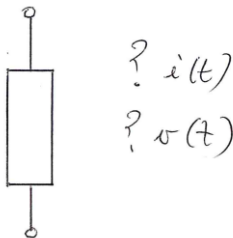


- **Reti elettriche interconnessione di bipoli**

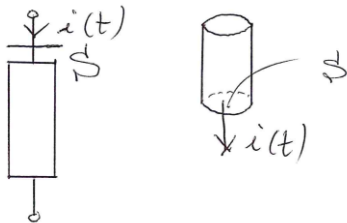
- Consideriamo inizialmente circuiti e reti elettriche ottenute interconnettendo BIPOLI, cioè elementi elettrici a due morsetti (poli o terminali). P. es., R, L, C

- piu' avanti, tripoli, quadripoli, n -poli. P. es., transistor, amplificatore operazionale



Grandezze elettriche su un bipolo

- Interessano la tensione ai morsetti, la corrente che fluisce nel bipolo, la potenza elettrica e energia elettrica assorbita dal bipolo
- definizione di corrente elettrica
- scegliamo un **verso di riferimento** per la corrente indicandolo con una freccia. Consideriamo una sezione S su uno dei conduttori riportando la freccia.



- L'intensità di corrente all'istante t è data da

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}$$

dove $\Delta q(t)$ è la carica che attraversa S in Δt concordemente con il verso indicato

- $i(t)$ è una **grandezza scalare e algebrica (con segno)**
- se la corrente è dovuta p. es. al moto di cariche positive (ioni) e il segno di $i(t)$ è positivo

$$i(t = 1 \text{ sec}) = +3 \text{ Ampere}$$

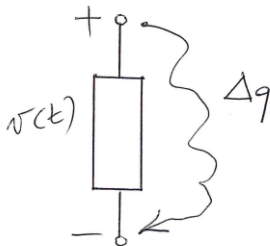
allora il verso del moto delle cariche (**verso vero della corrente**) è concorde con la freccia. Se il segno è negativo

$$i(t = 2) = -4$$

allora il moto delle cariche è discorde con la freccia

- Il verso di riferimento di $i(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $i(t)$ e segno di $i(t)$ permettono di determinare verso effettivo di moto delle cariche (verso vero della corrente)

- definizione di tensione (differenza di potenziale)
- scegliamo un **verso di riferimento** per la tensione indicando con $+$ uno dei morsetti e con $-$ l'altro. Scegliamo un percorso che collega $+$ a $-$ e lo orientiamo da $+$ verso $-$. Sia Δq una carica elettrica infinitesima che si muove lungo il percorso orientato



- La tensione all'istante t e' data da

$$v(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

dove ΔL e' il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo il percorso orientato

- $v(t)$ e' una **grandezza scalare e algebrica (con segno)**
- se il segno di $v(t)$ e' positivo

$$v(t = 1 \text{ sec}) = +4 \text{ Volt}$$

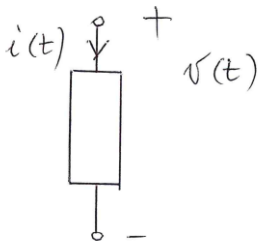
allora il morsetto segnato con $+$ si trova a potenziale piu' alto rispetto a quello segnato con $-$. Accade il contrario se il segno di $v(t)$ e' negativo

$$v(t = 2) = -5$$

- Il verso di riferimento di $v(t)$ e' fissato ad arbitrio. Verso di riferimento di $v(t)$ e segno di $v(t)$ permettono di determinare quale dei due morsetti si trova a potenziale piu' alto all'istante t (verso vero della tensione)

Versi coordinati per tensione e corrente

- **convenzione degli utilizzatori:** fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $+$ ed esce dal morsetto $-$



- potenza elettrica assorbita dal bipolo a t

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

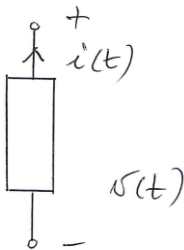
- energia elettrica assorbita dal bipolo in dt

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- energia elettrica assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} dw(t) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- **convenzione dei generatori:** fissato il verso di riferimento di $v(t)$, il verso di riferimento di $i(t)$ e' tale che $i(t)$ entra dal morsetto $-$ ed esce dal morsetto $+$



- potenza elettrica erogata dal bipolo a t

$$p(t) = v(t)i(t) \text{ Watt}$$

- energia elettrica erogata dal bipolo in dt

$$dw(t) = p(t)dt = v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- energia elettrica erogata dal bipolo nell'intervallo di tempo $[t_a, t_b]$

$$\int_{t_a}^{t_b} p(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} v(t)i(t)dt \text{ Joule}$$

- **Relazione costitutiva di un bipolo.** Un legame che il bipolo stabilisce fra tensione e corrente
- e' la legge che caratterizza completamente il comportamento elettrico del bipolo all'interno di un circuito
- per parlare di relazione costitutiva bisogna prima stabilire un riferimento elettrico per il bipolo, scegliendo un verso di riferimento per corrente e tensione, e poi scegliere la convenzione degli utilizzatori o generatori
- ad esempio, un resistore ha come relazione costitutiva $v(t) = Ri(t)$ (Legge di Ohm) se usiamo la convenzione degli utilizzatori, mentre si ha $v(t) = -Ri(t)$ se si usa la convenzione dei generatori

Bipoli passivi o attivi

- Usiamo la convenzione degli utilizzatori. Un bipolo si dice passivo se

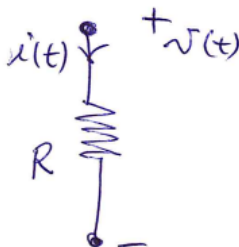
$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt' \geq 0$$

per ogni t e per ogni possibile esperimento che facciamo con il bipolo. Con $-\infty$ si indica l'istante in cui viene fabbricato il bipolo

- Intuitivamente, l'energia complessivamente erogata dal bipolo al circuito a cui e' collegato non puo' mai superare quella precedentemente assorbita
- attenzione, per un condensatore C ci sono in generale intervalli di tempo in cui l'energia e' assorbita (C si carica), ed altri in cui l'energia e' invece erogata (C si scarica dando indietro energia al circuito)

- se non vale la relazione precedente, allora il bipolo si dice attivo
- un bipolo attivo ha al suo interno una **sorgente di energia** (pila, alimentatore)

Resistore ideale



- Convenzione utilizzatori. Relazione costitutiva (legge di Ohm)

$$v(t) = Ri(t)$$

con R resistenza in Ohm. Oppure

$$i(t) = Gv(t)$$

con G conduttanza in Ohm^{-1}

- Potenza elettrica assorbita

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = Gv^2(t) \text{ Watt}$$

- Energia elettrica assorbita in dt

$$dw(t) = v(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt \text{ Joule}$$

- Passività

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t p(t')dt' = \int_{-\infty}^t v(t')i(t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^t Ri^2(t')dt' = \int_{-\infty}^t Gv^2(t')dt' \geq 0 \end{aligned}$$

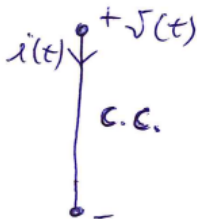
- un resistore ideale è passivo se e solo se $R \geq 0$ o $G \geq 0$

- un resistore ideale e' un elemento adinamico (senza memoria).
C'e' un legame istantaneo fra $v(t)$ e $i(t)$

- Casi particolari. Corto circuito (c.c.): $R = 0$ Ohm. Relazione costitutiva

$$v(t) = 0$$

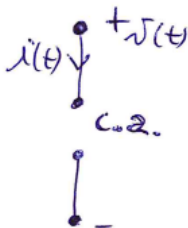
qualunque sia $i(t)$



- Circuito aperto (c.a.): $G = 0$ Ohm. Relazione costitutiva

$$i(t) = 0$$

qualunque sia $v(t)$



- Interruttore ideale. E' un c.c. negli intervalli di tempo in cui e' chiuso e un c.a. in quelli in cui e' aperto
- c.c., c.a., e interruttore ideale sono elementi **inerti**. Si ha $p(t) = 0$ per ogni t e quindi non partecipano agli scambi energetici

Energetica di un resistore passivo

- Sia $R > 0$. L'energia elettrica assorbita da R in dt coincide con l'energia dissipata su R sotto forma di calore per effetto Joule. Si ha

$$dw = Ri^2(t)dt = Gv^2(t)dt = dQ \geq 0$$

dove dQ e' il calore sviluppato

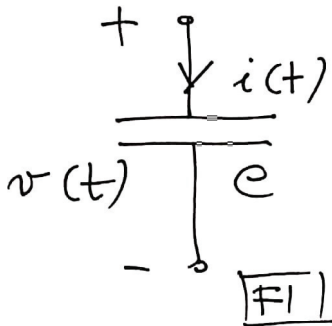
- un resistore passivo e' un puro dissipatore
- trasforma tutta l'energia elettrica assorbita dw istantaneamente e integralmente in calore dQ (o in altre forme di energia non elettrica)
- tale trasformazione e' irreversibile (R non e' capace di effettuare la trasformazione inversa)
- dQ e' energia che esce definitivamente dal circuito.

Condensatore Ideale

- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

$$q(t) = Cv(t)$$

con $q(t)$ carica sulle armature all'istante t e C capacita' in Farad del condensatore



relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

con $v(0)$ tensione iniziale su C

- $v(t)$ (oppure $q(t)$) e' detta *variabile di stato* di C ; $v(0)$ (oppure $q(0)$) e' lo stato iniziale
- C e' un *elemento con memoria*: per conoscere $v(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $v(0)$ e anche tutto l'andamento di $i(t)$ fra 0 e t

Energetica del condensatore ideale

- La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

dove

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo elettrico di C. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt} E_C(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo elettrico di C

- in termini differenziali

$$dw(t) = p(t)dt = dE_C(t) = d\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

- **l'energia elettrica dw assorbita da C in dt coincide con la variazione di energia del campo elettrico di C in dt**

- ne consegue che
 - il condensatore ideale e' un elemento **conservativo** (accumulatore perfetto)
 - immagazzina sotto forma di energia del campo elettrico tutta l'energia elettrica assorbita
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo elettrico e' completamente **reversibile**, cioe' C e' capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo elettrico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di C); in particolare C e' capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita
 - C **non dissipa**; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

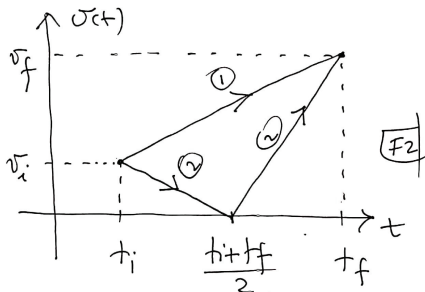
- in termini matematici

$$dw = dE_C = d\left(\frac{1}{2}Cv^2\right)$$

significa che dw e' un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato v)

- analogo al lavoro compiuto dal campo elettrostatico (campo conservativo) in fisica

- **Esempio.** Calcolare l'energia elettrica assorbita da C nell'intervallo $[t_i, t_f]$ per i due diversi andamenti di $v(t)$ in figura



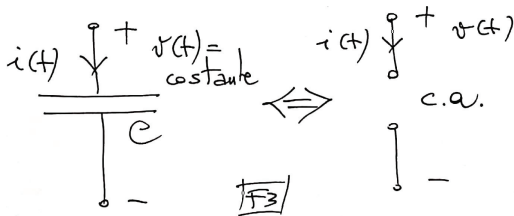
- si ha

$$\begin{aligned}
 w_{[t_i, t_f]} &= \int_{t_i}^{t_f} p(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} v(t) i(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dw \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dE_C = E_C(t_f) - E_C(t_i) = \frac{1}{2} C v_f^2 - \frac{1}{2} C v_i^2 \text{ joule}
 \end{aligned}$$

- l'energia elettrica assorbita dipende solo da stato iniziale v_i e finale v_f ma non dall'andamento di $v(t)$ fra t_i e t_f

- **C in regime stazionario**

- Se $v(t) = \text{costante}$, $i(t) = 0$, quindi in regime stazionario C equivale a un circuito aperto (stessa relazione costitutiva)

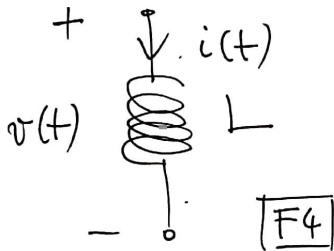


Induttore Ideale

- Relazione costitutiva (convenzione degli utilizzatori)

$$\varphi(t) = Li(t)$$

con $\varphi(t)$ flusso del campo di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento all'istante t e L induttanza in Henry dell'induttore



- Relazione costitutiva controllata in tensione (forma differenziale)

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Relazione costitutiva controllata in corrente (forma integrale)

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

con $i(0)$ corrente iniziale in L

- $i(t)$ (oppure $\varphi(t)$) e' detta *variabile di stato* di L ; $i(0)$ (oppure $\varphi(0)$) e' lo stato iniziale
- L e' un *elemento con memoria*: per conoscere $i(t)$ devo conoscere lo stato iniziale $i(0)$ e anche tutto l'andamento di $v(t)$ fra 0 e t

Energetica dell'induttore ideale

- La potenza istantanea assorbita vale

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)L\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) = \frac{d}{dt}E_L(t)$$

dove

$$E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \text{ Joule}$$

e' l'energia associata al campo magnetico di L. Quindi

$$p(t) = \frac{d}{dt}E_L(t)$$

cioe' la potenza istantanea e' la derivata rispetto al tempo della energia del campo magnetico di L

- in termini differenziali

$$dw(t) = p(t)dt = dE_L(t) = d\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad \leq 0$$

- **l'energia elettrica dw assorbita da L in dt coincide con la variazione di energia del campo magnetico di L in dt**

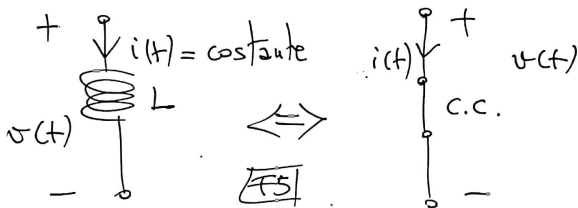
- ne consegue che
 - l'induttore ideale e' un elemento conservativo (accumulatore perfetto)
 - immagazzina sotto forma di energia del campo magnetico tutta l'energia elettrica assorbita
 - la trasformazione da energia elettrica a energia del campo magnetico e' completamente **reversibile**, cioe' L e' capace di effettuare la trasformazione di energia elettrica in energia del campo magnetico ma anche la trasformazione inversa (carica e scarica di L); in particolare L e' capace di dare indietro al circuito tutta l'energia elettrica precedentemente assorbita
 - L **non dissipa**; durante i processi di carica e scarica non si ha dissipazione di energia elettrica in calore
 - l'energia elettrica assorbita resta confinata nel circuito

- in termini matematici

$$dw = dE_L = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

significa che dw e' un **differenziale esatto** (differenziale di una funzione dello stato i)

- Se $i(t) = \text{costante}$, $vi(t) = 0$, quindi in regime stazionario L equivale a un corto circuito (stessa relazione costitutiva)

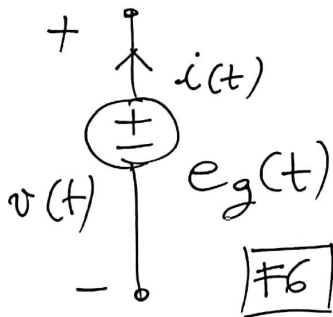


Generatore Indipendente Ideale di Tensione

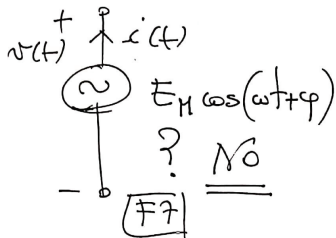
- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$v(t) = e_g(t)$$

cioe' la tensione impressa ai morsetti e' una assegnata (nota) funzione del tempo $e_g(t)$

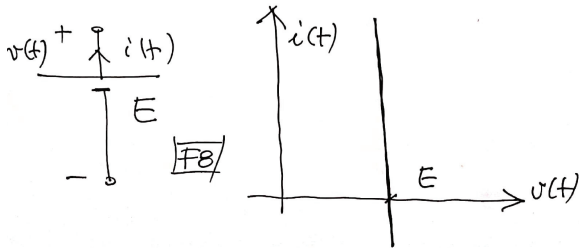


- p. es. $e_g(t) = E = \text{costante}$ (batteria)
- $e_g(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di tensione sinusoidale; alternatore); anche nel caso dell'alternatore dobbiamo indicare uno dei due morsetti del generatore con il $+$ e l'altro con il $-$ (altrimenti siamo in una situazione ambigua); la rappresentazione nella figura che segue e' ambigua e non va usata



- per un generatore indipendente ideale di tensione e' nota a priori la tensione $v(t)$ impressa ai morsetti mentre non e' nota la corrente $i(t)$ erogata; la corrente $i(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la corrente solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

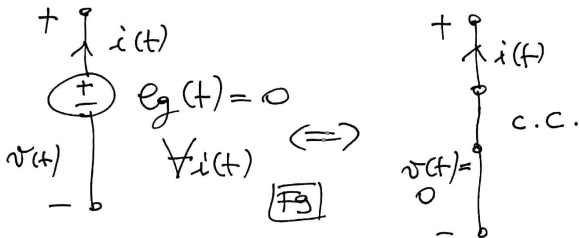
- **Esempio.** Caratteristica tensione corrente di una batteria
 $v(t) = E$.



- **Disattivare** un generatore ind.te ideale di tensione significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$v(t) = e_g(t) = 0, \quad \forall i(t)$$

- in tale situazione il generatore **equivale a un corto circuito**.

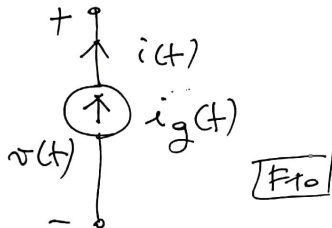


Generatore indipendente ideale di corrente

- Simbolo come in figura. Relazione costitutiva:

$$i(t) = i_g(t)$$

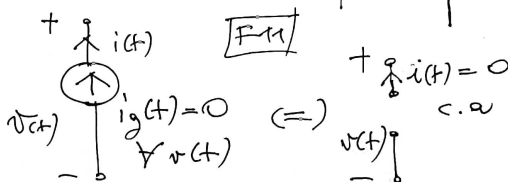
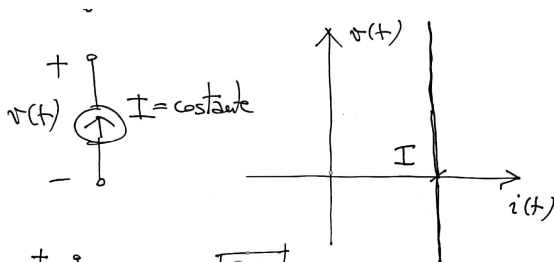
cioè la corrente impressa ai morsetti è una assegnata (nota) funzione del tempo $i_g(t)$



- p. es. $i_g(t) = I = \text{costante}$
- $i_g(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$ (generatore di corrente sinusoidale)

- per un generatore indipendente ideale di corrente e' nota a priori la tensione $i(t)$ impressa ai morsetti mentre non e' nota la tensione $v(t)$ ai morsetti; la tensione $v(t)$ puo' assumere qualunque valore (e' una grandezza **non vincolata**); possiamo determinare la tensione solo quando il generatore e' inserito all'interno di un circuito

- Esempio.** Caratteristica tensione corrente di un generatore di corrente costante $i(t) = I$.



