipolo noratore

- Il bipolo nullatore soddisfa $v = 0$ e $i = 0$
- Il bipolo noratore soddisfa $v \forall$ e $i \forall$

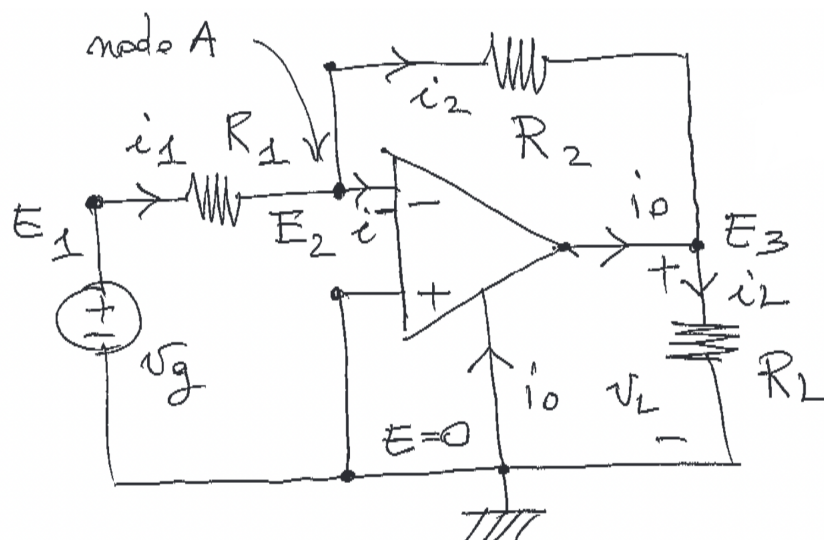


4.10.1 Rappresentazione di ao con nullore

Un amplificatore operazionale ideale è equivalente alla coppia nullatore e noratore (detta nullatore) dove un morsetto del noratore è collegato a terra.



4.11 Amplificatore invertente con ao



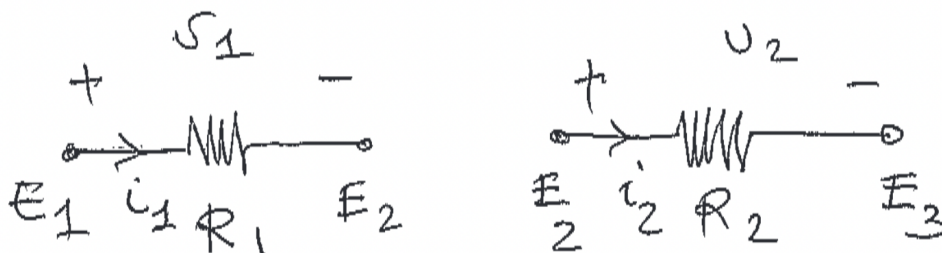
Usiamo il metodo dei nodi per analizzare il circuito con l'amplificatore operazionale e per determinare l'amplificazione di tensione

$$A_v = \frac{v_L}{v_g}$$

Abbiamo tre nodi E_1, E_2, E_3 oltre al nodo di terra $E = 0$. Si ha

$$\begin{cases} E_1 = v_g \\ E_3 = v_L \end{cases}$$

e $E_2 = 0$ dato che il morsetto $+$ e $-$ dell'ao sono dello stesso potenziale e il morsetto $-$ dell'ao è collegato a terra ($E = 0$). Quindi l'unica incognita è E_3



Scrivendo una KI al nodo A dell'amplificatore operazionale ottengo

$$i_1 = i_2 + i^- = i_2$$

dato che $i^- = 0$ per l'amplificatore operazionale. Inoltre

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{v_g}{R_1}$$

e

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{E_2 - E_3}{R_2} = \frac{0 - v_L}{R_2} = -\frac{v_L}{R_2}$$

Sostituendo ottengo

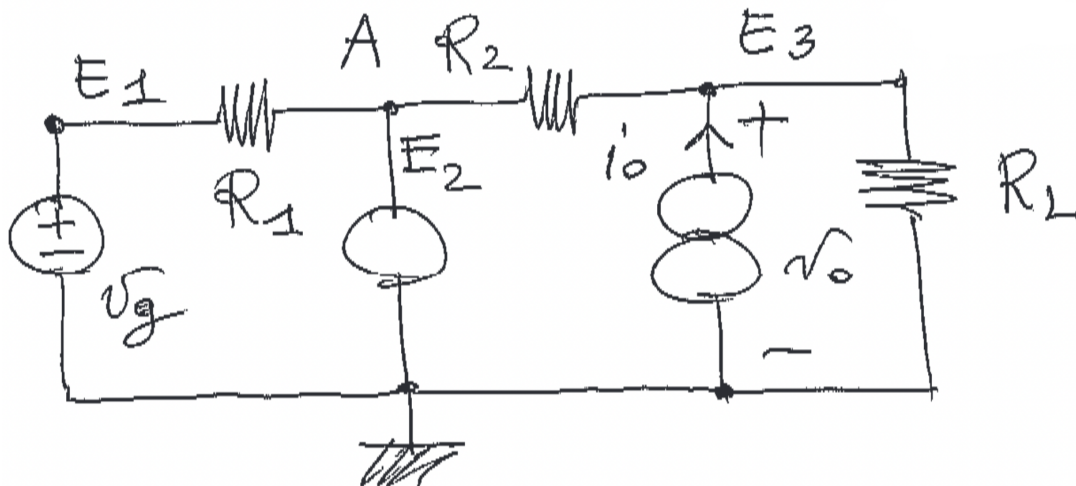
$$A_v = \frac{v_L}{v_g} = -\frac{R_2}{R_1}$$

e A_v non dipende da R_L quindi è un amplificatore invertente per $R_2 > R_1$. Per determinare le tensioni dei nodi e A_v è stata sufficiente una KI al morsetto $-$ dell'ao. Se volessi determinare la corrente i_0 erogata dall'ao devo scrivere una KI al morsetto di uscita dell'ao, segue che

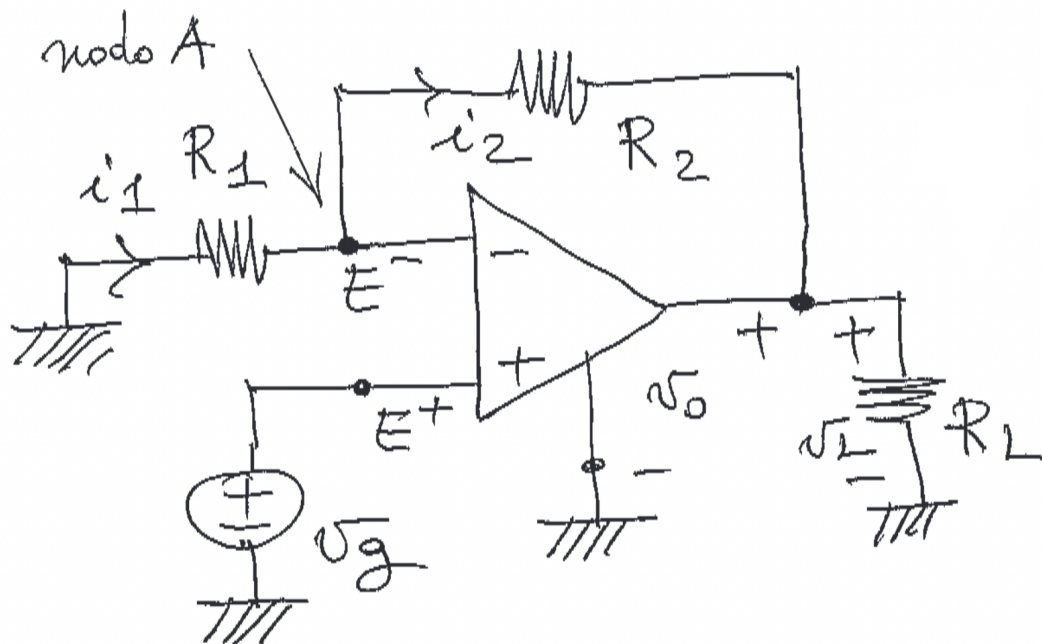
$$i_0 = -i_2 + i_L = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_L} = -v_g \frac{R_2}{R_L} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right)$$

4.11.1 Soluzione usando il modello con nullo

Il nodo A è tenuto a potenziale 0 dal nullatore ($E_2 = 0$), il nullatore crea in A una massa virtuale (tale nodo è a potenziale di terra anche se non è fisicamente collegato a terra).



4.12 Amplificatore non invertente con ao



Usiamo il metodo dei nodi per determinare

$$A_v = \frac{v_L}{v_g} \implies E^- = E^+ = v_g \implies v_0 = v_L$$

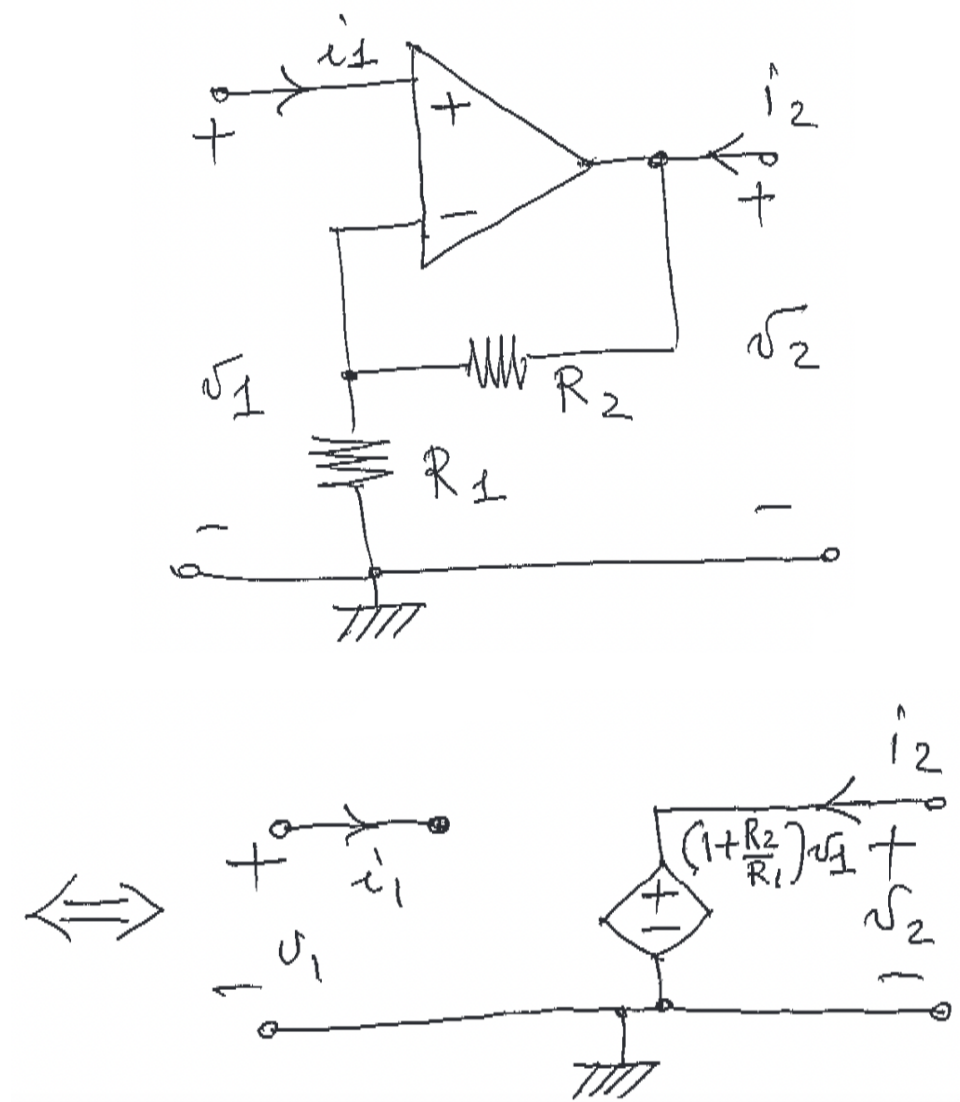
Inoltre da KI al nodo \$A\$ otteniamo

$$i_1 = i_2 (i^- = 0) \implies i_1 = \frac{0 - v_g}{R_1} = i_2 = \frac{v_g - v_L}{R_2}$$

da cui

$$A_v = \frac{v_L}{v_g} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Se isoliamo l'ao e disegniamo la seguente rete due porte



Le relazioni costitutive sono

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_1 \end{cases}$$

quindi la rete implementa un VCVS con

$$k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Capitolo 5

Principio di Sovrapposizione degli Effetti o detto PSE

5.1 Introduzione

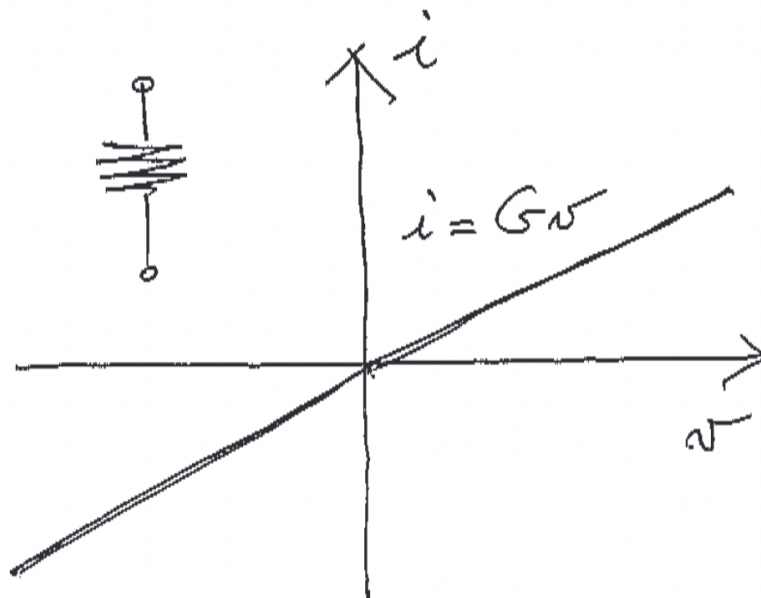
Un bipolo senza memoria controllabile in tensione $i = g(v)$ si dice lineare se

$$g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$$

e omogeneo se

$$g(\alpha v) = \alpha \cdot g(v)$$

L'unico bipolo senza memoria lineare e omogeneo è il resistore ideale $i = Gv$ perché la sua caratteristica corrente-tensione è una retta passante per l'origine.



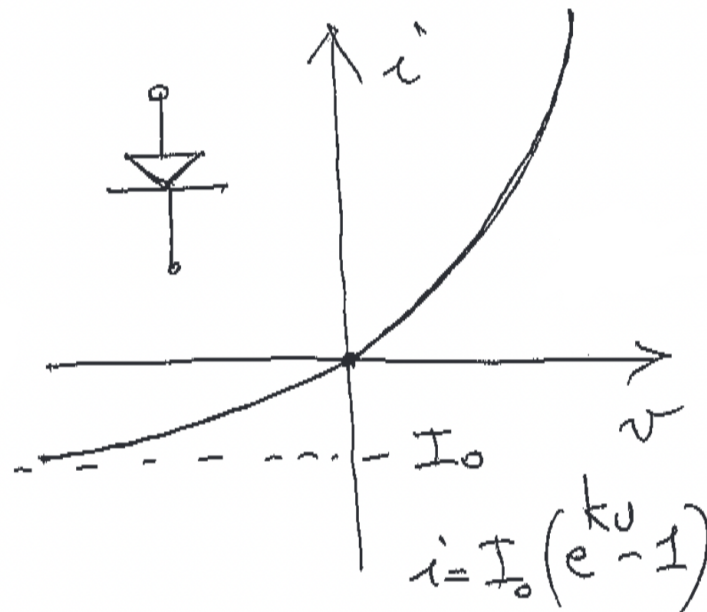
Un diodo che soddisfa

$$i = g(v) = I_0(e^{kv} - 1)$$

con

$$\begin{cases} I_0 > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

non è né lineare e né omogeneo perché la sua caratteristica è di tipo esponenziale.



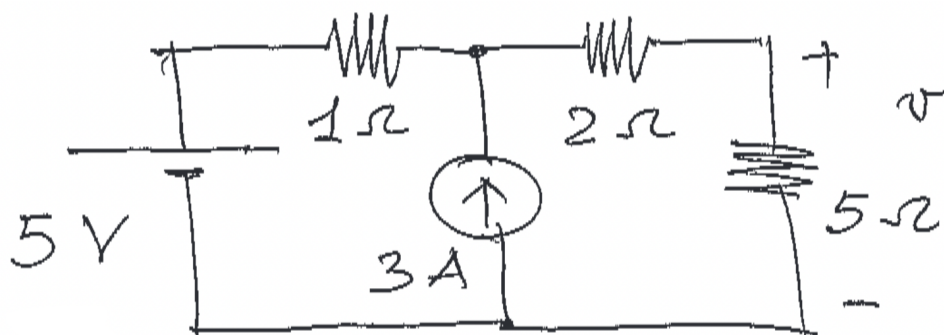
Una rete due porte senza memoria si dice lineare e omogenea se le sue relazioni costitutive sono date da due relazioni algebriche lineari e omogenee nelle quattro grandezze di porta v_1, v_2, i_1, i_2 . Segue che le due relazioni costitutive vincolano le grandezze di porta a stare su un opportuno sottospazio vettoriale di dimensione 2 dello spazio $\mathbb{R}^4$. Il trasformatore ideale, il giratore ideale, i quattro tipi di generatori controllati e l'amplificatore operazionale ideale sono tutte reti due porte senza memoria lineari e omogenee.

5.2 Enunciato del PSE

Consideriamo una rete contenente bipoli e doppi bipoli senza memoria lineari e omogenei e un certo numero di generatori indipendenti di tensione e/o corrente (cause). Allora un effetto (tensione o corrente) può essere ottenuto sovrapponendo gli effetti dei generatori indipendenti di tensione e/o corrente. Per effetto di un generatore indipendente si intende la tensione o corrente che si ha quando è presente tale generatore e tutti gli altri generatori indipendenti sono disattivati. Ricordiamo che disattivare un generatore indipendente ideale di tensione significa sostituirlo con un corto circuito mentre disattivare un generatore indipendente ideale di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto.

5.3 Esempio 1

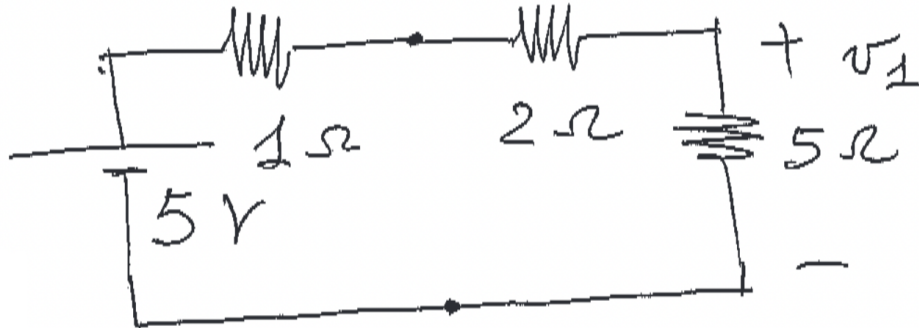
Determinare v usando il PSE.



Si ha che

$$v = v_1 + v_2$$

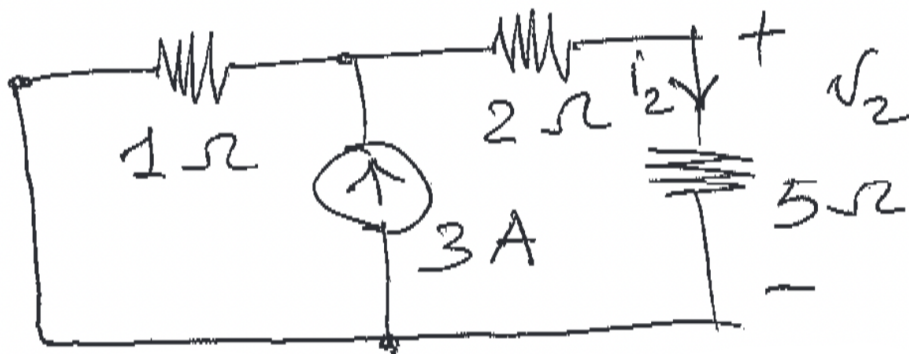
dove v_1 è l'effetto della batteria e v_2 è l'effetto del generatore indipendente ideale di corrente. Una volta disattivato il generatore di corrente abbiamo un partitore di tensione.



Si ha

$$v_1 = 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8} \text{ V (Volt)}$$

Disattivando la batteria otteniamo un circuito analizzabile con la regola del partitore di corrente. Segue che



Si ha

$$i_2 = 3 \cdot \frac{1/7}{1/7 + 1} = \frac{3}{8} \text{ A (Ampere)}$$

da cui

$$v_2 = 5i_2 = \frac{15}{8} \text{ V (Volt)}$$

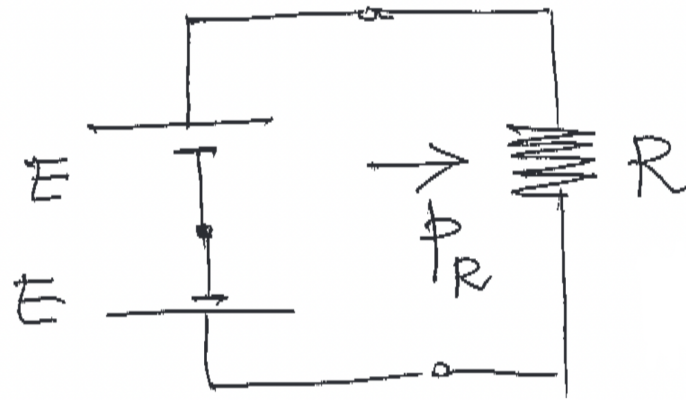
Allora

$$v = v_1 + v_2 = 5 \text{ V (Volt)}$$

5.4 Nota importante

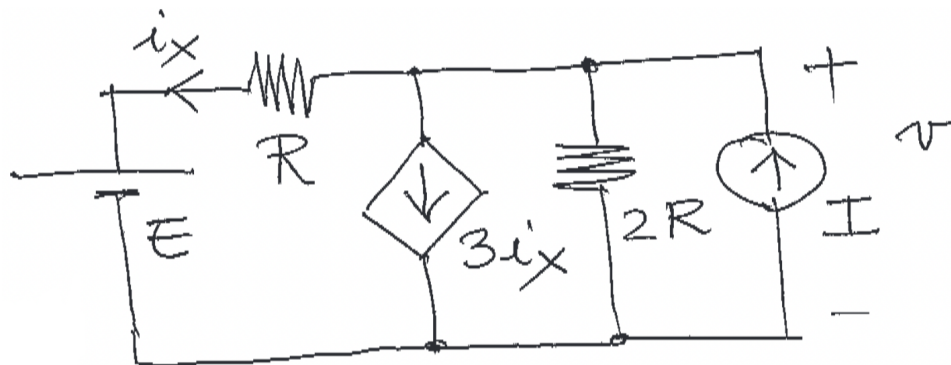
Il PSE non vale ovviamente per trovare la potenza, consideriamo il seguente esempio per cui la potenza assorbita da R vale $p_R = 0$. Applicando il PSE otterremmo invece il risultato scorretto

$$p_R = 2E^2/R$$



5.5 Esempio 2

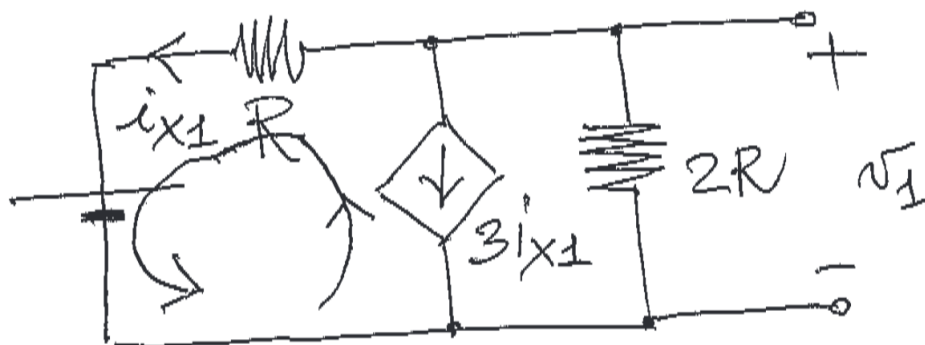
Determinare v usando il PSE in presenza di generatori controllati.



Nel circuito ci sono due cause e cioè i generatori indipendenti E e I , osservare che il generatore controllato non è una causa. Allora si ha

$$v = v_1 + v_2$$

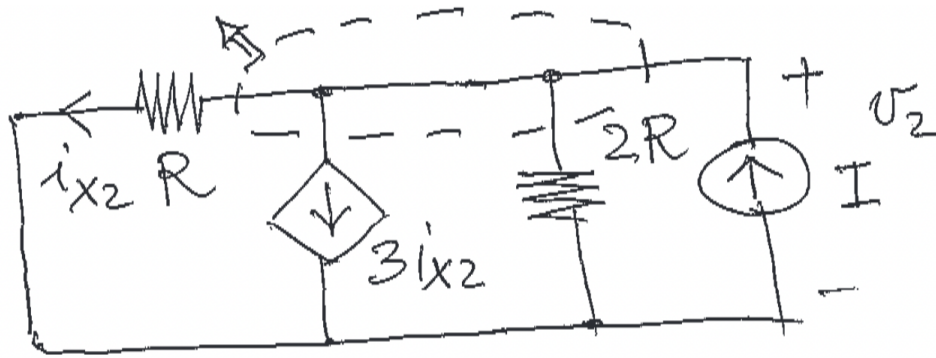
con v_1 effetto di E e v_2 con effetto di I .



Per v_1 , usando il Teorema di Millman, possiamo scrivere

$$v_1 = \frac{\frac{E}{R} - 3i_{x1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2E}{3} - 2Ri_{x1}$$

Eliminiamo i_{x1} scrivendo la KV alla maglia indicata



Si ha

$$v_1 = Ri_{x1} + E \quad \Rightarrow \quad i_{x1} = \frac{v_1 - E}{R}$$

e facendo sistema ottengo

$$v_1 = \frac{8}{9}E$$

Segue che il risultato finale non deve dipendere dalla grandezza di controllo i_{x1} . Determiniamo v_2 , da KI alla superficie Gaussiana si ha

$$i_{x2} + 3i_{x2} + \frac{v_2}{2R_I} = 0$$

Inoltre

$$i_{x2} = \frac{v_2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{2}{9}RI$$

Infine

$$v = v_1 + v_2 = \frac{8}{9}E + \frac{2}{9}RI$$

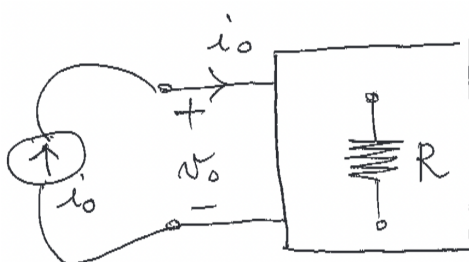
Capitolo 6

Resistenza equivalente di un Bipolo senza Memoria, Lineare, Omogeneo

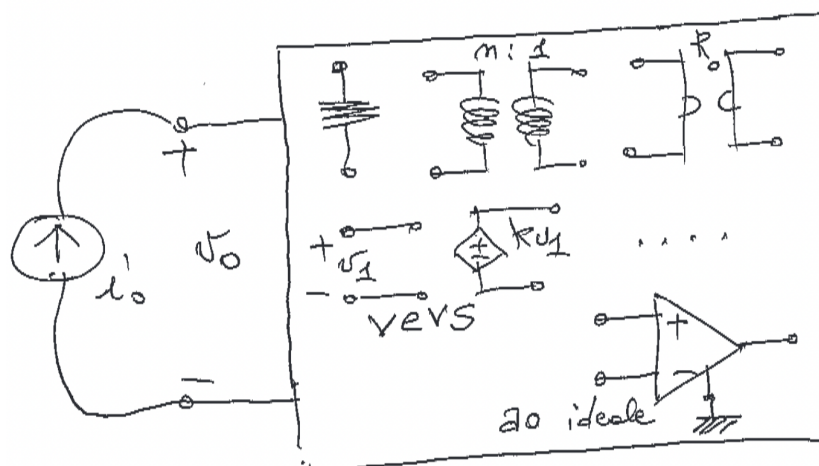
6.1 Bipolo di soli Resistori

Dalla fisica è ben noto il concetto di resistenza equivalente di un bipolo di soli resistori, alimentiamo il bipolo con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 e valutiamo la tensione v_0 ai morsetti. Secondo la convenzione degli utilizzatori, si ha

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} \Omega$$



Il concetto può essere esteso ad un qualsiasi bipolo che contiene al suo interno solo resistori ideali e reti due porte senza memoria lineari e omogenee. La definizione di R_{eq} è la stessa di prima, il bipolo è detto omogeneo in quanto non contiene generatore indipendenti di tensione e/o corrente.



