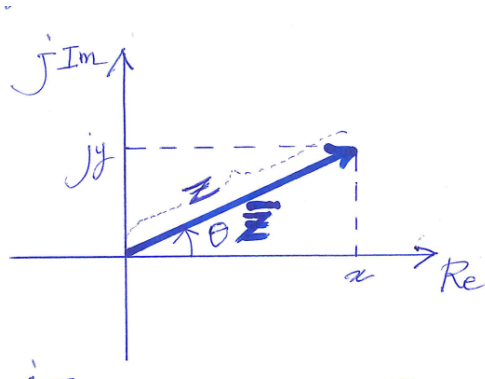


- **Richiami sui numeri complessi**
- Consideriamo il numero complesso espresso in *forma algebrica*

$$\bar{z} = x + jy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \text{Re}[\bar{z}]$ parte reale, $y = \text{Im}[\bar{z}]$ parte immaginaria, e j unita' immaginaria ($j^2 = -1$)

- $\bar{z}$ puo' essere visto come un punto (o vettore) del piano complesso



- $\bar{z}$ può essere individuato tramite il suo modulo $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il suo argomento θ ; gli argomenti θ si misurano a partire dall'asse x , a cui si attribuisce $\theta = 0$ e ruotando in senso *positivo antiorario*
- il verso positivo antiorario è detto anche verso degli anticipi; il verso negativo orario è detto verso dei ritardi
- se $\bar{z} \neq 0$ si ha

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- se $x \neq 0$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

- inversamente

$$x = Z \cos \theta; \quad y = Z \sin \theta$$

- *forma trigonometrica*

$$\bar{z} = Z(\cos \theta + j \sin \theta)$$

- dato che (identità di Eulero) $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ otteniamo la *forma esponenziale*

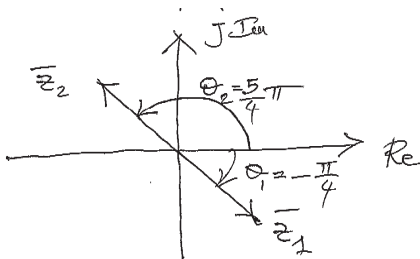
$$\bar{z} = Ze^{j\theta}$$

- E' necessario fare attenzione al calcolo degli argomenti quando $x = \text{Re}[\bar{z}] < 0$!!! Proviamo a scrivere in forma esponenziale i due numeri complessi $\bar{z}_1 = 1 - j$, $\bar{z}_2 = -1 + j$. Si ha $Z_1 = Z_2 = \sqrt{2}$; inoltre

$$\theta_1 = \arctan(-1) = -\pi/4; \quad \theta_2 = \arctan(-1) = -\pi/4!!!!$$

siamo cosi' in assurdo; per non sbagliare conviene disegnare i numeri nel piano complesso; si vede allora che

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$$



Funzioni sinusoidali (dominio del tempo)

- Per senoide si intende una funzione del tipo

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove $E_M \geq 0$ e' l'ampiezza; $\omega \geq 0$ e' la pulsazione (in rad/sec), φ e' la fase (in radianti); la frequenza (in Hz) e' data da

$$f = \frac{1}{T}$$

e

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

dove T (in sec) e' il periodo della senoide

- ad ogni sinusoide corrisponde il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ e quindi un punto del piano complesso inteso come piano dei fasori
- viceversa, assegnato $\bar{\mathbf{E}}$ e ω , vi corrisponde una unica sinusoide a pulsazione ω che possiamo ottenere tramite la formula

$$e(t) = \operatorname{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}]$$

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re} [E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [E_M e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= E_M \cos(\omega t + \varphi) = e(t) \end{aligned}$$

- le due relazioni ottenute sono una coppia trasformata e antitrasformata (tecnicamente e' detta trasformata di Steinmetz)

- **interpretazione geometrica;** l'operatore

$$\times e^{j\omega t}$$

rappresenta una rotazione di un angolo ωt in senso positivo (antiorario); infatti

$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = E_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- allora

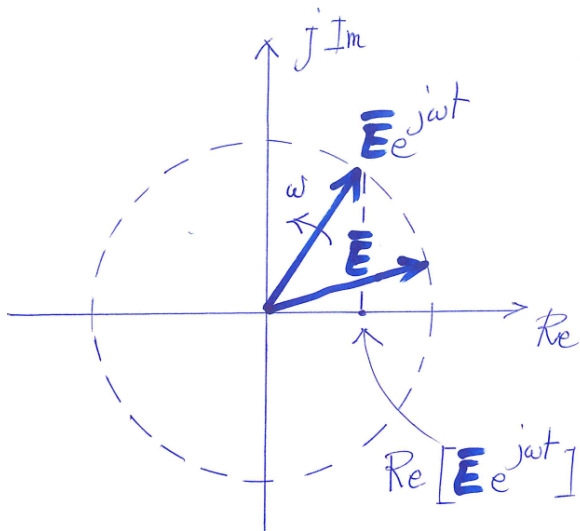
$$\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}$$

e' un vettore di modulo costante E_M che ruota intorno all'origine con velocita' angolare ω in senso positivo antiorario (vettore rotante)