- **Disattivare** un generatore ind.te ideale di corrente significa porre uguale a 0 la grandezza impressa. Quindi

$$i(t) = i_g(t) = 0, \quad \forall v(t)$$

- in tale situazione il generatore **equivale a un circuito aperto.**

Energetica di un generatore indipendente ideale di tensione

- Un generatore indipendente e' l'interfaccia per eccellenza fra circuito e mondo esterno. Scambia energia elettrica in modo illimitato e completamente reversibile operando la conversione fra energia elettrica e altre forme di energia non elettriche (ad es. energia chimica)
- per una batteria di un automobile (sistema elettrochimico) si ha (convenzione dei generatori)

$$dw = dE_{\text{chimica}}$$

cioe' energia elettrica scambiata con circuito (dw) coincide con energia scambiata in modo reversibile con un sistema chimico (dE_{chimica})

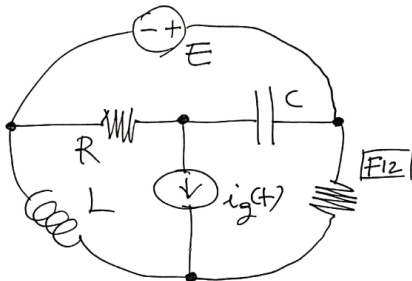
- il segno può essere positivo o negativo. Le batterie idealmente possono erogare o assorbire energia elettrica
- ad esempio, se si genera energia di legame chimico $dE_{\text{chimica}} > 0$, allora una pari quantità di energia elettrica viene data al circuito ($dw = dE_{\text{chimica}} > 0$). Se la batteria assorbe energia elettrica, viene accumulata nella batteria una pari quantità di energia sotto forma di legami chimici ($dw = dE_{\text{chimica}} < 0$)
- durante tali processi di carica e scarica non vi è dissipazione.

Leggi di Kirchhoff

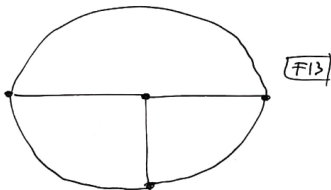
- Per scrivere le leggi di Kirchhoff di un circuito devo preliminarmente stabilire un riferimento elettrico sul circuito. Cio' si effettua assegnando un verso di riferimento (ad arbitrio) per ciascuna tensione e corrente degli elementi del circuito.

- **Grafo e Grafo Orientato Associato a un Circuito**

- Consideriamo un circuito con 6 bipoli come in figura. Supponiamo che il circuito sia connesso

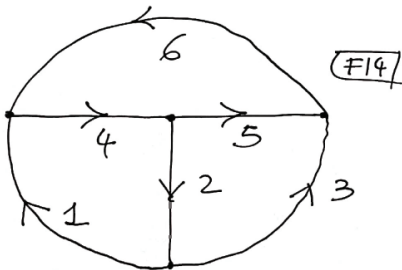


- **Grafo.** A ciascun bipolo facciamo corrispondere astrattamente un **lato** del grafo. Sia in generale ℓ il numero di lati del grafo (numero di bipoli). In questo caso $\ell = 6$

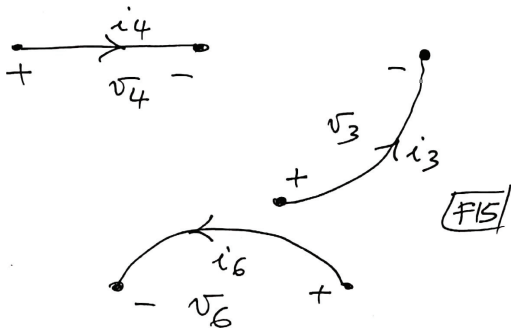


- **Nodo:** e' un punto del grafo dove sono connessi due o piu' bipoli. Sia n il numero di nodi (in questo caso $n = 4$)

- **Grafo Orientato:** scelgo una numerazione per i lati del grafo e assegno ad arbitrio un verso di riferimento per la corrente di ciascun lato indicando tale verso con una freccia



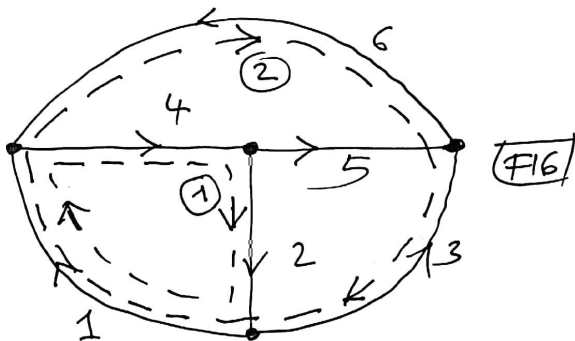
- supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ciascun bipolo; ne consegue che, fissato il verso di riferimento della corrente, resta automaticamente fissato il verso di riferimento della tensione di ciascun bipolo



- il grafo orientato tiene conto di quanti bipoli ci sono e come sono interconnessi fra di loro (topologia del circuito); astrae però dal tipo di elementi presenti

Leggi Kirchhoff

- Una volta fissato un grafo orientato, siamo in grado di scrivere le leggi di Kirchhoff per il circuito
- Scegliamo una **maglia** sul grafo, cioè un percorso chiuso formato da lati del grafo. **Orientiamo** la maglia in senso orario o antiorario.



- **Legge di Kirchhoff per le tensioni (KV).** E' nulla, istante per istante, la **somma algebrica** delle tensioni dei lati che si incontrano percorrendo la maglia (algebrica significa che la tensione ha un segno); ogni tensione si prende col segno $+$ se concorde con il verso di percorrenza della maglia, col segno $-$ altrimenti
- Per la maglia 1 si ha

$$v_2 + v_1 + v_4 = 0$$

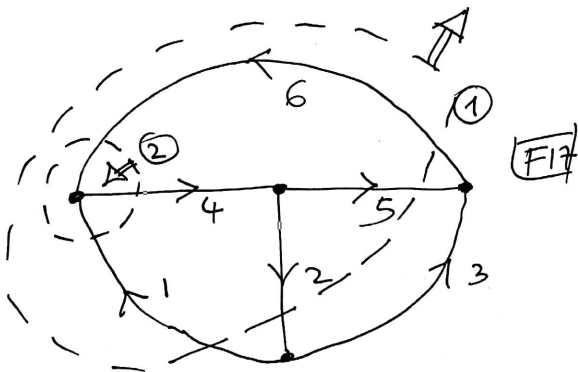
mentre per la maglia 2 si ha

$$-v_6 - v_3 + v_1 = 0$$

- ogni KV implica un vincolo di dipendenza fra le tensioni dei lati della maglia; quindi $v_1(t), \dots, v_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro

- problema: quante KV indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante tensioni indipendenti ci sono per un grafo orientato?
- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KV indipendenti sono in generale pari a $\ell - n + 1$, quindi le tensioni indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (\ell - n + 1) = n - 1$

- **Superficie Gaussiana:** linea chiusa che taglia i lati del grafo senza passare dai nodi.
- Scegliamo una linea Gaussiana e **orientiamo** la linea scegliendo una normale positiva rivolta verso l'esterno o verso l'interno



- **Legge di Kirchhoff per le correnti (KI).** E' nulla, istante per istante, la **somma algebrica** delle correnti dei lati che intersecano la linea Gaussiana (algebrica significa che la corrente ha un segno); ogni corrente si prende col segno + se concorde con la normale alla linea Gaussiana, col segno - altrimenti
- Per la linea 1 si ha

$$i_5 - i_6 - i_1 + i_2 = 0$$

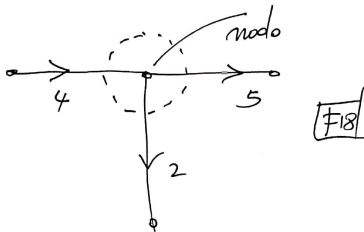
mentre per la linea 2 si ha

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

- ogni KI implica un vincolo di dipendenza fra le correnti dei lati intersecati da una linea Gaussiana; quindi $i_1(t), \dots, i_\ell(t)$ non sono tutte indipendenti fra di loro

- problema: quante KI indipendenti possiamo scrivere? Di conseguenza, quante correnti indipendenti ci sono per un grafo orientato?
- vedremo usando opportuni strumenti della teoria dei grafi che le KI indipendenti sono in generale pari a $n - 1$, quindi le correnti indipendenti dei lati del grafo sono $\ell - (n - 1) = \ell - n + 1$

- **Seconda Versione della KI (Fisica II):** E' nulla, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono in un nodo. Ogni corrente si prende col segno + se esce dal nodo, col segno - altrimenti



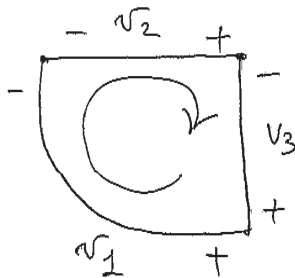
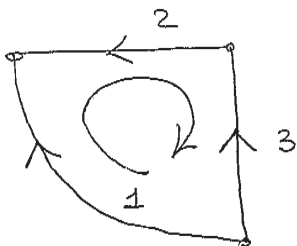
- si ha

$$-i_4 + i_2 + i_5 = 0$$

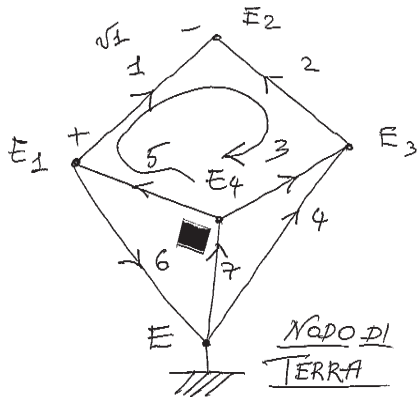
- e' facile mostrare che le due formulazioni sono equivalenti fra di loro.

- **Note su legge di Kirchhoff per le tensioni (KV)**
- Per scrivere la KV a una maglia possiamo usare la regola nota (figura a sinistra); oppure possiamo sommare algebricamente le cadute di tensione che si incontrano percorrendo una maglia (figura di destra); nel secondo caso attribuiamo segno + alla tensione di del bipolo k -esimo se incontro prima il + della tensione v_k ; segno - altrimenti; in ogni caso otteniamo

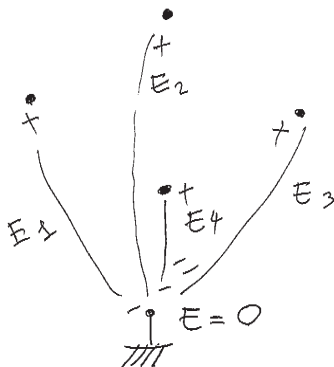
$$KV : v_1 - v_2 - v_3 = 0$$



- Consideriamo un grafo orientato e utilizziamo per ciascun lato la convenzione degli utilizzatori. Lungo la maglia $\{1, 2, 3, 5\}$ si ha da KV che per ogni t risulta $v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) + v_5(t) = 0$. Ricordiamo che $v_1(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \Delta L_1 / \Delta q$, dove ΔL_1 e' il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico su Δq lungo un percorso che collega il $+$ al $-$ del bipolo 1. Analogamente per gli altri bipoli



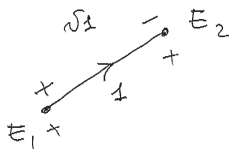
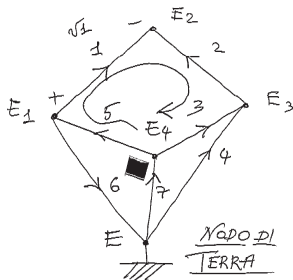
- da KV segue che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico lungo una maglia del grafo e' nullo. Abbiamo a che fare quindi con un campo elettrico conservativo
- ne consegue che il lavoro e' indipendente dal percorso lungo il grafo che facciamo passando da un nodo ad un altro
- ha senso percio' parlare di *tensione fra due nodi* e anche di *tensione (potenziale) di un nodo rispetto ad un nodo di terra a cui si attribuisce potenziale 0*



- ad esempio, E_1 (potenziale del nodo 1 rispetto a terra) e' dato da

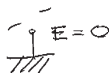
$$E_1 = v_6 = -v_5 - v_7 = v_1 - v_2 - v_4 = \dots$$

- con cio' esprimiamo il potenziale di un nodo in funzione della tensione sui bipoli che si incontrano lungo un percorso (qualsiasi) che collega il nodo a terra
- viceversa, noto il potenziale dei nodi E_1, E_2, E_3, E_4 , la tensione di un bipolo si esprime facilmente come differenza fra i potenziali dei nodi a cui e' collegato
- ad esempio, $v_1 = E_1 - E_2$, $v_3 = E_4 - E_3$, $v_4 = -E_3$



$$v_1 + E_2 - E_1 = 0$$

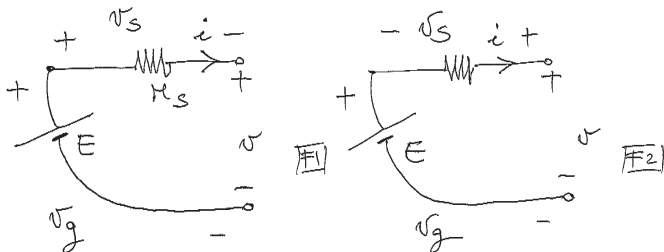
$$\Rightarrow v_1 = E_1 - E_2$$



Bipoli Notevoli Ottenuti Interconnettendo Bipoli Elementari

Generatore (indipendente) reale di tensione

- Si modella con un generatore (indipendente) ideale di tensione in serie a una resistenza $r_s > 0$ detta resistenza interna



- per una batteria (generatore reale) la relazione costitutiva e' (convenzione dei generatori)

$$v = E - r_s i$$

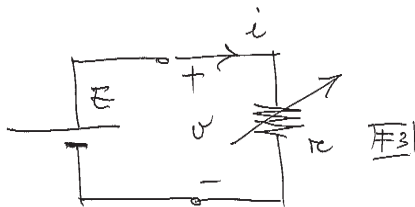
verifica: scrivendo la KV alla maglia si ottiene $v - v_g + v_s = 0$. Si ha poi $v_g = E$ e $v_s = r_s i$

- il risultato non dipende dalla scelta (peraltro arbitraria) dei versi.

Nel secondo caso si ha $v - v_g - v_s = 0$, $v_g = E$ ma $v_s = -r_s i$

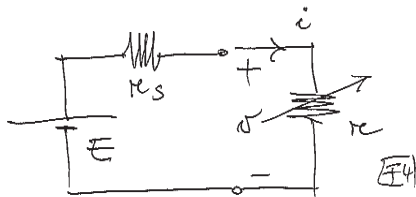
Confronto generatore indipendente ideale e reale di tensione

- Generatore ideale (batteria)



- $v(t) = E, \forall i(t)$
- comportamento al variare del carico $r > 0$: $i = E/r$ non e' limitata, potenza fornita al carico $p = E^2/r$ non e' limitata (tendono a infinito per $r \rightarrow 0$)

- generatore reale



- $v = E - r_s i$ e $v = r i$ da cui

$$i = \frac{E}{r + r_s}$$

e' limitata da E/r_s (corrente quando $r = 0$ o corrente di corto circuito). La potenza assorbita da r vale

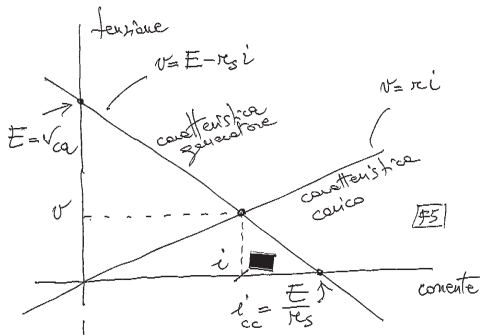
$$p = r i^2 = \frac{r E^2}{(r + r_s)^2}$$

- p ha un massimo per $r = r_s > 0$ e la potenza massima vale

$$p_{\max} = \frac{E^2}{4 r_s} \text{ W}$$

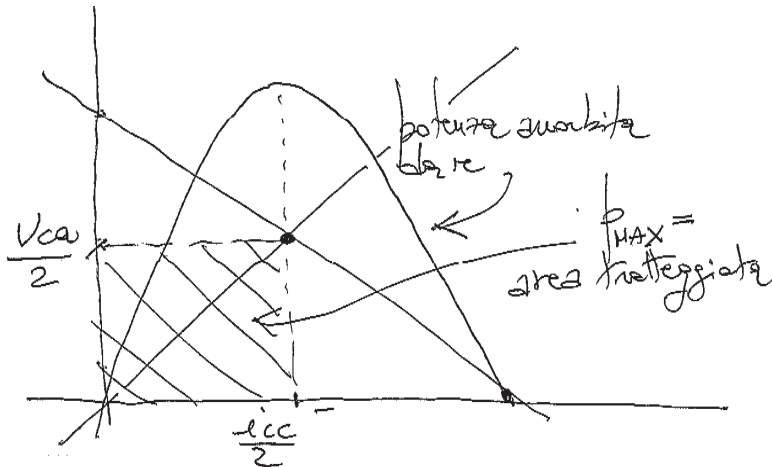
Interpretazione grafica

- Tensione e corrente ai morsetti si ottengono intersecando la caratteristica tensione-corrente del generatore reale $v = E - r_s i$ con la retta di carico $v = r i$.