6.2 Reti di soli resistori

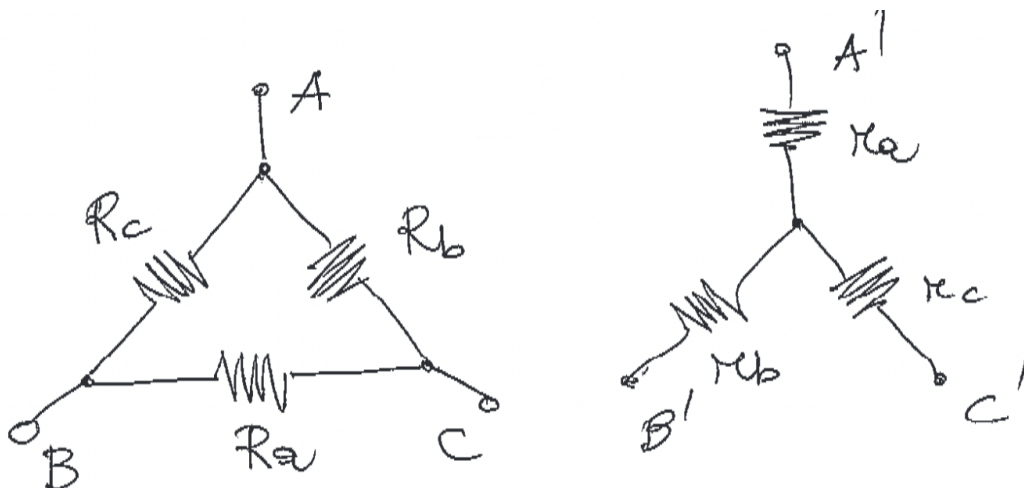
Le reti di soli resistori si suddividono in due classi

- reti a scala: contengono solo resistori collegati in serie o parallelo, si usano regole elementari su serie e parallelo per calcolare R_{eq}
- reti non a scala: non vi sono solo connessioni serie o parallelo, se possibile ci riconduciamo ad una rete a scala con opportune trasformazioni circuitali

6.2.1 Trasformazione Triangolo-Stella

I due tripoli $A - B - C$ e $A' - B' - C'$ sono equivalenti se e solo se

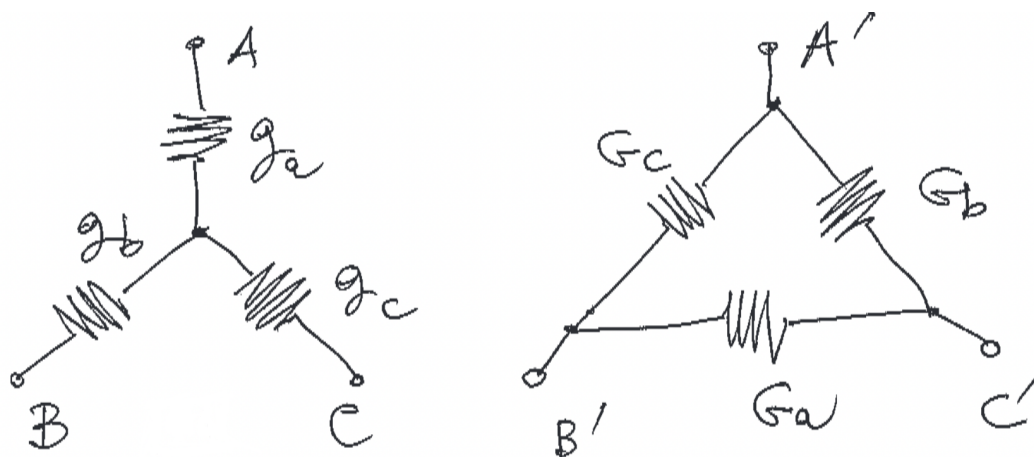
$$r_a = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad r_b = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad r_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$



6.2.2 Trasformazione Stella-Triangolo

I due tripoli $A - B - C$ e $A' - B' - C'$ sono equivalenti se e solo se

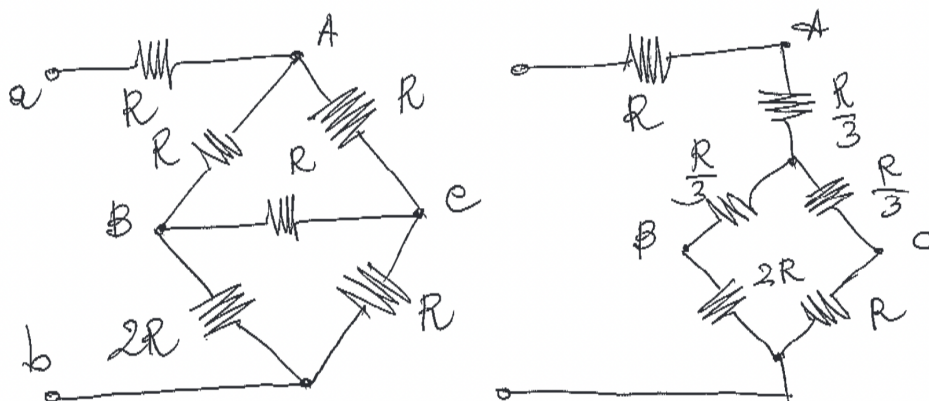
$$G_a = \frac{g_b g_c}{g_a + g_b + g_c} \quad G_b = \frac{g_a g_c}{g_a + g_b + g_c} \quad G_c = \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c}$$



6.2.3 Esempio

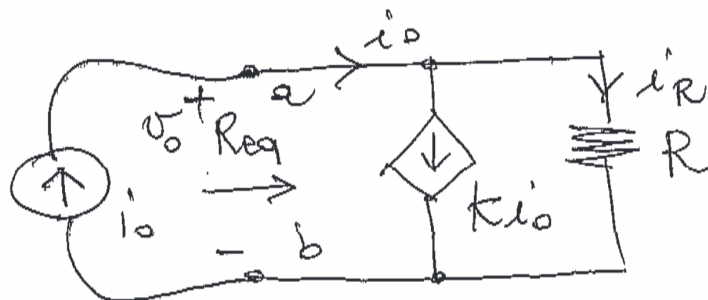
Determiniamo R_{eq} per il bipolo ab . I resistori non sono collegati né in serie né in parallelo, si tratta di una rete non a scala. Usando la trasformazione Triangolo-Stella per il tripolo $A-B-C$ ci riconduciamo a una rete a scala per la quale è immediato ottenere R_{eq} con la regola delle resistenze in serie o in parallelo. Si ha

$$R_{eq} = R + \frac{R}{3} + \frac{7R}{3} \parallel \frac{4R}{3}$$



6.3 Resistenza equivalente di bipoli attivi

Consideriamo bipoli che contengono al loro interno reti due porte attive. Come primo esempio, troviamo R_{eq} per il bipolo in figura contenente un CCCS



Dobbiamo usare la definizione alimentando il bipolo con un generatore di corrente indipendente i_0 , determinare v_0 e da

$$R_{eq} = v_0/i_0$$

si ha

$$i_0 = i_R + k i_0$$

e

$$i_R = v_0/R$$

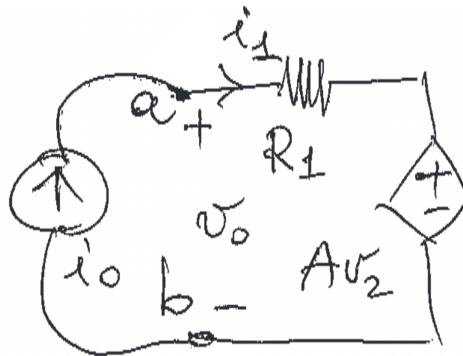
Quindi

$$R_{eq} = v_0/i_0 = R(1 - k)$$

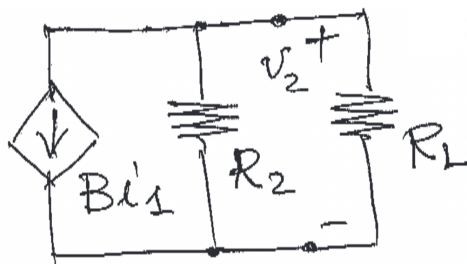
dove R_{eq} dipende in modo sostanziale dal generatore controllato, al variare di k segue che R_{eq} può assumere qualunque valore (positivo o negativo).

6.3.1 Esempio: determinare la resistenza equivalente

Determinare la R_{eq} del bipolo attivo ab .



Alimentiamo il bipolo con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 .



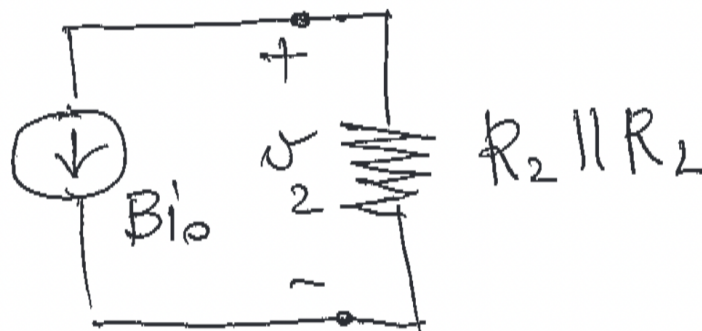
Determiniamo le grandezze di controllo dei generatori controllati (i_1 e v_2) in funzione di i_0 , v_0 e degli altri parametri noti A , B , R_1 , R_2 , R_L . Si ha

$$i_1 = i_0$$

inoltre

$$v_2 = -Bi_1R_2 \parallel R_L = -Bi_0R_2 \parallel R_L$$

I due generatori controllati sono di fatto diventati generatori indipendenti.

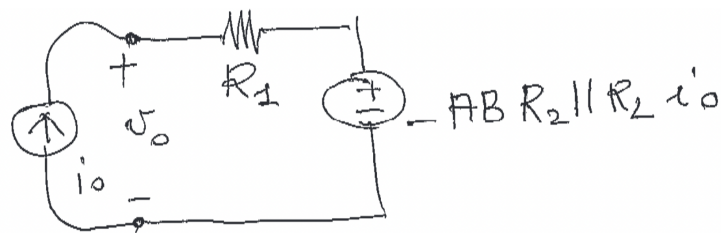


Scrivendo una KV alla maglia di ingresso otteniamo

$$v_0 = R_1i_0 - ABR_2 \parallel R_Li_0$$

quindi

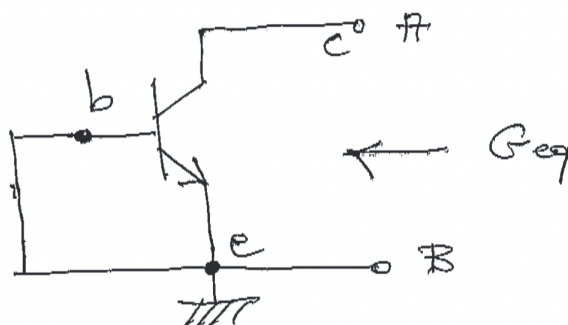
$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = R_1 - ABR_2 \parallel R_L$$



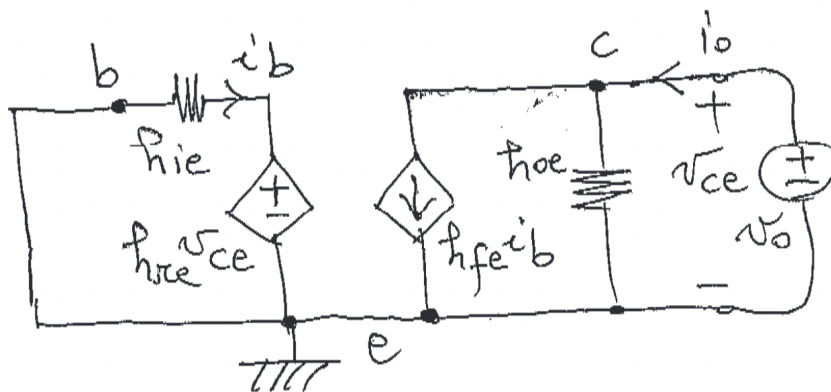
Il risultato per R_{eq} non deve dipendere dalle grandezze di controllo, eliminate al passo 2.

6.3.2 Esempio: determinare la conduttanza equivalente

Determinare la conduttanza equivalente G_{eq} del bipolo AB usando per il BJT il modello a parametri ibridi a emettitore comune.



Sostituiamo al BJT il modello noto e alimentiamo AB con un generatore di tensione v_0 .



Determiniamo i_0 e $G_{eq} = i_0/v_0$. Si ha

$$v_{ce} = v_0$$

e

$$i_b = -\frac{h_{re}v_0}{h_{ie}}$$

Dalla KI al nodo di uscita, otteniamo

$$i_0 = h_{oe}v_0 - \frac{h_{fe}h_{re}v_0}{h_{ie}}$$

quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = h_{oe} - \frac{h_{fe}h_{re}}{h_{ie}}$$

Capitolo 7

Teorema di Thevenin e di Norton

7.1 Introduzione

I teoremi permettono di ottenere una rappresentazione molto utile di bipoli lineari non omogenei che contengono resistori lineari e generatori indipendenti di tensione o corrente.

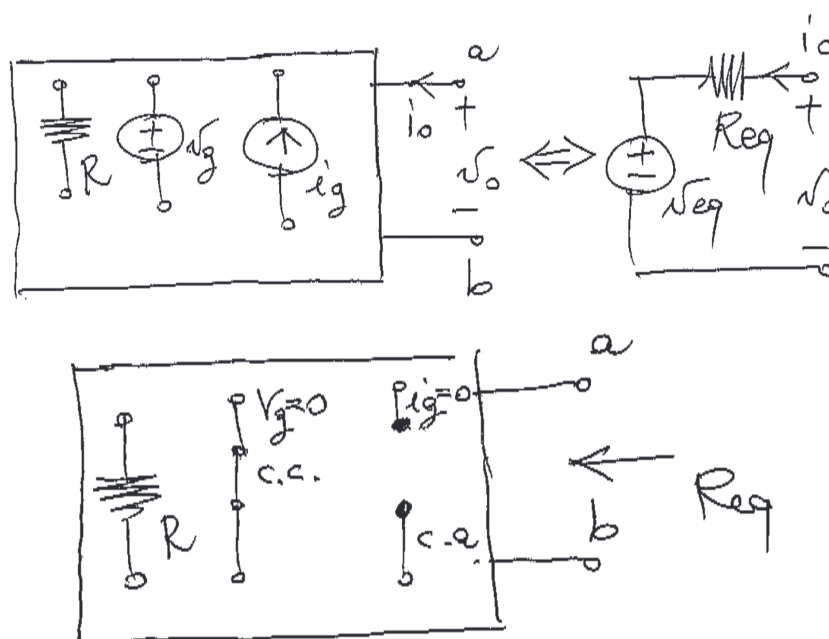
7.2 Teorema di Thevenin

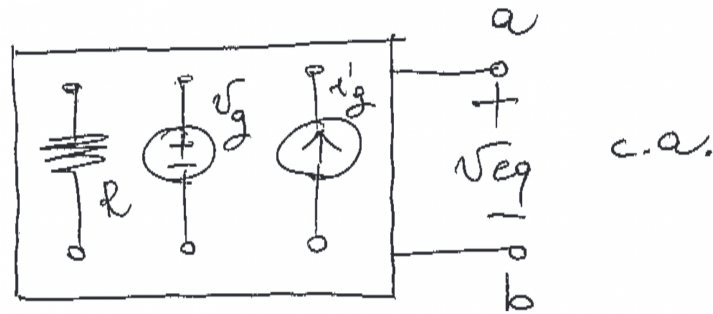
Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Il bipolo è equivalente a una resistenza equivalente R_{eq} in serie a un generatore di tensione equivalente v_{eq} così definiti:

- R_{eq} : resistenza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- v_{eq} : tensione ai morsetti ab quando sono lasciati a circuito aperto

$$a_{eq} = v_{c.a.} = v_{vuoto}$$

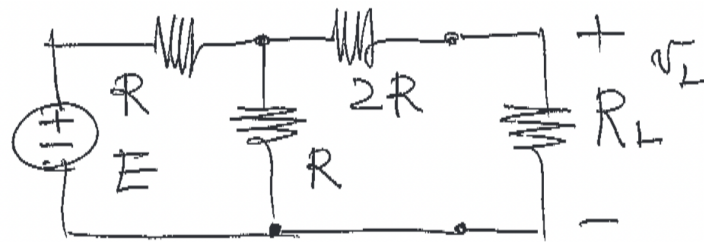
Usando uno schema a blocchi





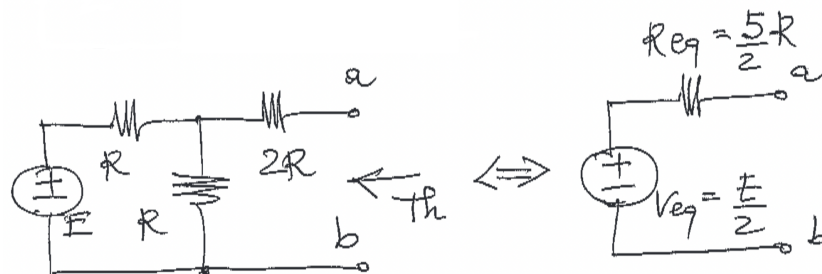
7.2.1 Esempio 1

Determinare v_L con il Teorema di Thevenin.



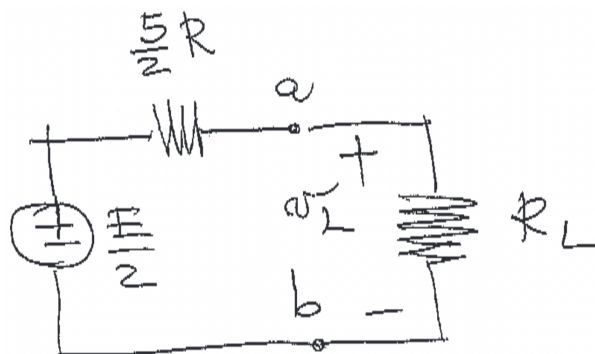
Scollegiamo il carico R_L e troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab . Notiamo che il resistore $2R$ è appeso (non vi passa corrente), possiamo determinare Thevenin.

$$R_{eq} = \frac{5}{2}R \quad v_{eq} = \frac{E}{2}$$



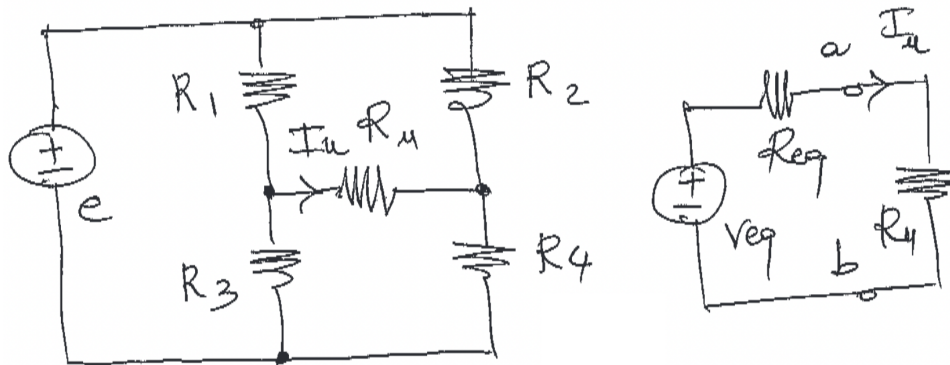
Ricollegiamo il carico R_L , dalla regola del partitore di tensione otteniamo

$$v_L = \frac{E}{2} \cdot \frac{R_L}{R_L + 5/2 R}$$



7.2.2 Esempio 2

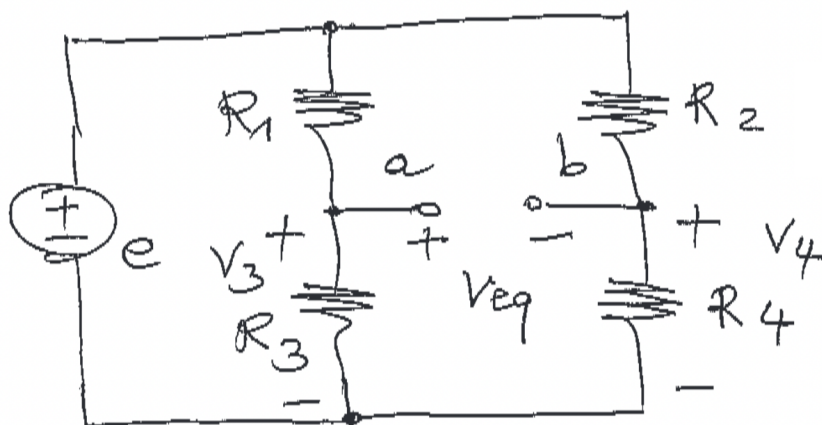
Determinare la corrente I_u per il circuito a ponte in figura.



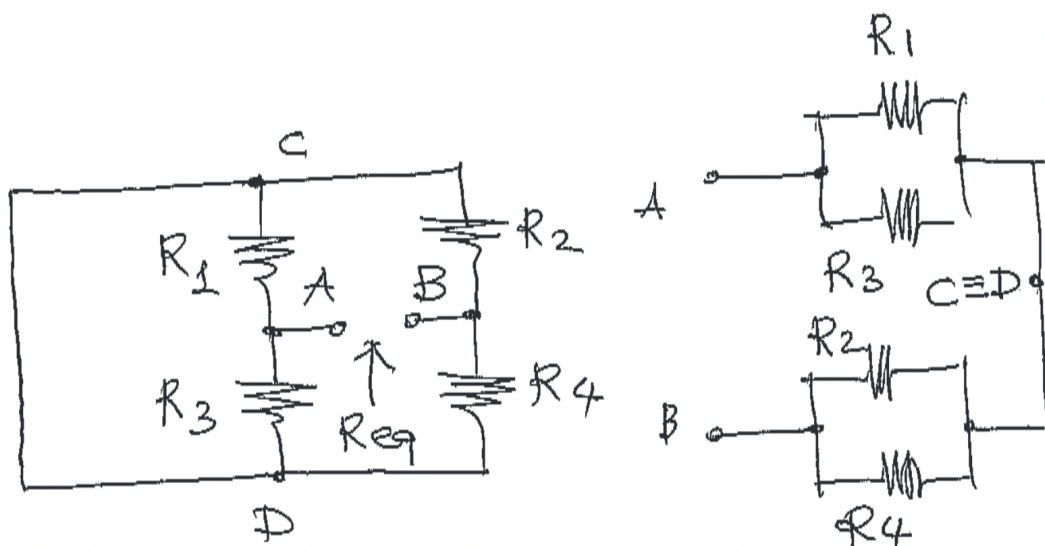
Scollegiamo R_u e determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab , usando la regola del partitore di tensione si ha

$$v_{eq} = V_3 - V_4 = e \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} - e \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

Per determinare R_{eq} disattiviamo il generatore di tensione sostituendolo con un corto circuito. Abbiamo



Semplifichiamo il corto circuito che collega i nodi C e D .



A questo punto, si ha

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

re-inserendo R_u si trova che

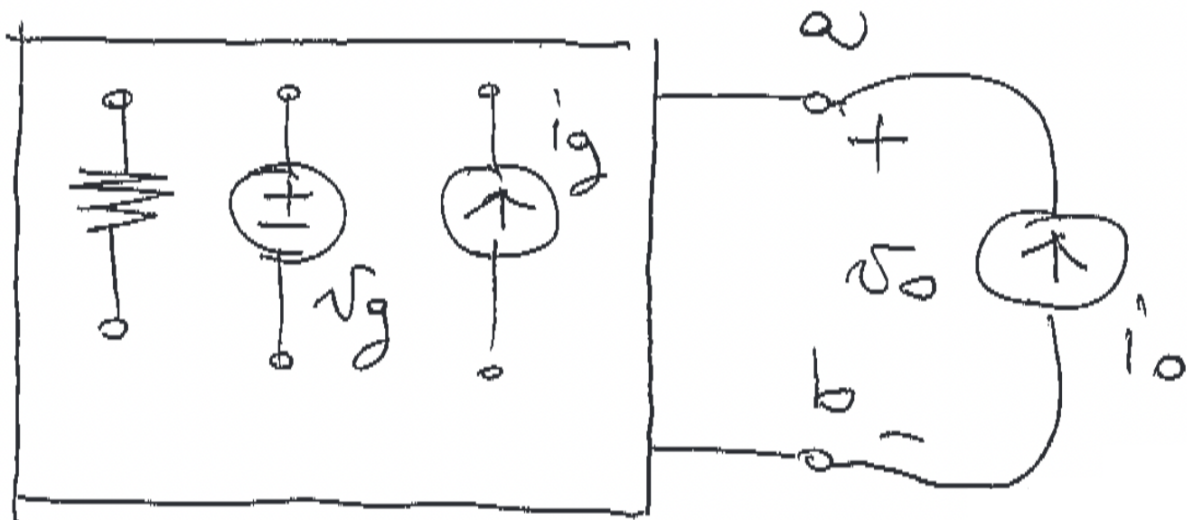
$$I_u = \frac{v_{eq}}{R_{eq} + R_u}$$

Verificare che il ponte è bilanciato cioè $I_u = 0$ se e solo se

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

7.2.3 Dimostrazione del Teorema di Thevenin

Alimentiamo il bipolo ab con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 e determiniamo la tensione v_0 usando il PSE. Questo è possibile in quanto la rete è lineare.

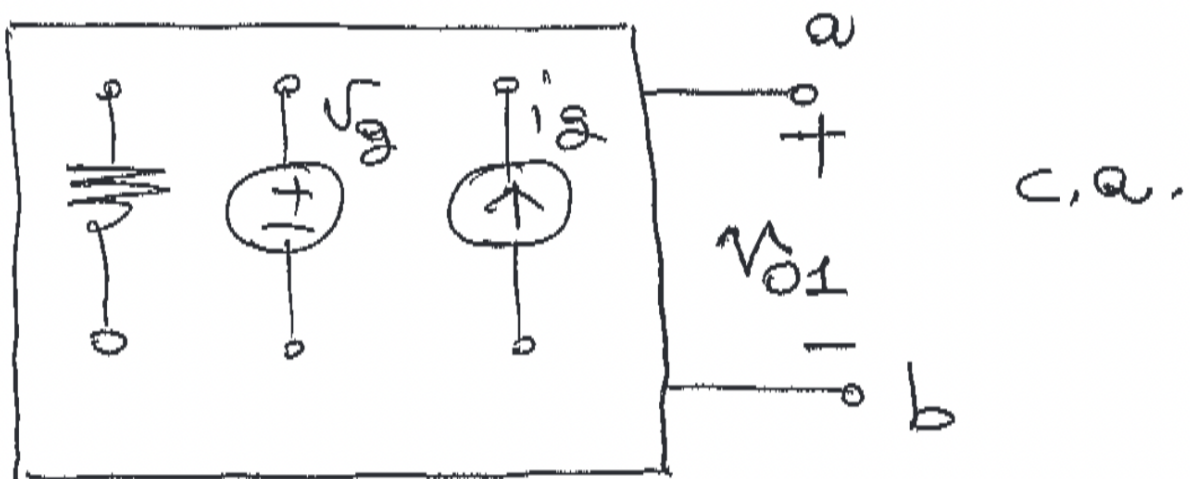


Raggruppiamo le cause in due insiemi:

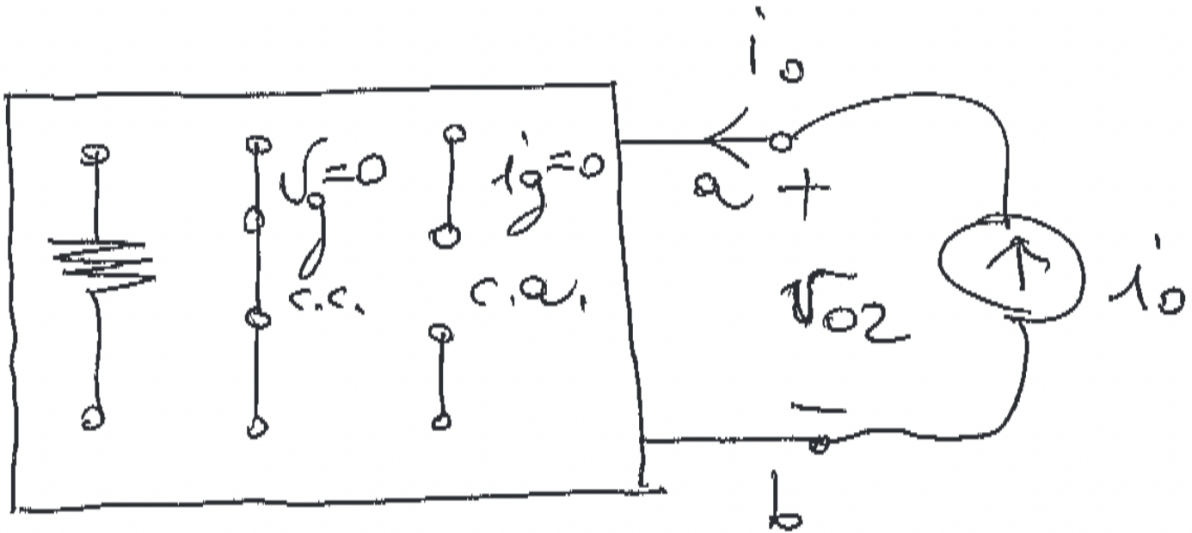
- la causa 1 è data da tutti i generatori di tensione e corrente interni al bipolo
- la causa 2 è data dal generatore di corrente esterno i_0

Dal PSE si ha

$$v_0 = v_{01} + v_{02}$$



Il bipolo omogeneo associato è



Disattivando i_0 si trova che

$$v_{01} = v_{c.a.} = v_{eq}$$

Disattivando i generatori interni al bipolo, troviamo invece che

$$v_{02} = R_{eq} i_0$$

quindi

$$v_0 = v_{01} + v_{02} = v_{eq} + R_{eq} i_0$$

che è la stessa relazione costitutiva del bipolo di Thevenin.

7.2.4 Osservazione

Dalla dimostrazione si nota che l'equivalente di Thevenin esiste purché il bipolo ab sia controllabile in corrente. Con Thevenin abbiamo ottenuto una rappresentazione di un bipolo tramite un generatore reale di tensione e con Norton, dualmente e sotto opportune ipotesi, otteniamo una rappresentazione tramite un generatore reale di corrente.

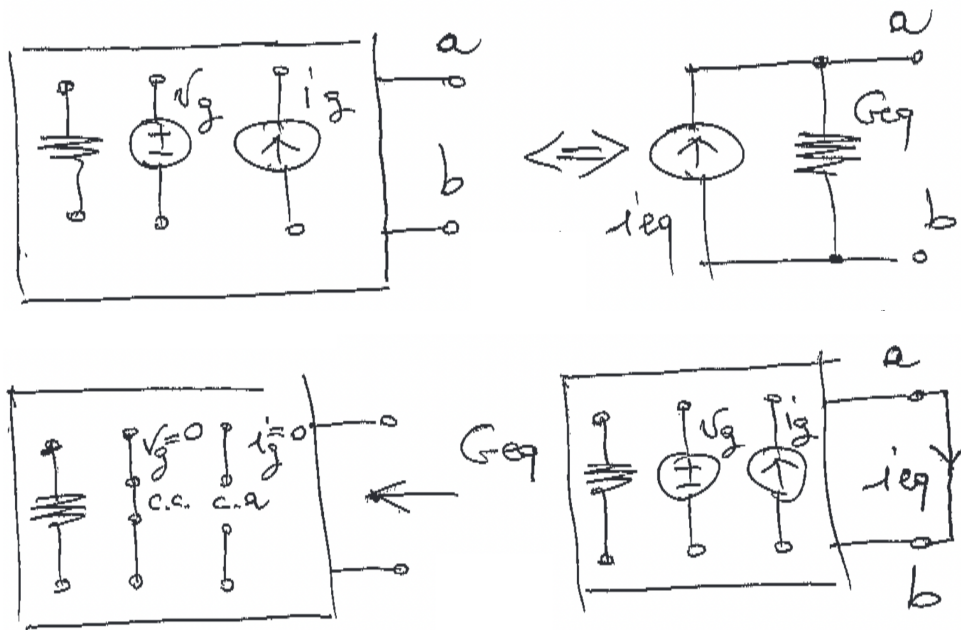
7.3 Teorema di Norton

Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Supponiamo che il bipolo sia controllabile in tensione, allora il bipolo è equivalente a una conduttanza equivalente G_{eq} in parallelo a un generatore di corrente equivalente i_{eq} così definiti:

- G_{eq} : conduttanza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- i_{eq} : corrente ai morsetti ab quando sono chiusi in corto circuito

$$i_{eq} = i_{c.c.}$$

Usando uno schema a blocchi



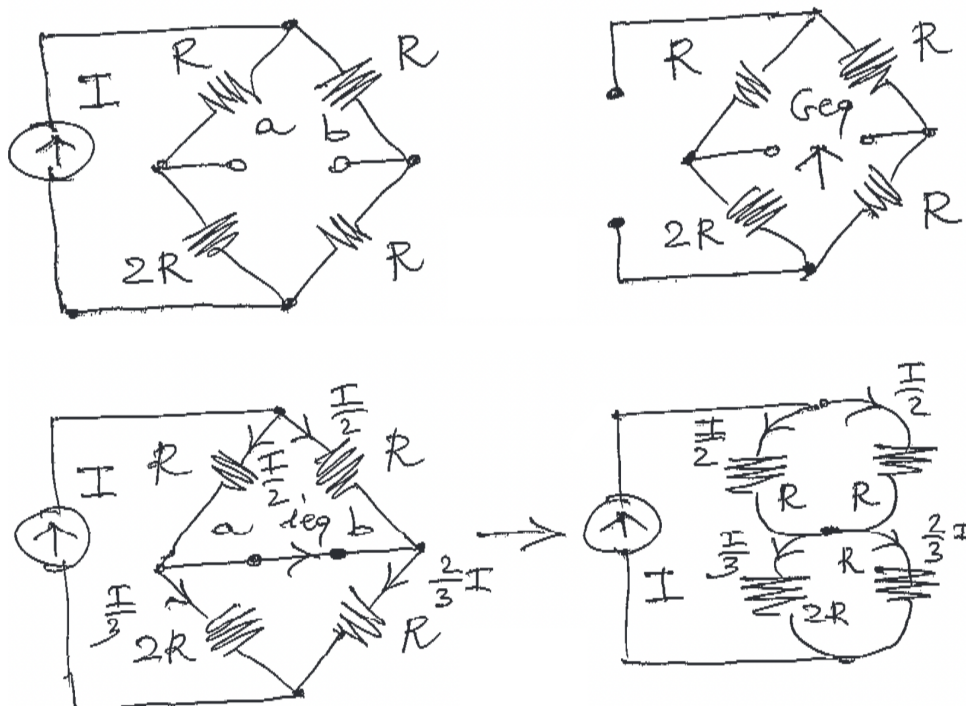
7.3.1 Dimostrazione del Teorema di Norton

Dimostrare il teorema usando il PSE. Notare che se un bipolo è controllabile sia in corrente che in tensione allora

$$i_{c.c.} = \frac{v_{c.a.}}{R_{eq}} \quad v_{c.a.} = R_{eq} i_{c.c.} \quad R_{eq} = \frac{v_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

7.3.2 Esempio

Determinare l'equivalente di Norton del bipolo ab



Si ha

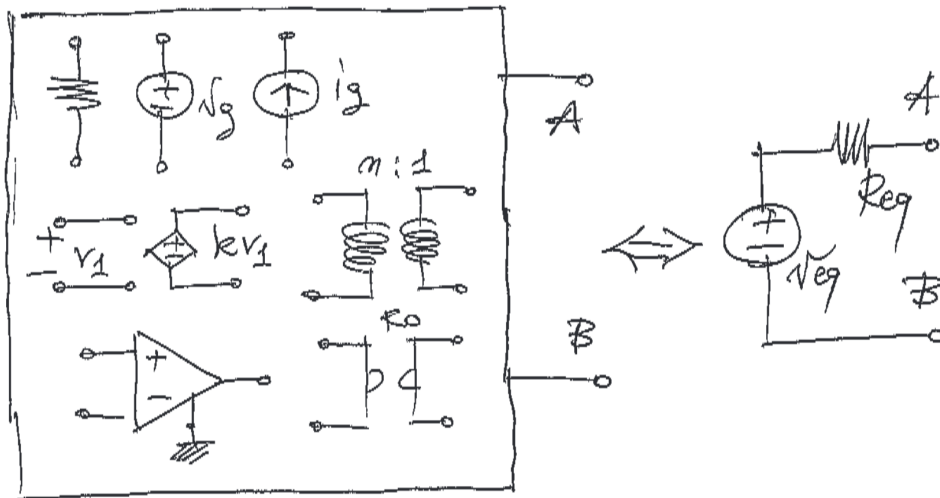
$$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$$

Notiamo che, dalla regola del partitore di corrente, si ha

$$i_{eq} = \frac{I}{2} - \frac{I}{3} = \frac{I}{6}$$

7.4 Presenza di generatori controllati e ao

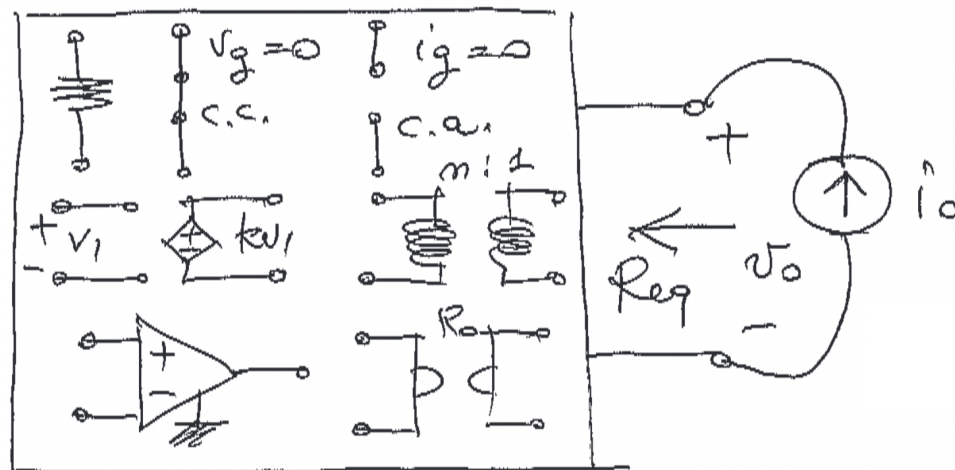
I teoremi di Thevenin e Norton sono facilmente estendibili al caso importante in cui il bipolo contiene generatori controllati e/o ao idali.



Supponiamo che il bipolo sia controllabile in corrente, vale ancora enunciato il Teorema di Thevenin. La definizione di v_{eq} e R_{eq} è la stessa di prima, per valutare la R_{eq} dobbiamo

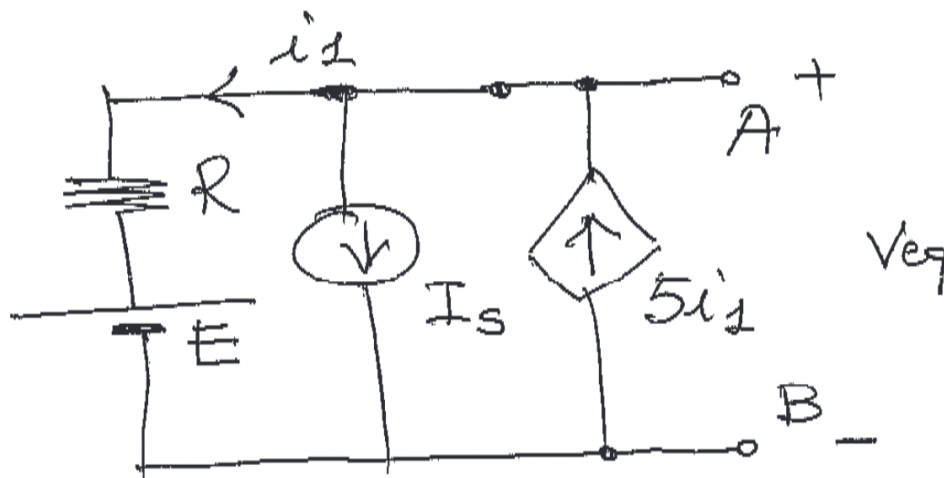
1. disattivare i generatori indipendenti di tensione e corrente
2. non disattivare i generatori controllati
3. lasciare così come sono gli ao

Il bipolo omogeneo associato per il quale applicando i_0 e valutando v_0 si ha $R_{eq} = v_0/i_0$.



7.5 Esempio: equivalente di Thevenin

Determinare l'equivalente di Thevenin del bipolo AB .



7.5.1 Primo metodo risolutivo

La tensione equivalente è valutabile dal circuito di partenza e si ha usando Millmann

$$v_{eq} = \frac{E/R - I_S + 5i_1}{1/R} = E - EI_S + 5Ri_1$$

Eliminando la grandezza di controllo e considerando che

$$v_{eq} = Ri_1 + E \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{v_{eq} - E}{R}$$

Facendo sistema, abbiamo

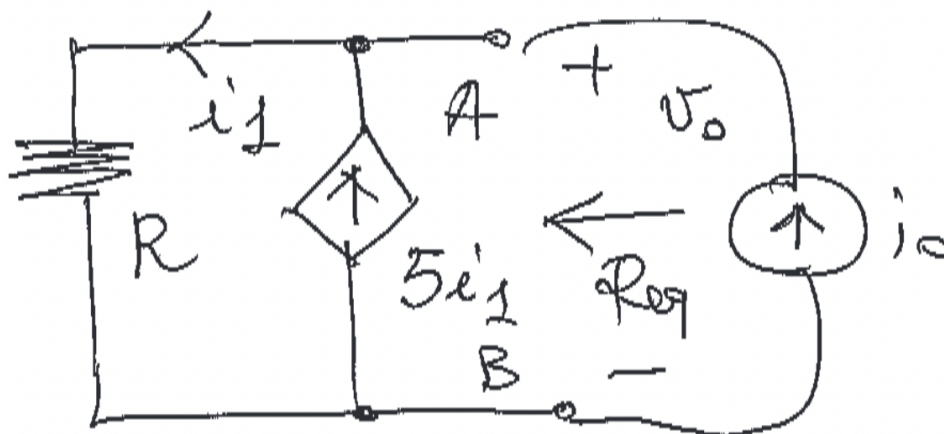
$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_S$$

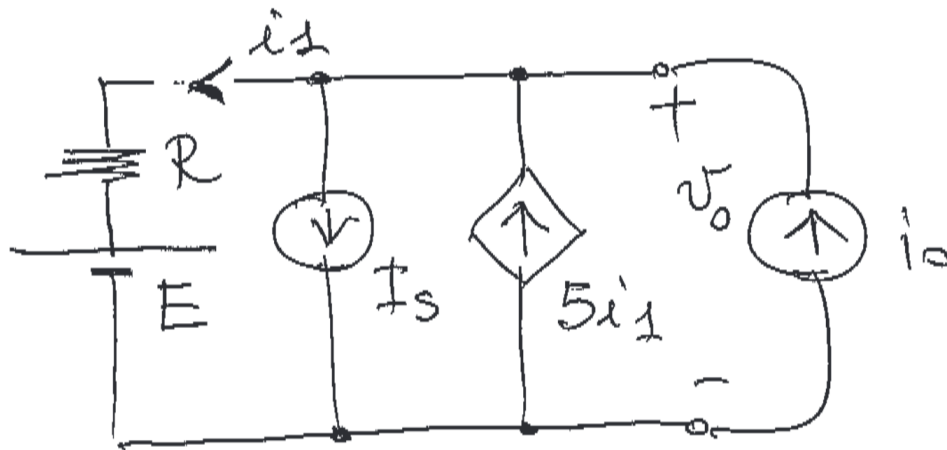
Per la resistenza equivalente, consideriamo il circuito per il quale

$$\begin{cases} i_0 = -5i_1 + i_1 \\ i_1 = v_0/R \end{cases}$$

da cui

$$R_{eq} = -\frac{R}{4}$$





7.5.2 Secondo metodo risolutivo

Determiniamo insieme v_{eq} e R_{eq} , alimentiamo il bipolo di partenza con un generatore indipendente di corrente i_0 . Si ha

$$v_0 = \frac{E/R - I_S + 5i_1 + i_0}{1/R} = E - EI_S + 5RI_1 + Ri_0$$

Eliminiamo la grandezza di controllo, considerando che

$$v_0 = Ri_1 + E$$

e

$$i_1 = \frac{v_0 - E}{R}$$

Facendo sistema, otteniamo

$$v_0 = E + \frac{R}{4}I_S - \frac{R}{4}i_0$$

Se confrontiamo con la relazione costitutiva

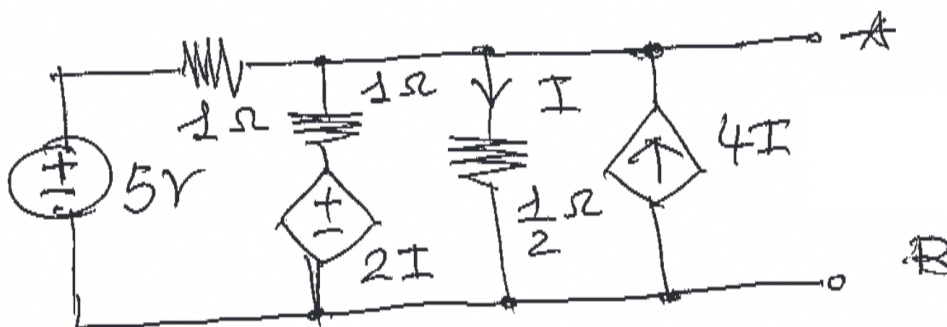
$$v_0 = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

del bipolo equivalente di Thevenin, otteniamo

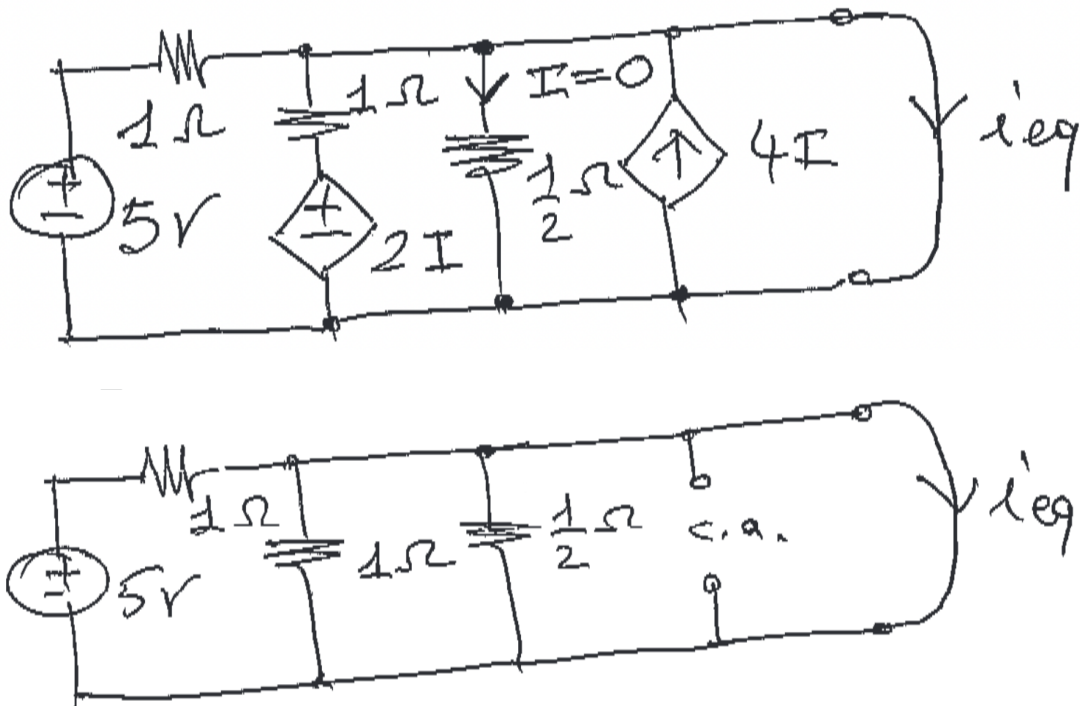
$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_S \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = -\frac{R}{4}$$

7.6 Esempio: equivalente di Norton

Determinare l'equivalente di Norton del bipolo AB.



Per $i_{c.c.}$ notare che si ha $I = 0$ dato che la resistenza da $1/2 \Omega$ è cortocircuitata quindi possiamo semplificare come mostrato. Ne consegue che $i_{c.c.} = 5 \text{ A}$.



Valutiamo G_{eq} , si ha

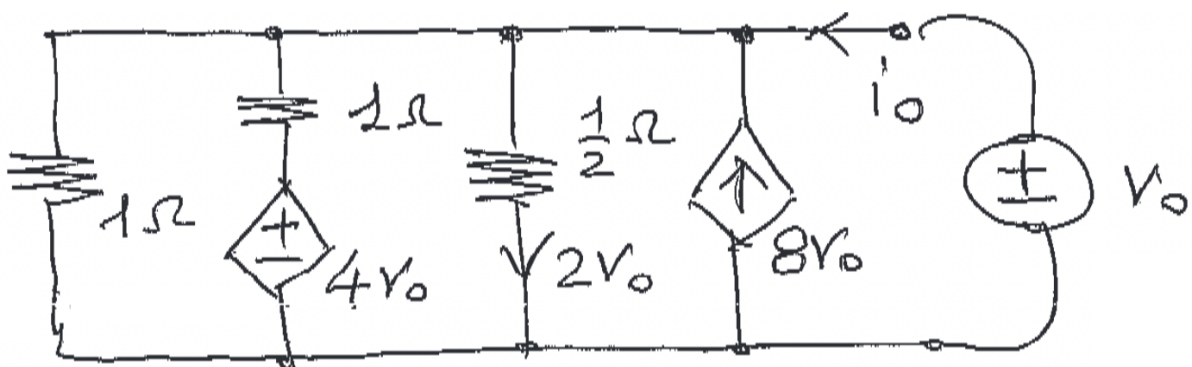
$$I = 2v_0$$

da cui scrivendo una KI per la linea Gaussiana indicata otteniamo

$$i_0 = v_0 + v_0 - 4v_0 + 2v_0 - 8v_0$$

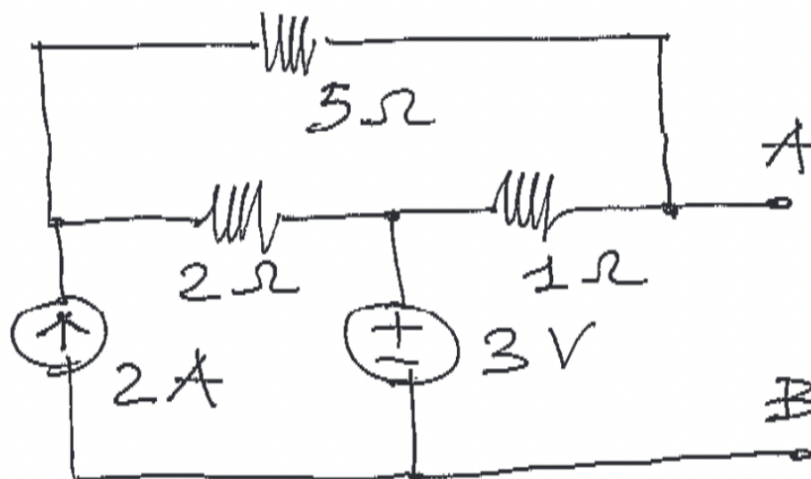
quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = -8 \Omega^{-1}$$



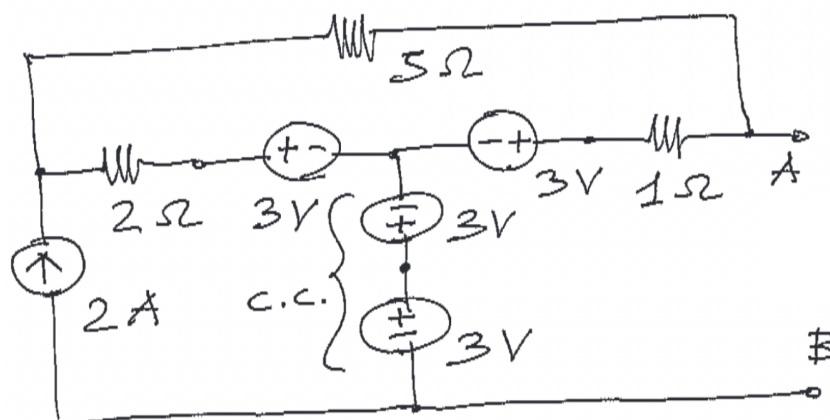
7.7 Metodo Topologico

Si può ottenere l'equivalente di Thevenin o Norton di un bipolo anche utilizzando trasformazioni circuitali, è detto metodo topologico. Illustriamo l'idea con un esempio

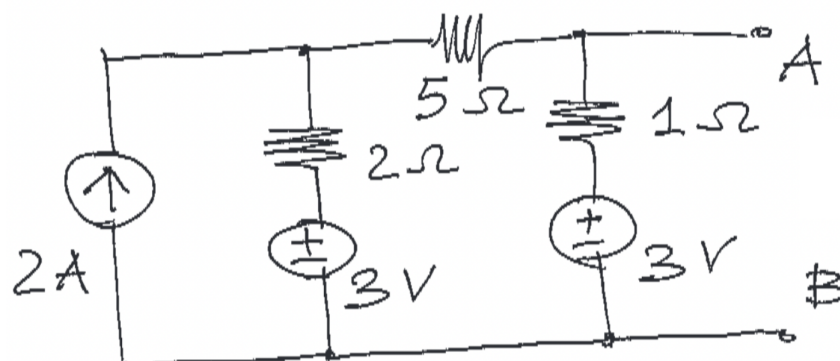


7.7.1 Trasformazione di generatori ideali di tensione

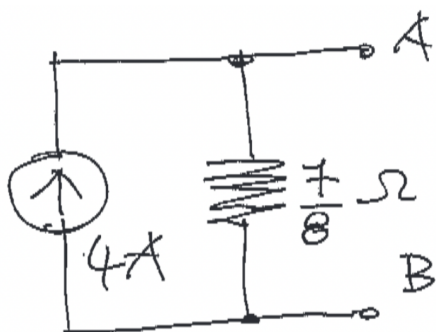
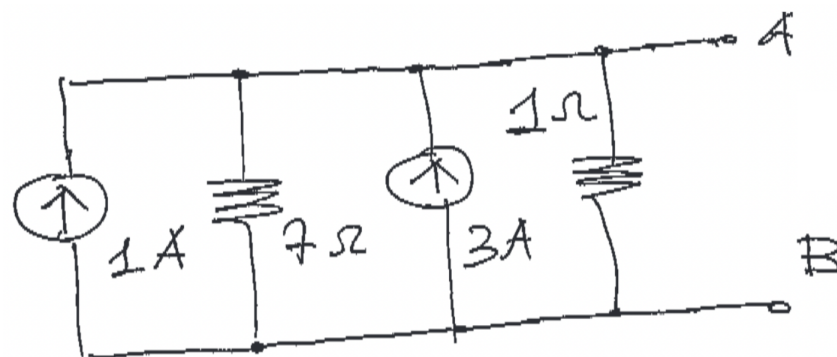
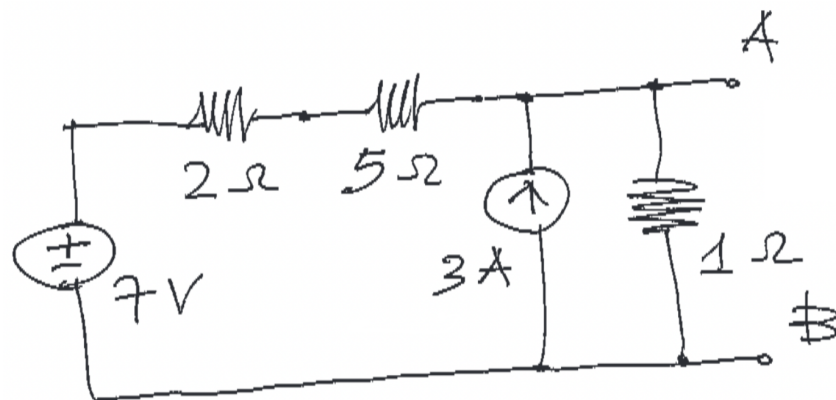
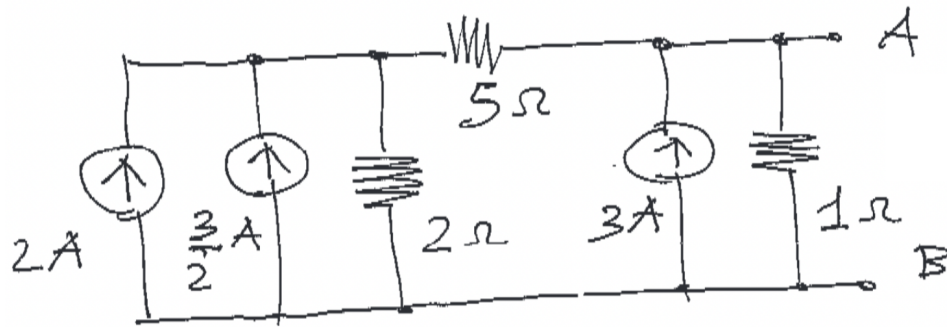
Per il bipolo in figura non sappiamo direttamente trasformare il generatore ideale di tensione. Possiamo introdurre un taglio (nodale) di generatori di tensione con la stessa tensione impressa in modo da non alterare le KV alle maglie quindi non alteriamo il comportamento ai morsetti AB.



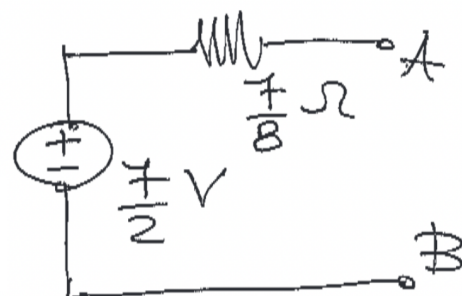
Eliminando il corto circuito, otteniamo il seguente bipolo.



Possiamo trasformare i generatori reali di tensione, procediamo con equivalenze circuitali fino ad ottenere l'equivalente di Thevenin richiesto.



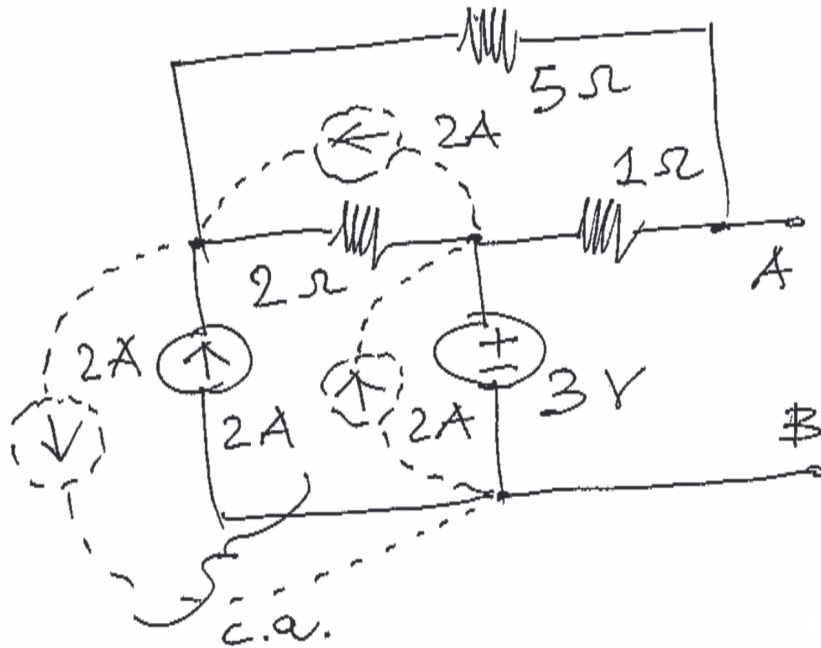
Norton



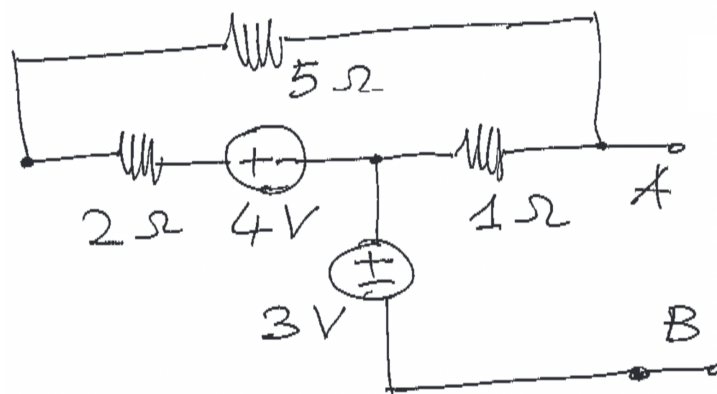
Thevenin

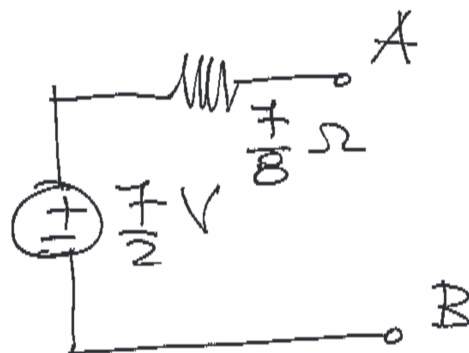
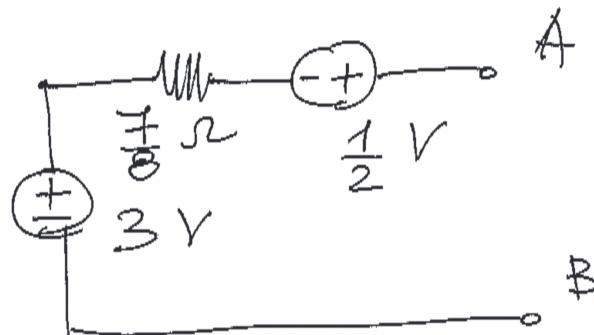
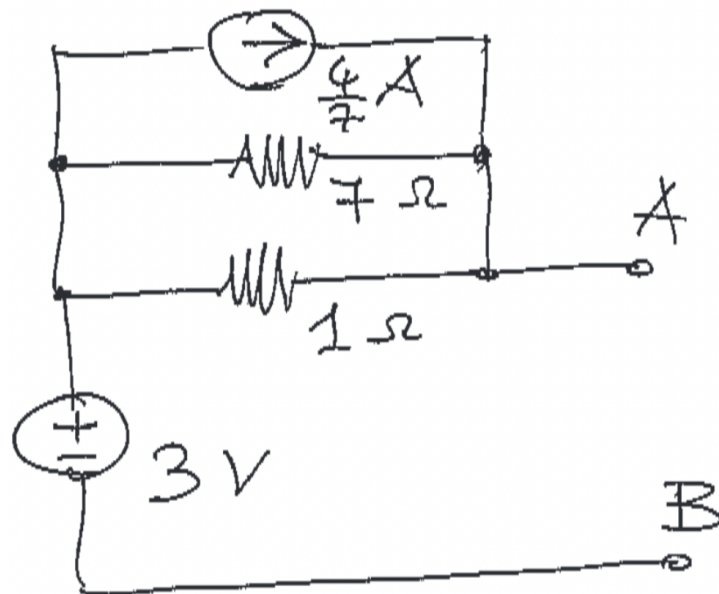
7.7.2 Trasformazione di generatori ideali di corrente

Una seconda possibilità è introdurre una maglia di generatori di corrente con correnti impresse tutte dello stesso valore in modo da non alterare le KI ai nodi, non cambia quindi il comportamento ai morsetti AB .



Eliminiamo il circuito aperto e procediamo anche in questo caso con equivalenze note fra bipoli fino ad ottenere l'equivalente di Thevenin.



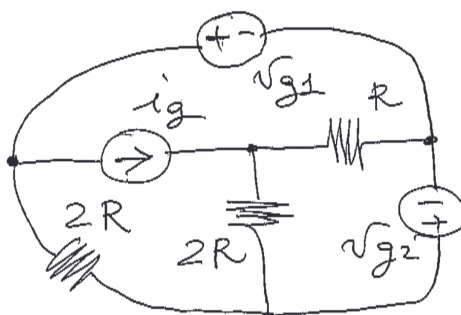


Capitolo 8

Elementi di Teoria dei Grafi

8.1 Variabili Ausiliarie

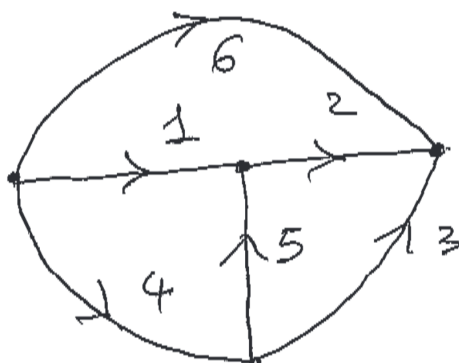
Consideriamo il seguente circuito con $l = 6$ bipoli e $n = 4$ nodi. Risolvere il circuito significa determinare tutte le tensioni v_i e correnti i_i dei bipoli. Sono $2l = 12$ incognite.



Si individua un sottoinsieme delle incognite dette incognite ausiliarie e si cerca di scrivere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili ausiliarie. Dalle variabili ausiliarie possiamo trovare indirettamente tutte le altre incognite, per individuare le variabili ausiliarie e scrivere il sistema risolvante facciamo uso di alcuni elementi di teoria dei grafi.

8.2 Grafo orientato e nodo

Consideriamo un grafo orientato associato al circuito, il grafo è connesso ed ha un numero di lati $l = 6$ pari al numero di bipoli. Supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ogni lato. Il nodo è un punto del grafo a cui sono connessi due o più bipoli, in questo caso $n = 4$.