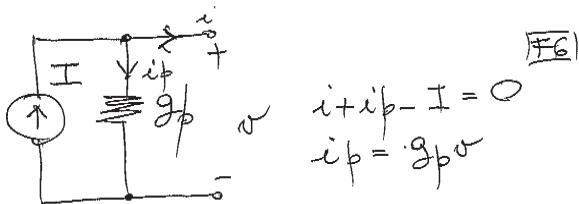
- al variare di r la corrente varia fra 0 e $i_{cc} = E/r_s$ (corrente di corto circuito) e la tensione fra 0 e $v_{ca} = E$ (tensione a circuito aperto)

- la potenza massima corrisponde a $i = i_{cc}/2$ e $v = v_{ca}/2$



Generatore indipendente reale di corrente

- E' dato da un generatore ind.te ideale di corrente con in parallelo una conduttanza $g_p = 1/r_p > 0$

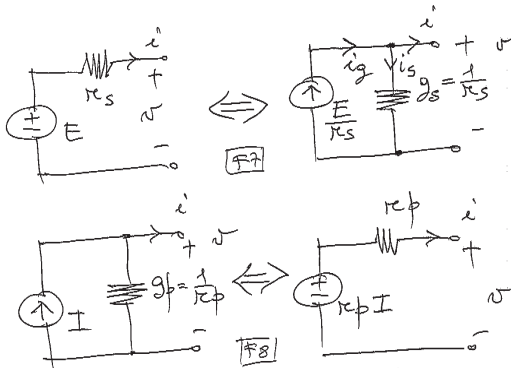


- la relazione costitutiva e' (convenzione dei generatori)

$$i = I - g_p v$$

Equivalenza fra bipoli

- Due bipoli si dicono equivalenti (esternamente) se hanno la stessa relazione costitutiva (stabiliscono lo stesso legame fra tensione e corrente ai morsetti)
- equivalenza fra gen.re ind.te reale di tensione e di corrente

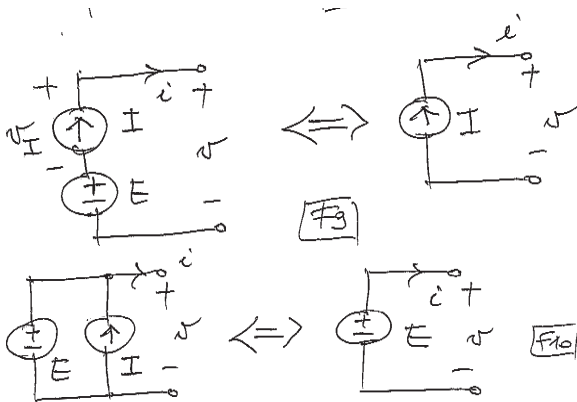


- verifica prima equivalenza: dalla KI al nodo otteniamo $i_g = i_s + i$; si ha poi $i_g = E/r_s$ e $i_s = v g_s = v/r_s$ da cui $v = E - r_s i$ che è proprio la relazione costitutiva del generatore reale di tensione

- interpretare graficamente
- l'equivalenza e' esterna (ai morsetti) ma non e' interna
- equivalenza inversa fra gen.re ind.te reale di corrente e di tensione (verificare per esercizio)

Altre equivalenze

- Serie con generatore ind.te ideale di corrente. In questo caso il gen.re di tensione E e' ridondante (esternamente). Infatti si ha per la serie $v = v_I + E$ con v_I qualsiasi, inoltre $i = I$. Quindi $i = I$ con v qualsiasi che e' proprio la relazione costitutiva di un gen.re ind.te ideale di corrente



- analogamente si puo' dimostrare l'altra equivalenza

Bipoli controllabili in tensione o in corrente

- Un bipolo si dice controllabile in tensione se ha una relazione costitutiva del tipo

$$i = g(v)$$

cioe' v e' una grandezza indipendente e, nota v , conosciamo univocamente i

- Un bipolo si dice controllabile in corrente se ha una relazione costitutiva del tipo

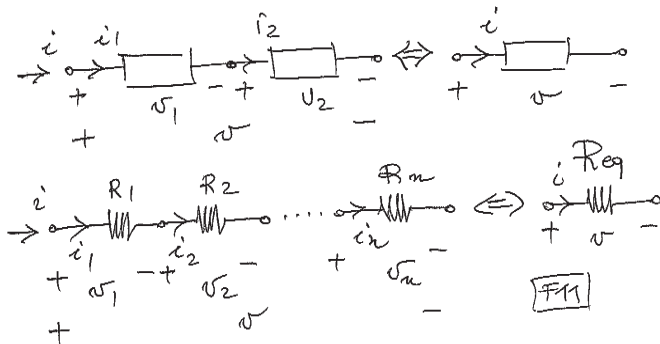
$$v = f(i)$$

cioe' i e' una grandezza indipendente e, nota i , conosciamo univocamente v

- un resistore ideale R e' controllabile in entrambi i modi
- un generatore ind.te ideale di tensione $v = v_g(t)$ e' controllabile in corrente; infatti la corrente i nel generatore e' indipendente e nota, i , e' nota la tensione $v_g(t)$! Invece non e' controllabile in tensione. Infatti la tensione $v = v_g(t)$ e' stabilita dal generatore e quindi non e' indipendente. Inoltre, nota $v_g(t)$, non e' nota a priori la corrente i
- un generatore ind.te ideale di corrente $i = i_g(t)$ e' controllabile in tensione ma non in corrente (riflettere)
- un gen.re ind.te reale di tensione (o di corrente) e' controllabile in entrambi i modi
- un corto circuito e' controllabile in corrente ma non in tensione. Analogamente, un circuito aperto e'....

Connessione serie fra bipoli

- Due bipoli si dicono collegati in serie se hanno un nodo a comune a cui non sono collegati altri bipoli



- relazioni con cui si studia la serie (KI e KV)

$$i = i_1 = i_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

- la definizione si estende immediatamente alla serie fra n bipoli

- la serie ha sempre senso se tutti i bipoli sono controllabili in corrente ed e' di solito facile studiare il bipolo equivalente alla serie

- Ad esempio. Serie fra n resistori. Si ha $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = R_1 i_1 + R_2 i_2 + \cdots + R_n i_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)i = R_{\text{eq}}i$. La serie equivale a un resistore di resistenza $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

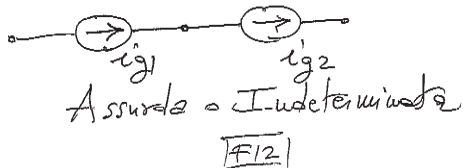
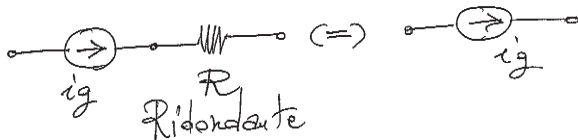
- si ha

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$$

e quindi la tensione sui singoli resistori puo' essere trovata con la formula $v_k = R_k i_k = R_k i$; quindi (*regola del partitore di tensione*)

$$v_k = \frac{v R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

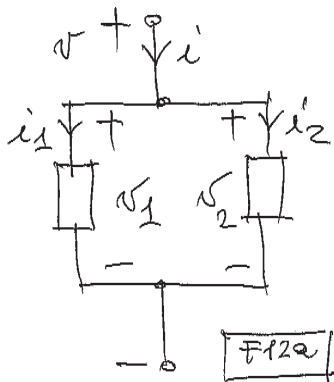
- se un bipolo non è controllabile in corrente la connessione può essere 'ridondante' (esternamente uno dei bipoli può essere 'eliminato')
- supponiamo che entrambi i bipoli siano non controllabili in corrente; in questo caso la connessione serie è assurda se $i_{g1} \neq i_{g2}$ (viene contraddetta KI) oppure indeterminata se $i_{g1} = i_{g2}$ (il potenziale del nodo centrale può assumere qualunque valore)



F12

Connessione parallelo fra bipoli

- Due bipoli si dicono in parallelo se sono collegati fra la stessa coppia di nodi



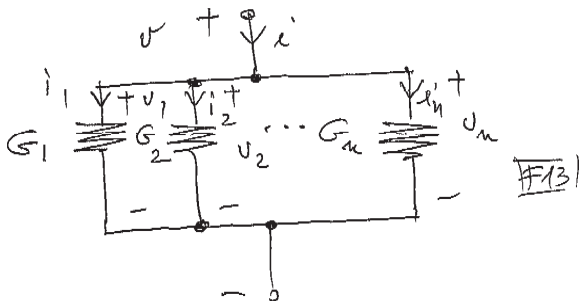
- relazioni con cui si studia il parallelo (KV e KI)

$$v = v_1 = v_2$$

$$i = i_1 + i_2$$

- la definizione si estende immediatamente al parallelo fra n bipoli

- il parallelo ha sempre senso se i bipoli sono controllabili in tensione ed e' di solito facile studiare il bipolo equivalente al parallelo



- ad esempio, parallelo fra n conduttanze; si ha

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots + G_n v_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) v = G_{eq} v.$$
 Il parallelo equivale a una conduttanza di valore $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$

- si ha

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

e quindi la corrente nelle singole conduttanze puo' essere trovata con la formula $i_k = G_k v_k = G_k v$; quindi (*regola del partitore di corrente*)

$$i_k = \frac{i G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

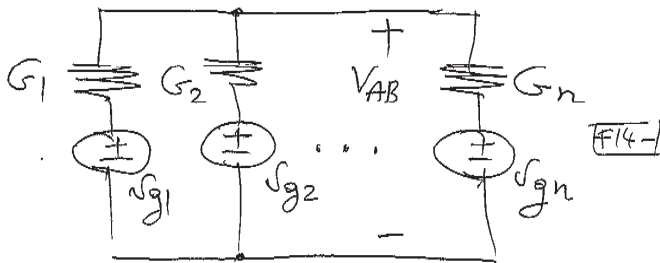
- se un bipolo non e' controllabile in tensione la connessione puo' essere 'ridondante' (esternamente uno dei bipoli puo' essere 'eliminato')
- se entrambi i bipoli sono non controllabili in tensione la connessione parallelo e' assurda oppure indeterminata (proporre esempi)

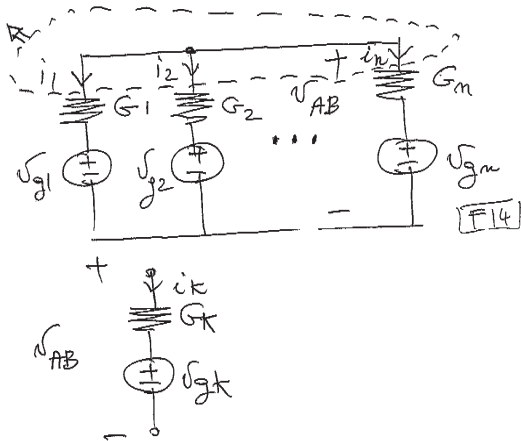
Teorema di Millmann

- Configurazione con n generatori indipendenti reali di tensione in parallelo fra di loro. La tensione v_{AB} si puo' determinare con la seguente formula

$$v_{AB} = \frac{v_{g1}G_1 + v_{g2}G_2 + \dots + v_{gn}G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

Nota v_{AB} e' facile determinare tutte le altre tensioni e correnti del circuito



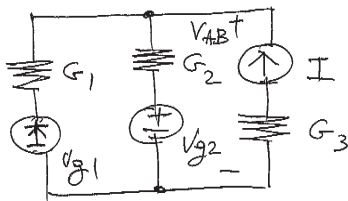
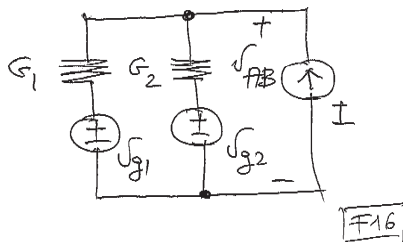
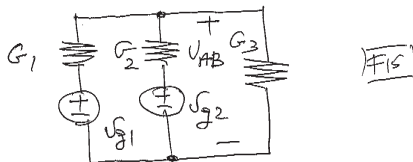


• verifica: applicando KI alla superficie Gaussiana tratteggiata si ha $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$. Per il generatore reale k si ha $v_{AB} = \frac{1}{G_k} i_k + v_{gk}$, quindi $i_k = v_{AB} G_k - v_{gk} G_k$. Sostituendo

$$v_{AB}(G_1 + G_2 + \dots + G_n) - (v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + \dots + v_{gn} G_n) = 0$$

e quindi il risultato detto

tre varianti



- variante 1; mostrare che

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

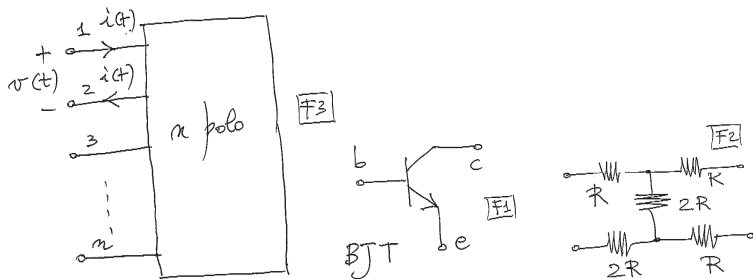
- variante 2; mostrare che

$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + I}{G_1 + G_2}$$

- variante 3; mostrare che

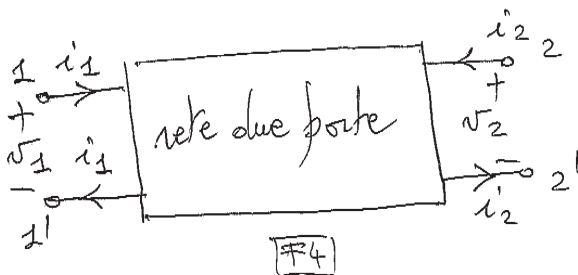
$$v_{AB} = \frac{v_{g1} G_1 + v_{g2} G_2 + I}{G_1 + G_2}$$

- Definizione di n polo: elemento a n terminali (n poli) con i quali puo' essere collegato ad un circuito esterno



- BJT (bipolar junction transistor) e' un esempio di tripolo; due induttori mutuamente accoppiati sono un esempio di quadripolo; un altro esempio di quadripolo e' la rete di resistori in figura
- Definizione di *porta*: una coppia di morsetti (ad es. 1-2) tale che la corrente che entra in un morsetto e' uguale, istante per istante, a quella che esce dall'altro morsetto
- per una porta possiamo introdurre la corrente $i(t)$ di porta e la tensione di porta $v(t)$ (come se fosse un bipolo)

Definizione di *rete due porte (doppio bipolo)*: e' un quadripolo tale che una coppia di morsetti (1-1') forma una porta e, di conseguenza, l'altra coppia di morsetti (2-2') forma anch'essa una porta

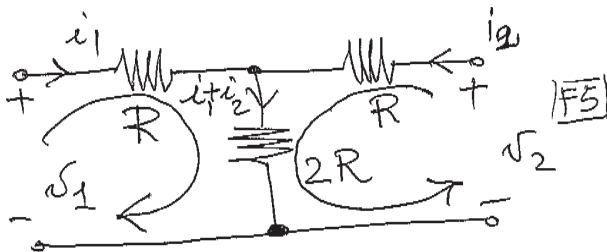


- introduciamo correnti i_1, i_2 di porta e tensioni di porta v_1, v_2 come in figura (sono le 4 grandezze elettriche di porta); notare che v_1 e i_1 (v_2 e i_2) hanno versi coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori
- *Relazioni costitutive di una rete due porte: 2 legami indipendenti che la rete stabilisce fra le 4 grandezze di porta v_1, v_2, i_1, i_2*

Esempio. Rete due porte resistiva; da KV alla maglia 1 si ha $v_1 = Ri_1 + 2R(i_1 + i_2)$ e da KV alla maglia 2, $v_2 = Ri_2 + 2R(i_1 + i_2)$. Le relazioni costitutive possono quindi essere scritte nella forma

$$v_1 = 3Ri_1 + 2Ri_2$$

$$v_2 = 2Ri_1 + 3Ri_2$$



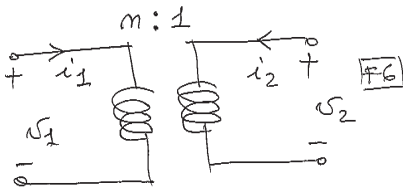
- potenza istantanea assorbita da una rete due porte. E' la somma delle potenze istantanee alla porta 1 e 2, cioe'

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \quad W$$

- da qui possiamo trovare energia elettrica dw assorbita in dt o in un certo intervallo di tempo
- la definizione di rete due porte passiva o attiva e' analoga a quella di un bipolo passivo o attivo (pensarci)

Reti due porte passive

- Trasformatore ideale



- $n = N_1/N_2$ rapporto di trasformazione; N_1 (N_2) numero di spire del primo (secondo) avvolgimento
- modello idealizzato di un trasformatore reale (2 bobine accoppiate magneticamente da nucleo ferromagnetico ad elevata permeabilità relativa μ_r)
- relazioni costitutive

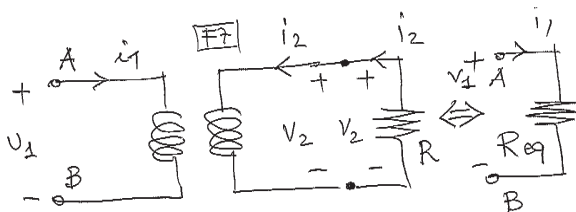
$$\begin{aligned}v_1 &= nv_2 \\ i_1 &= -\frac{1}{n}i_2\end{aligned}$$

- e' una rete due porte senza memoria

- la potenza istantanea assorbita vale

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = n v_2 \left(-\frac{1}{n} i_2\right) + v_2 i_2 = 0 \quad W$$

- un trasformatore ideale e' quindi passivo; e' inoltre 'trasparente' alla potenza istantanea; e' inerte (non partecipa agli scambi energetici)
- effetto di un trasformatore ideale su un resistore



si ha

$$v_1 = n v_2 = n(-R i_2) = n R (n i_1) = n^2 R i_1 = R_{eq} i_1$$

quindi il bipolo AB dato dal trasformatore chiuso sulla porta 2 su un resistore R trasforma lo stesso resistore in resistore di resistenza $R_{eq} = n^2 R$

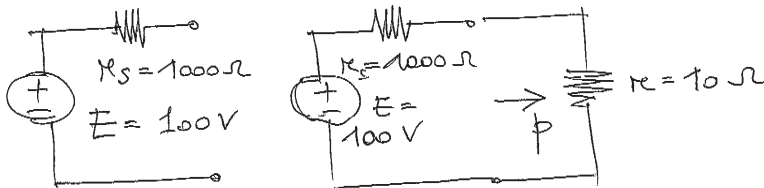
- studiare l'effetto del trasformatore ideale su C e su L

Trasformatore adattatore di resistenza

- Consideriamo il seguente generatore reale di tensione; la potenza massima che puo' erogare e' data da

$$p_{\max} = \frac{E^2}{4r_s} = \frac{100^2}{4 \cdot 1000} = 2.5 \text{ W}$$

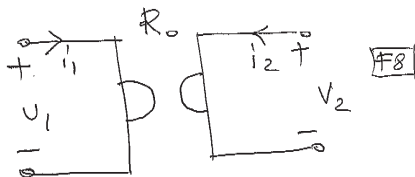
- la resistenza di carico che assorbe la massima potenza e'
 $r = r_s = 1000 \text{ Ohm}$



- supponiamo adesso che il generatore alimenti una resistenza $r = 10 \text{ Ohm}$ e quindi $r \ll r_s$; si ha, come ci si aspetta, $p \ll p_{\max}$; infatti $i = 100/1010 \simeq 0.1 \text{ A}$ e quindi

$$p = ri^2 \simeq 10 \cdot 0.1^2 = 0.1 \text{ W}$$

- **Giratore ideale**



- relazioni costitutive

$$v_1 = -R_0 i_2$$

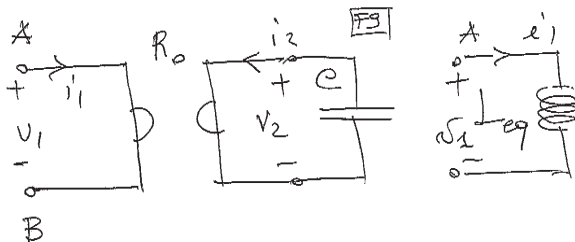
$$v_2 = R_0 i_1$$

- R_0 in Ohm e' detta resistenza di girazione; puo' essere implementato con amplificatori operazionali e resistori
- e' una rete due porte senza memoria
- la potenza istantanea assorbita vale

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = -R_0 i_2 i_1 + R_0 i_1 i_2 = 0 \text{ W}$$

- un giratore ideale e' quindi passivo; e' inoltre 'trasparente' alla potenza istantanea; e' inerte (non partecipa agli scambi energetici)

- effetto di un giratore ideale su un condensatore



si ha

$$v_1 = -R_0 i_2 = R_0 C \frac{dv_2}{dt} = R_0^2 C \frac{di_1}{dt} = L_{eq} \frac{di_1}{dt}$$

quindi il giratore trasforma il condensatore ideale C in un induttore ideale di induttanza

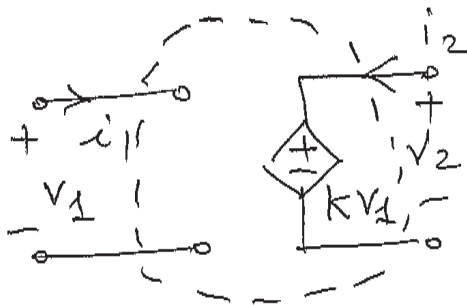
$$L_{eq} = R_0^2 C$$

- e' detto 'induttore sintetico'
- studiare l'effetto del giratore ideale su L e su R