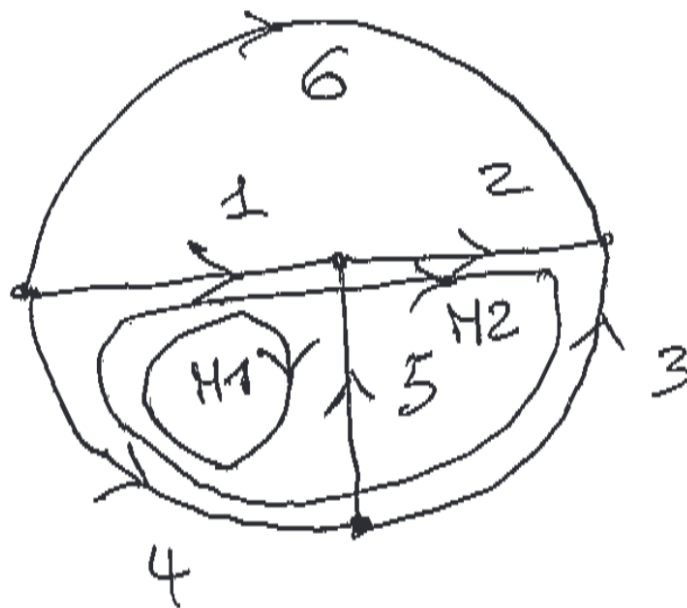


8.3 Maglia

La maglia è un insieme di lati che formano un percorso chiuso, ad esempio $M1 = \{1, 5, 4\}$, $M2 = \{1, 2, 3, 4\}$, etc. Per ogni maglia possiamo scrivere una KV, ad esempio orientando $M1$ e $M2$ in senso positivo orario otteniamo le KV

$$M1 : v_1 - v_5 - v_4 = 0$$

$$M2 : v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$$



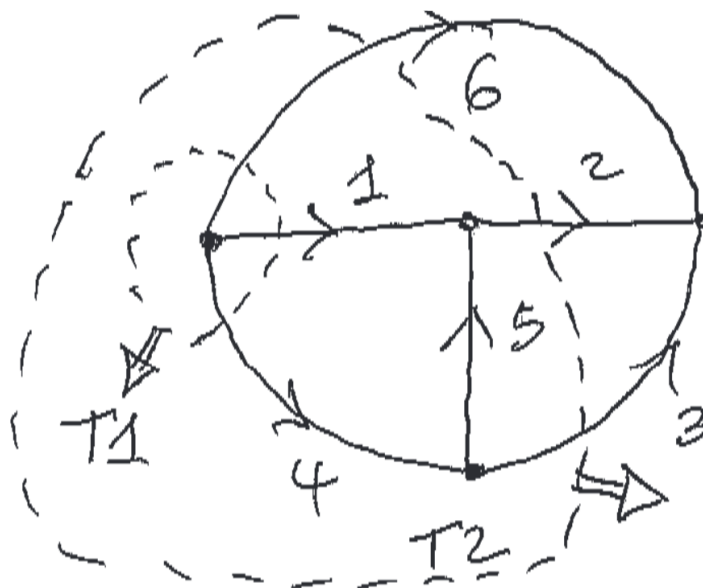
Ogni KV lungo una maglia stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le tensioni dei lati che fanno parte della maglia, le tensioni dei lati

$$v_i \quad i = 1, 2, \dots, l$$

non sono quindi tutte indipendenti fra loro.

8.4 Taglio

Consideriamo una linea chiusa (linea Gaussiana) che taglia il grafo in due parti senza passare dai nodi, per taglio si intende l'insieme dei lati che sono intersecati dalla linea chiusa.



Ad esempio, $T1 = \{1, 6, 4\}$ e $T2 = \{6, 2, 3\}$. Orientiamo ciascun taglio scegliendo una normale positiva alla linea chiusa (uscente o entrante), nel caso in figura otteniamo le KI

$$T1 : i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

$$T2 : i_6 + i_2 + i_3 = 0$$

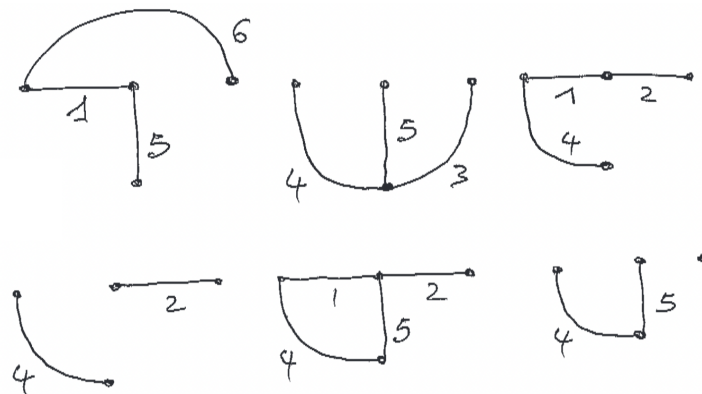
Ogni KI per un taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le correnti dei lati che fanno parte del taglio, le correnti dei lati

$$i_i \quad i = 1, 2, \dots, l$$

non sono quindi tutte indipendenti fra loro.

8.5 Albero

Un albero è un insieme connesso di lati del grafo che tocca tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie).

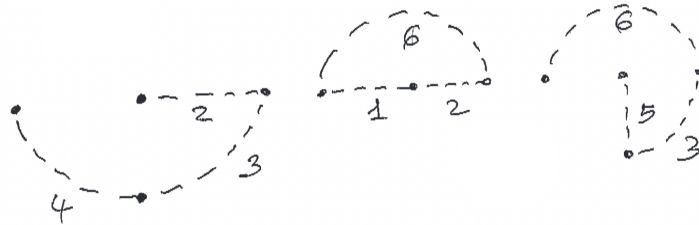


8.5.1 Proprietà

Ogni albero ha $n - 1$ rami infatti il primo ramo connette 2 nodi, aggiungendo un ramo connesso un terzo nodo. Procedendo così riusciamo a connettere tutti gli n nodi con $n - 1$ rami.

8.6 Coalbero

Il coalbero è un insieme di lati del grafo che non fanno parte dell'albero.

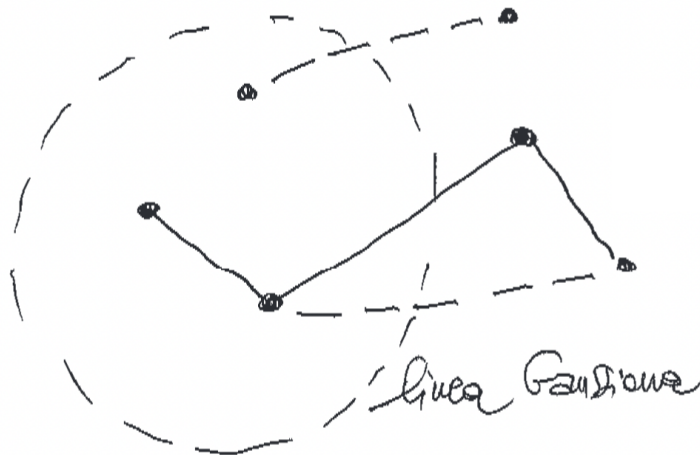


8.6.1 Proprietà 1

Ogni coalbero ha $l - n + 1$ corde, convenzionalmente i rami dell'albero vengono indicati a tratto continuo mentre le corde sono tratteggiate.

8.6.2 Proprietà 2

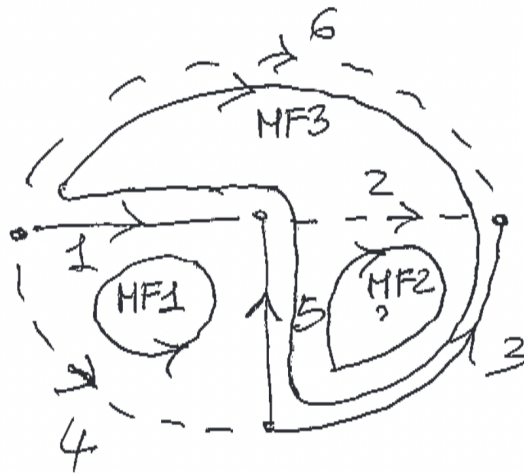
Un coalbero non contiene taglio, non è possibile tagliare il grafo in due parti intersecando solo corde.



Consideriamo una linea chiusa che taglia il grafo in due parti, prendiamo un nodo interno ed un nodo esterno alla linea chiusa. Dato che l'albero connette tutti i nodi ed è connesso, vi sarà un percorso lungo l'albero che collega il nodo interno a quello esterno quindi la linea chiusa interseca almeno un ramo dell'albero.

8.7 Maglia Fondamentale (MF)

Se aggiungiamo una corda ad un albero si forma una maglia costituita dalla corda e, per il resto, da rami dell'albero. Tale maglia è detta maglia fondamentale.



Le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde del coalbero, vi sono quindi $l - n + 1$ maglie fondamentali associate all'albero. Ciascuna maglia fondamentale si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente della corda che le individua

$$MF1 = \{1, 5, 4\}$$

$$MF2 = \{2, 3, 5\}$$

$$MF3 = \{1, 3, 5, 6\}$$

8.7.1 Tensioni Indipendenti

Indichiamo con

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

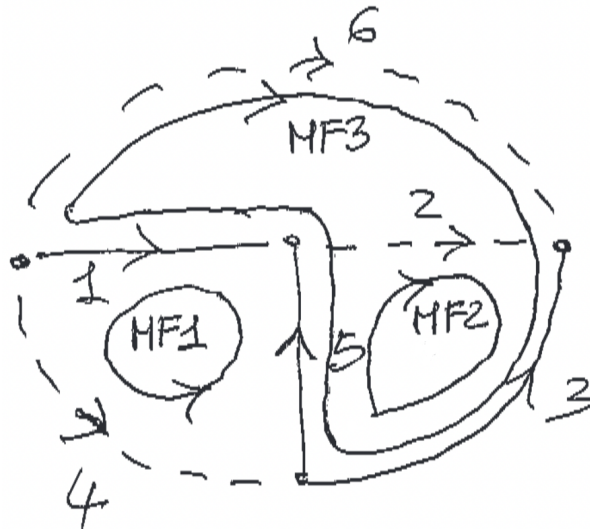
il vettore delle tensioni dei lati del grafo. Inoltre indichiamo con $\vec{v}_a$ il vettore delle $n - 1$ tensioni dei rami dell'albero e con $\vec{v}_c$ il vettore delle $l - n + 1$ tensioni delle corde del coalbero. Le tensioni $\vec{v}_a$ formano una base per lo spazio delle tensioni dei lati del grafo cioè

1. le tensioni $\vec{v}_a$ sono indipendenti fra di loro
2. da $\vec{v}_a$ si possono determinare le tensioni dipendenti $\vec{v}_c$ scrivendo $l - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

Verifichiamo quanto detto precedentemente

1. deriva dal fatto che l'albero non contiene maglie
2. facciamo una verifica per mezzo di un esempio, scegliamo l'albero in figura per cui

$$\vec{v}_a = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_5 \end{bmatrix}^T \quad \vec{v}_c = \begin{bmatrix} v_2 & v_4 & v_6 \end{bmatrix}^T$$



Segue che le $l - n + 1 = 3$ KV alle MF sono date da

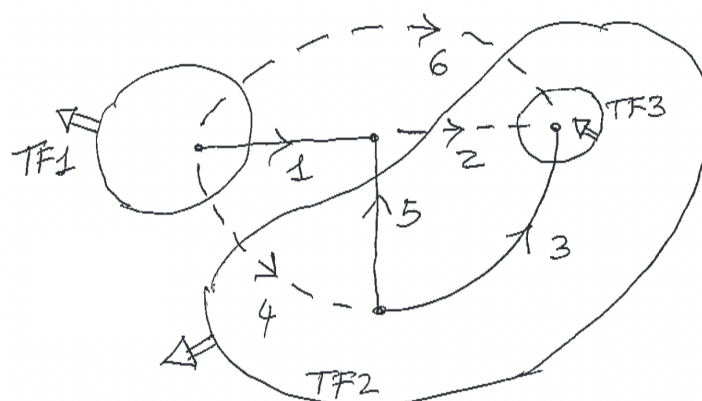
$$\begin{cases} v_4 - v_1 + v_5 = 0 \\ v_2 - v_3 + v_5 = 0 \\ v_6 - v_1 - v_3 + v_5 = 0 \end{cases}$$

Notare che tali KV sono fra di loro linearmente indipendenti infatti ogni equazione contiene la tensione della corda che individua la MF corrispondente, tale tensione non appare per costruzione in altre KV. Risolvendo otteniamo le $l - n + 1 = 3$ tensioni dipendenti delle corde in funzione delle tensioni indipendenti dei rami dell'albero

$$\begin{cases} v_4 = v_1 - v_5 \\ v_2 = v_3 - v_5 \\ v_6 = v_1 + v_3 - v_5 \end{cases}$$

8.8 Taglio Fondamentale (TF)

Il taglio fondamentale è un taglio che contiene un ramo dell'albero e, per il resto, solamente corde del coalbero. Ogni taglio si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente del ramo corrispondente.



8.8.1 Proprietà

I tagli fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero, vi sono quindi $n - 1$ tagli fondamentali associati all'albero

$$TF1 = \{1, 4, 6\}$$

$$TF2 = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$TF3 = \{2, 3, 6\}$$

8.8.2 Correnti Indipendenti

Indichiamo con

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

il vettore delle correnti dei lati del grafo. Inoltre indichiamo con $\vec{i}_a$ il vettore delle $n - 1$ correnti dei rami dell'albero e con $\vec{i}_c$ il vettore delle $l - n + 1$ correnti delle corde del coalbero. Le correnti $\vec{i}_c$ formano una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo cioè

1. le correnti $\vec{i}_c$ sono indipendenti fra di loro
2. da $\vec{i}_c$ si possono determinare le correnti dipendenti $\vec{i}_a$ scrivendo $n - 1$ KI ai TF associate all'albero

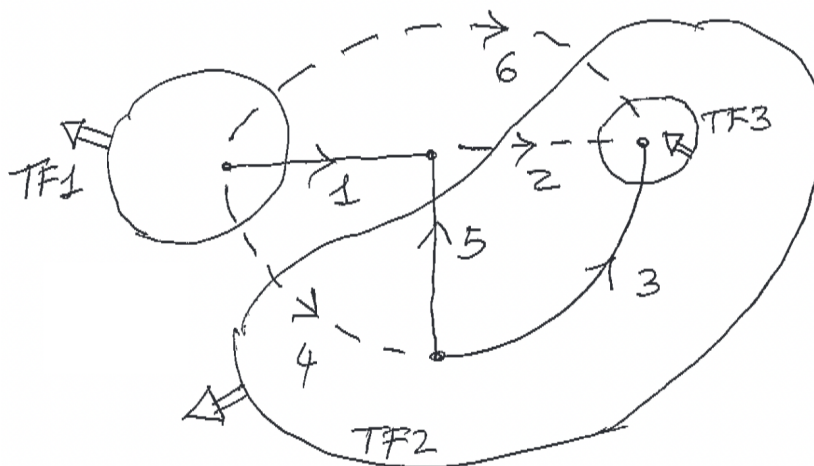
Verifichiamo quanto detto precedentemente

1. deriva dal fatto che il coalbero non contiene tagli
2. facciamo una verifica per mezzo di un esempio, scegliamo l'albero in figura per cui

$$\vec{i}_a = \begin{bmatrix} i_1 & i_3 & i_5 \end{bmatrix}^T$$

e

$$\vec{i}_c = \begin{bmatrix} i_2 & i_4 & i_6 \end{bmatrix}^T$$



Segue che le $n - 1 = 3$ KI ai TF sono date da

$$\begin{cases} i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0 \\ i_3 + i_2 + i_6 = 0 \end{cases}$$

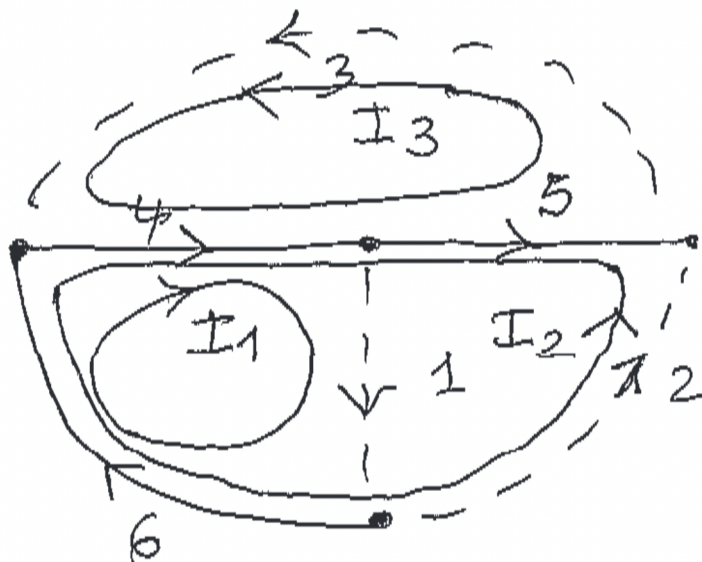
Notare che tali KI sono fra di loro linearmente indipendenti infatti ogni equazione contiene la corrente del ramo che individua la TF corrispondente, tale corrente non appare per costruzione in altre KI. Risolvendo otteniamo le $n - 1 = 3$ correnti dipendenti dei rami dell'albero in funzione delle correnti indipendenti delle corde del coalbero

$$\begin{cases} i_1 = -i_4 - i_6 \\ i_5 = i_2 + i_4 + i_6 \\ i_3 = -i_2 - i_6 \end{cases}$$

8.9 Correnti cicliche delle maglie di Maxwell

Consideriamo per esempio: facciamo percorrere ogni MF da una corrente I_i che si rinchiede su se stessa, detta corrente ciclica o di Maxwell. Ovviamente vi sono $l - n + 1 = 3$ correnti cicliche delle MF, inoltre tali correnti risultano in corrispondenza biunivoca con le correnti delle corde

$$l_1 = i_1 \quad l_2 = i_2 \quad I_3 = i_3$$



Ne consegue che anche le correnti cicliche

$$I_{cicliche} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$$

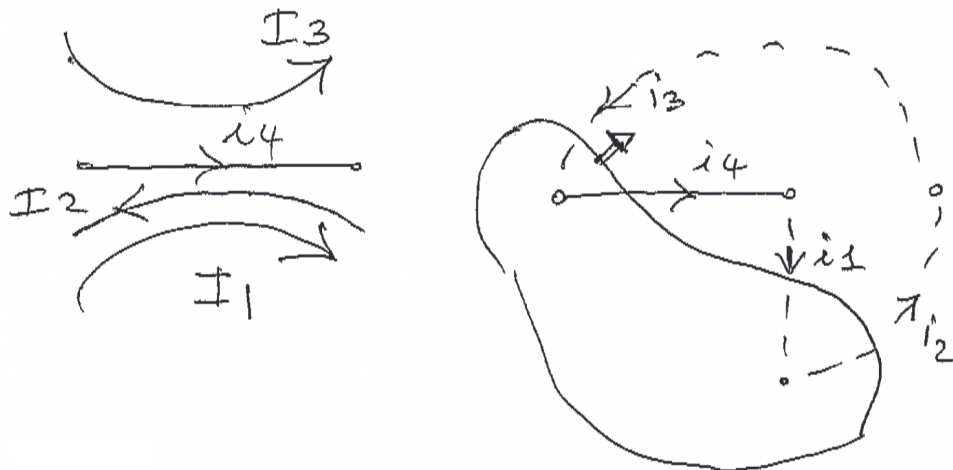
costituiscono una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo. Le correnti dipendenti dei rami dell'albero si possono ottenere per sovrapposizione delle correnti cicliche. Ad esempio, per il ramo 4 si ha

$$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$$

dato che

$$I_i = i_i \quad i = 1, 2, 3$$

si vede che ciò equivale a determinare la corrente del ramo usando una KI al TF individuato da tale ramo.



Si ha che la KI è

$$i_4 - i_3 - i_1 + i_2 = 0$$

8.10 Metodo Totale del Tableau

Consideriamo un circuito con l bipoli e n nodi, inoltre un grafo orientato ad esso associato e scegliamo un albero. Le incognite sono le tensioni

$$v_i \quad i = 1, 2, \dots, l$$

e le correnti

$$i_i \quad i = 1, 2, \dots, l$$

dei lati del grafo, in totale vi sono $2l$ incognite. Le equazioni di tipo topologico (dipendono solo dal grafo orientato) sono

- $l - n + 1$ KV alle MF associate all'albero
- $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

In totale, abbiamo $l - n + 1 + n - 1 = l$ equazioni topologiche. Le equazioni tipologiche (dipendono dalla natura degli elementi presenti) sono

- l relazioni costitutive dei bipoli

Complessivamente sappiamo perciò scrivere $l + l = 2l$ equazioni, tante quante sono le incognite (il problema è ben posto). Nei principali metodi di analisi non si usa l'intero insieme delle incognite ma un suo sottoinsieme (variabili ausiliarie), ad esempio nella versione più semplice del metodo delle maglie fondamentali abbiamo che le variabili ausiliarie sono le $l - n + 1$ correnti delle corde.

Capitolo 9

Metodi di Analisi di Reti Resistive

9.1 Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)

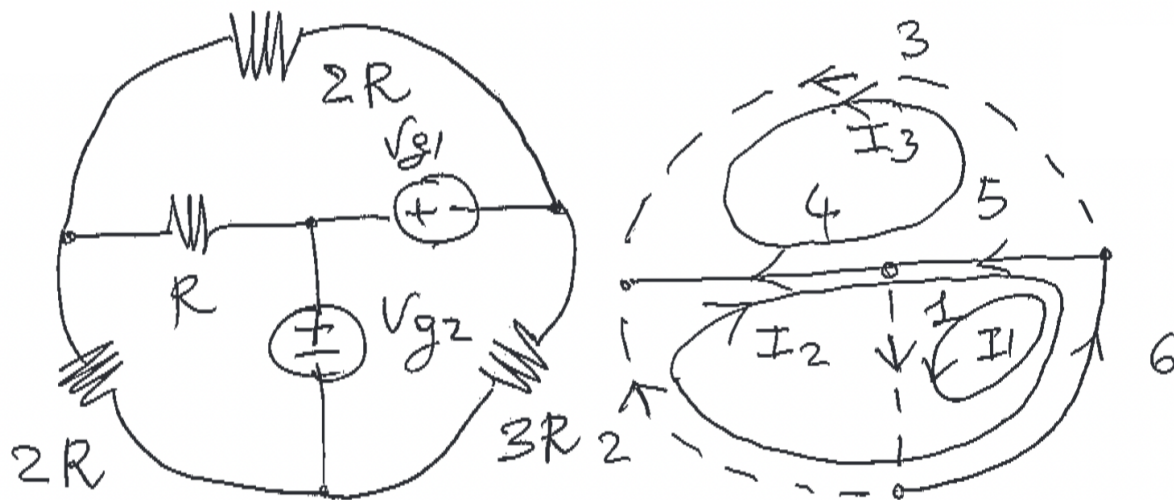
Il MMF è per reti di soli bipoli controllabili in corrente, in particolare reti di resistori e generatori indipendenti ideali di tensione. Discutiamo il metodo con un esempio: associamo alla rete un grafo orientato e scegliamo un albero. Le incognite del MMF sono le correnti cicliche delle MF

$$\vec{I}_{cicliche} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{bmatrix}^T$$

oppure equivalentemente le correnti

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T$$

delle corde. In generale, si hanno $l - n + 1$ incognite.



Mostriamo che è sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $l - n + 1$. Procediamo con 3 passi:

1. scriviamo $l - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$\begin{cases} v_1 + v_5 + v_6 = 0 \\ v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0 \\ v_3 - v_4 - v_5 = 0 \end{cases}$$

2. esprimiamo le correnti dei lati del grafo (in generale sono l) in funzione delle correnti cicliche, è sempre possibile in quanto le correnti cicliche sono una base per lo spazio delle correnti dei lati. Usiamo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$\begin{cases} i_1 = I_1 \\ i_2 = I_2 \\ i_3 = I_3 \\ i_4 = -I_2 - I_3 \\ i_5 = I_1 - I_2 - I_3 \\ i_6 = I_1 - I_2 \end{cases}$$

3. dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in corrente, possiamo esprimere le tensioni dei bipoli (l) in funzione delle correnti dei bipoli. Usiamo le l relazioni costitutive dei bipoli controllabili in corrente

$$\begin{cases} v_1 = v_{g2} \\ v_2 = 2Ri_2 = 2RI_2 \\ v_3 = 2Ri_3 = 2RI_3 \\ v_4 = Ri_4 = R(-I_2 - I_3) \\ v_5 = -v_{g1} \\ v_6 = 3Ri_6 = 3R(I_1 - I_2) \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema al passo 1, otteniamo un sistema di $l - n + 1$ equazioni nelle $l - n + 1$ incognite date dalle correnti cicliche delle MF. In questo caso $l - n + 1 = 3$ e in forma vettoriale si ha

$$\begin{bmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{g1} - v_{g2} \\ -v_{g1} \\ -v_{g1} \end{bmatrix}$$

In generale, il sistema risolvibile per il MMF è del tipo

$$\vec{R} \cdot \vec{I}_{cicliche} = \vec{V}_{ge.tensione}$$

con

- matrice delle resistenze: $\vec{R} \in \mathbb{R}^{(l-n+1) \times (l-n+1)}$
- vettore delle incognite: $\vec{I}_{cicliche} \in \mathbb{R}^{l-n+1}$
- vettore dei termini noti: $\vec{V}_{ge.tensione} \in \mathbb{R}^{l-n+1}$

Per reti di soli generatori indipendenti ideali di tensioni e resistenze vale la seguente regola generale per costruire $\vec{R}$ e $\vec{I}_{cicliche}$ dove

- la somma delle resistenze della maglia k è

$$R_{kk} \quad k = 1, \dots, l - n + 1$$

- la somma algebrica delle resistenze a comune fra maglia k e maglia h è

$$R_{hk} \quad h \neq k \quad h, k = 1, \dots, l - n + 1$$

Ogni resistenza si prende con il segno $+$ se l_k e l_h la percorrono in senso concorde, con il segno $-$ altrimenti

- la somma algebrica delle tensioni dei gen.ri ind.ti di tensione della MF k è

$$V_k \quad k = 1, \dots, l - n + 1$$

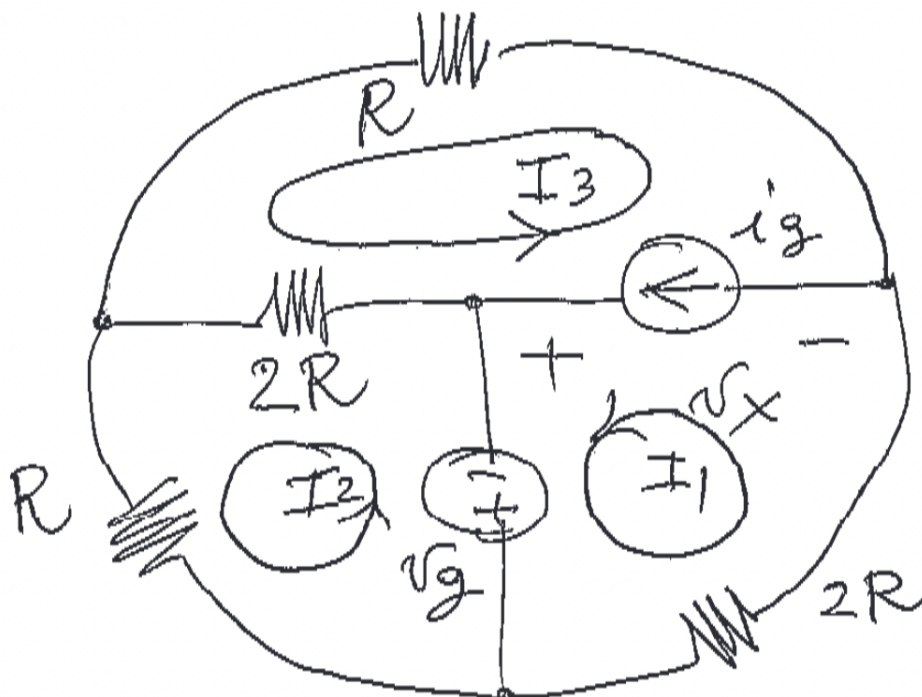
Ogni tensione si prende con il segno $+$ se l_k esce dal morsetto $+$ del generatore di tensione, con il segno $-$ altrimenti

Le osservazioni sono

- la matrice $\vec{R}$ è simmetrica cioè $\vec{R} = \vec{R}^T$
- per ottenere il sistema risolvete abbiamo usato tutte le KV ($l - n + 1$) al passo 1, tutte le KI al passo 2 ($n - 1$) e tutte le relazioni costitutive dei bipoli (l) al passo 3
- una volta determinate le correnti cicliche, possiamo determinare indirettamente tutte le altre correnti e tensioni dei bipoli
- MMF è un metodo ad eliminazione: al passo 2 eliminiamo le correnti dei rami dell'albero mentre al passo 3 eliminiamo tutte le tensioni dei bipoli

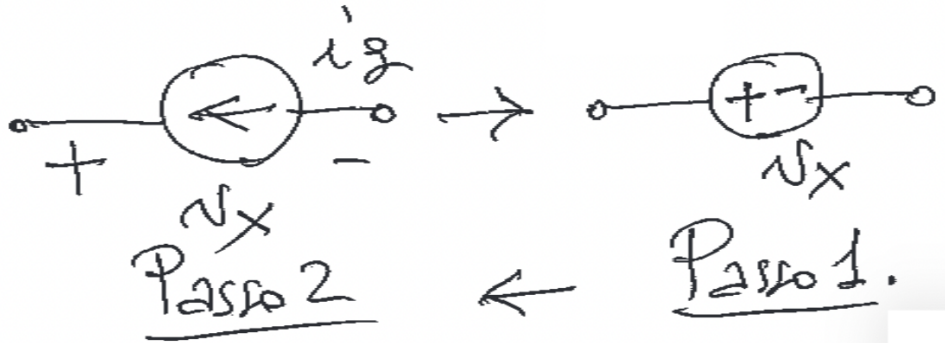
9.2 Metodo Modificato di Analisi su Base MF

Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di corrente (bipoli non controllabili in corrente), in tal caso non possiamo ripetere il passo 3 della precedente procedura. Per esempio, supponiamo di non conoscere la tensione sul generatore di corrente i_g e introduciamo come incognita aggiuntiva la tensione v_x ai capi di tale generatore (le variabili ausiliarie sono I_1, I_2, I_3, v_x).



Procediamo con 2 passi:

1. pensiamo in una prima fase il generatore di corrente come se fosse un generatore di tensione v_x , ci riconduciamo così ad una rete con resistenze e generatori di tensione.



Possiamo scrivere le seguenti KV

$$\begin{bmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{bmatrix}$$

2. utilizziamo la relazione costitutiva del generatore ideale di corrente per scrivere un'equazione aggiuntiva detta equazione di vincolo

$$i_g = I_1 - I_3$$

Abbiamo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

$$\begin{bmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_g \\ -v_g \\ 0 \\ i_g \end{bmatrix}$$

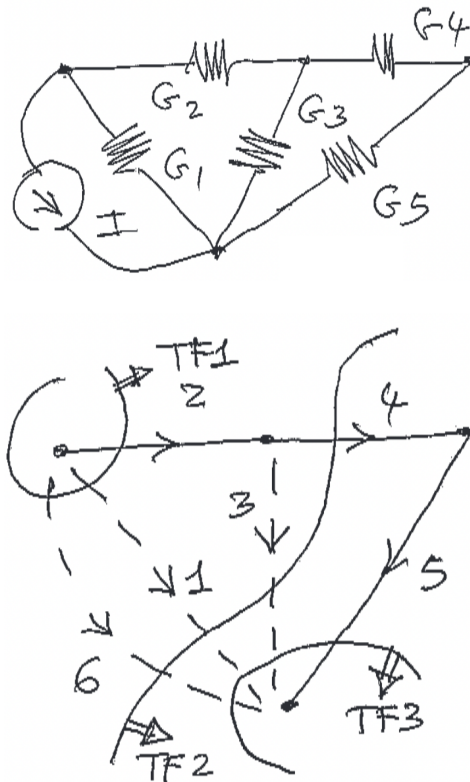
Il metodo descritto è detto metodo modificato (o misto) di analisi su base MF.

9.3 Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)

Si introduce, per dualità rispetto al MMF, per reti di soli bipoli controllabili in tensione e in particolare per reti di conduttanze e generatori indipendenti ideali di corrente. Discutiamo il metodo con un esempio: associamo alla rete un grafo orientato e scegliamo un albero. Le incognite del MTF sono le tensioni dei rami dell'albero

$$\vec{v}_a = \begin{bmatrix} v_2 & v_4 & v_5 \end{bmatrix}^T$$

In generale, si hanno $n - 1$ incognite.



Procediamo con 3 passi:

1. scriviamo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0 \\ i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0 \end{cases}$$

2. esprimiamo le tensioni delle corde (in generale sono $l - n + 1$) in funzione delle tensioni dei rami dell'albero, è sempre possibile in quanto tali tensioni sono una base per lo spazio delle tensioni dei lati. Usiamo $l - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_4 + v_5 \\ v_6 = v_2 + v_4 + v_5 \\ v_3 = v_4 + v_5 \end{cases}$$

3. dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in tensione, possiamo esprimere le correnti dei bipoli (l) in funzione delle tensioni dei bipoli. Usiamo le l relazioni costitutive dei bipoli controllabili in tensione si ha

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5) \\ i_2 = G_2 v_2 \\ i_3 = G_3 v_3 = G_3(v_4 + v_5) \\ i_4 = G_4 v_4 \\ i_5 = G_5 v_5 \\ i_6 = I \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema al passo 1, otteniamo un sistema di $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite date dalle tensioni dei rami dell'albero. In questo caso $n - 1 = 3$, in forma vettoriale si ha

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{bmatrix}$$

In generale, il sistema risolvete per il MTF è del tipo

$$\vec{G} \cdot \vec{v}_a = \vec{I}_{gen.corrente}$$

con

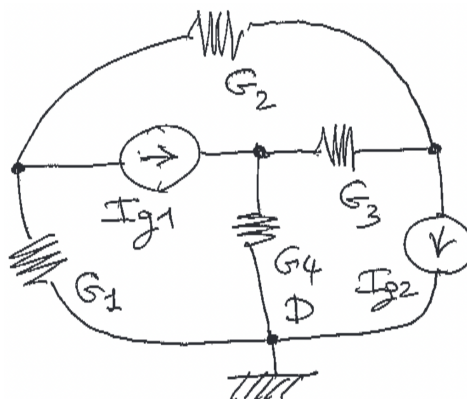
- matrice delle conduttanze: $\vec{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$
- vettore delle incognite: $\vec{v}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$
- vettore dei termini noti: $\vec{I}_{gen.corrente} \in \mathbb{R}^{n-1}$

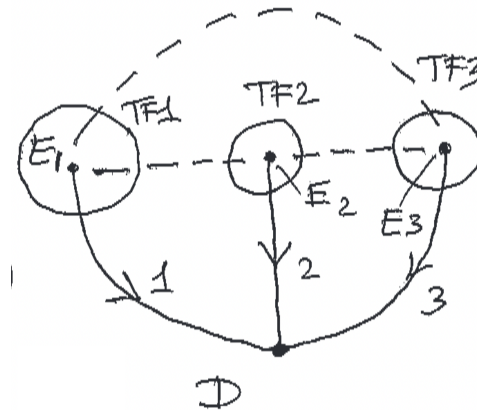
Per reti di soli generatori indipendenti ideali di tensione e resistenze si può dare una regola generale per costruire $\vec{G}$ e $\vec{I}_{gen.corrente}$. Si può osservare che

- la matrice $\vec{G}$ è simmetrica cioè $\vec{G} = \vec{G}^T$
- per ottenere il sistema risolvete abbiamo usato tutte le KI al passo 1, tutte le KV al passo 2 e tutte le relazioni costitutive dei bipoli al passo 3
- una volta determinate le tensioni dei rami dell'albero, possiamo determinare indirettamente tutte le altre tensioni e correnti dei bipoli
- MTF è un metodo ad eliminazione: al passo 2 eliminiamo le tensioni delle corde mentre al passo 3 eliminiamo tutte le correnti dei bipoli

9.4 Metodo dei Nodi

Il metodo dei nodi è un caso particolare del MTF. Consideriamo il caso in cui sono presenti solo bipoli controllabili in tensione (conduttanze e generatori indipendenti di corrente). Scegliamo un nodo di riferimento (nodo di terra o Datum (D)) a cui viene attribuito potenziale $E = 0$ e poi un albero stellato (albero che collega ogni nodo direttamente a D). Infine orientiamo i rami dell'albero in modo che le frecce puntino verso D .





Applichiamo il MTF all'albero stellato, notare che

- le incognite (tensioni dei rami dell'albero) coincidono con le $n - 1$ tensioni dei nodi $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ rispetto a D
- ogni TF è una linea chiusa che contiene un solo nodo (taglio nodale) ed è orientata positivamente verso l'esterno
- le KI per i TF si esprimono dicendo che è nulla la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono su un nodo, ogni corrente si prende con il segno $+$ se uscente dal nodo e con il segno $-$ se entrante nel nodo. Sono $n - 1$ KI per tutti i nodi eccetto il nodo di riferimento

In generale, il sistema risolvante per il metodo dei nodi è del tipo

$$\vec{G} \cdot \vec{I}_{gen.corrente}$$

con

- matrice delle conduttanze: $\vec{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$
- vettore delle incognite:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

cioè le tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento.

- vettore dei termini noti: $\vec{I}_{gen.corrente} \in \mathbb{R}^{n-1}$

Per reti di soli generatori indipendenti ideali di corrente e conduttanze vale la seguente regola generale per costruire $\vec{G}$ e $\vec{I}_{gen.corrente}$. Segue che

- la somma delle conduttanze collegate al nodo k è

$$G_{kk} \quad k = 1, \dots, n - 1$$

- la somma cambiata di segno delle conduttanze a comune fra nodo k e nodo h è

$$G_{hk} \quad h \neq k \quad h, k = 1, \dots, n - 1$$

- la somma algebrica delle correnti dei generatori indipendenti di corrente collegati al nodo k è

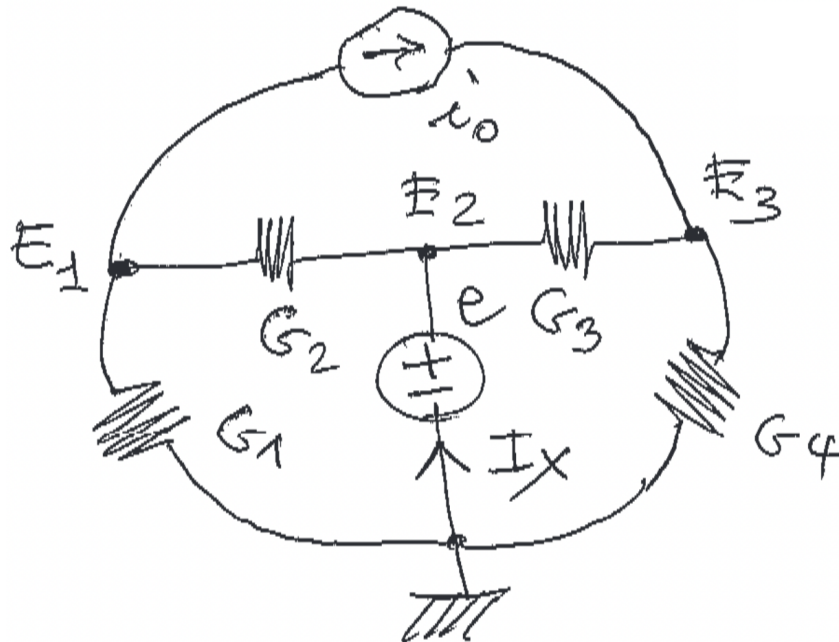
$$I_k \quad k = 1, \dots, n-1$$

Ogni corrente si prende con il segno $+$ se entrante nel nodo k , con il segno $-$ altrimenti

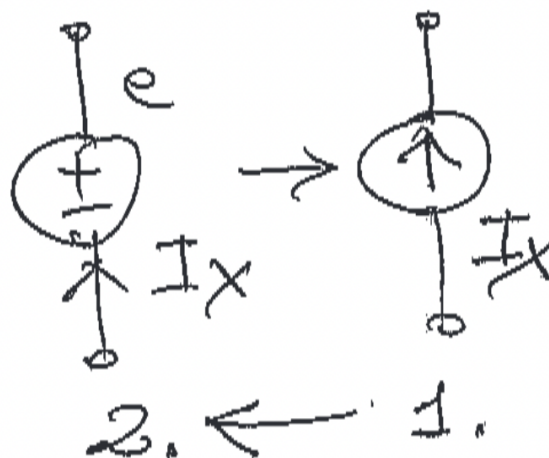
Osserviamo che la matrice $\vec{G}$ è simmetrica cioè $\vec{G} = \vec{G}^T$. Inoltre abbiamo un sistema di $n-1$ equazioni in $n-1$ incognite, notare che la dimensionalità del sistema non dipende da l .

9.5 Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA)

Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di tensione (bipoli non controllabili in tensione). Per esempio, supponiamo di non conoscere la corrente del generatore di tensione e ed introduciamo come incognita aggiuntiva la corrente I_x di tale generatore. Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3, I_x .



Procediamo per passi:



1. pensiamo in una prima fase il generatore di tensione come se fosse un generatore di corrente I_x , ci riconduciamo così ad una rete con sole conduttanze e generatori di corrente. Possiamo scrivere le seguenti KI

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_0 \\ I_x \\ i_0 \end{bmatrix}$$

2. utilizziamo la relazione costitutiva del generatore ideale di tensione per scrivere un'equazione aggiuntiva detta equazione di vincolo, in questo caso si ha

$$E_2 = e$$

Abbiamo ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

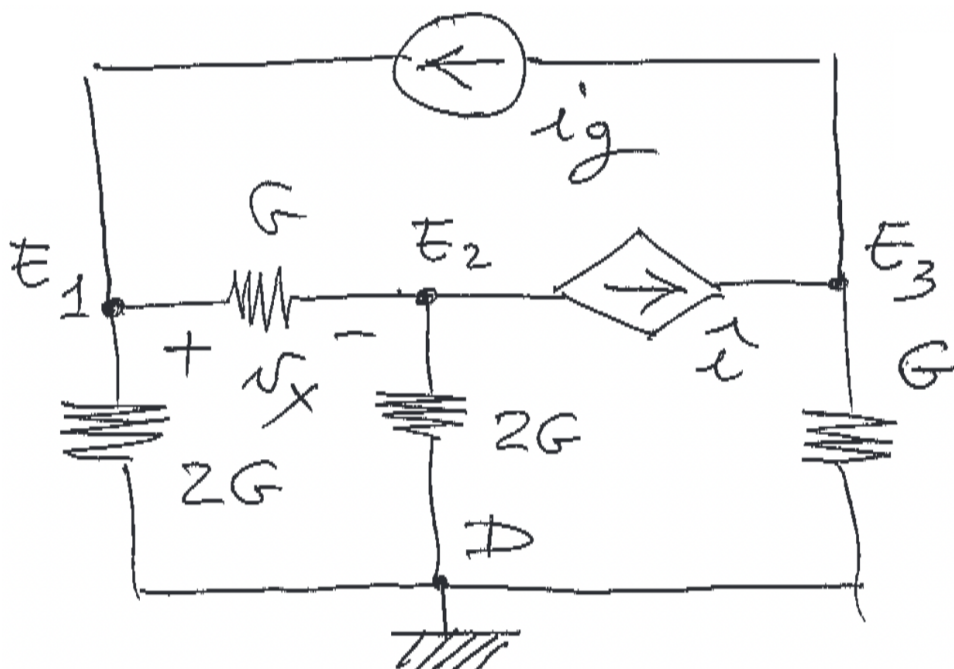
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 & -1 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_0 \\ 0 \\ i_0 \\ e \end{bmatrix}$$

Il metodo descritto è detto metodo modificato (o misto) di analisi su base nodi, è uno dei metodi più utilizzati in pratica (ad esempio nel simulatore di circuiti SPICE).

9.6 Analisi di reti con generatori controllati

9.6.1 Nodi con generatori controllati in corrente

Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3 mentre v_x non è una variabile ausiliaria e non deve apparire nel sistema risolvibile finale.



Procediamo per passi:

1. pensiamo il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente, scriviamo le KI ai nodi

$$\begin{bmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ -\hat{i} \\ \hat{i} - i_g \end{bmatrix}$$

2. usiamo la relazione costitutiva del generatore controllato e esprimiamo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

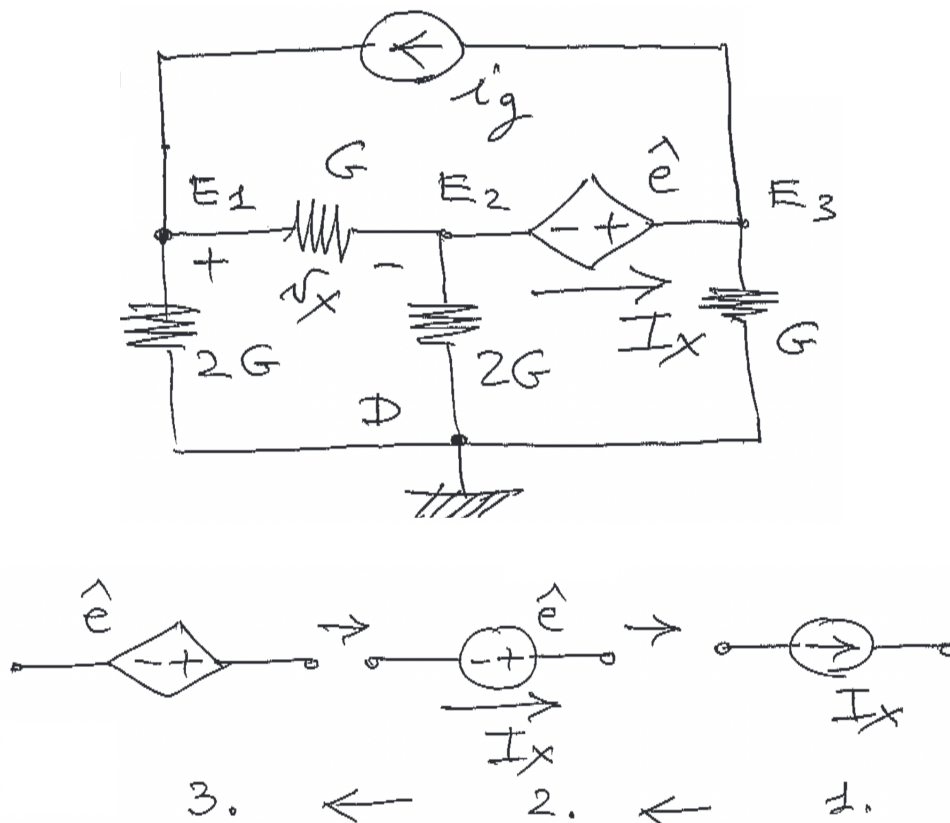
$$\hat{i} = Gv_x = G(E_1 - E_2)$$

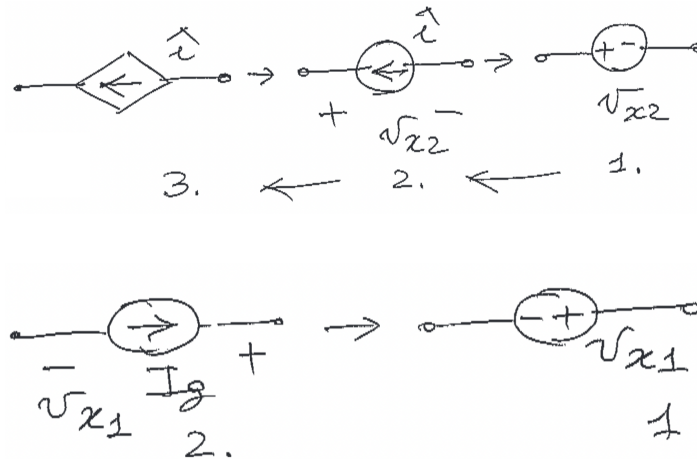
Sostituendo, otteniamo il sistema

$$\begin{bmatrix} 3G & -G & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ -G & G & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \end{bmatrix}$$

Notare che il generatore controllato influisce sulla matrice $\vec{G}$ rendendola (in generale) non simmetrica.

9.6.2 Nodi con generatori controllati in tensione





Possiamo scrivere le KV

$$\begin{bmatrix} R & 0 & -R \\ 0 & 4R & -2R \\ -R & -2R & 4R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{x1} - V_{x2} \\ V_{x1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. i vincoli imposti dai generatori di corrente sono

$$\begin{cases} I_g = -I_1 + I_2 \\ \hat{i} = -I_1 \end{cases}$$

La prima fra queste relazioni è la quarta equazione del sistema risolvete.

3. usiamo la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente ed esprimiamo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{i} = \frac{V_x}{2R} = \frac{RI_3}{2R} = \frac{I_3}{2}$$

Facendo sistema fra le ultime due relazioni, otteniamo

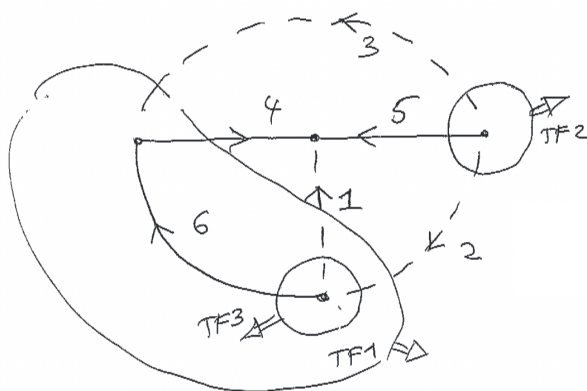
$$I_1 + \frac{I_3}{2} = 0$$

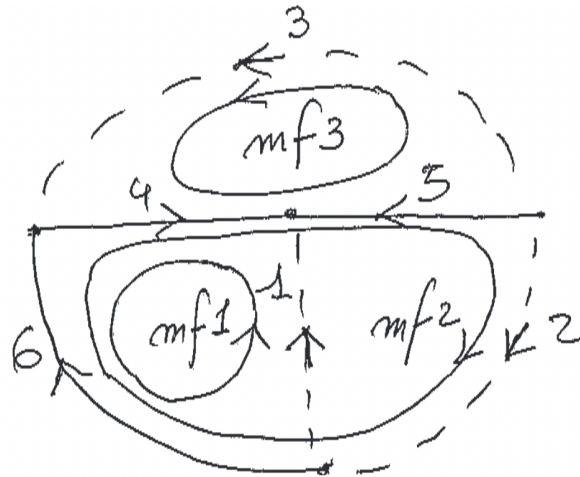
che rappresenta la quinta equazione del sistema equivalente. Abbiamo un sistema di 5 equazioni nelle variabili ausiliarie.

$$\begin{bmatrix} R & 0 & -R & 1 & 1 \\ 0 & 4R & -2R & -1 & 0 \\ -R & -2R & 4R & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema di Tellegen e Principio di Conservazione della Potenza

Consideriamo il grafo orientato e utilizziamo la convenzione degli utilizzatori per i bipoli.


$$\vec{i}_c = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T \quad \vec{i}_a = \begin{bmatrix} i_4 & i_5 & i_6 \end{bmatrix}^T$$
$$\vec{v}_c = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \quad \vec{v}_a = \begin{bmatrix} v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix}^T$$
$$\begin{cases} i_4 + i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_5 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_6 + i_1 - i_2 = 0 \end{cases}$$
$$\vec{i}_a = \vec{A} \cdot \vec{i}_c$$
$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Esprimiamo adesso le tensioni dipendenti $\vec{v}_c$ in funzione delle tensioni indipendenti $\vec{v}_a$, si ha dalle $l - n + 1 = 3$ KV alle MF

$$\begin{cases} v_1 - v_4 - v_6 = 0 \\ v_2 + v_4 - v_5 + v_6 = 0 \\ v_3 + v_4 - v_5 = 0 \end{cases}$$

che in forma vettoriale risulta

$$\vec{v}_c = \vec{B} \cdot \vec{v}_a$$

dove la seconda matrice topologica è

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10.1.1 Proprietà

Si può dimostrare che la relazione

$$\vec{B}^T = -\vec{A}$$

è valida in generale.

10.2 Teorema di Tellegen

Consideriamo il grafo orientato associato a un circuito e vi siano l bipoli e n nodi. Utilizziamo la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli e scegliamo un albero. Sia

•

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^l$$

un vettore di numeri (tensioni dei lati del grafo) che soddisfano le KV alle MF

•

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_l \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^l$$

un vettore di numeri (correnti dei lati del grafo) che soddisfano le KI ai TF

Allora si ha

$$\langle \vec{v}, \vec{i} \rangle = (\vec{v})^T \cdot \vec{i} = 0$$

cioè i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{i}$ risultano fra di loro ortogonali.

10.2.1 Dimostrazione

Segue che

$$\begin{aligned} (\vec{v})^T \cdot \vec{i} &= \begin{bmatrix} \vec{v}_c & \vec{v}_a \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{i}_a \end{bmatrix} = (\vec{v}_c)^T \cdot \vec{i}_c + (\vec{v}_a)^T \cdot \vec{i}_a \\ &= (\vec{B} \cdot \vec{v}_a)^T \cdot \vec{i}_c + (\vec{v}_a)^T \cdot \vec{A} \cdot \vec{i}_c \\ &= (\vec{v}_a)^T \cdot (\vec{B})^T \cdot \vec{i}_c + (\vec{v}_a)^T \cdot \vec{A} \cdot \vec{i}_c \\ &= (\vec{v}_a)^T \cdot ((\vec{B})^T + \vec{A}) \cdot \vec{i}_c = 0 \end{aligned}$$

dato che $(\vec{B})^T = -\vec{A}$.

10.3 Principio di Conservazione della Potenza

Siano $\vec{v}(t)$ e $\vec{i}(t)$ le tensioni e correnti effettive in un circuito ad un generico istante t . Dato che le tensioni soddisfano per ipotesi alle KV e le correnti alle KI possiamo applicare il Teorema di Tellegen e ottenere che

$$\vec{v}^T(t) \cdot \vec{i}(t) = \sum_{k=1}^l v_k(t) \cdot i_k(t) = \sum_{k=1}^l p_k(t) = 0W$$

quindi è nulla, istante per istante, la somma delle potenze istantanee $p_k(t)$ assorbite dagli l bipoli del circuito.

10.3.1 Osservazione

Segue che KV e KI implicano il Teorema di Tellegen che implica il principio di conservazione della potenza istantanea e energia. Un circuito che assiomaticamente soddisfa a KV e KI verifica quindi automaticamente questi due principi fondamentali.

10.3.2 Conseguenze

Consideriamo due istanti $t_1 \neq t_2$ e siano $\vec{v}(t_1)$ e $\vec{i}(t_1)$ (rispettivamente $\vec{v}(t_2)$ e $\vec{i}(t_2)$) le tensioni e le correnti effettive in un circuito nei due istanti considerati, allora si ha

$$\vec{v}^T(t_1) \cdot \vec{i}(t_2) = 0$$

Siano

- C^a e C^b due circuiti diversi ma con lo stesso grafo orientato
- $\vec{v}^a(t)$ e $\vec{i}^a(t)$ le tensioni e le correnti effettive di C^a
- $\vec{v}^b(t)$ e $\vec{i}^b(t)$ le tensioni e le correnti effettive di C^b

Allora

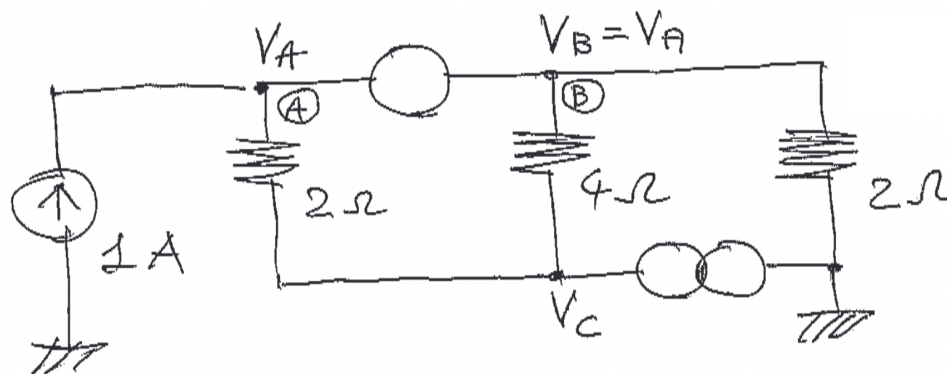
$$(\vec{v}_a)^T(t) \cdot \vec{i}_b(t) = 0$$

10.3.3 Interpretazione Geometrica

Le KV implicano $\vec{v} \in \pi_v$ (sottospazio di $\mathbb{R}^l$) e le KI implicano $\vec{i} \in \pi_i$ (sottospazio di $\mathbb{R}^l$). Segue che i due sottospazi π_v e π_i di $\mathbb{R}^l$ sono fra di loro ortogonali.

10.4 Esempio

Verificare il Teorema di Tellegen per il seguente circuito con a_0 (nullore).



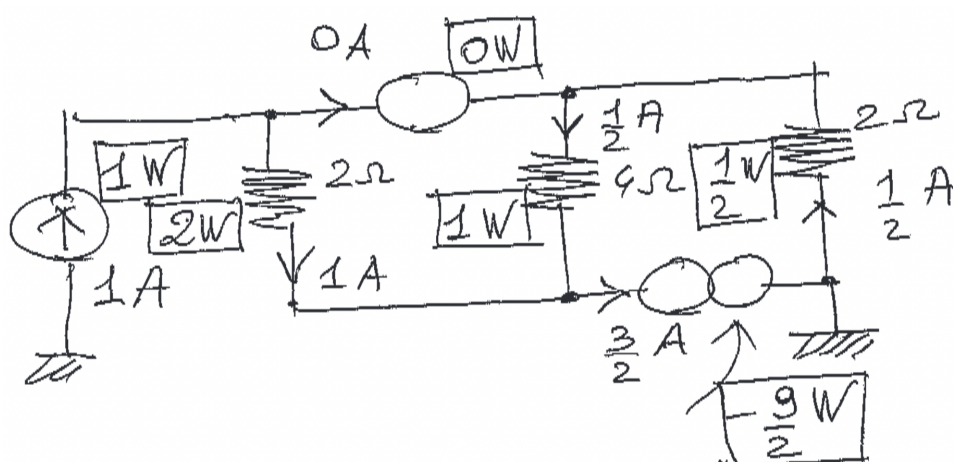
Determiniamo esplicitamente tutte le potenze elettriche assorbite dai bipoli presenti, si ha dalla KI al nodo A e al nodo B (rispettivamente) che

$$1 = \frac{V_A - V_C}{2} \quad \frac{0 - V_A}{2} = \frac{V_A - V_C}{4}$$

da cui

$$V_A = -1V \quad V_C = -3V$$

Nella figura sono indicate le correnti che fluiscono nei bipoli e le potenze istantanee assorbite.



Se verifica che la somma delle potenze istantanee assorbite è nulla, come previsto dal Teorema di Tellegen.

Capitolo 11

Metodo dei Fasori

11.1 Richiami sui numeri complessi

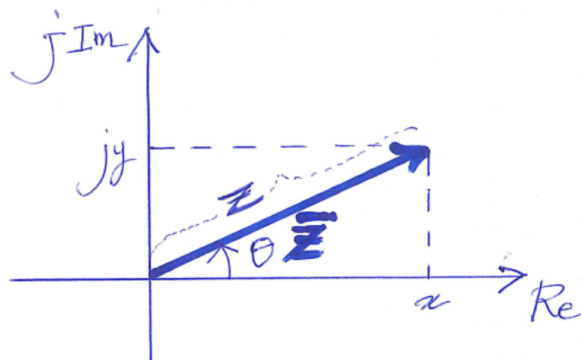
Consideriamo il numero complesso espresso in forma algebrica

$$\vec{z} = x + jy$$

con

- $x, y \in \mathbb{R}$
- $x = \text{Re}[\vec{z}]$ parte reale
- $y = \text{Im}[\vec{z}]$ parte immaginaria
- j unità immaginaria, $j^2 = -1$

Segue che $\vec{z}$ può essere visto come un punto (o vettore) nel piano.



Quindi $\vec{z}$ può essere individuato tramite il suo modulo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il suo argomento ϑ . Gli argomenti ϑ si misurano a partire dall'asse x , a cui si attribuisce $\vartheta = 0$ e ruotando in senso positivo antiorario. Il verso positivo antiorario è detto anche verso degli anticipi e il verso negativo orario è detto verso dei ritardi. Se $\vec{z} \neq 0$, si ha

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Se $x \neq 0$ allora $\tan \vartheta = x/y$ e inversamente

$$\begin{cases} x = Z \cos \vartheta \\ y = Z \sin \vartheta \end{cases}$$

In forma trigonometrica, si ha

$$\vec{z} = Z(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$$

dato che (identità di Eulero)

$$e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$$

otteniamo la forma esponenziale

$$\vec{z} = Ze^{j\vartheta}$$

Bisogna fare attenzione al calcolo degli argomenti quando $x = \operatorname{Re}[\vec{z}] < 0$, proviamo a scrivere in forma esponenziale i due numeri complessi

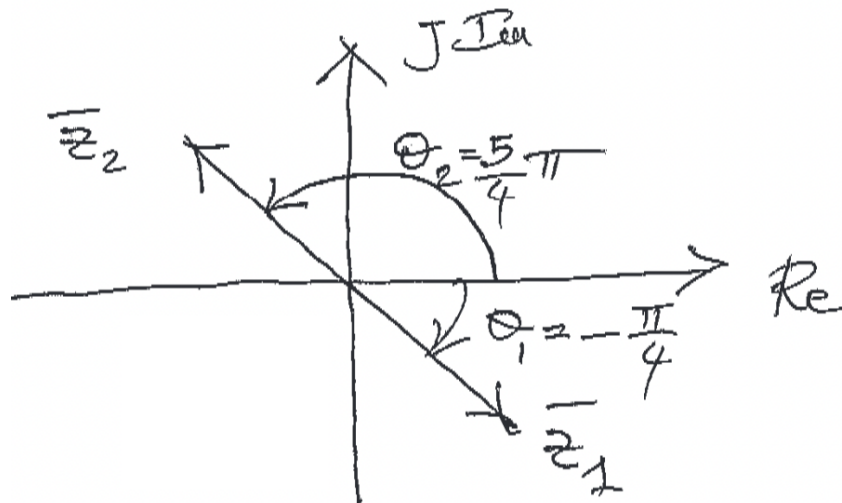
$$\vec{z}_1 = 1 - j \qquad \vec{z}_2 = -1 + j$$

Si ha $Z_1 = Z_2 = \sqrt{2}$ e inoltre

$$\vartheta_1 = \arctan(-1) = -\pi/4 \qquad \vartheta_2 = \arctan(-1) = -\pi/4$$

e siamo in assurdo, conviene disegnare i numeri nel piano complesso. Si osserva che

$$\vartheta_1 = -\pi/4 \qquad \vartheta_2 = -5\pi/4$$



11.2 Funzioni sinusoidali

11.2.1 Dominio del tempo

Per senoide si intende una funzione del tempo

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove

- $E_M > 0$ è l'ampiezza
- $\omega \geq 0$ è la pulsazione (in rad/sec)

- ϕ è la fase (in radianti)
- la frequenza (in Hz) è data da

$$\begin{cases} f = 1/T \\ \omega = 2\pi f = 2\pi/T \end{cases}$$

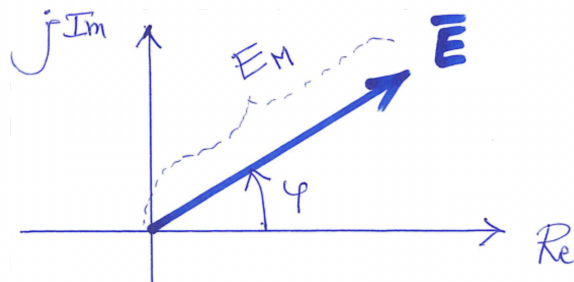
dove T (in sec) è il periodo della sinusoide.

11.2.2 Dominio dei fasori

Alla sinusoide $e(t)$ si associa il numero complesso in forma esponenziale

$$\vec{E} = E_M e^{j\varphi}$$

detto fasore associato a $e(t)$. Notare che, il modulo del fasore coincide con l'ampiezza della sinusoide, l'argomento del fasore coincide con la fase della sinusoide e il fasore non contiene l'informazione sulla pulsazione della sinusoide.



Ad ogni sinusoide corrisponde il fasore $\vec{E}$ e quindi un punto del piano complesso inteso come piano dei fasori. Viceversa, assegnato $\vec{E}$ e ω vi corrisponde un'unica sinusoide a pulsazione ω che possiamo ottenere tramite la formula

$$e(t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}]$$

Si ha

$$\text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}] = \text{Re}[E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \text{Re}[E_M e^{j(\omega t + \varphi)}] = E_M \cos(\omega t + \varphi) = e(t)$$

Le due relazioni ottenute sono una coppia trasformata e antitrasformata, detta trasformata di Steinmetz.