Reti due porte attive

- **Generatori controllati (dipendenti, pilotati)**
- Intuitivamente: si tratta di generatori di tensione (o corrente) dove la tensione (corrente) impressa non e' una funzione nota a priori ma dipende dalla tensione o dalla corrente in un altro elemento del circuito
- sono 4 tipi diversi di generatori; si tratta in ogni caso di reti due porte senza memoria e attive

- Generatore di tensione controllato in tensione;
voltage-controlled voltage-source VCVS



VCVS

$\boxed{E10}$

- relazioni costitutive

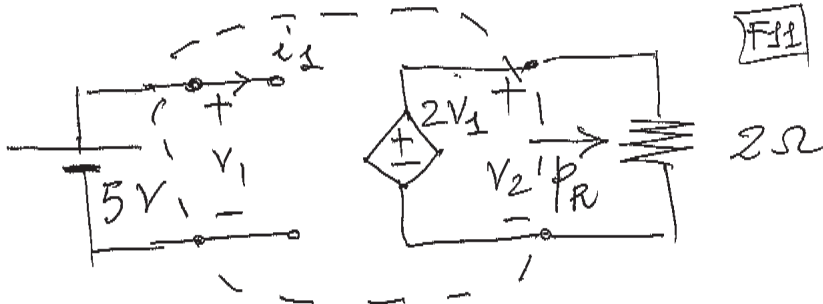
$$i_1 = 0$$

$$v_2 = kv_1$$

- v_1 e' la grandezza di controllo; v_2 e' la grandezza controllata; k (senza dimensioni) e' detto parametro di controllo

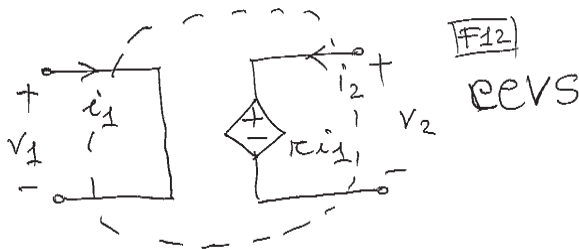
- il generatore sulla porta 2 imprime una tensione kv_1 che dipende dalla tensione v_1 sulla porta 1; la scatolina tratteggiata rappresenta simbolicamente un dispositivo che preleva la tensione v_1 fra due opportuni morsetti del circuito (voltmetro ideale), la moltiplica per k e la applica alla porta 2 in un altro punto del circuito; non viene di solito rappresentato in modo esplicito il dispositivo che effettua questa operazione di accoppiamento fra due punti diversi del circuito
- e' una rete due porte senza memoria

- e' attiva; consideriamo infatti il seguente esperimento



- la potenza elettrica alla porta 1, cioè $p_1 = v_1 i_1 = 0 \text{ W}$ dato che $i_1 = 0$; si ha $v_2 = 2v_1 = 10 \text{ V}$; la scatolina (VCVS) eroga alla batteria una potenza elettrica $p_R = v_2^2/2 = 50 \text{ W}$
- nel dispositivo VCVS vi e' una sorgente interna di energia (batteria, alimentatore) che non viene esplicitamente rappresentata; per come funziona fisicamente un VCVS preleva energia dalla sorgente interna ed e' capace di fornirla al resistore funzionando da rete due porte attiva

Generatore di tensione controllato in corrente; current-controlled voltage-source CCVS



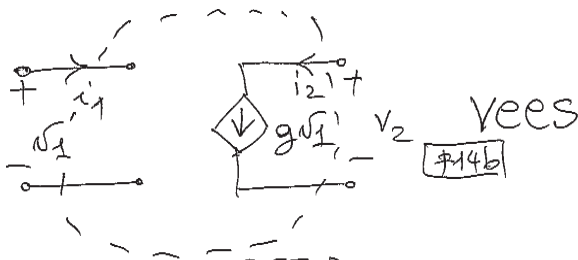
- relazioni costitutive

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = r i_1$$

- i_1 e' la grandezza di controllo; v_2 e' la grandezza controllata; r (dimensioni di Ohm) e' detto parametro di controllo (trans-resistenza); sulla porta 1 vi e' un amperometro ideale che misura la corrente i_1

Generatore di corrente controllato in tensione; voltage-controlled current-source VCCS



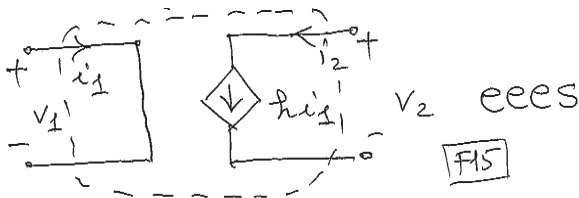
- relazioni costitutive

$$i_1 = 0$$

$$i_2 = g v_1$$

- v_1 e' la grandezza di controllo; i_2 e' la grandezza controllata; g (dimensioni di Ohm^{-1}) e' detto parametro di controllo (trans-conduttanza)

Generatore di corrente controllato in corrente; current-controlled current-source CCCS



- relazioni costitutive

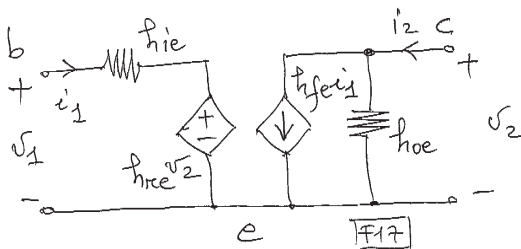
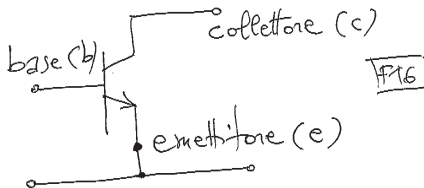
$$v_1 = 0$$

$$i_2 = h i_1$$

- i_1 e' la grandezza di controllo; i_2 e' la grandezza controllata; h (senza dimensioni) e' detto parametro di controllo
- si tratta in ogni caso di reti due porte senza memoria e di tipo attivo

Uso di generatori controllati per modellare dispositivi elettronici

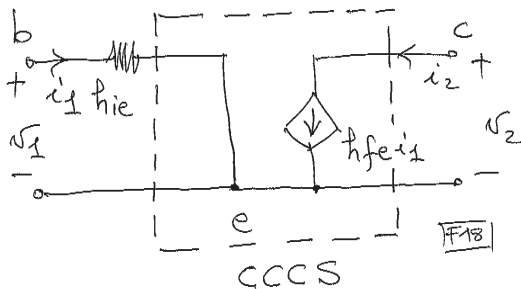
- Bipolar junction transistor (BJT)
- e' un tripolo con tre morsetti: base (b), emettitore (e) e collettore (c); nella configurazione a emettitore comune lo posso rappresentare come rete due porte



- un modello che possiamo usare e' quello per piccoli segnali a parametri ibridi a emettitore comune; fa uso di una resistenza h_{ie} , una conduttanza h_{oe} , un CCCS con parametro di controllo h_{fe} e un VCVS con parametro di controllo h_{re}
- questi parametri dipendono dal punto di funzionamento del BJT (corso elettronica); alcuni valori tipici

$$h_{ie} = 1000 \, \Omega; h_{oe} = 10^{-6} \, \Omega^{-1}; h_{fe} = 100; h_{re} = 10^{-5}$$

- modello semplificato; si assume per semplificare l'analisi $h_{re} = 0$ ed inoltre $h_{oe} = 0$; il BJT diventa quindi (a parte il resistore h_{ie}) un CCCS con parametro di controllo h_{fe}



- le relazioni costitutive del modello semplificato sono

$$v_1 = h_{ie} i_1$$

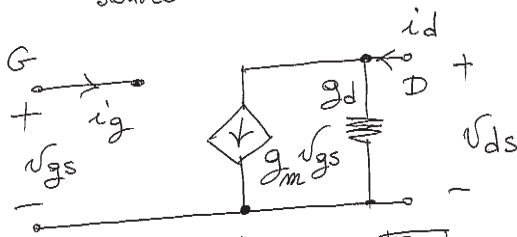
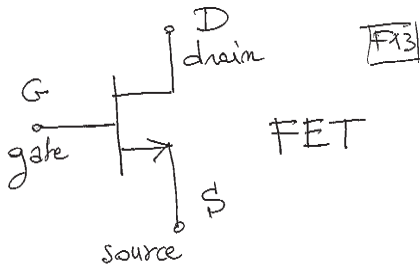
$$i_2 = h_{fe} i_1$$

- dato che $h_{fe} \gg 1$ il BJT e' fondamentalmente un amplificatore della corrente di base (i_1 uguale corrente di base)

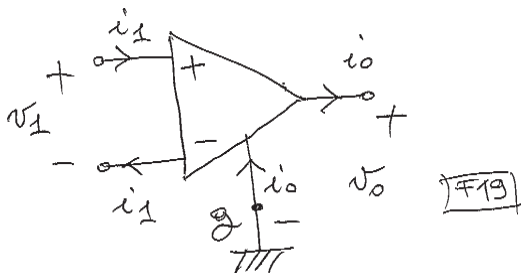
- circuito equivalente per piccoli segnali di un FET (field effect transistor); sostanzialmente, a parte la conduttanza di drain g_d , e' un VCCS; le relazioni costitutive sono

$$i_g = 0$$

$$i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds}$$



Amplificatore operazionale (ao) ideale



- E' una rete due porte senza memoria che soddisfa alle relazioni costitutive

$$v_1 = 0$$

$$i_1 = 0$$

- quindi la differenza di potenziale fra morsetto + e - dell'ao e' nulla; inoltre la corrente assorbita dal morsetto + e dal morsetto - dell'ao e' nulla

- la tensione v_0 e la corrente i_0 alla porta 2 possono assumere qualunque valore e non sono fra di loro vincolate; quindi

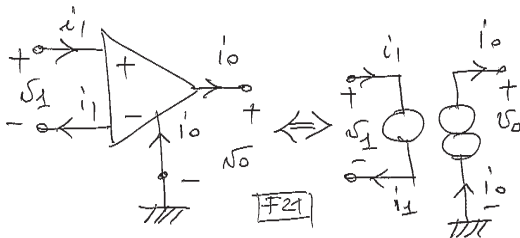
$$i_0 \forall; \quad v_0 \forall$$

- v_0 e i_0 possono essere determinate solo quando conosciamo il circuito dove viene usato l'ao
- e' un modello idealizzato di un ao reale; il modello e' ben approssimato se l'ao funziona in bassa frequenza (banda audio) e il funzionamento dell'ao e' di tipo lineare (non in saturazione); ulteriori dettagli a elettronica
- notare che uno dei morsetti della porta 2 (g) e' collegato al nodo di terra (ground); inoltre abbiamo usato la convenzione dei generatori per la porta 2

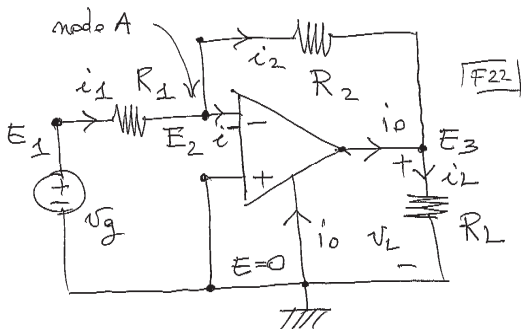
- introduciamo il bipolo *nullatore* che soddisfa a $v = 0, i = 0$ e il bipolo *noratore* che soddisfa a $v \forall$ e $i \forall$



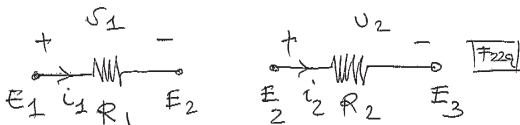
- rappresentazione di ao con *nullore*; un ao ideale e' equivalente alla coppia nullatore e noratore (detta nullore), dove un morsetto del noratore e' collegato a terra



Amplificatore invertente con ao



- usiamo il metodo dei nodi per analizzare il circuito con ao e per determinare l'amplificazione di tensione $A_v = v_L/v_g$; vi sono tre nodi E_1, E_2, E_3 oltre al nodo di terra $E = 0$; si ha $E_1 = v_g$ e $E_3 = v_L$; inoltre $E_2 = 0$ dato che morsetto $+$ e $-$ dell'ao sono allo stesso potenziale e il morsetto $-$ dell'ao e' collegato a terra ($E = 0$); l'unica incognita e' quindi E_3 che coincide con v_L



- scrivendo una KI al nodo A dell'ao ottengo

$$i_1 = i_2 + i^- = i_2$$

dato che $i^- = 0$ per l'ao. Inoltre

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{v_g}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{E_2 - E_3}{R_2} = \frac{0 - v_L}{R_2} = -\frac{v_L}{R_2}$$

Sostituendo ottengo

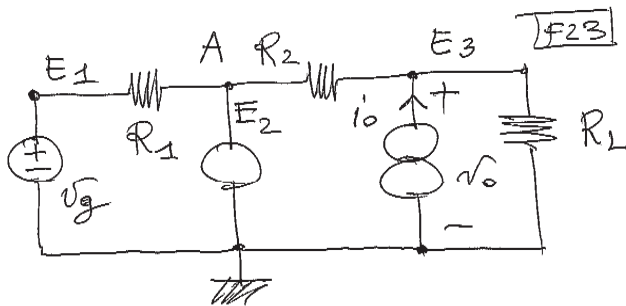
$$A_v = \frac{v_L}{v_g} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- A_v non dipende da R_L ; e' un amplificatore invertente per $R_2 > R_1$

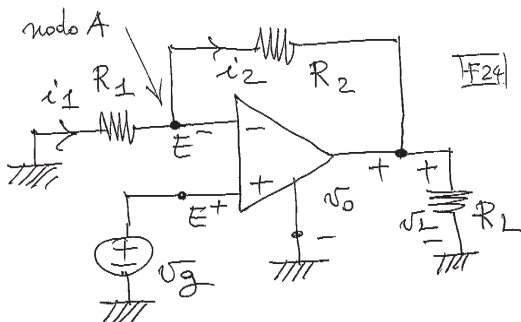
- per determinare le tensioni dei nodi e A_v e' stata sufficiente una KI al morsetto – dell'ao
- se volessi la corrente i_0 erogata dall'ao, devo scrivere una KI al morsetto di uscita dell'ao

$$i_0 = -i_2 + i_L = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_L} = -v_g \frac{R_2}{R_L} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right)$$

- soluzione usando il modello con nullore; notare che il nodo A e' tenuto a potenziale 0 dal nullore ($E_2 = 0$); il nullore crea quindi in A una *massa virtuale* (tale nodo e' a potenziale di terra anche se non e' fisicamente collegato a terra); provare per esercizio a analizzare il circuito e trovare A_v usando il modello dell'ao con nullatore e noratore



Amplificatore non invertente con ao



- usiamo anche adesso metodo dei nodi per determinare $A_v = v_L/v_g$; si ha $E^- = E^+ = v_g$; $v_o = v_L$. Inoltre da KI al nodo A otteniamo $i_1 = i_2$ ($i^- = 0$) e quindi

$$i_1 = \frac{0 - v_g}{R_1} = i_2 = \frac{v_g - v_L}{R_2}$$

da cui

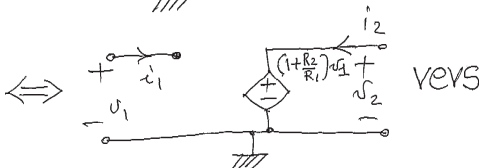
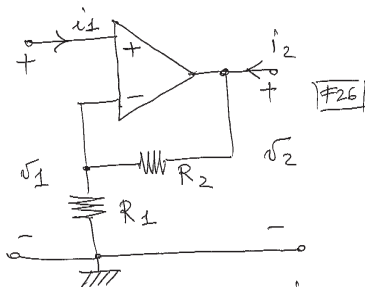
$$A_v = \frac{v_L}{v_g} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- se isoliamo l'ao e disegniamo la seguente rete due porte, vediamo che le sue relazioni costitutive sono

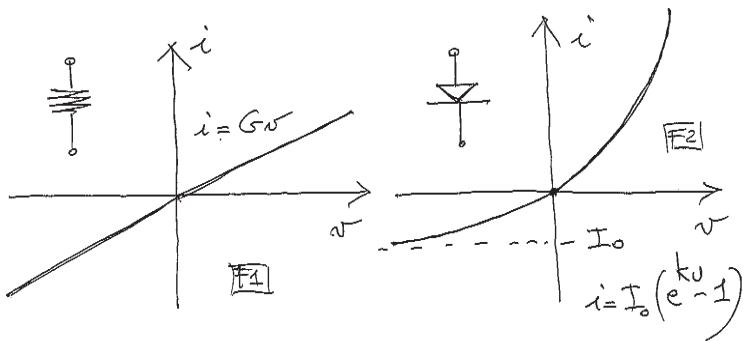
$$i_1 = 0$$

$$v_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_1$$

quindi la rete implementa un VCVS con $k = 1 + R_2/R_1$



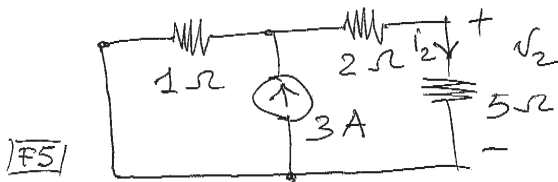
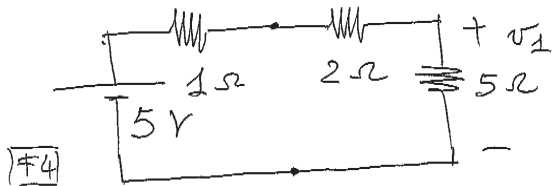
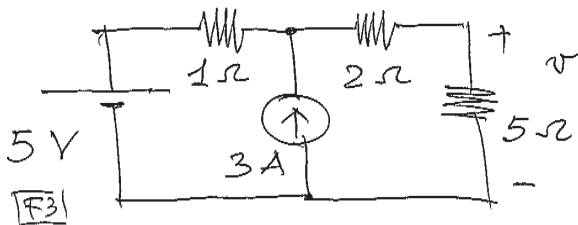
- Un bipolo senza memoria controllabile in tensione $i = g(v)$ si dice lineare se $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$ e omogeneo se $g(\alpha v) = \alpha g(v)$
- l'unico bipolo senza memoria lineare e omogeneo e' il resistore ideale $i = Gv$; la sua caratteristica corrente-tensione e' una retta passante per l'origine
- un diodo soddisfa a $i = g(v) = I_0(e^{kv} - 1)$ con $I_0 > 0$ e $k > 0$; non e' ne' lineare ne' omogeneo; la sua caratteristica e' di tipo esponenziale



- in modo simile una rete due porte senza memoria si dice lineare e omogenea se le sue relazioni costitutive sono date da due relazioni algebriche lineari e omogenee nelle 4 grandezze di porta v_1, v_2, i_1, i_2 ; le due relazioni costitutive vincolano le grandezze di porta a stare su un opportuno sottospazio vettoriale di dimensione 2 dello spazio $\mathbb{R}^4$
- il trasformatore ideale, il giratore ideale, i 4 tipi di generatori controllati e l'ao ideale sono tutte reti due porte senza memoria lineari e omogenee

- Enunciamo (senza dimostrazione) il seguente *Principio di Sovrapposizione degli Effetti (pse)*: consideriamo una rete contenente bipoli e doppi bipoli senza memoria lineari e omogenei e un certo numero di generatori indipendenti di tensione e/o corrente (CAUSE). Allora un effetto (TENSIONE o CORRENTE) puo' essere ottenuto sovrapponendo gli effetti dei generatori indipendenti di tensione e/o corrente.
- Per effetto di un generatore indipendente si intende la tensione o corrente che si ha quando e' presente tale generatore e tutti gli altri generatori indipendenti sono disattivati
- Ricordiamo che disattivare un generatore indipendente ideale di tensione significa sostituirlo con un corto circuito mentre disattivare un generatore indipendente ideale di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto

- Esempio 1. Determiniamo v usando il pse.