11.2.2.1 Interpretazione geometrica

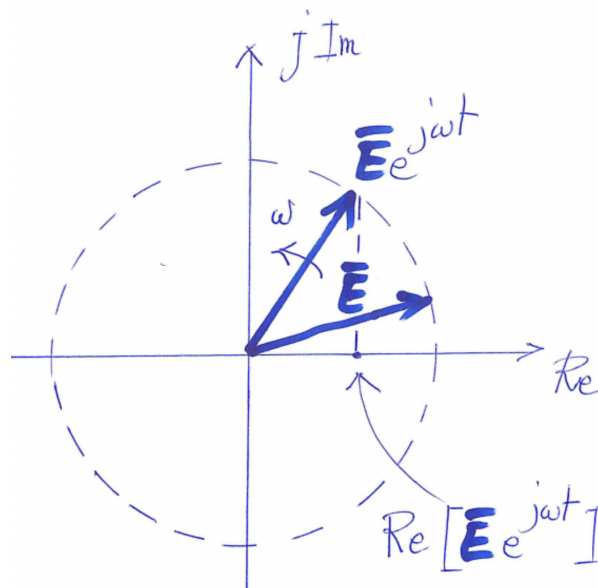
L'operatore $\cdot e^{j\omega t}$ rappresenta una rotazione di un angolo ωt in senso positivo antiorario, infatti

$$\vec{E} \cdot e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = E_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

allora

$$\vec{E} \cdot e^{j\omega t}$$

è un vettore di modulo costante E_M che ruota intorno all'origine con velocità angolare ω in senso positivo antiorario (vettore rotante). Infine, l'operatore $\text{Re}[\vec{E} \cdot e^{j\omega t}]$ è l'operatore di proiezione sull'asse reale.



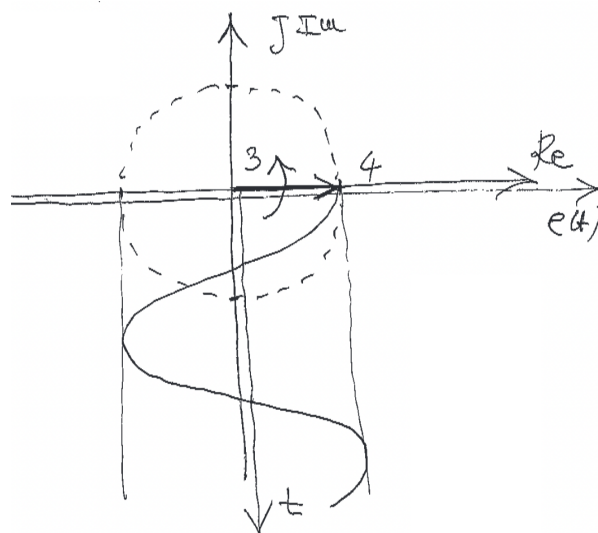
11.2.2.2 Esempio 1

Determinare il fasore associato a

$$e(t) = 4 \cos(3t)$$

e interpretare graficamente. Si ha

$$\begin{cases} E_M = 4 \\ \varphi = 0 \end{cases} \implies \vec{E} = 4e^{j0} = 4$$



11.2.2.3 Esempio 1

Determinare il fasore associato a

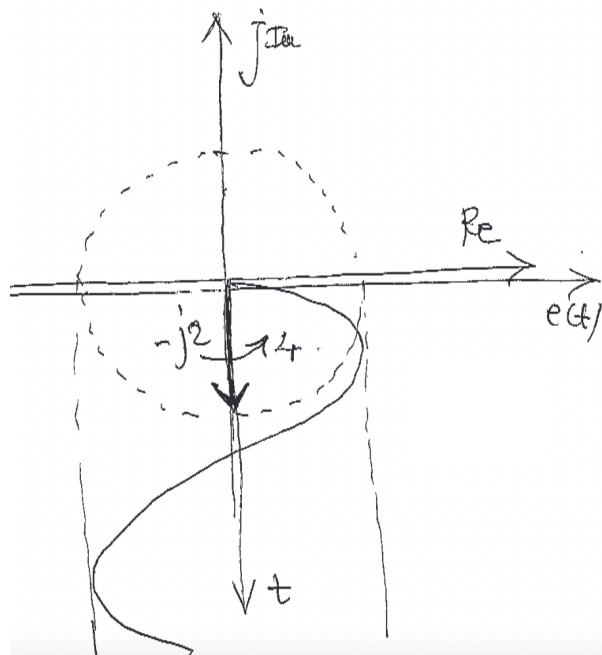
$$e(t) = 2 \sin(4t)$$

e interpretare graficamente. Si ha

$$2 \sin(4t) = 2 \cos(4t - \pi/2)$$

quindi

$$\begin{cases} E_M = 2 \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases} \implies \vec{E} = 2e^{-j\pi/2} = -j2$$



11.3 Calcolo Fasoriale

Abbiamo

- Unicità: siano $e_1(t)$ e $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω , si ha $e_1(t) = e_2(t)$ per ogni t se e solo se $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$
- Linearità: siano $e_1(t)$ e $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω e $a, b \in \mathbb{R}$, allora $ae_1(t) + be_2(t)$ è una sinusoide a pulsazione ω con fasore $a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2$
- Regola di derivazione: sia $e(t)$ una sinusoide a pulsazione ω con fasore $\vec{E}$, allora $de(t)/dt$ è ancora una sinusoide a pulsazione ω con fasore $j\omega\vec{E}$ quindi

$$\frac{de(t)}{dt} \iff j\omega\vec{E}$$

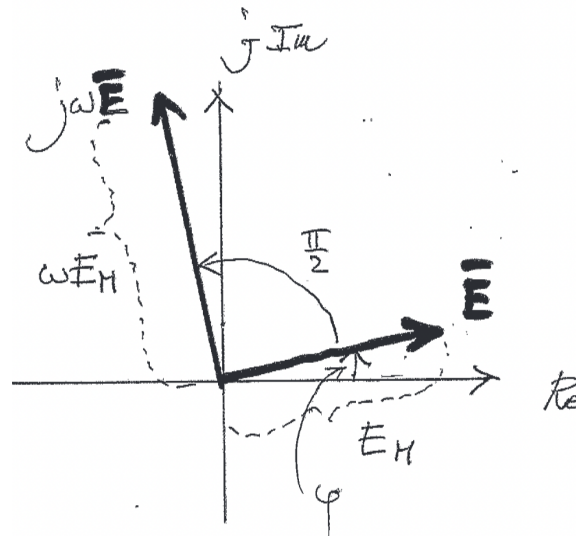
Questa importante regola implica che un'operazione differenziale d/dt nel dominio del tempo si trasforma in un'operazione algebrica $j\omega\cdot$ nel dominio dei fasori, la regola è analoga a quella valida per la trasformata di Fourier. Verifichiamo

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] \right\} = \text{Re} \left[\frac{d}{dt} (\vec{E}e^{j\omega t}) \right] = \text{Re} [j\omega\vec{E}e^{j\omega t}]$$

e graficamente si ha

$$j\omega\vec{E} = \omega e^{j\pi/2} E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \pi/2)}$$

quindi il fasore $j\omega\vec{E}$ di $de(t)/dt$ ha modulo pari a ωE_M e si ottiene ruotando in senso positivo antiorario di un angolo pari a $\pi/2$ il fasore $\vec{E}$ di $e(t)$.

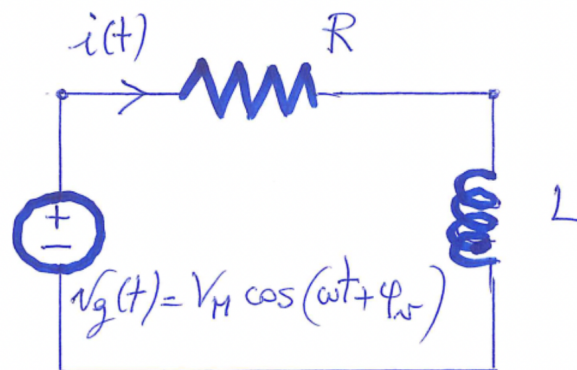


11.4 Analisi in regime sinusoidale

Consideriamo il circuito RL con generatore ideale di tensione sinusoidale

$$v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Determinare $i(t)$ per $t \geq 0$ assumendo $i(0) = i_0$.



Segue la KV

$$v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

quindi il circuito soddisfa alla equazione differenziale affine del primo ordine

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

con $i(0) = i_0$. Si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = K e^{-t/\tau} + i_{\text{part.affine}}(t)$$

con $K \in \mathbb{R}$ e $\tau = L/R$ è una costante di tempo. Verifichiamo che possiamo scegliere

$$i_{\text{part.affine}}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

quindi

$$i(t) = Ke^{-t/\tau} + I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Il primo termine (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$) è detto parte transitoria mentre il secondo è detto risposta in regime permanente sinusoidale, in pratica per $t \geq 4\tau$ si ha

$$i(t) \approx I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

e quindi, esaurito il transitorio, la corrente nel circuito è sinusoidale alla stessa pulsazione ω del generatore. Determiniamo I_M e φ_i nel dominio del tempo, si ha

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= -\omega LI_M \sin(\omega t + \varphi_i) + RI_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= I_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_i) - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi_i) \right] = \\ &= Z I_M [\cos(\varphi_z) \cos(\omega t + \varphi_i) - \sin(\varphi_z) \sin(\omega t + \varphi_i)] = \\ &= Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z) \end{aligned}$$

con $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ e

$$\cos(\varphi_z) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \sin(\varphi_z) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e quindi $\tan(\varphi_z) = (\omega L)/R$. Allora

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

da cui

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

La soluzione nel dominio del tempo è complicata, introduciamo il metodo dei fasori perché è molto efficiente per determinare le correnti e tensioni in regime sinusoidale (il metodo dei fasori non permette però di trovare la parte transitoria della risposta).

11.4.1 Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale nel dominio del tempo

11.4.1.1 Resistore ideale

Supponiamo

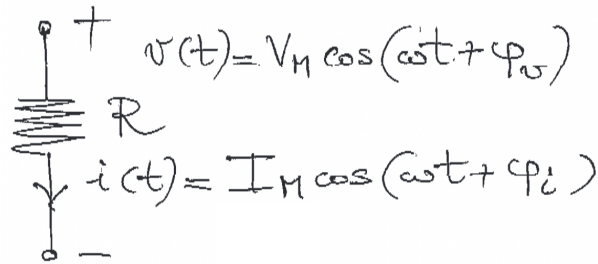
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

allora, dalla legge di Ohm

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

quindi

$$V_M = RI_M \quad \varphi_v = \varphi_i$$



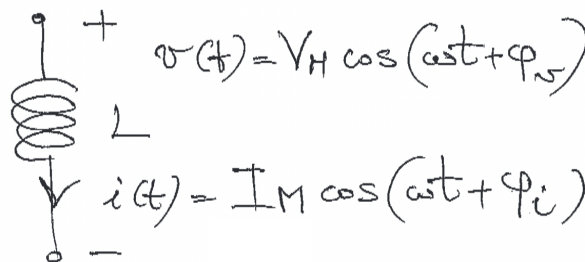
Segue che R rappresenta la resistenza fisica (dovuta a un fenomeno dissipativo) offerta dal resistore al passaggio di una corrente, la tensione da applicare per far scorrere tale corrente ha ampiezza $V_M = RI_M$ ed è in fase con la corrente.

11.4.1.2 Induttore ideale

In accordo alla legge di Faraday, si ha

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{d\varphi_{\text{conc}}}{dt}$$

dove $\varphi_{\text{conc}} = Li$ è il flusso concatenato.



11.4.1.3 Esperimento 1

Supponiamo che L sia percorso da una corrente costante continua $i(t) = i$ allora $v(t) = 0$ quindi L è un corto circuito per le correnti costanti, bisogna interpretare fisicamente.

11.4.1.4 Esperimento 2

Supponiamo adesso che L sia attraversato da una corrente alternata sinusoidale

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

allora

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = L \frac{di}{dt} = \\ &= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \end{aligned}$$

quindi

$$V_M = \omega L I_M \quad \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

La conclusione importante è che a differenza del caso in continua, per far scorrere su L una corrente alternata di ampiezza I_M , è necessario applicare una tensione alternata di ampiezza

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M$$

Tale tensione è necessaria per vincere la forza contro elettromotrice che si sviluppa su L per il fenomeno dell'autoinduzione. Si ha inoltre che la tensione è in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente. Abbiamo posto

$$X_L = \omega L \quad [X_L] = \text{Ohm}$$

che è detta reattanza induttiva e si misura in Ohm. Dato che

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} = \frac{V_M}{X_L}$$

la reattanza induttiva ha il significato fisico di resistenza apparente che l'induttore offre al passaggio di una corrente alternata (apparente in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non è legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo dovuto all'autoinduzione). Notare che $X_L = \omega L$ cresce se cresce ω quindi L offre resistenze apparenti tanto più elevate quanto ω è elevata.

11.4.1.5 Condensatore ideale

Si ha

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = \frac{dq_c}{dt}$$

dove $q_c = Cv$ è la carica sulle armature.

A hand-drawn circuit diagram of a capacitor, represented by two parallel horizontal lines. To the left of the capacitor is the letter 'C'. Above the capacitor, a vertical line with an arrow pointing up is labeled $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$. Below the capacitor, a vertical line with an arrow pointing down is labeled $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$. The top terminal is marked with a '+' sign and the bottom terminal with a '-' sign.

11.4.1.6 Esperimento 1

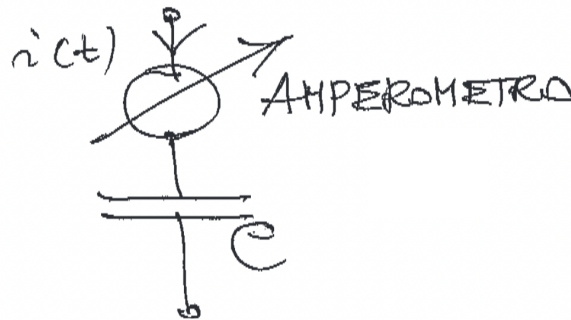
Supponiamo di applicare a C una tensione continua $v(t) = v$ allora $i(t) = 0$ quindi C è un circuito aperto (un'interruzione elettrica) per le tensioni costanti, bisogna interpretare fisicamente.

11.4.1.7 Esperimento 2

Supponiamo adesso di applicare a C una tensione alternata sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Dato che la tensione varia, si ha un passaggio continuativo di cariche (elettroni) fra le armature quindi l'amperometro misura un passaggio di corrente. Ne consegue che C non è un'interruzione elettrica per le correnti alternate.



Si ha

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = C \frac{dv}{dt} =$$

$$= -\omega C V_M \sin(\omega t + \varphi_v) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \pi/2)$$

quindi

$$I_M = \omega C V_M = \frac{V_M}{1/\omega C} = \frac{V_M}{X_C} \quad \varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo indicato con

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad [X_C] = \text{Ohm}$$

la reattanza capacitiva che ha il significato fisico di resistenza apparente che il condensatore offre al passaggio di una corrente alternata (apparente in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non è legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo). Notare che $X_C = 1/\omega C$ decresce se cresce ω quindi C offre resistenze apparenti tanto più piccole quanto ω è elevata.

11.5 Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale

Abbiamo due passi:

1. determinare le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori
2. determinare l'espressione delle leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori

Otteniamo nel dominio dei fasori un circuito senza memoria che può essere analizzato con i metodi delle reti resistive.

11.5.1 Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori

Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω , sia

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

la tensione ai morsetti e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

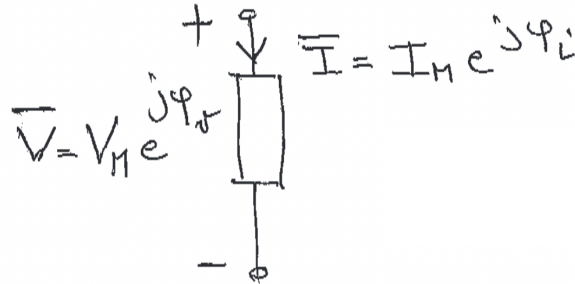
la corrente, indichiamo con

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_v}$$

il fasore della tensione e con

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i}$$

quello della corrente. Pensiamo simbolicamente che al bipolo sia applicato $\vec{V}$ e vi fluisca $\vec{I}$, in questo caso coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori.



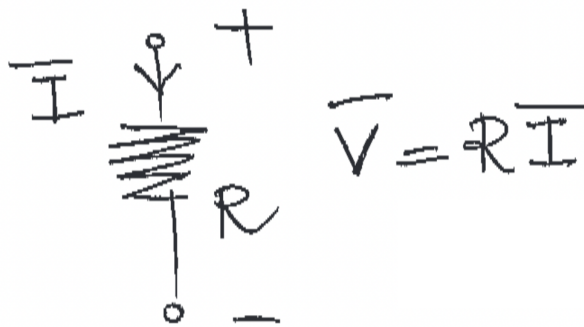
La relazione costitutiva del bipolo è il legame che il bipolo stabilisce fra $\vec{V}$ e $\vec{I}$ nel dominio dei fasori.

11.5.2 Resistore ideale

Da $v(t) = Ri(t)$, usando la linearità della trasformata fasoriale, otteniamo

$$\vec{V} = R\vec{I}$$

detta legge di Ohm simbolica nel dominio dei fasori.



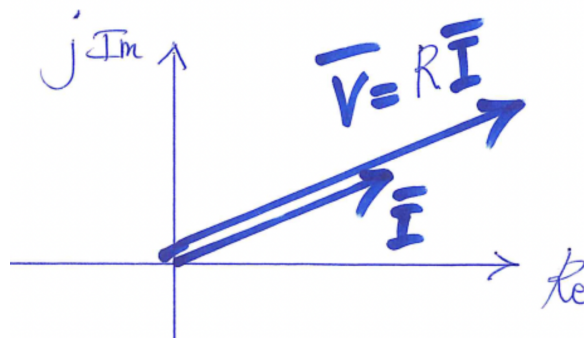
Si ha

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_v} = R\vec{I} = RI_M e^{j\varphi_i}$$

quindi in accordo a quanto visto nel dominio del tempo

$$V_M = RI_M \quad \varphi_v = \varphi_i$$

Per $R > 0$ i due fasori $\vec{V}$ e $\vec{I}$ sono paralleli fra di loro e in fase



11.5.3 Induttore ideale

Da $v(t) = L di(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale, si ha

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} = jX_L \vec{I}$$

L'induttore è quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori, l'impedenza in corrente alternata (c.a.) di L è il numero complesso

$$\vec{Z}_L = j\omega L = jX_L \quad [\vec{Z}_L] = \text{Ohm}$$

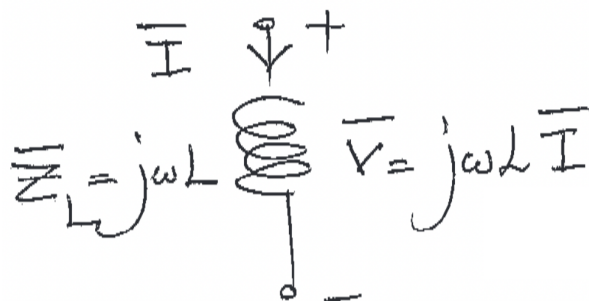
L'ammettenza è definita da

$$\vec{Y}_L = \frac{1}{\vec{Z}_L}$$

e ha dimensioni Ohm^{-1} . Si ha quindi

$$\vec{V} = \vec{Z}_L \vec{I} \quad \vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_L} = \vec{Y}_L \vec{V}$$

detta legge di Ohm simbolica per l'induttore. Quindi, nel dominio dei fasori, l'induttore è un elemento senza memoria di resistenza (anzi impedenza) $\vec{Z}_L = j\omega L$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore.



11.5.3.1 Interpretazione geometrica

Si ha

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_v} = \vec{Z}_L \vec{I} = j\omega L \vec{I} = \omega L I_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_i}$$

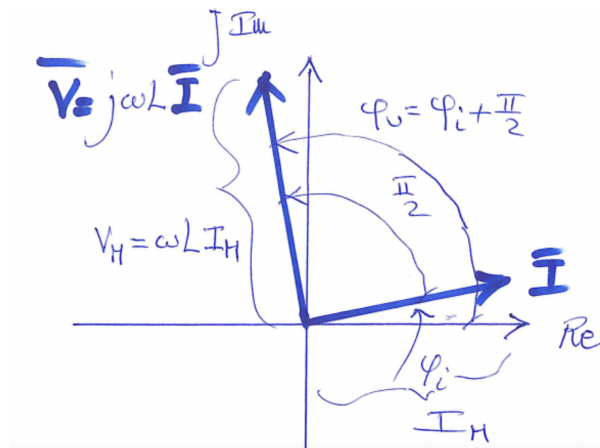
quindi

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_v} = \omega L I_M e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

e

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M \quad \varphi_v = \varphi_i + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con un'analisi nel dominio del tempo. Notare che nel piano dei fasori $\vec{V}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\vec{I}$.



11.5.4 Condensatore ideale

Da $i(t) = Cdv(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale, si ha

$$\vec{I} = j\omega C \vec{V}$$

Il condensatore è un elemento senza memoria nel dominio dei fasori, l'impedenza in corrente alternata (c.a.) di C è il numero complesso

$$\vec{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C \quad [\vec{Z}_C] = \text{Ohm}$$

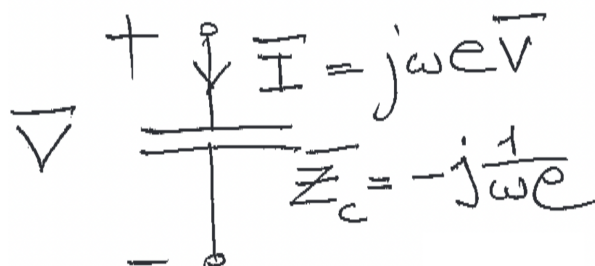
l'ammettenza è definita da

$$\vec{Y}_C = \frac{1}{\vec{Z}_C} = j\omega C$$

e ha dimensioni Ohm^{-1} . Si ha quindi

$$\vec{V} = \vec{Z}_C \vec{I} \quad \vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}_C} = \vec{Y}_C \vec{V}$$

detta legge di Ohm simbolica per il condensatore. Quindi, nel dominio dei fasori, il condensatore è un elemento senza memoria di resistenza (anzi impedenza) $\vec{Z}_C = -j/(\omega C)$ e soddisfa ad un legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore.



11.5.4.1 Interpretazione geometrica

Si ha

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \vec{Y}_C \vec{V} = j\omega C \vec{V} = \omega C V_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_v}$$

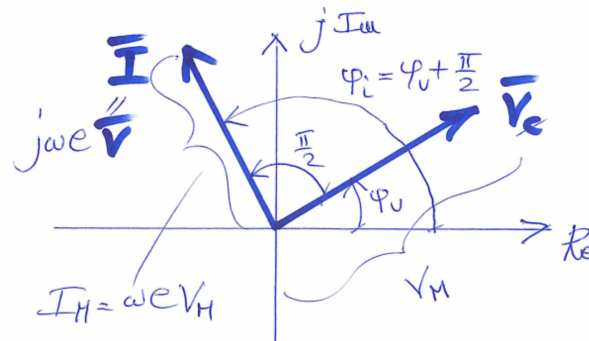
quindi

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C V_M e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

e

$$I_M = \omega C V_M \quad \varphi_i = \varphi_v + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con un'analisi nel dominio del tempo. Notare che nel piano dei fasori $\vec{I}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\vec{V}$.



11.6 Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori

Consideriamo una rete in regime sinusoidale a pulsazione ω cioè tutte le correnti e tensioni, esaurito il transitorio, sono sinusoidali a pulsazione ω . Consideriamo un nodo a cui sono collegati tre bipoli, si ha dalla KI

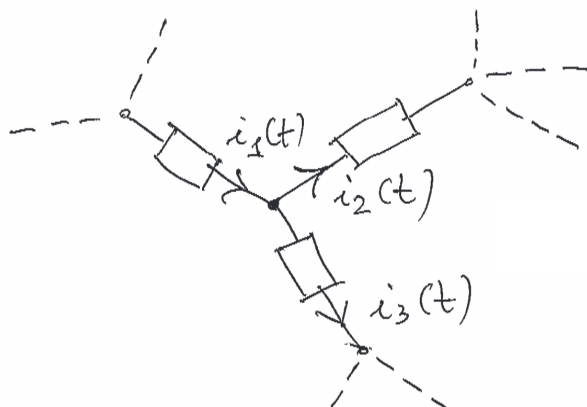
$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

per ogni t , quindi

$$-\text{Re}[\vec{I}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\vec{I}_2 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\vec{I}_3 e^{j\omega t}] = \text{Re}[(-\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3) e^{j\omega t}] = 0$$

per ogni t , da cui

$$-\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 0$$



Consideriamo

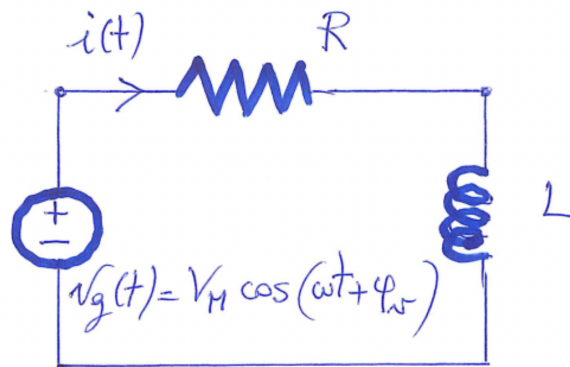
- KI nel dominio dei fasori: i fasori delle correnti in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le correnti

- KV nel dominio dei fasori: i fasori delle tensioni in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le tensioni

Usando le relazioni costitutive e le leggi di Kirchhoff illustrate possiamo associare al circuito un circuito simbolico nel dominio dei fasori, il circuito simbolico è senza memoria e può essere analizzato con i metodi delle reti senza memoria.

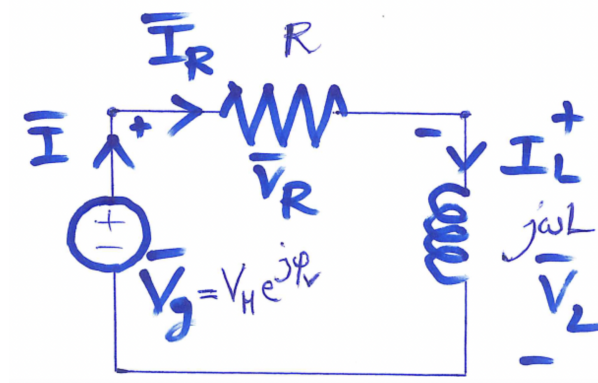
11.6.1 Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori

Consideriamo ancora il circuito RL studiato in precedenza, determinare $i(t)$ in regime sinusoidale.



Consideriamo

1. associamo il circuito simbolico nel dominio dei fasori, è senza memoria



2. analizziamo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\vec{I}$:

- KI: $\vec{I} = \vec{I}_R = \vec{I}_L$
- KV: $\vec{V}_g = \vec{V}_R + \vec{V}_L$
- relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \vec{V}_R = R\vec{I}_R \\ \vec{V}_L = j\omega L\vec{I}_L \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\vec{V}_g = V_M e^{j\varphi_v} = (R + j\omega L) \vec{I} \quad \vec{I} = \frac{\vec{V}_g}{R + j\omega L}$$

3. Da $\vec{I}$ otteniamo $i(t)$. Scriviamo $\vec{I}$ in forma esponenziale

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}}$$

quindi

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctan(\omega L/R))}$$

allora

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Abbiamo risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right))$$

Lo stesso risultato ottenuto con analisi nel dominio del tempo, il procedimento nel dominio dei fasori è molto più semplice e diretto. Ripetere usando la formula di antitrasformata fasoriale $i(t) = \text{Re}[\vec{I} e^{j\omega t}]$

11.6.2 Diagramma fasoriale

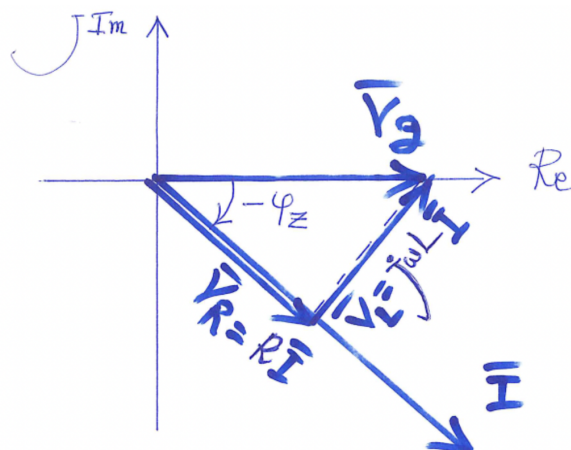
Sia, ad esempio, $\varphi_v = 0$ e quindi $\vec{V}_g = V_M$ allora

$$\vec{I} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j(\arctan(\omega L/R))}$$

Si ha

$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_L = R\vec{I} + j\omega L\vec{I}$$

dove $R\vec{I}$ è parallelo a $\vec{I}$ mentre $j\omega L\vec{I}$ è in anticipo di $\pi/2$ rispetto a $\vec{I}$. Possiamo allora costruire il seguente diagramma fasoriale



11.6.2.1 Interpretazione fisica

Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto combinato della resistenza Ohmica e del fenomeno dell'autoinduzione, offre la passaggio di una corrente alternata una "resistenza apparente" (impedenza) pari a

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ Ohm}$$

La presenza di L in serie a R provoca quindi

- un aumento appartenente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$
- uno sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\varphi_z = \arctan(\omega L/R)$ compreso fra 0 e $\pi/2$

Tali effetti sono tanto più evidenti quanto ω è elevata.

11.6.3 Risposta in frequenza

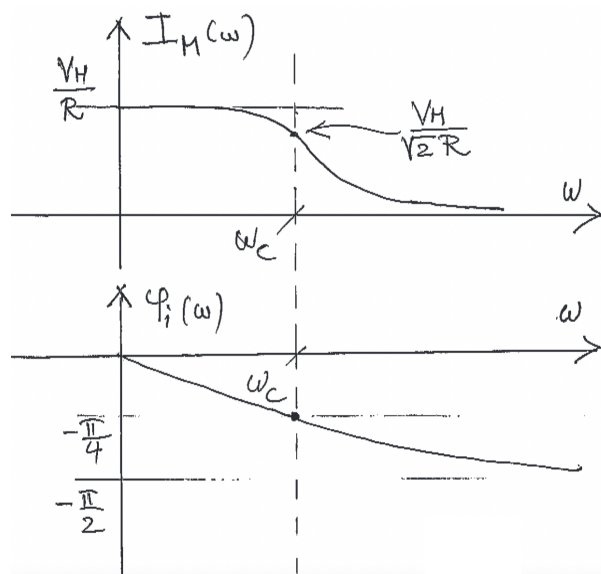
Supponiamo

$$v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$$

facciamo variare ω e studiamo gli andamenti di

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \varphi_i(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Il primo degli andamenti rappresenta la risposta in ampiezza mentre il secondo la risposta in fase, nel complesso sono la risposta in frequenza del circuito.



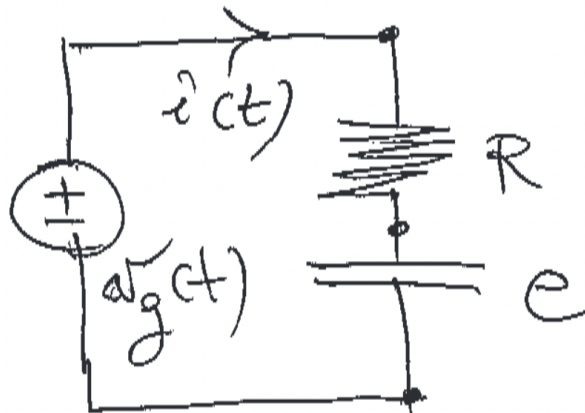
Si tratta di un filtro passo basso del primo ordine, la pulsazione critica vale

$$\omega_c = \frac{R}{L} \text{ rad/sec}$$

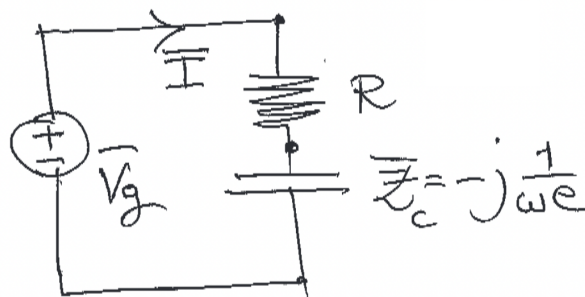
ed è la pulsazione alla quale la risposta in ampiezza è pari a $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ la massima risposta in ampiezza (che vale V_M/R quando $\omega = 0$).