- Si ha $v = v_1 + v_2$ dove v_1 e' l'effetto della batteria e v_2 e' l'effetto del gen.re ind.te ideale di corrente. Una volta disattivato il gen.re di corrente abbiamo un partitore di tensione; si ha

$$v_1 = 5 \frac{5}{8} = \frac{25}{8} \text{ V}$$

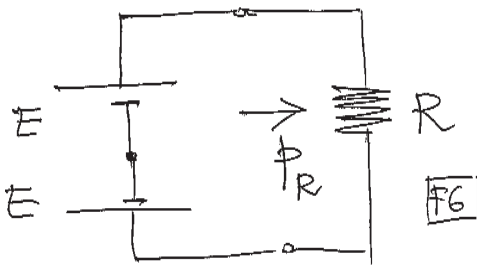
Disattivando la batteria otteniamo invece un circuito analizzabile con la regola del partitore di corrente

$$i_2 = 3 \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + 1} = \frac{3}{8} \text{ A}$$

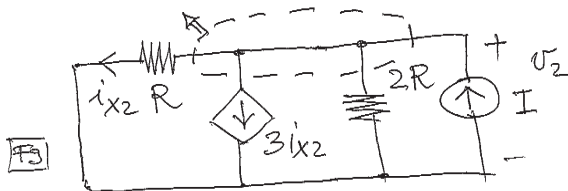
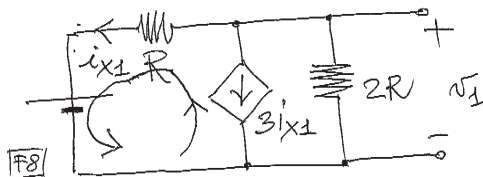
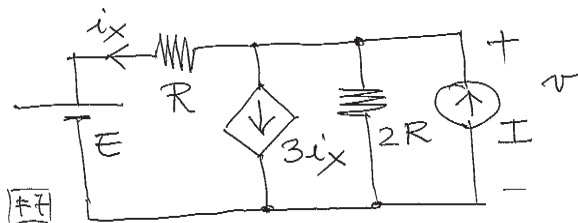
da cui $v_2 = 5i_2 = 15/8 \text{ V}$. Allora

$$v = v_1 + v_2 = 5 \text{ V}.$$

- *Nota importante:* il pse non vale ovviamente per trovare la potenza; consideriamo ad esempio il seguente esempio per cui la potenza assorbita da R vale $p_R = 0$. Applicando il pse otterremmo invece il risultato scorretto $p_R = 2E^2/R$ (perche?)



- Esempio 2 (pse con generatori controllati); determinare v con pse



- Nel circuito ci sono 2 cause e cioè i generatori indipendenti E e I ; il generatore controllato *non è una causa*. Allora si ha $v = v_1 + v_2$ con v_1 effetto di E e v_2 effetto di I .
- per v_1 , usando il Teorema di Millman, possiamo scrivere

$$v_1 = \frac{\frac{E}{R} - 3i_{x1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2E}{3} - 2Ri_{x1}$$

- eliminiamo i_{x1} scrivendo la KV alla maglia indicata:

$$v_1 = Ri_{x1} + E \Rightarrow i_{x1} = \frac{v_1 - E}{R}$$

- facendo sistema ottengo

$$v_1 = \frac{8}{9}E$$

- risultato finale non deve dipendere dalla grandezza di controllo i_{x1}

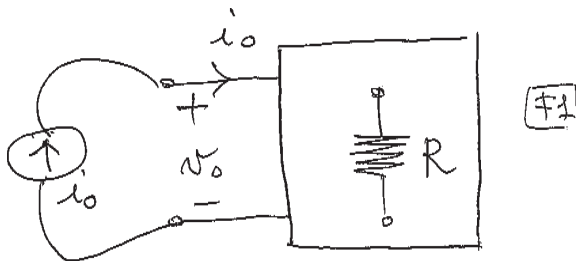
- determiniamo adesso v_2 ; da KI alla superficie Gaussiana si ha $i_{x2} + 3i_{x2} + \frac{v_2}{2R} - I = 0$. Inoltre, $i_{x2} = v_2/R$; quindi $v_2 = \frac{2}{9}RI$; infine

$$v = v_1 + v_2 = \frac{8}{9}E + \frac{2}{9}RI.$$

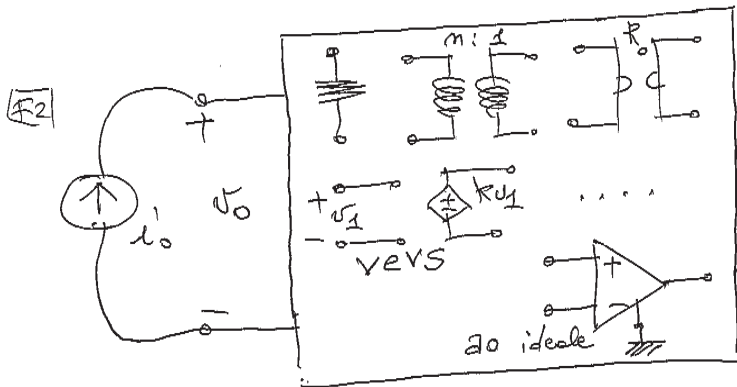
Resistenza equivalente di un bipolo senza memoria lineare e omogeneo

- E' ben noto dalla fisica il concetto di resistenza equivalente di un bipolo di soli resistori: alimentiamo il bipolo con un gen.re ind.te ideale di corrente i_0 e valutiamo la tensione v_0 ai morsetti (convenzione degli utilizzatori); si ha

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} \Omega$$



- il concetto può essere esteso ad un qualsiasi bipolo che contiene al suo interno solo resistori ideali e reti due porte senza memoria lineari e omogenee. La definizione di R_{eq} è la stessa di prima. Il bipolo è detto *omogeneo* in quanto non contiene gen.ri indipendenti di tensione e/o corrente

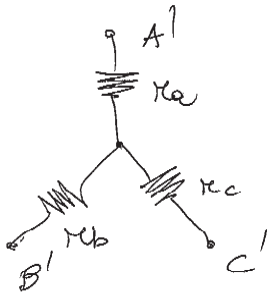
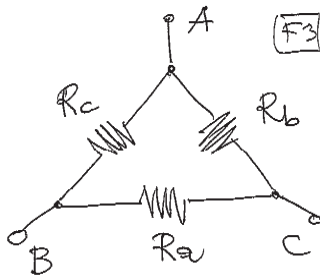


Reti di soli resistori

- Si suddividono in due classi
- *Reti a scala*: contengono solo resistori collegati in serie o parallelo; si usano regole elementari su serie e parallelo per calcolare R_{eq}
- *Reti non a scala*: non vi sono solo connessioni serie o parallelo; se possibile ci riconduciamo ad una rete a scala con opportune *trasformazioni circuitali*

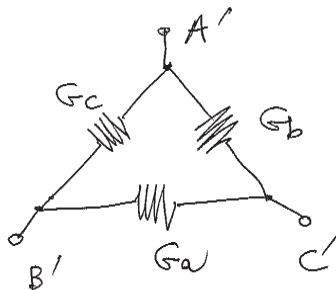
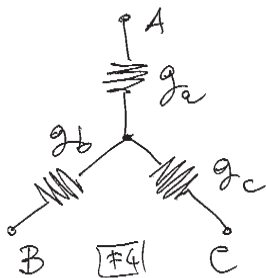
- trasformazione Triangolo-Stella: i due tripoli $A - B - C$ e $A' - B' - C'$ sono equivalenti se e solo se

$$r_a = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}; \quad r_b = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}; \quad r_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$



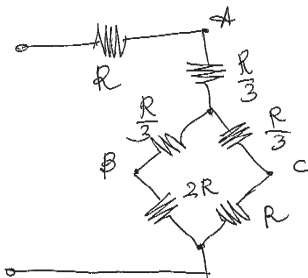
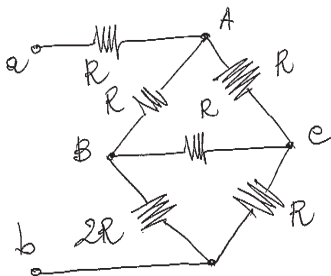
- trasformazione Stella-Triangolo: i due tripoli $A - B - C$ e $A' - B' - C'$ sono equivalententi se e solo se

$$G_a = \frac{g_b g_c}{g_a + g_b + g_c}; \quad G_b = \frac{g_a g_c}{g_a + g_b + g_c}; \quad G_c = \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c}$$



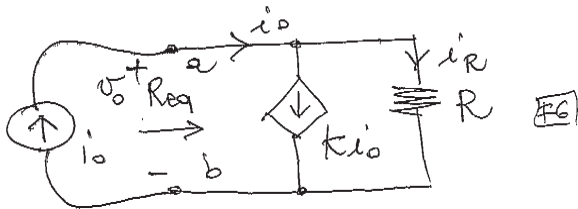
- Esempio. Determiniamo R_{eq} per il bipolo ab . I resistori non sono collegati ne' in serie ne' in parallelo (perche?); si tratta di una rete non a scala. Usando la trasformazione Triangolo-Stella per il tripolo $A - B - C$ ci riconduciamo a una rete a scala per la quale e' immediato ottenere R_{eq} con la regola delle resistenze in serie o in parallelo; si ha

$$R_{eq} = R + \frac{R}{3} + \frac{7R}{3} \parallel \frac{4R}{3}$$



Resistenza equivalente di bipoli attivi

- Consideriamo bipoli che contengono al loro interno reti due porte attive. Come primo esempio troviamo R_{eq} per il bipolo in figura contenente un CCCS

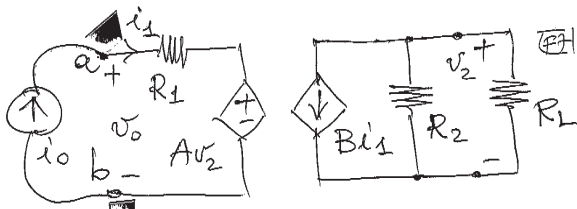


- Devo usare la definizione alimentando il bipolo con un gen.re di corrente ind.te i_0 , determinare v_0 e da qui $R_{eq} = v_0/i_0$; si ha $i_0 = i_R + k i_0$ e $i_R = v_0/R$ quindi

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = R(1 - k)$$

- R_{eq} dipende in modo sostanziale dal generatore controllato; inoltre, al variare di k , R_{eq} puo' assumere qualunque valore (positivo o negativo)

Esempio. Determiniamo la R_{eq} del bipolo attivo ab



- Passo 1. Procedo con la definizione alimentando il bipolo con un gen.re ind.te ideale di corrente i_0
- Passo 2. Determino le grandezze di controllo dei generatori controllati (i_1 e v_2) in funzione di i_0 , v_0 e degli altri parametri noti (A , B , R_1 , R_2 , R_L). Si ha

$$i_1 = i_0$$

inoltre

$$v_2 = -Bi_1 R_2 \parallel R_L = -Bi_0 R_2 \parallel R_L$$

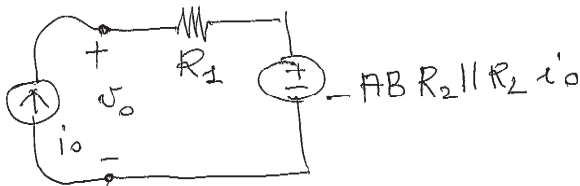
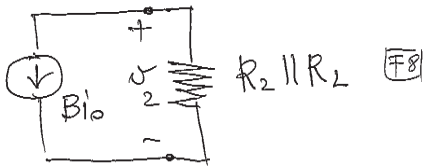
A questo punto i due generatori controllati sono di fatto diventati generatori indipendenti

- Passo 3. Scrivendo una KV alla maglia di ingresso otteniamo

$$v_0 = R_1 i_0 - ABR_2 \parallel R_L i_0$$

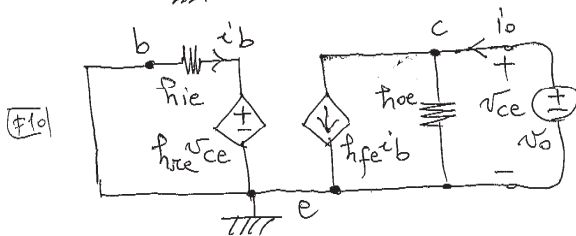
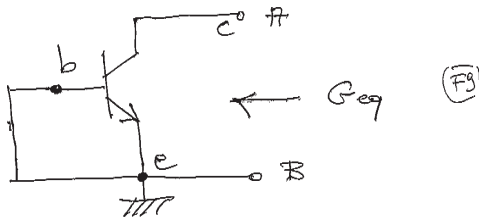
quindi

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = R_1 - ABR_2 \parallel R_L$$



- ovviamente il risultato finale per R_{eq} non deve dipendere dalle grandezze di controllo (che sono eliminate al Passo 2)

Esempio. Determinare la conduttanza equivalente G_{eq} del bipolo AB usando per il BJT il modello a parametri ibridi a emettitore comune



- sostituisco al BJT il modello noto e alimento AB con un gen.re di tensione v_0 ; determino quindi i_0 e $G_{eq} = i_0/v_0$

- si ha

$$v_{ce} = v_0; \quad i_b = -\frac{h_{re} v_0}{h_{ie}}$$

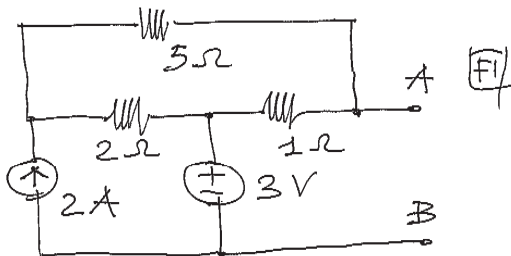
- dalla KI al nodo di uscita ottengo

$$i_0 = h_{oe} v_0 - \frac{h_{fe} h_{re} v_0}{h_{ie}}$$

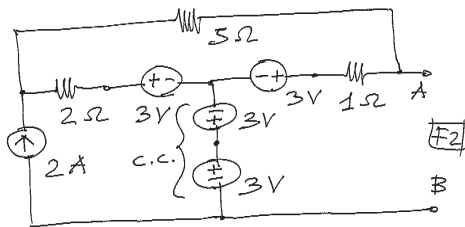
e quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = h_{oe} - \frac{h_{fe} h_{re}}{h_{ie}}.$$

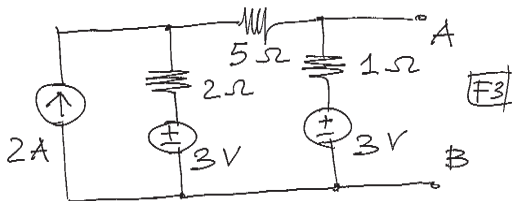
- E' possibile ottenere l'equivalente di Thevenin o Norton di un bipolo anche utilizzando *trasformazioni circuitali*. E' detto anche metodo topologico. Illustriamo l'idea con un esempio

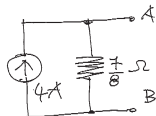
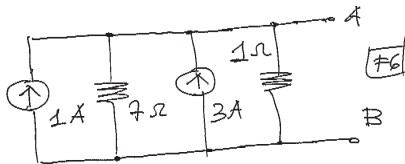
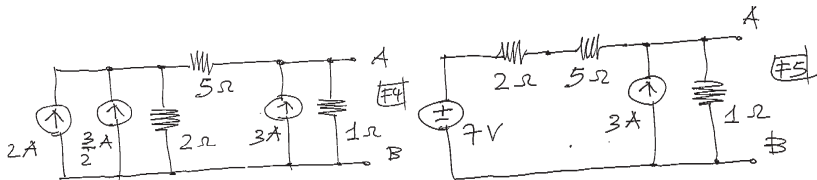


- *Trasformazione di generatori ideali di tensione.* Per il bipolo in figura non sappiamo direttamente trasformare il generatore ideale di tensione; possiamo però introdurre, come mostrato, un taglio (nodale) di generatori di tensione con la stessa tensione impressa in modo da non alterare le KV alle maglie; quindi non alteriamo il comportamento ai morsetti AB

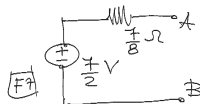


- eliminando il corto circuito ottengo il seguente bipolo; a questo punto posso trasformare i generatori reali di tensione; procedo con equivalenze circuitali fino ad ottenere l'equivalente di Thevenin richiesto



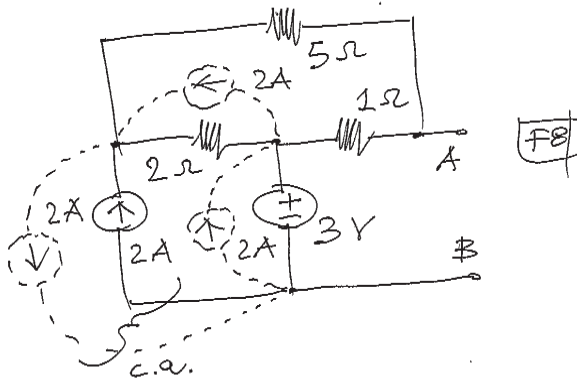


Norton

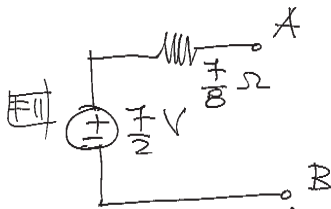
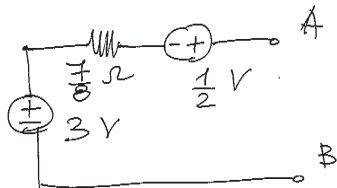
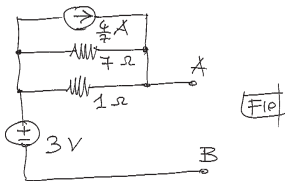
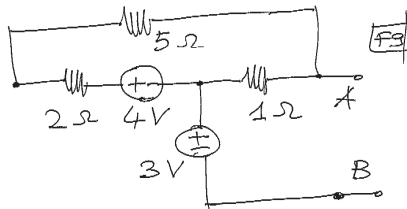


Thevenin

- *Trasformazione di generatori ideali di corrente.* Una seconda possibilita' e' introdurre una maglia di generatori di corrente con correnti impresse tutte dello stesso valore in modo da non alterare le KI ai nodi; non cambia quindi il comportamento ai morsetti AB



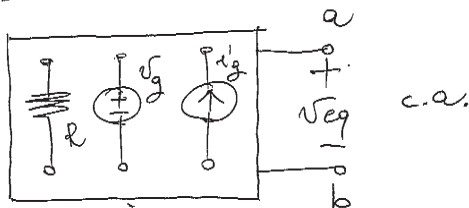
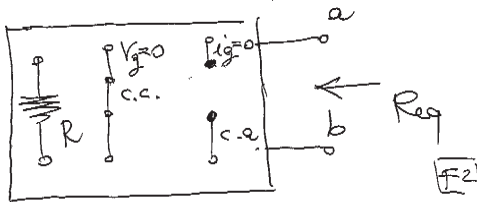
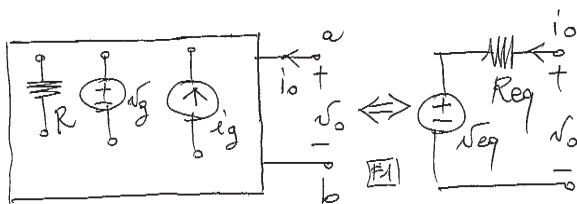
• elimino il circuito aperto e procedo anche in questo caso con equivalenze note fra bipoli fino ad ottenere l'equivalente di Thevenin.



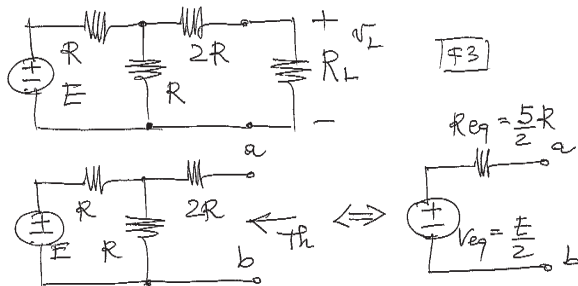
- Teorema di Thevenin e di Norton
- I teoremi permettono di ottenere una rappresentazione molto utile di bipoli *lineari non omogenei* che contengono resistori lineari e generatori indipendenti di tensione o corrente
- **Teorema di Thevenin.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Il bipolo e' equivalente a una resistenza equivalente R_{eq} in serie a un generatore di tensione equivalente v_{eq} cosi' definiti:
- R_{eq} : resistenza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
- v_{eq} : tensione ai morsetti ab quando sono lasciati a circuito aperto

$$v_{eq} = v_{c.a.} = v_{vuoto}$$

- Usando uno schema a blocchi



Esempio. Determinare v_L con il Teorema di Thevenin

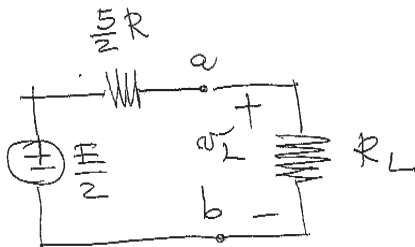


- scollegiamo il carico R_L e troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; notiamo che il resistore $2R$ e' appeso (non vi passa corrente); quindi e' immediato determinare Thevenin: si ha

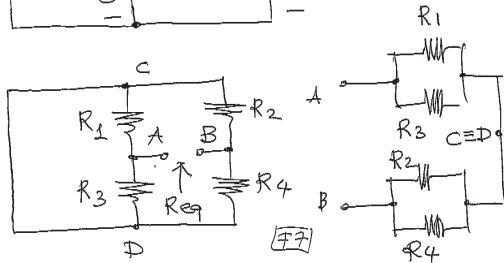
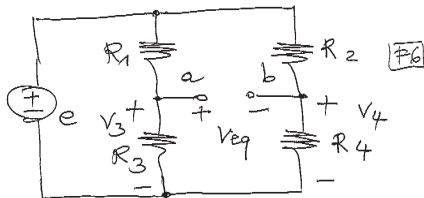
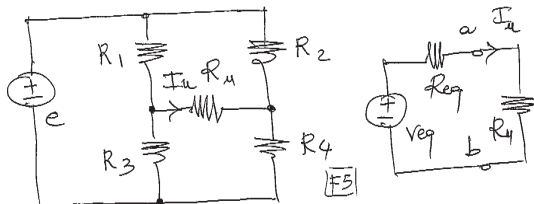
$$R_{eq} = \frac{5}{2}R; \quad v_{eq} = \frac{E}{2}$$

- a questo punto ricollego il carico R_L ; dalla regola del partitore di tensione otteniamo

$$v_L = \frac{E}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{5}{2}R}$$



Esempio. Determinare la corrente I_u per il circuito a ponte in figura



- colleghiamo R_u e determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; si ha usando la regola del partitore di tensione

$$v_{eq} = V_3 - V_4 = e \frac{R_3}{R_1 + R_3} - e \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

- per determinare R_{eq} disattivo il gen.re di tensione sostituendolo con un corto circuito; 'semplifico' il corto circuito che collega i nodi C e D e ridisegno il bipolo; a questo punto e' facile vedere che

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$$

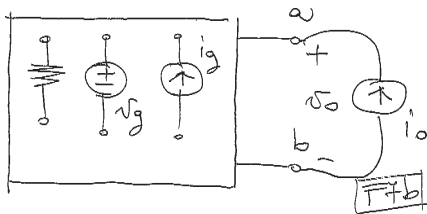
- reinserendo R_u si trova che

$$I_u = \frac{v_{eq}}{R_{eq} + R_u}$$

- verificare che il ponte e' bilanciato ($I_u = 0$) se e solo se $R_1 R_4 = R_2 R_3$

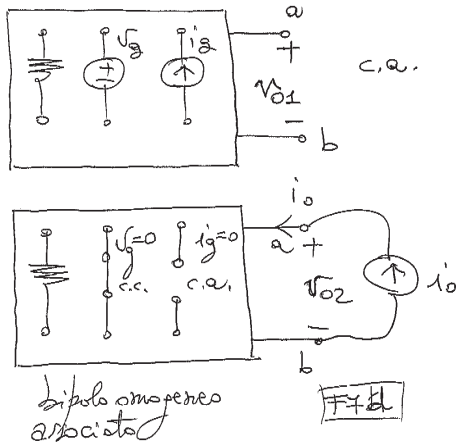
Dimostrazione del Teorema di Thevenin

- alimento il bipolo ab con un generatore indipendente ideale di corrente i_0 e determino la tensione v_0 usando il pse; cio' e' possibile in quanto la rete e' *lineare*



- raggruppo le cause in due insiemi: causa 1 e' data da tutti i gen.di di tensione e corrente interni al bipolo; causa 2 e' data dal gen.re di corrente esterno i_0 ; dal pse si ha

$$v_0 = v_{01} + v_{02}$$



disattivando i_0 si trova che $v_{01} = v_{c.a.} = v_{eq}$; disattivando i gen.ri interni al bipolo trovo invece che $v_{02} = R_{eq}i_0$; quindi

$$v_0 = v_{01} + v_{02} = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

che e' la stessa relazione costitutiva del bipolo di Thevenin (verificare)

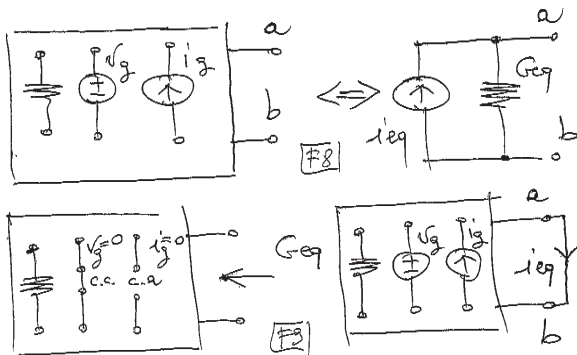
- **Importante.** Dalla dimostrazione si nota che l'equivalente di Thevenin esiste purché il bipolo ab sia *controllabile in corrente*

Con Thevenin abbiamo ottenuto una rappresentazione di un bipolo tramite un generatore reale di tensione. Con Norton, dualmente, e sotto opportune ipotesi, otteniamo una rappresentazione tramite un generatore reale di corrente

- **Teorema di Norton.** Consideriamo un bipolo ab contenente resistori ideali (senza memoria, lineari e omogenei) e generatori indipendenti ideali di tensione e/o corrente. Supponiamo che il bipolo sia controllabile in tensione. Allora il bipolo e' equivalente a una conduttanza equivalente G_{eq} in parallelo a un generatore di corrente equivalente i_{eq} cosi' definiti:
 - G_{eq} : conduttanza equivalente del bipolo omogeneo associato che si ottiene disattivando tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente
 - i_{eq} : corrente ai morsetti ab quando sono chiusi in corto circuito

$$i_{eq} = i_{c.c.}$$

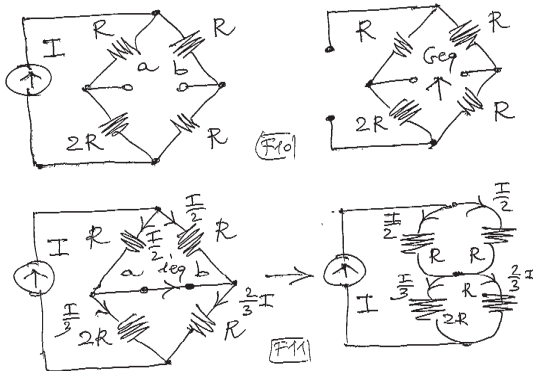
- Usando uno schema a blocchi



- per esercizio provare a dimostrare il teorema usando il pse
- Nota: se un bipolo e' controllabile sia in corrente che in tensione si ha

$$i_{c.c.} = \frac{v_{c.a.}}{R_{eq}}; \quad v_{c.a.} = R_{eq} i_{c.c.}; \quad R_{eq} = \frac{v_{c.a.}}{i_{c.c.}}$$

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo ab



- si ha

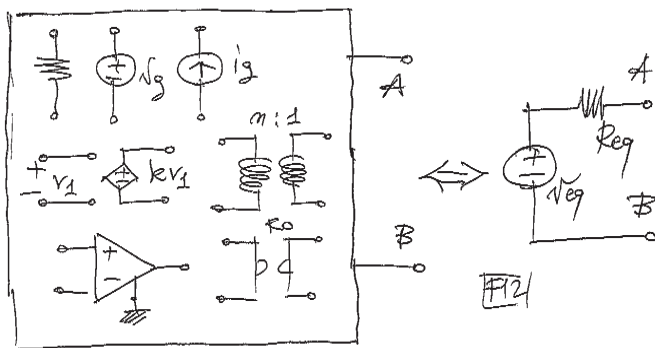
$$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$$

- notiamo poi che dalla regola del partitore di corrente si ha

$$i_{eq} = \frac{I}{2} - \frac{I}{3} = \frac{I}{6}.$$

Presenza di generatori controllati e ao

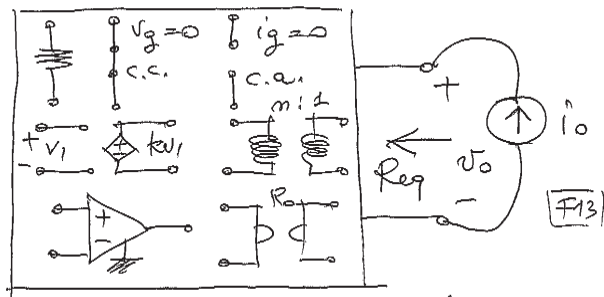
- I teoremi di Thevenin e Norton sono facilmente estendibili al caso importante in cui il bipolo contiene generatori controllati e/o ao ideali; ci sono però alcune cose da evidenziare



- supponiamo che il bipolo sia controllabile in corrente; vale ancora enunciato Teorema di Thevenin; la definizione di v_{eq} e R_{eq} è la stessa data in precedenza

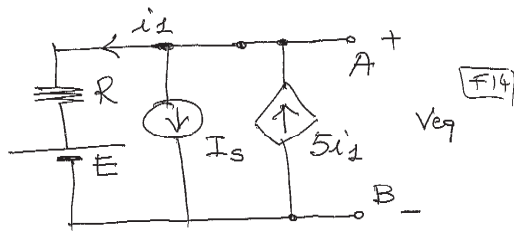
- c'è da fare molta attenzione a come si valuta la R_{eq} ; a tal fine
- 1) disattivo i generatori indipendenti di tensione e corrente
 - 2) *non disattivo* i generatori controllati
 - 3) lascio così come sono gli ao
 - 4) ottengo così il bipolo omogeneo associato per il quale applicando i_0 e valutando v_0 ottengo

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0}$$



bipolo OMogeneo associato

Esempio. Determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo AB



- la tensione equivalente v_{eq} è direttamente valutabile dal circuito di partenza e si ha usando Millmann

$$v_{eq} = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_{eq} = Ri_1 + E$, quindi

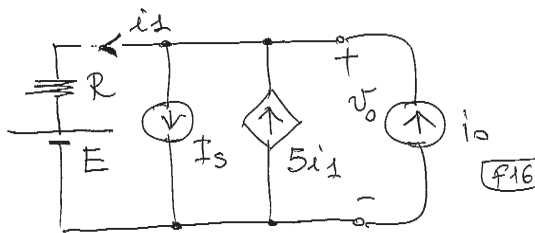
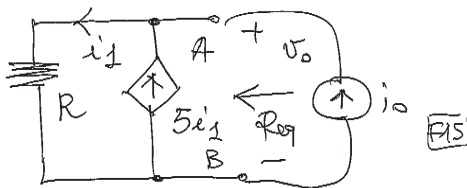
$$i_1 = \frac{v_{eq} - E}{R}$$

facendo sistema

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s$$

- per la resistenza equivalente considero il seguente circuito per il quale $i_0 = -5i_1 + i_1$ e $i_1 = v_0/R$ da cui

$$R_{eq} = -\frac{R}{4}$$



Secondo metodo risolutivo (determino insieme v_{eq} e R_{eq}); alimento il bipolo di partenza con un gen.re ind.te di corrente i_0 ; si ha

$$v_0 = \frac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1 + i_0}{\frac{1}{R}} = E - RI_s + 5Ri_1 + Ri_0$$

Eliminiamo la grandezza di controllo considerando che

$v_0 = Ri_1 + E$, quindi

$$i_1 = \frac{v_0 - E}{R}$$

facendo sistema otteniamo

$$v_0 = E + \frac{R}{4}I_s - \frac{R}{4}i_0$$

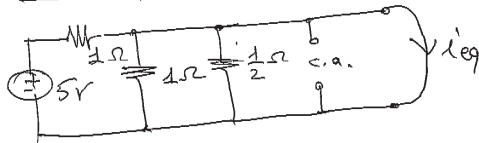
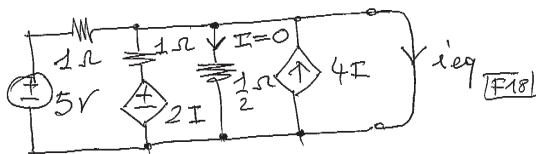
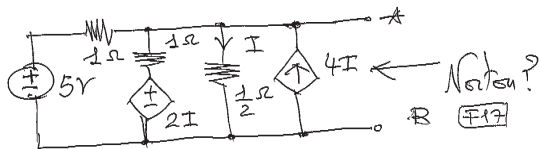
- se confrontiamo con la relazione costitutive

$$v_0 = v_{eq} + R_{eq}i_0$$

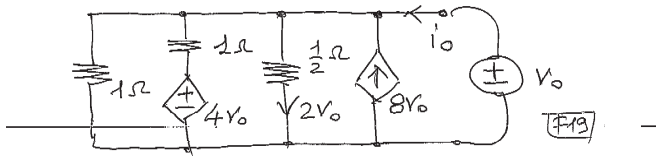
del bipolo equivalente di Thevenin otteniamo

$$v_{eq} = E + \frac{R}{4}I_s; \quad R_{eq} = -\frac{R}{4}$$

Esempio. Determinare l'equivalente di Norton del bipolo



- per $i_{c.c.}$ notare che si ha $I = 0$ dato che la resistenza da $1/2$ Ohm e' cortocircuitata; quindi possiamo semplificare come mostrato; ne consegue facilmente che $i_{c.c.} = 5$ A



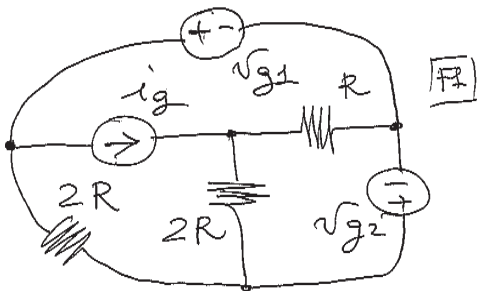
- valutiamo adesso G_{eq} ; si ha $I = 2v_0$ da cui scrivendo una KI per la linea Gaussiana indicata otteniamo
 $i_0 = v_0 + v_0 - 4v_0 + 2v_0 - 8v_0$; quindi

$$G_{eq} = \frac{i_0}{v_0} = -8 \text{ Ohm}^{-1}.$$

- **Metodi Generali di Analisi di Reti Resistive**

- Consideriamo il seguente circuito con $\ell = 6$ bipoli e $n = 4$ nodi.