11.6.4 Circuito RC serie

Consideriamo il circuito RC serie in figura, determinare $i(t)$ in regime sinusoidale.



Associamo il circuito simbolico nel dominio dei fasori, è senza memoria.



Analizziamo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\vec{I}$. Si ha

$$\vec{V}_g = \vec{V}_R + \vec{V}_C = R\vec{I} - \frac{j}{\omega C}\vec{I}$$

da cui

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{\vec{V}_g}{R - j(1/\omega C)} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} e^{j(\varphi_v + \arctan(1/\omega CR))}$$

Abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} \cos\left(\omega t + \varphi_v + \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

La presenza di C in serie a R provoca

- un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$
- uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\arctan(1/\omega CR)$ compreso fra 0 e $\pi/2$

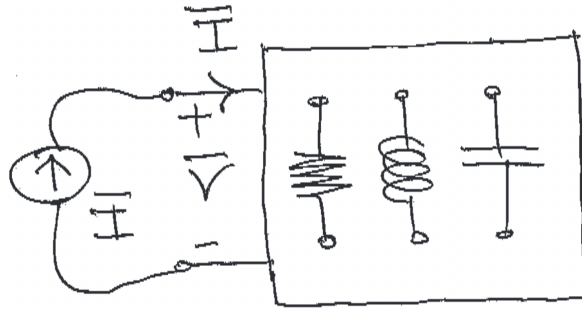
Tali effetti sono tanto più evidenti quanto ω è bassa. Studiare la risposta in frequenza del filtro e mostrare che è un passo alto del primo ordine con pulsazione critica $\omega_c = 1/(RC)$.

11.6.5 Impedenza e ammettenza di un bipolo

Consideriamo un bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω . contenente R, L, C (non contenenti generatori indipendenti di tensione e corrente), l'impedenza

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \text{ Ohm}$$

è definita in modo analogo alla resistenza equivalente di un bipolo



L'ammettenza del bipolo è il reciproco dell'impedenza

$$\vec{Y} = \frac{\vec{I}}{\vec{V}} \text{ Ohm}^{-1}$$

e si può dimostrare che

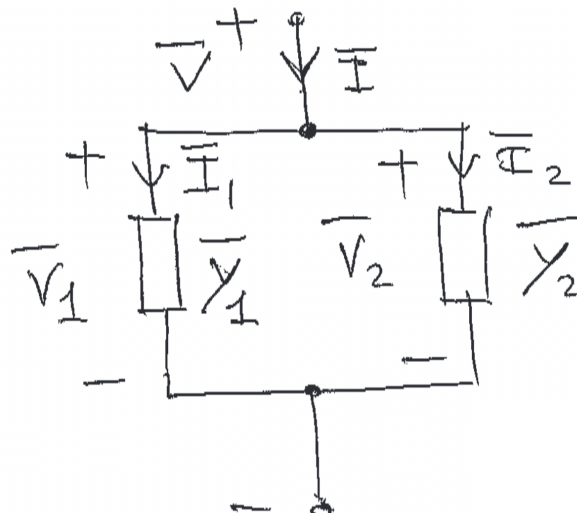
$$\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}} \quad \vec{Z} = \frac{1}{\vec{Y}}$$

Le regole per il calcolo delle impedenze e ammettenze sono perfettamente analoghe a quelle per il calcolo delle resistenze equivalenti. Ad esempio, per due bipoli in parallelo si ha

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{Y}_1 \vec{V}_1 + \vec{Y}_2 \vec{V}_2 = (\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2) \vec{V}$$

quindi

$$\vec{Y}_{\text{eq}} = \vec{Y}_1 + \vec{Y}_2$$



La forma algebrica è

$$\vec{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

dove $R(\omega)$ in Ohm è detta resistenza mentre $X(\omega)$ in Ohm è detta reattanza. Si ha

$$\vec{Y}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

dove $G(\omega)$ in Ohm^{-1} è detta conduttanza mentre $B(\omega)$ in Ohm^{-1} è detta suscettanza. Dato che

$$\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

quindi le formule di trasformazione sono

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

La forma esponenziale è

$$\vec{Z} = Ze^{j\varphi_z}$$

dove Z in Ohm è il modulo dell'impedenza e φ_z è l'argomento. Si ha

$$\vec{Y} = Ye^{j\varphi_y}$$

dove Y in Ohm^{-1} è il modulo dell'ammettenza e φ_y è l'argomento. Le formule di trasformazione sono

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

Inoltre

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e, se $\vec{Z} \neq 0$, allora φ_z è tale che

$$\cos(\varphi_z) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \sin(\varphi_z) = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

quindi

$$\tan(\varphi_z) = \frac{X}{R}$$

e viceversa

$$R = Z \cos(\varphi_z) \quad X = Z \sin(\varphi_z)$$

11.6.6 Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale

Consideriamo un bipolo di cui si conosce $\vec{Z}$ o $\vec{Y}$ ed è nota

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Determinare $v(t)$. Si ha

$$\vec{V} = V_M e^{j\varphi_v} = \vec{Z} \vec{I} = Ze^{j\varphi_z} I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi

$$V_M = Z I_M \quad \varphi_v = \varphi_i + \varphi_z$$

e

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

Nota

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

determinare $i(t)$, si ha

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} = \vec{Y} \vec{V} = Y e^{j\varphi_y} V_M e^{j\varphi_v}$$

quindi

$$I_M = Y V_M \quad \varphi_i = \varphi_v + \varphi_y$$

e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y)$$

Possiamo scrivere

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$$

Si ha

$$\vec{Z} = Z e^{j\varphi_z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}}$$

e quindi

$$Z = \frac{V_M}{I_M} \quad \varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

Il modulo dell'impedenza coincide con il rapporto delle ampiezze di tensione e corrente del bipolo, l'argomento dell'impedenza coincide con lo sfasamento tensione-corrente.

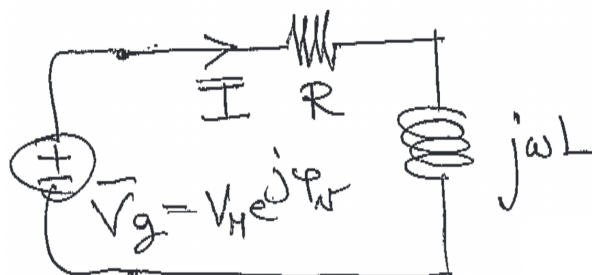
11.6.7 Esempio: circuito RL

Consideriamo il circuito elementare RL , si ha

$$\vec{Z} = Z e^{j\varphi_z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$



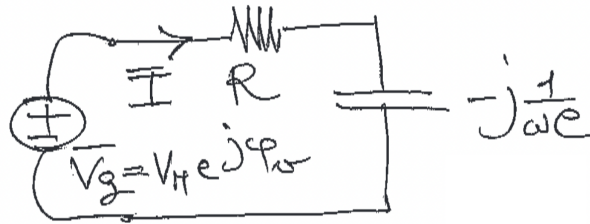
11.6.8 Esempio: circuito RC

Consideriamo il circuito elementare RC , si ha

$$\vec{Z} = Z e^{j\varphi_z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctan(1/(\omega CR))}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \cos\left(\omega t + \varphi_v + \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$



11.6.9 Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo

Consideriamo l'impedenza

$$\vec{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

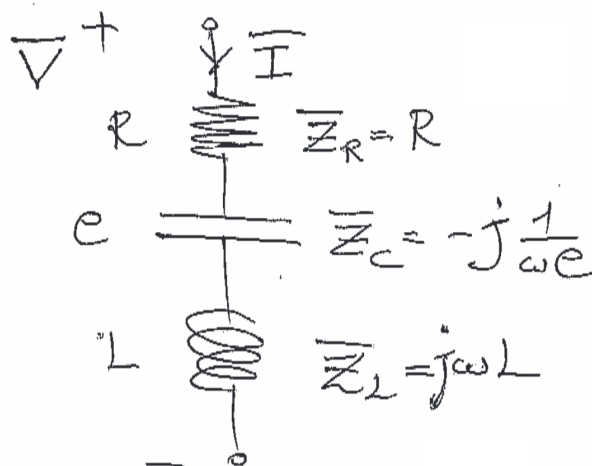
e supponiamo che il bipolo sia passivo ($R(\omega) > 0$). Segue che

- L'impedenza è di tipo ohmico-induttivo alla pulsazione ω se $X(\omega) \geq 0$, in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente è in ritardo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione.
- L'impedenza è tipo ohmico-capacitivo alla pulsazione ω se $X(\omega) \leq 0$, in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente è in anticipo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione.

L'impedenza di un bipolo può essere di tipo ohmico induttivo per certi valori di ω e di tipo ohmico capacitivo per altri valore di ω .

11.6.10 Circuiti risonanti RLC

Consideriamo il circuito risonante RLC serie in regime sinusoidale a pulsazione ω .



L'impedenza vale

$$\vec{Z} = \vec{Z}_R + \vec{Z}_L + \vec{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

Abbiamo un effetto di cancellazione fra X_L e X_C . La pulsazione di risonanza ω_0 , pulsazione alla quale $X_L = X_C$ cioè $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$, è

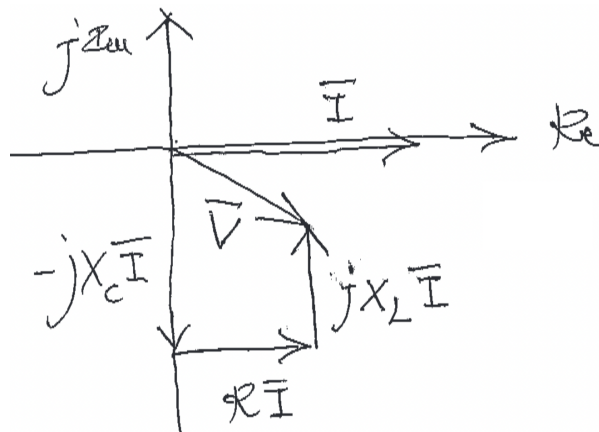
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

Supponiamo scorra una corrente $\vec{I}$ con $\varphi_i = 0$, vogliamo costruire graficamente la tensione $\vec{V}$ da applicare per far scorrere tale corrente. Si ha

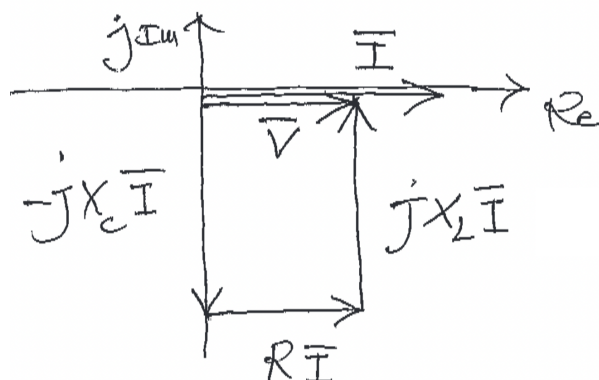
$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L = R\vec{I} - jX_C\vec{I} + jX_L\vec{I}$$

Consideriamo tre casi diversi:

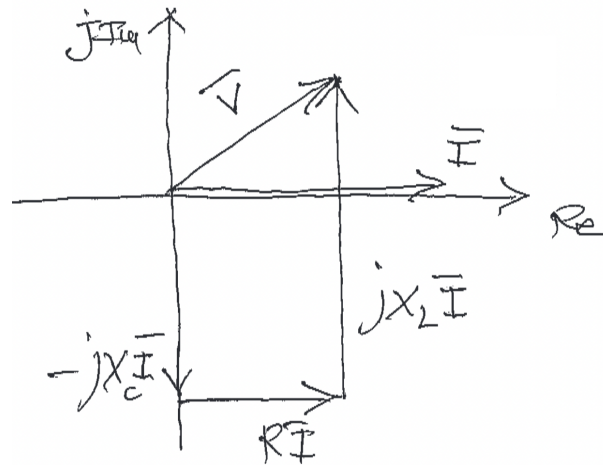
1. $\omega < \omega_0$, in tal caso $X_L < X_C < X < 0$ quindi il comportamento è di tipo ohmico capacitivo (la corrente anticipa la tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$).



2. $\omega = \omega_0$, in tal caso $X_L = X_C$, $X = 0$ e $\vec{Z} = R$ quindi il comportamento è di tipo resistivo (corrente in fase con la tensione).



3. $\omega > \omega_0$, in tal caso $X_L > X_C$, $X > 0$ quindi il comportamento è di tipo ohmico induttivo (corrente ritarda rispetto alla tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$).



Notare che un circuito RLC cambia drasticamente il suo comportamento al variare di ω passando da un comportamento ohmico-capacitivo ad uno resistivo e infine a uno ohmico-induttivo. Si ha

$$\vec{Z}(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$$

con

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi_z(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)$$

La corrente assorbita in regime sinusoidale vale

$$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$$

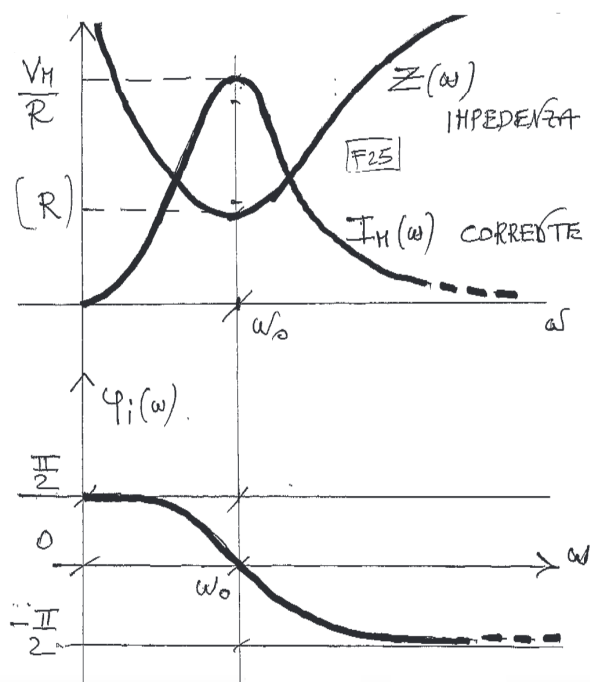
con

$$I_M(\omega) = \frac{V_M(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_M(\omega)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$$

e

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v(\omega) - \varphi_z(\omega) = \varphi_v(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)$$

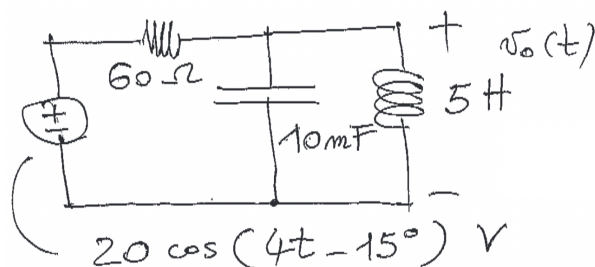
Assumiamo per semplicità che $V_M(\omega) = V_M$ e $\varphi_v(\omega) = 0$, disegniamo gli andamenti della risposta in ampiezza $I(\omega)$ e in fase $\varphi_i(\omega)$.



Si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine. Notare che un circuito RLC serie offre la minima impedenza alla pulsazione ω_0 di risonanza, pulsazione alla quale l'ampiezza della corrente assorbita risulta massima.

11.6.10.1 Esempio 1

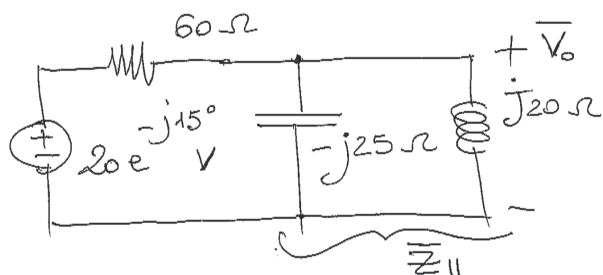
Determinare $v_0(t)$ in regime sinusoidale per il circuito in figura.



Notare che la fase della tensione del generatore è espressa in gradi invece che in radianti, nei calcoli che seguono dobbiamo comportarci di conseguenza. Si ha

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ohm} \quad X_L = \omega L = 20 \text{ Ohm}$$

quindi otteniamo il circuito simbolico



che possiamo analizzare con i metodi delle reti resistive, in particolare

$$\vec{Z}_{II} = -j25 || j20 = j100 \text{ Ohm}$$

Dalla regola del partitore di tensione

$$\vec{V}_o = 20e^{-j15^\circ} \cdot \frac{j100}{60 + j100} = 17.15e^{j16^\circ} \text{ V}$$

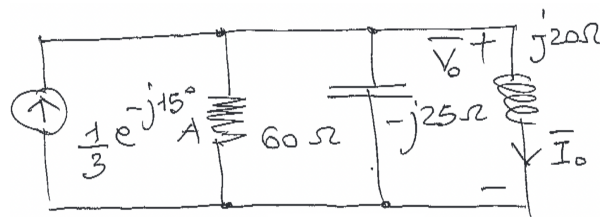
La tensione in regime sinusoidale vale quindi

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 16^\circ) \text{ V}$$

Possiamo utilizzare un metodo alternativo, trasformiamo il generatore reale di tensione in uno reale di corrente e determiniamo $\vec{I}_o$ con la regola del partitore di corrente.

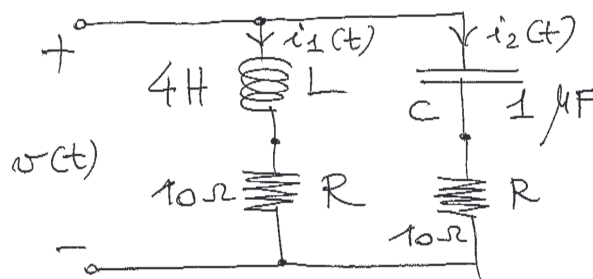
$$\vec{I}_o = \frac{e^{-j15^\circ}}{3} \cdot \frac{1/j20}{1/60 + 1/-j25 + 1/j20}$$

e poi $\vec{V}_o = j20\vec{I}_o$. Verificare che si ottiene lo stesso risultato precedente

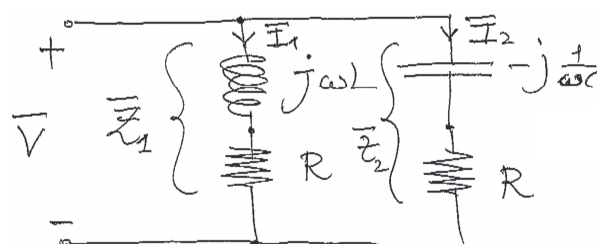


11.6.10.2 Esempio 2

Determinare ω in modo che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in regime sinusoidale.



Consideriamo il circuito simbolico nel dominio dei fasori



Si ha

$$I_{1M} = \frac{V_M}{Z_1} \quad I_{2M} = \frac{V_M}{Z_2}$$

quindi deve essere

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

da cui $X_L = X_C$ ossia

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ rad/sec}$$

Il problema è disegnare un diagramma fasoriale alla pulsazione ω ottenuta assumendo $\varphi_v = 0$ e interpretare il risultato.

Capitolo 12

Potenza in regime sinusoidale

12.1 Valore efficace di una grandezza sinusoidale

Data

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

il suo valore quadratico medio è

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = V_M^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{V_M^2}{2}$$

dove la media è calcolata sul periodo $T = 2\pi/\omega$ della sinusoide. Il valore efficace (root mean square, rms) è definito come

$$V_{rms} = V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \approx 0.707 V_M$$

ed è utile per esprimere potenze in regime sinusoidale, se $V_M = 310$ V si ha $V = 220$ V.

12.2 Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C

12.2.1 Resistore ideale

Consideriamo un resistore ideale R soggetto a

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

e quindi attraversato da

$$i(t) = V_M \cos(\omega t)/R$$

La potenza istantanea assorbita in regime sinusoidale in Watt è

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \geq 0$$

e la potenza media assorbita da R in un periodo T è

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

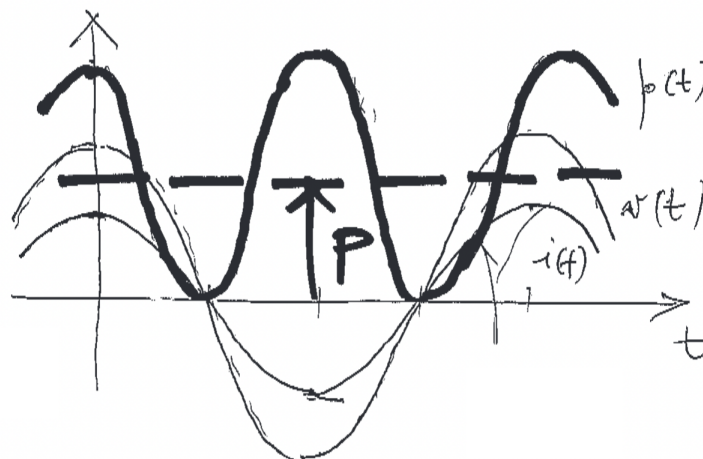
quindi

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{V^2}{R} = R I^2 = V I > 0$$

La quantità P è detta potenza attiva e si misura in Watt. Si ha

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt = E$$

che è l'energia in Joule, quindi l'energia elettrica assorbita dal resistore in un periodo. Tale energia è trasformata in altre forme di energia dal resistore (ad esempio, calore o luce). Se conosciamo la potenza attiva possiamo trovare quindi l'energia elettrica trasferita al bipolo in modo irreversibile, la potenza attiva viene anche detta potenza reale o potenza utilizzata. Consideriamo, ad esempio, una stufa da 1 kW alimentata alla frequenza $f = 50$ Hz e periodo è $T = 20$ msec. L'energia assorbita dalla stufa e trasformata integralmente in calore in un periodo è pari a $1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20$ Joule. L'energia assorbita in un secondo vale $50 \cdot 20 = 1000$ Joule e quella assorbita in un'ora è $3600 \cdot 1000 = 3.6 \cdot 10^6$ Joule, che corrisponde per definizione a 1 kWh (chilowattora). La figura che segue riporta i diagrammi di $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ e la quantità P .



12.2.2 Induttore ideale

Sia

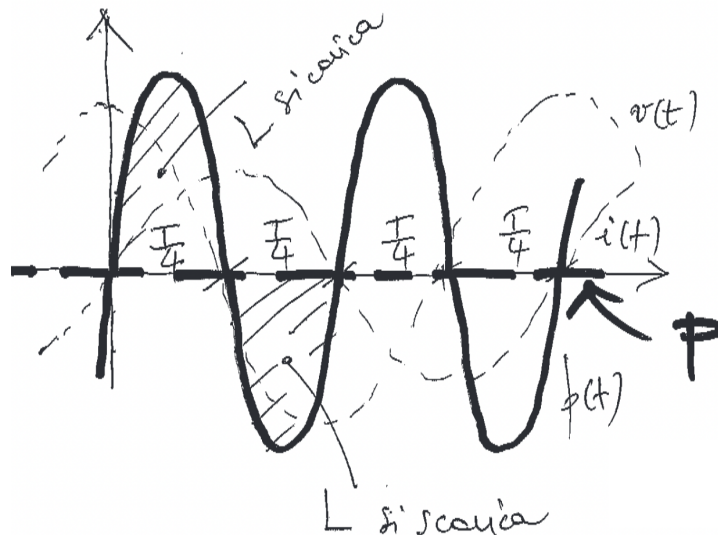
$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

e

$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$$

allora

$$p(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{V_M^2}{2\omega L} \sin(2\omega t) \text{ W}$$



I diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura, notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ l'induttore assorbe energia ($p(t) \geq 0$) ma nel secondo quarto dà indietro tutta l'energia assorbita nel primo quarto ($p(t) \leq 0$). Il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire, la potenza assorbita da L vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M^2}{2\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ W}$$

Vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta L e campo magnetico di L . Tecnicamente è importante misurare tale scambio energetico, ciò viene fatto introducendo la potenza reattiva dell'induttore

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M = VI = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VAR}$$

Per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata, usiamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi). Si può dimostrare che

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$$

dove

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i^2(t) dt$$

è l'energia media del campo magnetico di L . Quindi Q_L è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene. Si ha

$$\begin{aligned} E_L^{\text{media}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i^2(t) dt = \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{4} L I_M^2 \text{ Joule} \end{aligned}$$

mentre $Q_L = 1/2 \omega L I_M^2$. Possiamo pensare a Q_L come una misura convenzionale della potenza che si deve impegnare per creare il campo magnetico dell'induttore.

12.2.3 Condensatore ideale

Vale una trattazione duale rispetto a quella dell'induttore. Sia

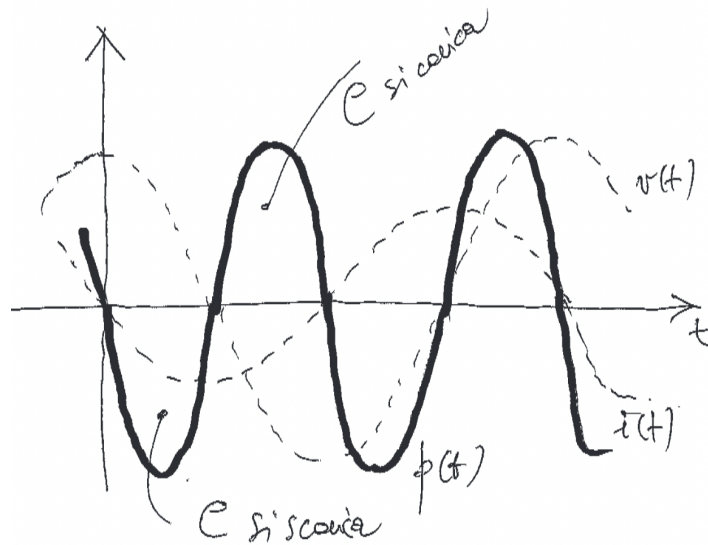
$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

e

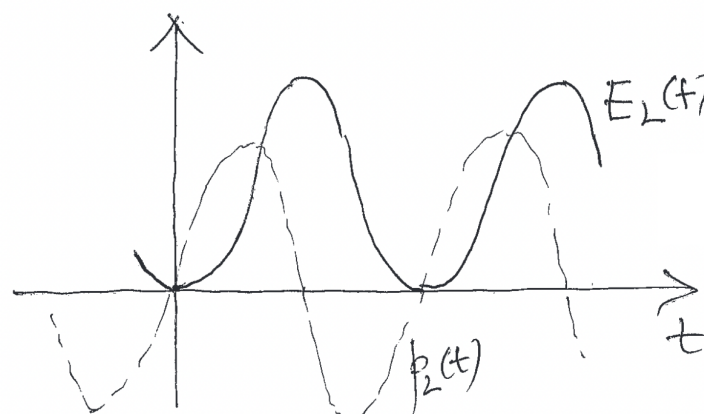
$$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_M \sin(\omega t)$$

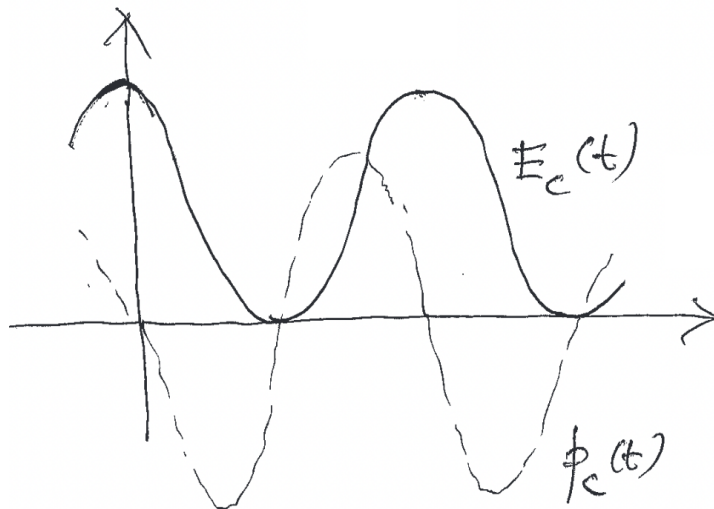
allora

$$p(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t) \text{ W}$$



I diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura. Notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ il condensatore eroga energia ($p(t) \leq 0$) mentre nel secondo quarto assorbe una quantità di energia pari a quella erogata nel primo quarto ($p(t) \geq 0$). Il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire, notare che L e C scambiano energia con il generatore con fasi esattamente opposte. Ciò è confermato dai diagrammi che seguono che mostrano la potenza assorbita da L cioè $p_L(t)$, quella assorbita da C cioè $p_C(t)$ e l'energia $E_L(t)$ e $E_C(t)$.





La potenza attiva assorbita da C vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \text{ W}$$

Vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta C e campo elettrico di C , tale scambio energetico viene misurato convenzionalmente con la potenza reattiva del condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -VI = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} I_M^2 \text{ VAR}$$

Per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata, usiamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi). Notare che si attribuisce convenzionalmente segno negativo a Q_C , in effetto in un circuito gli induttori hanno bisogno di impegnare (assorbire) potenza reattiva per creare il loro campo magnetico mentre i condensatori funzionano da sorgenti (erogano) potenza reattiva. Si ha

$$Q_C = -2\omega E_C^{\text{media}}$$

dove

$$E_C^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \text{ Joule}$$

è l'energia media del campo elettrico di C quindi Q_C è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo elettrico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene.

12.3 Potenza in regime sinusoidale per bipolo generico

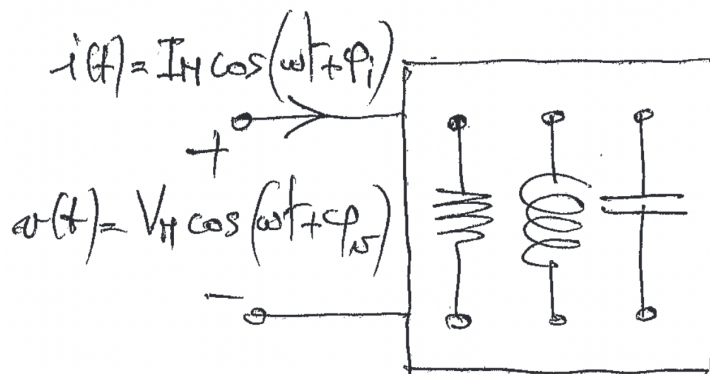
Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω e sia

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

la tensione e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

la corrente coordinata secondo la convenzione degli utilizzatori. Studiare la potenza in regime sinusoidale che viene assorbita dal bipolo.



La potenza istantanea assorbita dal bipolo in regime sinusoidale vale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ W}$$

Siamo interessati alla potenza media su un periodo $T = 2\pi/\omega$ quindi

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

La potenza media, misurata in Watt, è detta anche potenza attiva o potenza reale e ha, come per il resistore, un importante significato fisico infatti

$$PT = \int_0^T p(t) dt = E$$

dove E è l'energia elettrica in Joule che viene trasferita irreversibilmente e assorbita dal bipolo in un periodo T . Se conosciamo la potenza attiva siamo capaci di trovare l'energia utilizzata dal bipolo in T , energia che viene trasformata in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc).