Risolvere il circuito significa determinare tutte le tensioni v_i e correnti i_i dei bipoli. Sono $2\ell = 12$ incognite

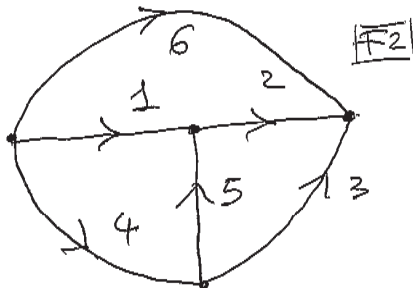


- In pratica si individua un sottoinsieme delle incognite, dette *variabili ausiliarie*, e si cerca di scrivere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili ausiliarie; dalle variabili ausiliarie possiamo poi trovare indirettamente tutte le altre incognite

- per individuare le variabili ausiliarie e scrivere il sistema risolvante facciamo uso di alcuni elementi di teoria dei grafi

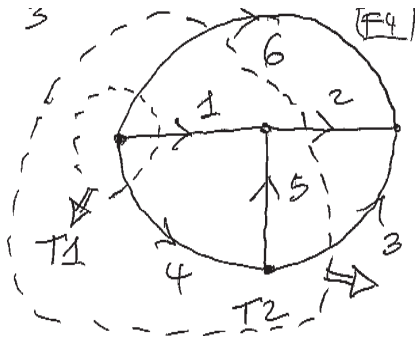
Consideriamo un *grafo orientato* associato al circuito; il grafo e' *connesso* ed ha un numero di *lati* $\ell = 6$ pari al numero di bipoli; supponiamo di usare la convenzione degli utilizzatori per ogni lato

- *nodo*: e' un punto del grafo a cui sono connessi due o piu' bipoli; si hanno in questo caso $n = 4$ nodi



Legge di Kirchhoff per le correnti (KI)

- *taglio*: consideriamo una linea chiusa (linea Guassiana) che taglia il grafo in due parti senza passare dai nodi; per taglio si intende l'insieme dei lati che sono intersecati dalla linea chiusa

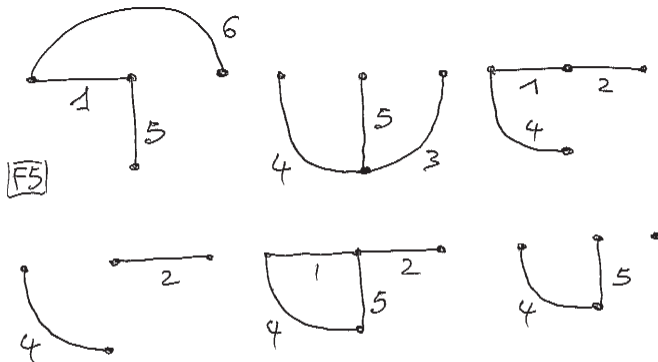


- ad esempio $T1 = \{1, 6, 4\}$, $T2 = \{6, 2, 3\}$
- orientiamo ciascun taglio scegliendo una normale positiva alla linea chiusa (uscente o entrante); nel caso in figura si ha

$$KI \ T1 : i_1 + i_4 + i_6 = 0; \quad KI \ T2 : i_6 + i_2 + i_3 = 0$$

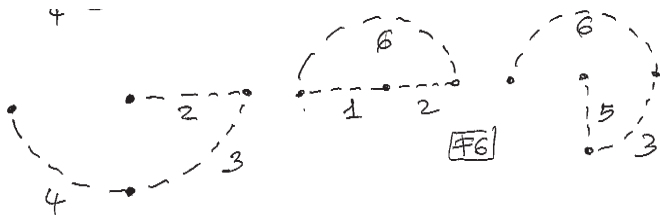
- ogni KI per un taglio stabilisce un vincolo di dipendenza lineare fra le correnti dei lati che fanno parte del taglio; le correnti dei lati i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, non sono quindi tutte indipendenti di loro

- *Albero*: insieme connesso di lati del grafo che tocca tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie)



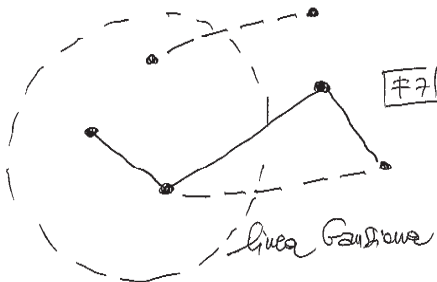
- esempi di alberi validi e di alberi non validi
- Proprieta': ogni albero ha $n - 1$ rami
- Infatti il primo ramo connette 2 nodi; aggiungendo un ramo connesso un terzo nodo; procedendo cosi' riesco a connettere tutti gli n nodi con $n - 1$ rami

- *Coalbero*: insieme di lati del grafo che non fanno parte dell'albero



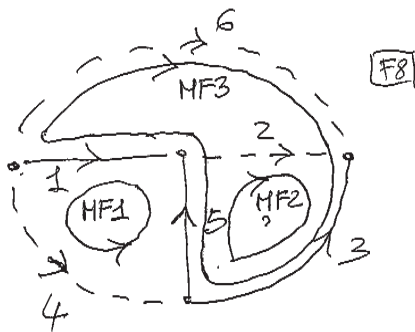
- esempi di coalberi validi e esempi di coalberi non validi (fare)
- Proprieta': ogni coalbero ha $\ell - n + 1$ corde (ovvio)
- convenzionalmente i rami dell'albero vengono indicati a tratto continuo mentre le corde sono tratteggiate

- Proprieta: un coalbero non contiene tagli (non e' possibile tagliare il grafo in due parti intersecando solo corde)



- Cenno alla verifica: consideriamo una linea chiusa che taglia il grafo in due parti; prendiamo un nodo interno ed un nodo esterno alla linea chiusa; dato che l'albero connette tutti i nodi, ed e' connesso, vi sara' un percorso lungo l'albero che collega il nodo interno a quello esterno; quindi la linea chiusa interseca almeno un ramo dell'albero

Proprieta': se aggiungo una corda ad un albero si forma una maglia costituita dalla corda e, per il resto, da rami dell'albero; tale maglia e' detta *maglia fondamentale* (MF)



- Proprieta': le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde del coalbero; vi sono quindi $\ell - n + 1$ maglie fondamentali associate all'albero; ciascuna maglia fondamentale si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente della corda che le individua

- $MF1 = \{1, 5, 4\}$; $MF2 = \{2, 3, 5\}$; $MF3 = \{1, 3, 5, 6\}$

- Indichiamo con $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle tensioni dei lati del grafo

- **Tensioni indipendenti.** Indichiamo con $\mathbf{v}_a$ il vettore delle $n - 1$ tensioni dei rami dell'albero e con $\mathbf{v}_c$ il vettore delle $\ell - n + 1$ tensioni delle corde del coalbero.

Le tensioni $\mathbf{v}_a$ formano una base per lo spazio delle tensioni dei lati del grafo, e cioè:

- 1) le tensioni $\mathbf{v}_a$ sono indipendenti fra di loro

- 2) da $\mathbf{v}_a$ si possono determinare le tensioni dipendenti $\mathbf{v}_c$ scrivendo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

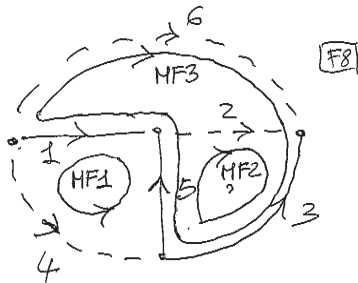
- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che l'albero non contiene maglie (pensarci!)

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo di un esempio; scegliamo l'albero in figura per cui $\mathbf{v}_a = (v_1, v_3, v_5)^T$ e $\mathbf{v}_c = (v_2, v_4, v_6)^T$; le $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF sono date da

$$v_4 - v_1 + v_5 = 0$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0$$

$$v_6 - v_1 - v_3 + v_5 = 0$$



- notare che tali KV sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la tensione della corda che individua la MF corrispondente; tale tensione non appare per costruzione in altre KV

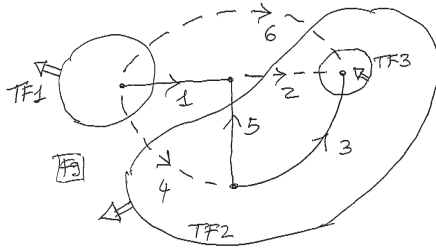
- risolvendo otteniamo le $\ell - n + 1 = 3$ tensioni dipendenti delle corde in funzione delle tensioni indipendenti dei rami dell'albero

$$v_4 = v_1 - v_5$$

$$v_2 = v_3 - v_5$$

$$v_6 = v_1 + v_3 - v_5$$

Taglio Fondamentale (TF): e' un taglio che contiene un ramo dell'albero e, per il resto, solamente corde del coalbero; ogni taglio si orienta convenzionalmente secondo il verso della corrente del ramo corrispondente



- Proprieta': i tagli fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero; vi sono quindi $n - 1$ tagli fondamentali associati all'albero
- $TF1 = \{1, 4, 6\}$; $TF2 = \{2, 4, 5, 6\}$; $TF3 = \{2, 3, 6\}$

- Indichiamo con $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ il vettore delle correnti dei lati

- **Correnti indipendenti.** Indichiamo con $\mathbf{i}_c$ il vettore delle $\ell - n + 1$ correnti delle corde del coalbero e con $\mathbf{i}_a$ il vettore delle $n - 1$ correnti dei rami dell'albero. Le correnti $\mathbf{i}_c$ formano una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo, e cioè':

- 1) le correnti $\mathbf{i}_c$ sono indipendenti fra di loro

- 2) da $\mathbf{i}_c$ si possono determinare le correnti dipendenti $\mathbf{i}_a$ scrivendo $n - 1$ KI ai TF associate all'albero

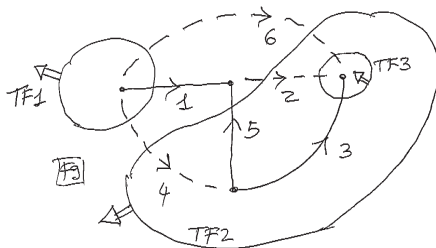
- verifica: il punto 1) deriva dal fatto che il coalbero non contiene tagli (pensarci!)

- per il punto 2) facciamo una verifica per mezzo dell'esempio considerato per il quale $\mathbf{i}_c = (i_2, i_4, i_6)^T$ e $\mathbf{i}_a = (i_1, i_3, i_5)^T$; le $n - 1 = 3$ KI ai TF sono date da

$$i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_5 - i_2 - i_4 - i_6 = 0$$

$$i_3 + i_2 + i_6 = 0$$



- notare che tali KI sono fra di loro linearmente indipendenti; infatti ogni equazione contiene la corrente del ramo che individua il TF corrispondente; tale corrente non appare per costruzione in altre KI

- risolvendo otteniamo le $n - 1 = 3$ correnti dipendenti dei rami dell'albero in funzione delle correnti indipendenti delle corde del coalbero

$$i_1 = -i_4 - i_6$$

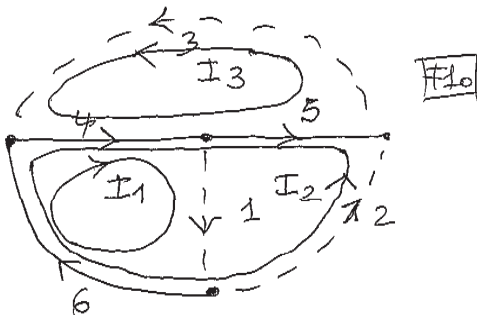
$$i_5 = i_2 + i_4 + i_6$$

$$i_3 = -i_2 - i_6$$

Correnti cicliche delle maglie (di Maxwell)

- Esempio. Facciamo percorrere ogni MF da una corrente I_i che si richiude su se stessa (detta corrente ciclica o di Maxwell); ovviamente vi sono $\ell - n + 1 = 3$ correnti cicliche delle MF; inoltre tali correnti risultano in corrispondenza biunivoca con le correnti delle corde

$$I_1 = i_1; I_2 = i_2; I_3 = i_3$$

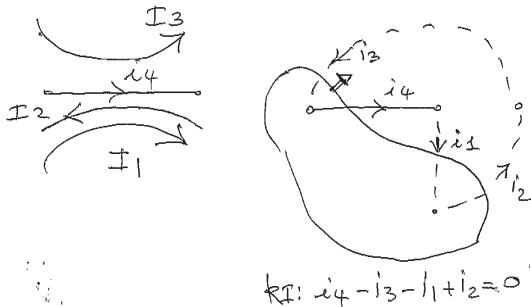


- ne consegue che anche le correnti cicliche $\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T \in \mathbb{R}^3$ costituiscono una base per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

- le correnti dipendenti dei rami dell'albero si possono ottenere per sovrapposizione delle correnti cicliche; ad esempio, per il ramo 4 si ha

$$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$$

dato che $I_i = i_i$, $i = 1, 2, 3$, si vede che cio' equivale a determinare la corrente del ramo usando una KI al TF individuato da tale ramo



- I_{cicliche} e i_c costituiscono 2 basi equivalenti per lo spazio delle correnti dei lati del grafo

Metodo Totale (del Tableau)

- Consideriamo un circuito con ℓ bipoli e n nodi e un grafo orientato ad esso associato; scegliamo un albero; le incognite sono le tensioni v_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ e le correnti i_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$ dei lati del grafo; in totale vi sono 2ℓ incognite

- Equazioni di tipo topologico (dipendono solo dal grafo orientato)
 $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero
 $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

In totale abbiamo $\ell - n + 1 + n - 1 = \ell$ equazioni topologiche

- Equazioni tipologiche (dipendono dalla natura degli elementi presenti)

ℓ relazioni costitutive dei bipoli

- Complessivamente sappiamo perciò scrivere $\ell + \ell = 2\ell$ equazioni, tante quante sono le incognite; il problema è quindi *ben posto*

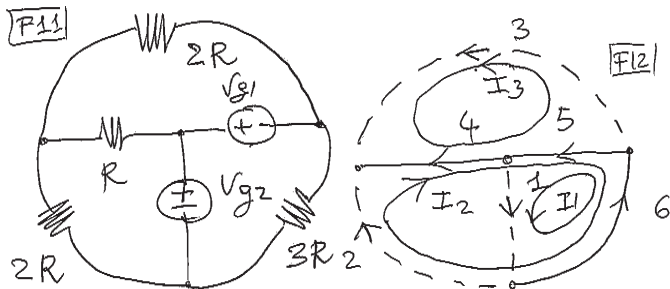
- nei principali metodi di analisi non si usa l'intero insieme delle incognite ma un suo sottoinsieme (variabili ausiliarie); ad esempio, nella versione più semplice del metodo delle maglie fondamentali, le variabili ausiliarie sono le $\ell - n + 1$ correnti delle corde.

- **Metodo delle Maglie Fondamentali (MMF)**

- Per reti di soli bipoli controllabili in corrente; in particolare reti di resistori e generatori indipendenti ideali di tensione
- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MMF sono le correnti cicliche delle MF

$$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} = (I_1, I_2, I_3)^T$$

oppure equivalentemente le correnti $\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T$ delle corde. In generale si hanno $\ell - n + 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $\ell - n + 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 + v_5 + v_6 = 0$$

$$v_2 - v_4 - v_5 - v_6 = 0$$

$$v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

- Passo 2: esprimo le correnti dei lati del grafo (in generale sono ℓ) in funzione delle correnti delle correnti cicliche; e' sempre possibile in quanto le correnti cicliche sono una base per lo spazio delle correnti dei lati; nel far cio' uso $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 = l_1$$

$$i_2 = l_2$$

$$i_3 = l_3$$

$$i_4 = -l_2 - l_3$$

$$i_5 = l_1 - l_2 - l_3$$

$$i_6 = l_1 - l_2$$

• Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in corrente, posso esprimere le tensioni dei bipoli (ℓ) in funzione delle correnti dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in corrente

$$v_1 = v_{g2}$$

$$v_2 = 2Ri_2 = 2Rl_2$$

$$v_3 = 2Ri_3 = 2Rl_3$$

$$v_4 = Ri_4 = R(-l_2 - l_3)$$

$$v_5 = -v_{g1}$$

$$v_6 = 3Ri_6 = 3R(l_1 - l_2)$$

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $\ell - n + 1$ equazioni nelle $\ell - n + 1$ incognite date dalle correnti cicliche delle MF; in questo caso $\ell - n + 1 = 3$; in forma vettoriale si ha

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & 0 \\ -3R & 6R & R \\ 0 & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{g1} - v_{g2} \\ -v_{g1} \\ -v_{g1} \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvete per il MMF e' del tipo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_{\text{cicliche}} = \mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$$

con $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(\ell-n+1) \times (\ell-n+1)}$ (matrice delle resistenze),

$\mathbf{I}_{\text{cicliche}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}} \in \mathbb{R}^{\ell-n+1}$ (vettore dei termini noti)

• per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}_{\text{gen.tensione}}$

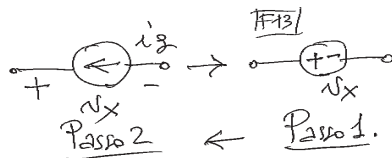
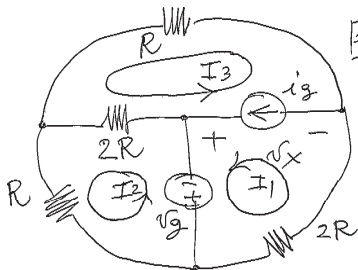
- R_{kk} ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma delle resistenze della maglia k
- R_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, \ell - n + 1$: somma *algebraica* delle resistenze a comune fra maglia k e maglia h ; ogni resistenza si prende col $+$ se I_k e I_h la percorrono in senso concorde, col $-$ altrimenti
- V_k ; $k = 1, \dots, \ell - n + 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma *algebraica* delle tensioni dei gen.ri ind.ti di tensione della MF k ; ogni tensione si prende con il $+$ se I_k 'esce dal morsetto $+$ del gen.re di tensione', col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{R}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$

- Osservazione. Per ottenere il sistema risolvante abbiamo usato tutte le KV ($\ell - n + 1$) al Passo 1, tutte le KI al Passo 2 ($n - 1$) e tutte le relazioni costitutive dei bipoli (ℓ) al Passo 3
- Osservazione. Una volta determinate le correnti cicliche, possiamo determinare indirettamente tutte le altre correnti e tensioni dei bipoli (pensarci!)
- Osservazione. MMF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le correnti dei rami dell'albero, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le tensioni dei bipoli.

Metodo Modificato di Analisi su Base MF

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di corrente (bipoli *non controllabili in corrente*); in tal caso non possiamo ripetere il Passo 3 della precedente procedura
- vediamo come si fa con un esempio; non conosco la tensione sul gen.re di corrente i_g ; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la tensione v_x ai capi di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

$$I_1, I_2, I_3, v_x$$



- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di corrente come se fosse un gen.re di tensione v_x ; mi riconduco così ad una rete con sole resistenze e gen.ri di tensione; posso scrivere le seguenti KV

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_g \\ -v_g \\ -v_x \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di corrente per scrivere una equazione aggiuntiva detta *equazione di vincolo*

$$i_g = I_1 - I_3$$

- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, è dato da

$$\begin{pmatrix} 2R & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3R & -2R & 0 \\ 0 & -2R & 3R & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ -v_g \\ 0 \\ i_g \end{pmatrix}$$

- il metodo descritto è detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base maglie fondamentali*

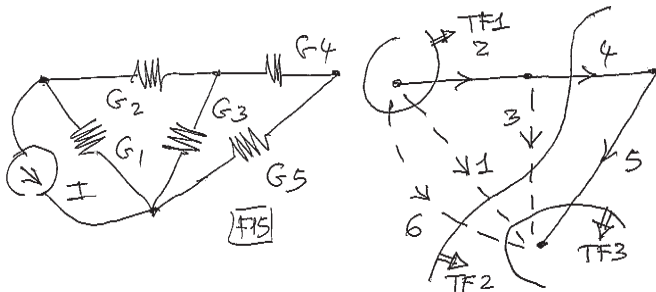
- **Metodo dei Tagli Fondamentali (MTF)**

- Si introduce, per dualita' rispetto al MMF, per reti di soli bipoli controllabili in tensione; in particolare reti di conduttanze e generatori indipendenti ideali di corrente

- discutiamo il metodo con un esempio; associo alla rete un grafo orientato e scelgo un albero; le incognite del MTF sono le tensioni dei rami dell'albero

$$\mathbf{v}_a = (v_2, v_4, v_5)^T$$

In generale si hanno $n - 1$ incognite



- mostriamo che e' sempre possibile scrivere un numero di equazioni risolventi pari a $n - 1$; procediamo con 3 passi
- Passo 1: scrivo $n - 1$ KI ai TF associati all'albero

$$i_1 + i_2 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0$$

$$i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$$

- Passo 2: esprimo le tensioni delle corde (in generale sono $\ell - n + 1$) in funzione delle tensioni delle tensioni dei rami dell'albero; e' sempre possibile in quanto tali tensioni sono una base per lo spazio delle tensioni dei lati; nel far cio' uso $\ell - n + 1$ KV alle MF associate all'albero

$$v_1 = v_2 + v_4 + v_5$$

$$v_6 = v_2 + v_4 + v_5$$

$$v_3 = v_4 + v_5$$

- Passo 3: dato che per ipotesi i bipoli sono controllabili in tensione, posso esprimere le correnti dei bipoli (ℓ) in funzione delle tensioni dei bipoli; nel far cio' uso le ℓ relazioni costitutive dei bipoli controllabili in tensione

$$i_1 = G_1 v_1 = G_1(v_2 + v_4 + v_5)$$

$$i_2 = G_2 v_2$$

$$i_3 = G_3 v_3 = G_3(v_4 + v_5)$$

$$i_4 = G_4 v_4$$

$$i_5 = G_5 v_5$$

$$i_6 = I$$

Sostituendo nel sistema al Passo 1 ottengo un sistema di $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite date dalle tensioni dei rami dell'albero; in questo caso $n - 1 = 3$; in forma vettoriale si ha (verificare)

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & G_1 + G_3 \\ G_1 & G_1 + G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{pmatrix}$$

- in generale il sistema risolvante per il MTF e' del tipo

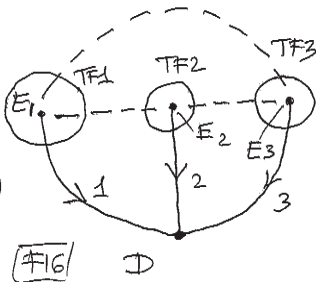
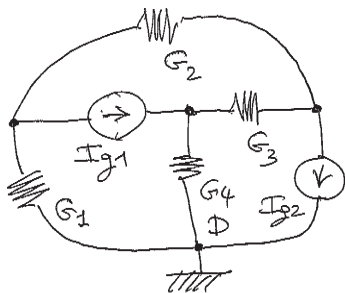
$$\mathbf{G}\mathbf{v}_a = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze), $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore delle incognite), $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di tensione e resistenze si puo' dare una regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$
- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$
- Osservazione. Per ottenere il sistema risolvante abbiamo usato tutte le KI al Passo 1, tutte le KV al Passo 2 e tutte le relazioni costitutive dei bipoli al Passo 3
- Osservazione. Una volta determinate le tensioni dei rami dell'albero, possiamo determinare indirettamente tutte le altre tensioni e correnti dei bipoli (pensarci!)
- Osservazione. MTF e' un metodo ad eliminazione. Al Passo 2 eliminiamo le tensioni delle corde, mentre al Passo 3 eliminiamo tutte le correnti dei bipoli

Metodo dei Nodi

- Il metodo dei nodi è un caso particolare del metodo dei tagli. Cominciamo dal caso in cui sono presenti solo bipoli controllabili in tensione (conduttanze e gen.ri ind.ti di corrente)
- scegliamo un nodo di riferimento (nodo di terra, o Datum (D)) a cui viene attribuito potenziale $E = 0$; scegliamo poi un *albero stellato* e cioè un albero che collega ogni nodo direttamente a D ; infine orientiamo i rami dell'albero in modo che 'le frecce puntino verso D '



- applichiamo il MTF all'albero stellato; si nota che:
- le incognite (tensione dei rami dell'albero) coincidono con le $n - 1$ tensioni dei nodi, $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, rispetto a D
- ogni TF e' una linea chiusa che contiene un solo nodo (taglio nodale) ed e' orientata positivamente verso l'esterno
- le KI per i TF si esprimono dicendo che e' nulla la somma algebrica delle correnti dei lati che incidono su un nodo; ogni corrente si prende col $+$ se uscente dal nodo, con il $-$ se entrante nel nodo; sono $n - 1$ KI per tutti i nodi eccetto il nodo di riferimento
- in generale il sistema risolvante per il metodo dei nodi e' del tipo

$$\mathbf{G}\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$$

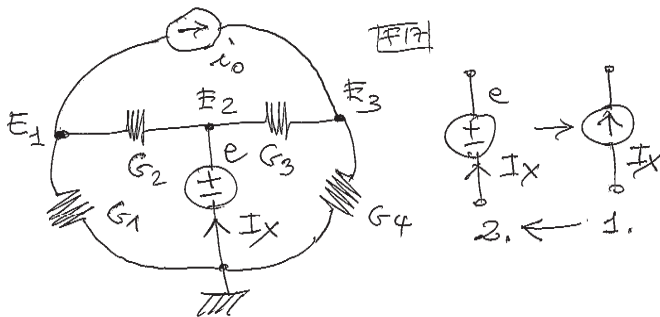
con $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (matrice delle conduttanze),
 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ vettore delle incognite (tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento); $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}} \in \mathbb{R}^{n-1}$
 (vettore dei termini noti)

- per reti di soli generatori ind.ti ideali di corrente e conduttanze vale la seguente regola generale per costruire $\mathbf{G}$ e $\mathbf{I}_{\text{gen.corrente}}$
- G_{kk} ; $k = 1, \dots, n - 1$: somma delle conduttanze collegate al nodo k
- G_{hk} , $h \neq k$; $h, k = 1, \dots, n - 1$: *somma cambiata di segno* delle conduttanze a comune fra nodo k e nodo h
- I_k ; $k = 1, \dots, n - 1$ (elemento k -esimo del vettore dei termini noti): somma *algebrica* delle correnti dei gen.ri ind.ti di corrente collegati al nodo k ; ogni corrente si prende con il $+$ se entrante nel nodo k , col segno $-$ altrimenti
- la matrice $\mathbf{G}$ e' simmetrica, e cioe' $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$
- e' un sistema di $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite; notare che la dimensionalita' del sistema non dipende da ℓ

Metodo Modificato di Analisi su Base Nodi (MNA, 'modified nodal analysis')

- Supponiamo siano presenti anche generatori indipendenti ideali di tensione (bipoli *non controllabili in tensione*)
- vediamo come si procede con un esempio; non conosco la corrente del gen.re di tensione e ; introduco quindi come *incognita aggiuntiva* la corrente I_x di tale generatore; le variabili ausiliarie sono

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$



- Passo 1. Penso in una prima fase il gen.re di tensione come se fosse un gen.re di corrente I_x ; mi riconduco così ad una rete con sole conduttanze e gen.ri di corrente; posso scrivere le seguenti KI

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ I_x \\ i_0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Utilizzo la relazione costitutiva del ge.re ideale di tensione per scrivere una equazione aggiuntiva detta *equazione di vincolo*; in questo caso si ha semplicemente

$$E_2 = e$$

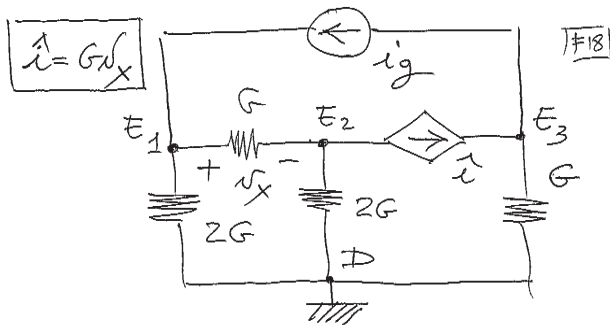
- abbiamo quindi ottenuto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che, in forma vettoriale, e' dato da

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 & -1 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_0 \\ 0 \\ i_0 \\ e \end{pmatrix}$$

- il metodo descritto e' detto *metodo modificato (o misto) di analisi su base nodi*; e' uno dei metodi piu' utilizzati in pratica (ad esempio nel simulatore di circuiti SPICE)

Presenza di Generatori Controllati

- Esempio (Nodi con generatori controllati di corrente). Le variabili ausiliarie sono E_1, E_2, E_3 (attenzione, v_x non e' una variabile ausiliaria e non deve apparire nel sistema risolvente finale)



- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; scrivo quindi le KI ai nodi

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -\hat{i} \\ \hat{i} - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato e esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

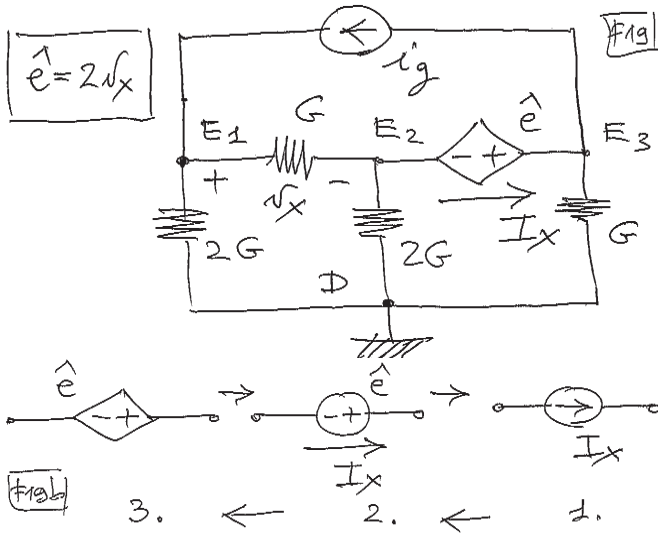
$$\hat{i} = Gv_x = G(E_1 - E_2)$$

- sostituendo arrivo al sistema

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ -G & G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \end{pmatrix}$$

- notare che il generatore controllato influisce sulla matrice **G** rendendola (in generale) non-simmetrica

- Esempio (Nodi con generatori controllati di tensione)



- Passo 1. Penso il generatore controllato di tensione come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base nodi introducendo una incognita aggiuntiva data dalla corrente di tale generatore di tensione; le variabili ausiliarie sono quindi

$$E_1, E_2, E_3, I_x$$

- Posso scrivere le KI

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 \\ -G & 3G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ -I_x \\ I_x - i_g \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Esprimo il vincolo imposto dal generatore di tensione $\hat{e}$:

$$\hat{e} = E_3 - E_2$$

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di tensione ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{e} = 2v_x = 2(E_1 - E_2)$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$2E_1 - E_2 - E_3 = 0$$

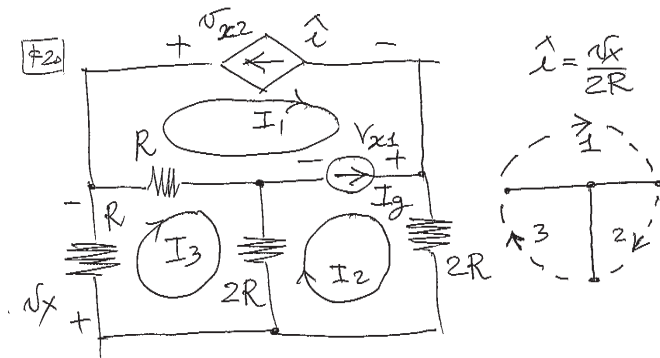
che rappresenta la quarta equazione del sistema risolvibile

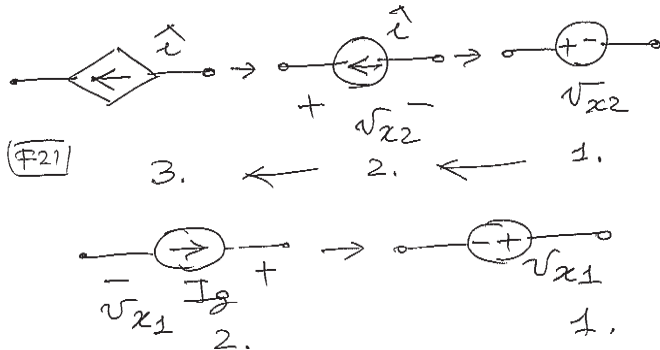
- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 4 equazioni nelle variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & 0 & 0 \\ -G & 3G & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ I_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_g \\ 0 \\ -i_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Esempio (MF in presenza di generatori controllati).
- Passo 1. Penso il generatore controllato di corrente come se fosse indipendente; utilizzo quindi il metodo modificato di analisi su base MF introducendo una incognita aggiuntiva data dalla tensione su tale generatore di corrente; anche per il generatore di corrente I_g introduco come incognita aggiuntiva la tensione ai suoi morsetti; le variabili ausiliarie sono quindi

$$I_1, I_2, I_3, V_{x1}, V_{x2}$$





Posso scrivere le KV

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R \\ 0 & 4R & -2R \\ -R & -2R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_{x1} - V_{x2} \\ V_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Passo 2. Vincoli imposti dai generatori di corrente:

$$I_g = -I_1 + I_2; \quad \hat{I} = -I_1$$

la prima fra queste relazioni e' la quarta equazione del sistema risolvibile

- Passo 3. Uso la relazione costitutiva del generatore controllato di corrente ed esprimo la sua grandezza di controllo in funzione delle variabili ausiliarie

$$\hat{i} = \frac{v_x}{2R} = \frac{Rl_3}{2R} = \frac{l_3}{2}$$

- facendo sistema fra le ultime due relazioni otteniamo

$$l_1 + \frac{l_3}{2} = 0$$

che rappresenta la quinta equazione del sistema risolvibile

- riassumendo, ho ottenuto un sistema di 5 equazioni nelle variabili ausiliarie

$$\begin{pmatrix} R & 0 & -R & 1 & 1 \\ 0 & 4R & -2R & -1 & 0 \\ -R & -2R & 4R & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ v_{x1} \\ v_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

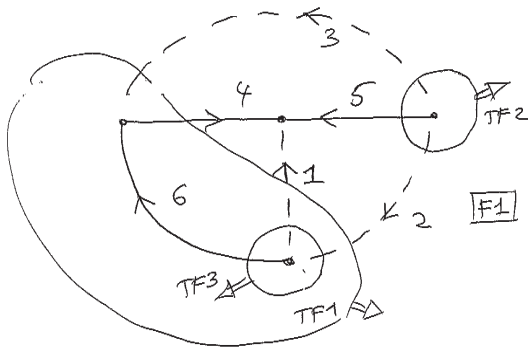
Legame fra Matrici Topologiche

- Esempio. Consideriamo il grafo orientato in figura; utilizziamo inoltre la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; si ha

$$\mathbf{i}_c = (i_1, i_2, i_3)^T; \quad \mathbf{i}_a = (i_4, i_5, i_6)^T$$

e

$$\mathbf{v}_c = (v_1, v_2, v_3)^T; \quad \mathbf{v}_a = (v_4, v_5, v_6)^T$$



- esprimiamo $\mathbf{i}_a$ (correnti dipendenti) in funzione di $\mathbf{i}_c$ (correnti indipendenti); si ha dalle $n - 1 = 3$ KI ai TF:

$$i_4 + i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_5 + i_2 + i_3 = 0$$

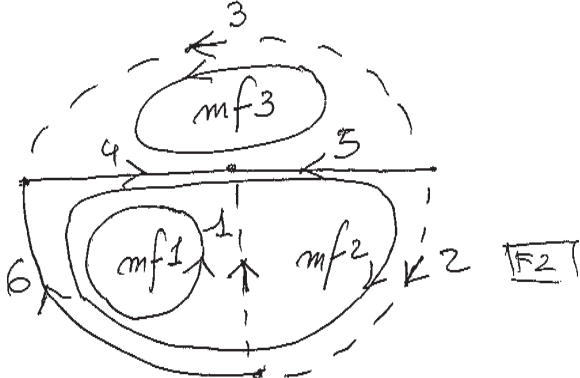
$$i_6 + i_1 - i_2 = 0$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{A}\mathbf{i}_c$$

dove la prima matrice topologica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- esprimiamo adesso $\mathbf{v}_c$ (tensioni dipendenti) in funzione di $\mathbf{v}_a$ (tensioni indipendenti); si ha dalle $\ell - n + 1 = 3$ KV alle MF:

$$v_1 - v_4 - v_6 = 0$$

$$v_2 + v_4 - v_5 + v_6 = 0$$

$$v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{B}\mathbf{v}_a$$

dove la seconda matrice topologica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Proprieta'*: si ha

$$\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}$$

- si puo' dimostrare che questa relazione e' valida in generale

Consideriamo il grafo orientato associato a un circuito; supponiamo vi siano ℓ bipoli e n nodi; utilizziamo inoltre la convenzione degli utilizzatori per tutti i bipoli; scegliamo un albero

• **Teorema di Tellegen.** Sia $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore di numeri che (pensati come tensioni dei lati del grafo) soddisfano alle KV alle MF; sia $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore di numeri che (pensati come correnti dei lati del grafo) soddisfano alle KI ai TF. Allora si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

cioe' i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ risultano fra di loro ortogonali.

- Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T \mathbf{i} &= (\mathbf{v}_c \ \mathbf{v}_a)^T \begin{pmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_a \end{pmatrix} = \mathbf{v}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{i}_a \\ &= [\mathbf{B} \mathbf{v}_a]^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{i}_c \\ &= \mathbf{v}_a^T \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_a^T \mathbf{A} \mathbf{i}_c \\ &= \mathbf{v}_a^T (\mathbf{B}^T + \mathbf{A}) \mathbf{i}_c = 0\end{aligned}$$

dato che $\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}$

Principio di conservazione della potenza istantanea (e energia)

- Siano $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{i}(t)$ le *tensioni e correnti effettive in un circuito ad un generico istante t* ; dato che le tensioni soddisfano per ipotesi alle KV e le correnti alle KI possiamo applicare il Teorema di Tellegen e ottenere che

$$\mathbf{v}^T(t)\mathbf{i}(t) = \sum_{k=1}^{\ell} v_k(t)i_k(t) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k(t) = 0 \text{ W}$$

- Quindi *e' nulla, istante per istante, la somma delle potenze istantanee $p_k(t)$ assorbite dagli ℓ bipoli del circuito*
- in sintesi KV, KI implicano Teorema di Tellegen che implica principio di conservazione della potenza istantanea e energia. Un circuito che assiomaticamente soddisfa a KV e KI verifica quindi automaticamente questi due principi fondamentali

- altre conseguenze; consideriamo due istanti $t_1 \neq t_2$ e siano $\mathbf{v}(t_1)$ e $\mathbf{i}(t_1)$ (rispettivamente $\mathbf{v}(t_2)$ e $\mathbf{i}(t_2)$) le tensioni e correnti effettive in un circuito nei due istanti considerati; allora si ha

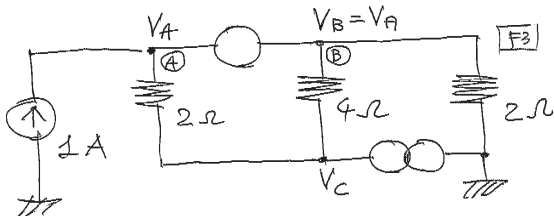
$$\mathbf{v}^T(t_1)\mathbf{i}(t_2) = 0$$

- siano C^a e C^b due circuiti diversi ma con lo stesso grafo orientato; siano $\mathbf{v}^a(t)$ e $\mathbf{i}^a(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^a e $\mathbf{v}^b(t)$ e $\mathbf{i}^b(t)$ le tensioni e correnti effettive di C^b ; allora

$$(\mathbf{v}^a)^T(t)\mathbf{i}^b(t) = 0$$

- interpretazione geometrica: KV implicano $\mathbf{v} \in \pi_v$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$); KI implicano $\mathbf{i} \in \pi_i$ (sottospazio di $\mathbb{R}^\ell$): i due sottospazi π_v e π_i di $\mathbb{R}^\ell$ sono fra di loro ortogonali.

- Esempio. Verificare il Teorema di Tellegen per il seguente circuito con a_0 (nullo)

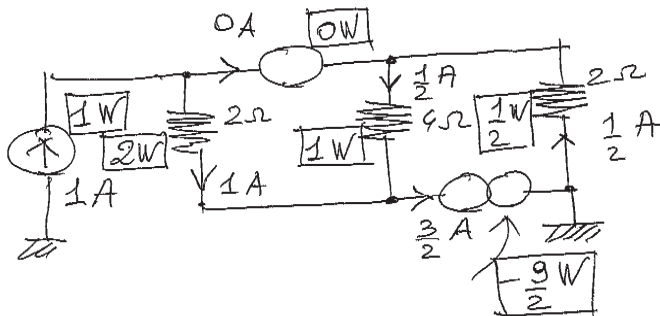


- determiniamo esplicitamente tutte le potenze elettriche assorbite dai bipolo presenti; si ha dalla KI al nodo A e al nodo B (rispettivamente)

$$1 = \frac{V_A - V_C}{2}; \quad \frac{0 - V_A}{2} = \frac{V_A - V_C}{4}$$

da cui $V_A = -1 \text{ V}$ e $V_C = -3 \text{ V}$

- nella figura sono indicate le correnti che fluiscono nei bipoli e le potenze istantanee assorbite



- si verifica che la somma delle potenze istantanee assorbite e' nulla, come previsto dal Teorem di Tellegen.

Simboli generatori indipendenti