12.3.1 Potenza attiva e reattiva di un bipolo generico

Consideriamo un bipolo di tipo ohmico-induttivo di impedenza

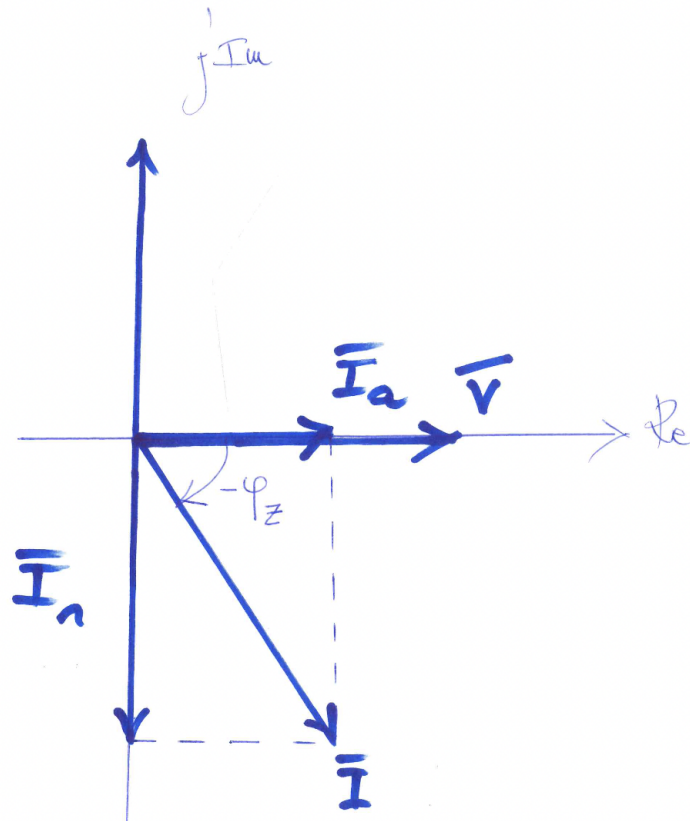
$$\vec{Z} = Z e^{j\varphi_z}$$

e applichiamo

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

quindi $\vec{V} = V_M$ è un vettore diretto lungo l'asse orizzontale. Come noto la corrente $\vec{I}$ è in ritardo di un angolo $-\varphi_z$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione. Proiettiamo $\vec{I}$ lungo una direzione parallela a $\vec{V}$ e una direzione ortogonale a $\vec{V}$, otteniamo

- $\vec{I}_a$ detta componente di $\vec{I}$ in fase con $\vec{V}$, nota come componente attiva della corrente
- $\vec{I}_r$ detta componente di $\vec{I}$ ortogonale a $\vec{V}$ o in ritardo rispetto a $\vec{V}$ di $\pi/2$, nota come componente reattiva della corrente



Si ha

$$\vec{I} = \vec{I}_a + \vec{I}_r$$

e quindi

$$i(t) = i_a(t) + i_r(t)$$

dove

$$i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$$

e

$$i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) = I_{rM} \sin(\omega t)$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = P_a + P_r = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt \end{aligned}$$

dove

- P_a è la potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione
- P_r è la potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura

Valutiamo P_a , si ha

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) \right] dt$$

quindi

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0 \text{ W}$$

quindi la componente attiva della corrente trasporta potenza attiva (quindi energia utile al carico). Valutiamo P_r , si ha

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{rM} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{rM} \sin(2\omega t) dt$$

quindi $P_r = 0 \text{ W}$. Indipendentemente dalla sua ampiezza, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva al carico quindi ad essa non è associato un trasferimento di energia utile al carico. La componente reattiva della corrente è detta anche corrente oziosa o corrente swattata. Da un punto di vista fisico la corrente reattiva modella uno scambio reversibile di energia, a media nulla su un periodo, fra generatore che alimenta il bipolo e campi elettrici e magnetici all'interno del bipolo. Inoltre come misura convenzionale di tale scambio reversibile a media nulla si introduce la potenza reattiva

$$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r > 0 \text{ VAR}$$

La potenza reattiva corrisponde a potenza scambiata ma non utilizzata, per tale motivo Q non viene misurato in VAR. La trattazione nel caso ohmico-capacitivo è analoga, si attribuisce però segno negativo alla potenza reattiva cioè

$$Q_r = -\frac{1}{2} V_M I_{rM} = -V I_r < 0 \text{ VAR}$$

12.3.2 Conclusione

Lo stato relativo al trasferimento energetico in regime sinusoidale verso il bipolo consta di due contributi:

1. trasferimento irreversibile di energia elettrica (energia utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza attiva

$$P = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a = V I \cos(\varphi_z) = V I \cos(\varphi_v - \varphi_i) \text{ W}$$

2. vi è sovrapposizione uno scambio reversibile di energia elettrica a media nulla su un periodo (energia scambiata ma non utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza reattiva

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r = V I \sin(\varphi_z) = V I \sin(\varphi_v - \varphi_i) \text{ VAR}$$

12.4 Potenza apparente

Si introduce la potenza apparente

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = V I \text{ VA}$$

che si misura convenzionalmente in volt-ampere (VA). Si ha

$$P = A \cos(\varphi_z) \quad Q = A \sin(\varphi_z)$$

e

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

cioè la potenza apparente è una combinazione di potenza attiva e reattiva. Notare che se $P, Q \neq 0$ allora si ha $A > P, Q$.

12.5 Potenza istantanea

Si ha

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) \end{aligned}$$

e quindi

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

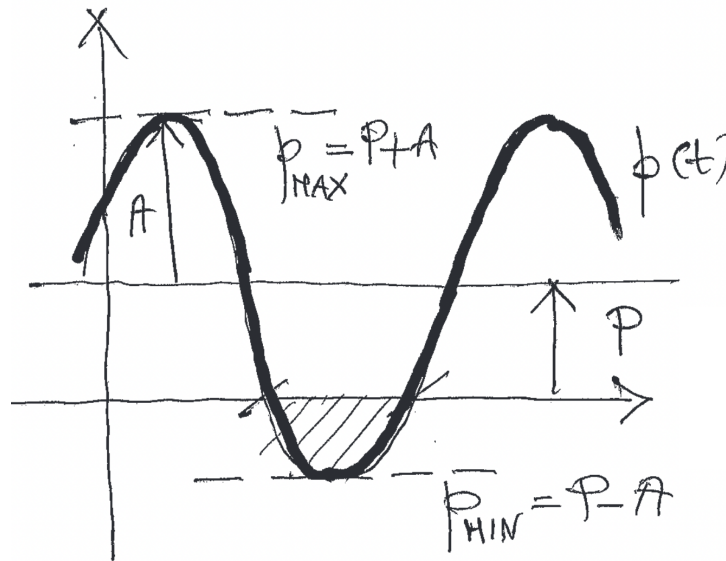
dove $p(t)$ ha un termine costante P pari alla potenza attiva e un termine variabile a pulsazione 2ω con ampiezza pari alla potenza apparente. Il termine variabile della potenza istantanea può causare problemi, per esempio un alternatore richiede una coppia pulsante per funzionare a frequenza costante. Inoltre, lo stesso termine origina vibrazioni meccaniche indesiderabili.

12.5.1 Esempio

Consideriamo un bipolo dato da L in serie R



In questo caso: $P = P_R > 0$, $Q = Q_L > 0$ e $A = P, Q$. L'andamento qualitativo della potenza istantanea $p(t)$ è



Si noti che $p(t)$ varia fra un massimo

$$p_{max} = P + A = P + \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ W}$$

e un minimo

$$p_{min} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0 \text{ W}$$

Ci sono intervalli di tempo in cui $p(t) < 0$, interpretare fisicamente cosa accade in tali intervalli.

12.6 Potenza attiva e reattiva

Consideriamo un bipolo di impedenza $\vec{Z} = R + jX$ e ammettenza $\vec{Y} = G + jB$. Siano $\vec{V}$ e $\vec{I}$ i fasori di tensione e corrente coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori. La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere espressa in una delle seguenti forme equivalenti

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_z) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{V} \vec{I}^*] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 \end{aligned}$$

Si ha

$$\vec{V} \vec{I}^* = V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_M I_M e^{j\varphi_z}$$

Inoltre

$$\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{V} \vec{I}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{Z} \vec{I} \vec{I}^*] = \frac{1}{2} I_M^2 \text{Re}[\vec{Z}]$$

e

$$\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{V} \vec{I}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{V} (\vec{Y} \vec{V})^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{V} \vec{V}^* \vec{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2 \text{Re}[\vec{Y}^*]$$

Analogamente, per la potenza reattiva assorbita dal bipolo si ha

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_M \sin(\varphi_z) = \frac{1}{2} \text{Im}[\vec{V} \vec{I}^*] = \frac{1}{2} \text{Im}[\vec{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 = -\frac{1}{2} \text{Im}[\vec{Y}] V_M^2 = -\frac{1}{2} B V_M^2$$

dove l'asterisco denota il complesso coniugato.

12.7 Potenza Complessa

Definiamo la potenza complessa

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{V} \vec{I}^* \text{ VA}$$

Si ha

$$\vec{P} = P + jQ$$

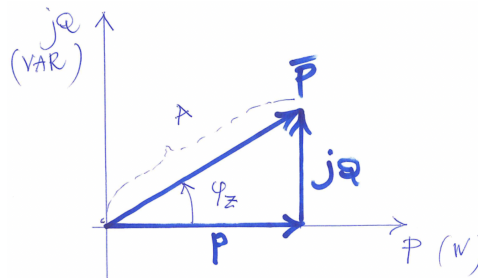
Inoltre

$$\vec{P} = \frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

e quindi

$$\vec{P} = A e^{j\varphi_z}$$

La potenza complessa ha come parte la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva, ha come modulo la potenza apparente e come argomento l'argomento dell'impedenza.

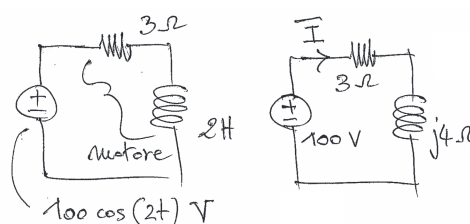


Il trasferimento di potenza in regime sinusoidale può essere caratterizzato in modo completo riportando nel piano complesso $\vec{P}$, P , Q , A e φ_z . Otteniamo così il triangolo delle potenze, che è simile a quello delle impedenze, e in questo contesto il piano complesso è inteso come piano delle potenze. La potenza attiva P (Watt) è sull'asse reale e rappresenta una cessione irreversibile di energia al carico. La potenza reattiva Q (VAR) è sull'asse immaginario e rappresenta uno scambio reversibile di energia con i campi elettrici e magnetici del carico. Ricordiamoci anche che la potenza attiva è il tramite con cui si trasforma energia elettrica in altre forme di energia (calore, energia, meccanica, etc), si noti in particolare che il triangolo rettangolo P , Q , A rappresenta geometricamente la nota relazione

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

12.7.1 Esempio

Determinare la potenza istantanea, attiva e reattiva fornita dal generatore al motore.



Consideriamo il circuito simbolico per il quale si ha

$$P = \frac{1}{2} \vec{V} \vec{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

Si ha

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = 12 - j16 \text{ A}$$

quindi

$$P = \frac{1}{2} 100(12 + j16) = 600 + j800 \text{ VA}$$

Allora $P = 600 \text{ W}$, $Q = 800 \text{ VAR}$. Si ha

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA}$$

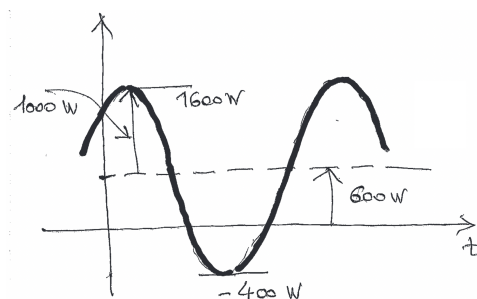
e

$$\varphi_z = \arctan(4/3) \approx 53^\circ$$

Allora

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_z) = 600 + 1000 \cos(4t - 53^\circ) \text{ W}$$

Notare che $p(t)$ varia fra un massimo $p_{max} = P + A = 1600 \text{ W}$ e un minimo $p_{min} = P - A = -400 \text{ W}$.



12.7.2 Potenza complessa degli elementi fondamentali

12.7.2.1 Resistore ideale

Si ha

$$\vec{P}_R = P_R + jQ_R = \frac{1}{2} \vec{V} \vec{I}^* = \frac{1}{2} R \vec{I} \vec{I}^* = \frac{1}{2} R I_M^2 \text{ VA}$$

quindi

$$P_R = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2 = R I^2 = G V^2 \text{ W}$$

e

$$Q_R = 0 \text{ VAR}$$

Un resistore ideale assorbe solo potenza attiva mentre la potenza reattiva impegnata è nulla, non vi è energia scambiata.

12.7.2.2 Induttore ideale

Si ha

$$\vec{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2}\vec{V}\vec{I}^* = \frac{1}{2}j\omega L\vec{I}\vec{I}^* = j\frac{1}{2}\omega LI_M^2 \text{ VA}$$

quindi

$$P_L = 0 \text{ W}$$

e

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega LI_M^2 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{\omega L} = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \text{ VAR}$$

Un induttore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva è nulla, non vi è potenza utilizzata.

12.7.2.3 Condensatore ideale

Si ha

$$\vec{P}_C = P_C + jQ_C = \frac{1}{2}\vec{V}\vec{I}^* = \frac{1}{2}\vec{V}(j\omega C\vec{V})^* = -j\frac{1}{2}\omega CV_M^2 \text{ VA}$$

quindi

$$P_C = 0 \text{ W}$$

e

$$Q_C = -\frac{1}{2}\omega CV_M^2 = -\frac{1}{2}\frac{I_M^2}{\omega C} = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \text{ VAR}$$

Un condensatore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva è nulla, non vi è potenza utilizzata.

12.7.2.4 Osservazione

Un induttore ha una potenza reattiva positiva, tale potenza è impegnata per creare il campo magnetico dell'induttore. Invece un condensatore ha una potenza reattiva negativa, è una sorgente di potenza reattiva (una sorgente di potenza magnetizzante). Quando L e C sono presenti in uno stesso circuito, la potenza reattiva necessaria a L può essere in parte o completamente fornita da C .

12.7.2.5 Trasformatore ideale

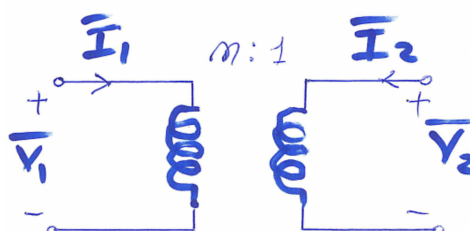
Consideriamo un trasformatore ideale cioè una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = nv_2(t)$$

e

$$i_1(t) = -\frac{1}{n}i_2(t)$$

dove $n = N_1/N_2$ è il rapporto di trasformazione, N_1 e N_2 sono le spire del primo e secondo avvolgimento.



Sappiamo che

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t) \left(-\frac{1}{n}i_2(t) \right) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

per ogni t , il trasformatore ideale è trasparente alla potenza istantanea. Per la linearità della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\vec{V}_1 = n\vec{V}_2 \quad \vec{I}_1 = -1/n\vec{V}_2$$

La potenza complessa assorbita vale

$$\vec{P} = P + jQ = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \frac{1}{2}\vec{V}_1\vec{I}_1^* + \frac{1}{2}\vec{V}_2\vec{I}_2^* = \frac{1}{2}n\vec{V}_2(-1/n\vec{I}_2^*) + \frac{1}{2}\vec{V}_2\vec{I}_2^* = 0 \text{ VA}$$

Un trasformatore ideale è trasparente sia alla potenza attiva che alla potenza reattiva.

12.7.2.6 Giratore ideale

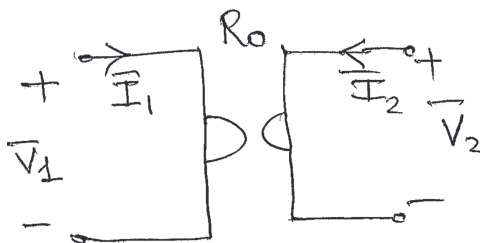
Consideriamo un giratore ideale cioè una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = -R_0 i_2(t)$$

e

$$v_2(t) = R_0 i_1(t)$$

dove R_0 in Ohm è il rapporto di girazione.



Sappiamo che il giratore ideale è trasparente alla potenza istantanea. Per la linearità della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\vec{V}_1 = -R_0\vec{I}_2 \quad \vec{V}_2 = R_0\vec{I}_1$$

La potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned} \vec{P} = P + jQ = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= \frac{1}{2}\vec{V}_1\vec{I}_1^* + \frac{1}{2}\vec{V}_2\vec{I}_2^* = \\ &= -\frac{1}{2}R_0\vec{I}_2\vec{I}_1^* + \frac{1}{2}R_0\vec{I}_1\vec{I}_2^* = \frac{1}{2}R_0 [\vec{I}_1\vec{I}_2^* - \vec{I}_1^*\vec{I}_2] = jR_0\text{Im}[\vec{I}_1\vec{I}_2^*] \text{ VA} \end{aligned}$$

quindi un giratore ideale è trasparente alla potenza attiva ($P = 0$), non è invece trasparente alla potenza reattiva che vale

$$Q = R_0\text{Im}[\vec{I}_1\vec{I}_2^*] \text{ VAR}$$

12.8 Teorema di Boucherot

Consideriamo una rete con l bipoli in regime sinusoidale a pulsazione ω e utilizziamo per ogni bipolo k la convenzione degli utilizzatori per coordinare i fasori $\vec{V}_k$ e $\vec{I}_k$. Sia ha

$$\sum_{k=1}^l \vec{P}_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \vec{V}_k \vec{I}_k^* = \sum_{k=1}^l (\vec{P}_k + jQ_k) = 0 \text{ VA}$$

cioè vale la conservazione della potenza complessa. Ne consegue che vale anche la conservazione della potenza attiva

$$\sum_{k=1}^l P_k = 0 \text{ W}$$

e della potenza reattiva

$$\sum_{k=1}^l Q_k = 0 \text{ VAR}$$

In un circuito in cui sono presenti R, L, C e un certo numero di generatori di tensione e/o corrente possiamo scrivere

$$\sum_{\text{generatori}} P_{s,i} = \sum_{\text{resistori}} P_{R_i} = \sum_{\text{resistori}} R_i I_i^2 \text{ W}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\text{generatori}} Q_{s,i} &= \sum_{\text{induttori}} Q_{L_i} + \sum_{\text{condensatori}} Q_{C_i} = \sum_{\text{induttori}} \omega L_i I_i^2 + \sum_{\text{condensatori}} (-\omega C_i V_i^2) = \\ &= 2\omega \left[\sum_{\text{induttori}} E_{L_i^{\text{media}}} - \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i^{\text{media}}} \right] \text{ VAR} \end{aligned}$$

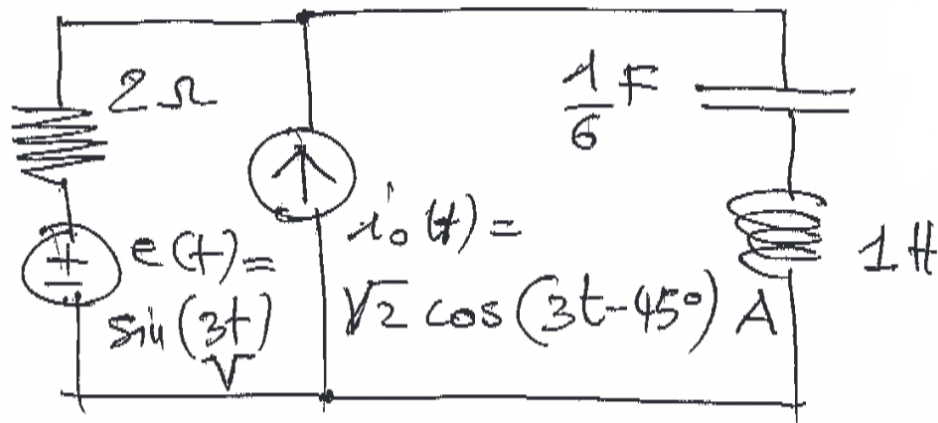
dove $P_{s,i}$ (rispettivamente $Q_{s,i}$) è la potenza attiva (rispettivamente potenza reattiva) erogata dal generatore i -esimo. Notare che, nel complesso, i generatori non hanno bisogno di erogare potenza reattiva al circuito se L e C si compongono cioè l'energia media di tipo elettrico è pari a quella di tipo magnetico. Segue che

$$\sum_{\text{induttori}} E_{L_i^{\text{media}}} = \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i^{\text{media}}}$$

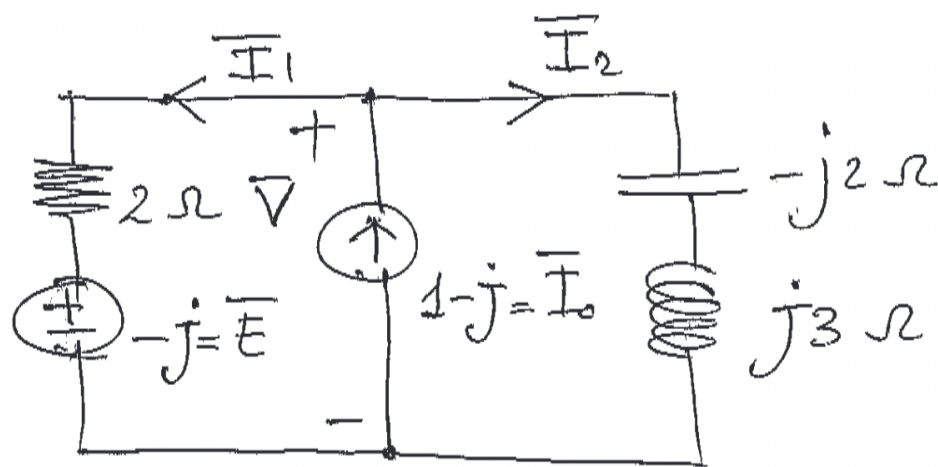
e ciò accade, ad esempio, in condizioni di risonanza.

12.8.1 Esempio

Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura



Consideriamo il circuito simbolico associato



Usiamo il teorema di Millmann per determinare $\vec{V}$ infatti segue che

$$\vec{V} = \frac{-\frac{j}{2} + 1 - j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}} = \frac{8 + j}{5} \text{ V}$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V} + j}{2} = \frac{4 + j3}{5} \text{ A} \quad \vec{I}_2 = \vec{I}_0 - \vec{I}_1 = \frac{1 - j8}{5} \text{ A}$$

- La potenza erogata dal generatore di corrente vale

$$\vec{P}_0 = \frac{1}{2} \vec{V} \vec{I}_0^* = \frac{7 + j9}{10} \text{ VA}$$

- La potenza erogata dal generatore di tensione vale

$$\vec{P}_e = -\frac{1}{2} \vec{E} \vec{I}_1^* = \frac{3 + j4}{10} \text{ VA}$$

- La potenza assorbita dal resistore R vale

$$P_R = \frac{1}{2} 2 I_{1M}^2 = 1 \text{ W}$$

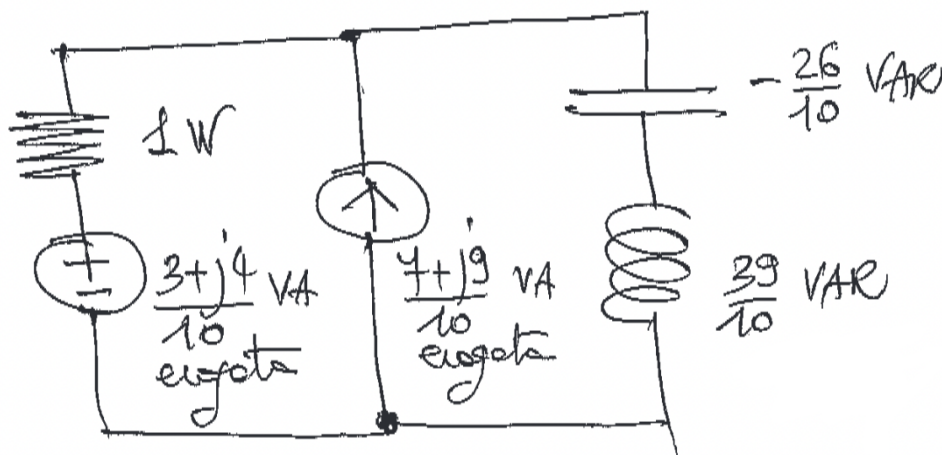
- La potenza assorbita dall'induttore L vale

$$Q_L = \frac{1}{2} 3 I_{2M}^2 = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

- La potenza assorbita dal condensatore C vale

$$Q_C = \frac{1}{2} 2 I_{2M}^2 = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

Quindi il teorema di Boucherot è verificato infatti abbiamo ottenuto



12.8.2 Altre convenzioni

Abbiamo definito

$$\vec{I} = I_M e^{j\varphi_i} \text{ A}$$

e a volte utilizzeremo questa notazione

$$\vec{I} = I_{rms} e^{j\varphi_i} = I_{eff} e^{j\varphi_i} = I e^{j\varphi_i} \text{ Aeff}$$

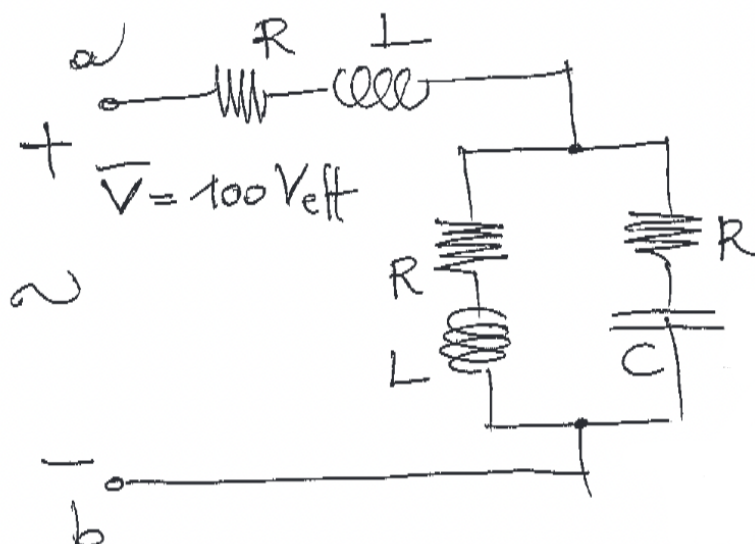
dove il modulo del fasore corrisponde al valore efficace. Per evitare ambiguità si deve esplicitamente indicare l'unità di misura cioè Ampere efficaci. Usando la seconda notazione si ha, ad esempio, che la potenza complessa è espressa da

$$\vec{P} = \vec{V} \vec{I}^* \text{ VA}$$

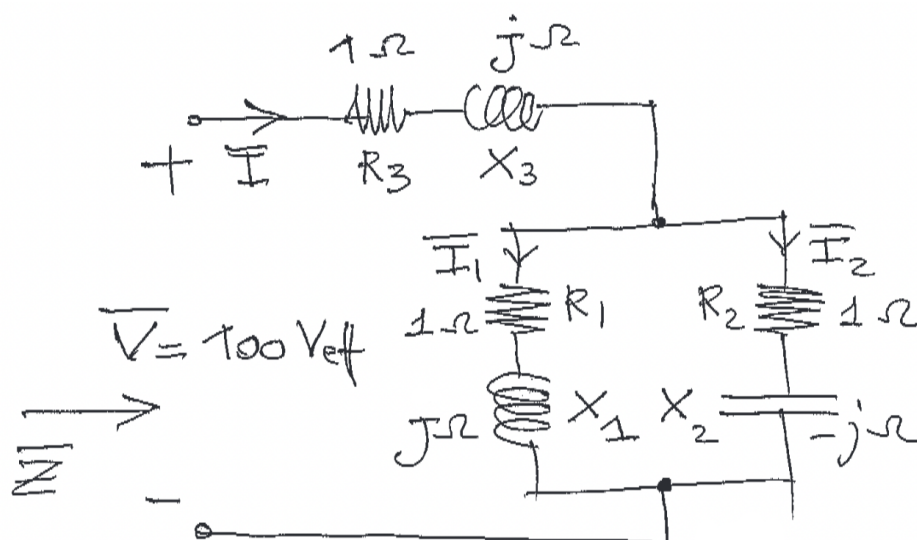
12.8.3 Esempio 1

Determinare la potenza attiva e reattiva assorbita dal bipolo ab in regime sinusoidale a pulsazione ω e verificare la validità del teorema di Boucherot con

$$\omega L = 1/\omega C = 1\omega$$



Consideriamo il circuito simbolico associato



Segue che

$$\vec{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = 2 + j\omega$$

e

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} = \frac{100}{2+j} = 40 - j20 \text{ Aeff}$$

Allora

$$\vec{P} = \vec{V} \vec{I}^* = 100(40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

e quindi

$$P = 4\text{kW} \quad \text{e} \quad Q = 2 \text{ kVAR}$$

Verifichiamo il teorema di Boucherot, dalla regola del partitore di corrente si ha

$$\vec{I}_1 = \vec{I} \frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = (40 - j20) \frac{1-j}{2} = 10 - j30 \text{ Aeff}$$

e quindi

$$\vec{I}_2 = \vec{I} - \vec{I}_1 = 30 + j10 \text{ Aeff}$$

Valutando le potenze attive e reattive assorbite dai bipoli R, L, C si ha che

$$\begin{cases} I_1^2 = 1000 \\ I_2^2 = 1000 \\ I^2 = 2000 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1 \text{ kW} \\ P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1 \text{ kW} \\ P_{R3} = R_3 I_3^2 = 2 \text{ kW} \end{cases}$$

e

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = P = 4 \text{ kW}$$

Inoltre

$$\begin{cases} Q_{X1} = X_1 I_1^2 = 1 \text{ kVAR} \\ Q_{X2} = -X_2 I_2^2 = 1 \text{ kVAR} \\ Q_{X3} = X_3 I_3^2 = 2 \text{ kVAR} \end{cases}$$

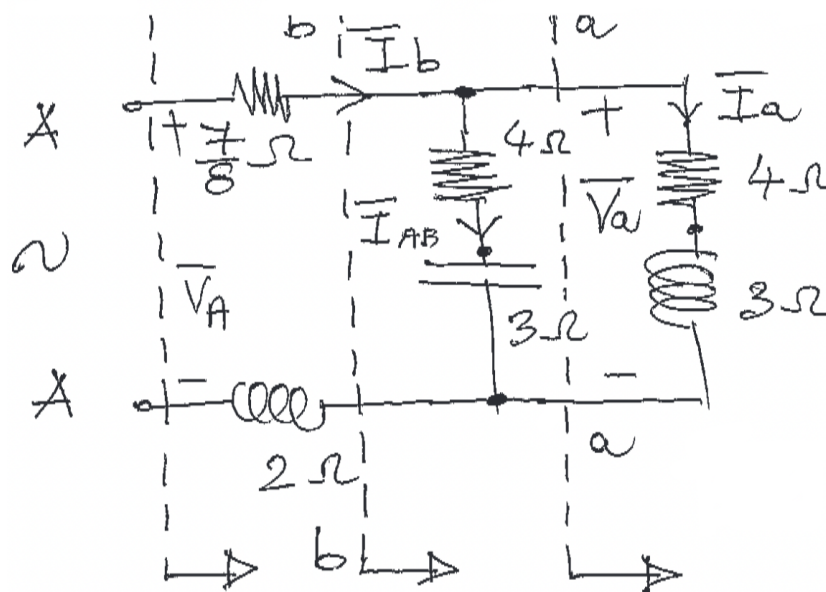
e quindi

$$Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3} = Q = 2 \text{ kVAR}$$

Quindi il teorema di Boucherot è verificato.

12.8.4 Esempio 2

Il bipolo AA è in regime sinusoidale alla pulsazione ω , sulla figura sono indicate resistenze e reattanze dei bipoli alla pulsazione ω considerata, è noto che $I_a = 20 \text{ Aeff}$. Calcolare per via energetica (teorema di Boucherot) la potenza attiva e reattiva ai morsetti AA .



Analizziamo il circuito e poi procediamo verso le sezioni a monte:

- sezione aa

$$P_a = 4I_a^2 = 1600 \text{ W} \qquad Q_a = 3I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

allora

$$A_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} = 2000 = V_a I_a = 20 V_a \text{ VA} \quad \Rightarrow \quad V_a = 100 \text{ Veff}$$

Inoltre

$$I_{AB} = \frac{V_a}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{V_a}{5} = 20 \text{ Aeff}$$

- sezione bb

Dal teorema di Boucherot

$$P_b = P_a + 4I_{AB}^2 = 3200 \text{ W} \qquad Q_b = Q_a - 3I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

quindi

$$a_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} = 3200 = V_a I_b = 100 I_b \text{ VA} \quad \Rightarrow \quad I_b = 32 \text{ Veff}$$

- sezione AA

$$P_A = P_b + \frac{7}{8}I_b^2 = 4096 \text{ W} \qquad Q_A = Q_b + 2I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$

e si ha anche

$$A_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 4580 = V_A I_b = 36 V_A \text{ VA} \quad \Rightarrow \quad V_A = 143 \text{ V}$$

- Osservazione importante: si ha da KV che $\vec{I}_b = \vec{I}_{AB} + \vec{I}_A$ però

$$I_b = 36 \neq I_{AB} + I_a = 20 + 20 = 40 \text{ A}$$

perché non si possono sommare i valori efficaci di grandezze sinusoidali.