- infine, l'operatore

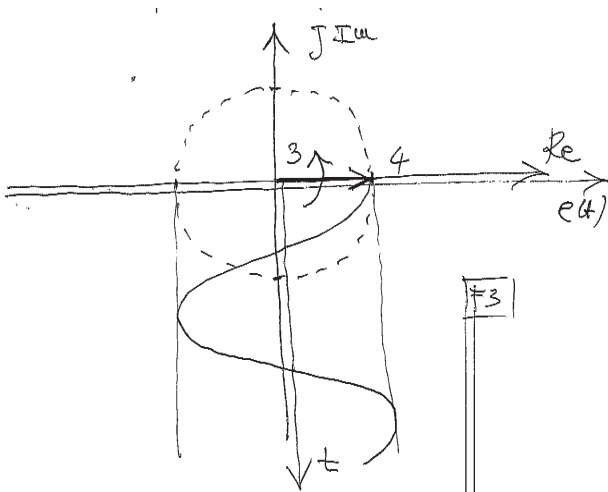
$$\text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times e^{j\omega t}]$$

e' l'operatore di proiezione sull'asse reale

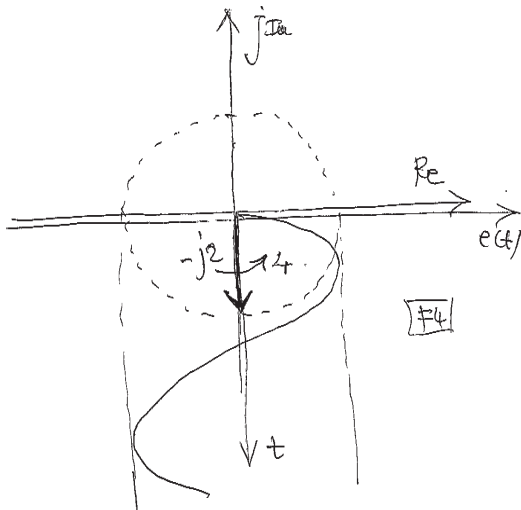


- Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 4 \cos(3t)$ e interpretare graficamente

- si ha $E_M = 4$ e $\varphi = 0$, quindi $\bar{E} = 4e^{j0} = 4$



- Esempio. Determinare il fasore associato a $e(t) = 2 \sin(4t)$ e interpretare graficamente
- si ha $2 \sin(4t) = 2 \cos(4t - \pi/2)$, quindi $E_M = 2$ e $\varphi = -\pi/2$; allora $\bar{E} = 2e^{-j\pi/2} = -j2$



Calcolo Fasoriale

- Unicità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω ; si ha $e_1(t) = e_2(t)$ per ogni t se e solo se $\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_2$
- Linearità: Siano $e_1(t)$, $e_2(t)$ due sinusoidi a pulsazione ω e $a, b \in \mathbb{R}$; allora $ae_1(t) + be_2(t)$ è una sinusoide a pulsazione ω con fasore $a\bar{\mathbf{E}}_1 + b\bar{\mathbf{E}}_2$
- Regola di derivazione: sia $e(t)$ una sinusoide a pulsazione ω con fasore $\bar{\mathbf{E}}$; allora $de(t)/dt$ è ancora una sinusoide a pulsazione ω con fasore $j\omega\bar{\mathbf{E}}$; quindi

$$\frac{de(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\bar{\mathbf{E}}$$

- questa importante regola implica che una operazione differenziale d/dt nel dominio del tempo si trasforma in una operazione algebrica $j\omega \times$ nel dominio di fasori; la regola è analoga a quella valida per la trasformata di Fourier

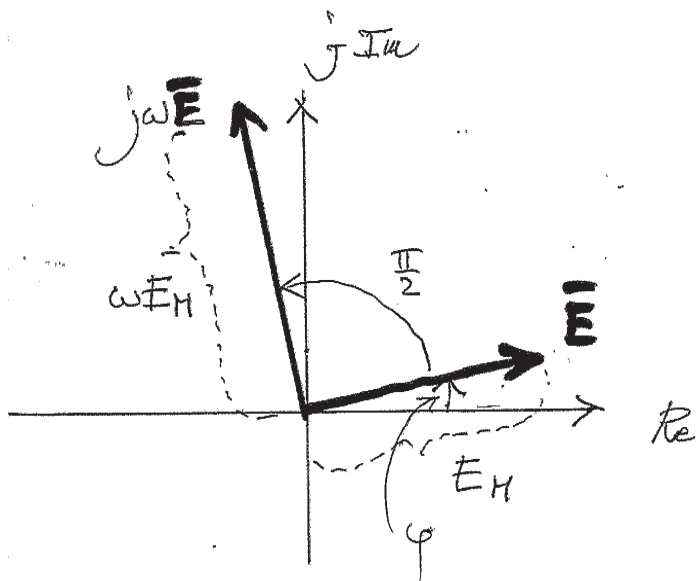
- verifica

$$\begin{aligned}\frac{de(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \{ \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \} \\ &= \text{Re} \left[\frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) \right] \\ &= \text{Re} [j\omega \bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

- graficamente

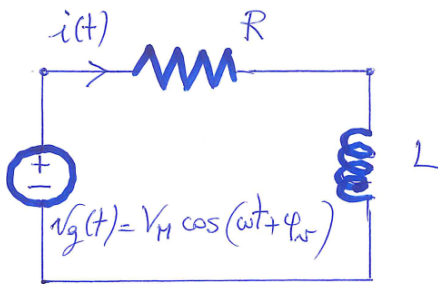
$$j\omega \bar{\mathbf{E}} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

quindi il fasore $j\omega \bar{\mathbf{E}}$ di $de(t)/dt$ ha modulo pari a ωE_M e si ottiene ruotando in senso positivo antiorario di un angolo pari a $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{E}}$ di $e(t)$



Analisi in regime sinusoidale

- Consideriamo il circuito RL con generatore ideale di tensione sinusoidale $v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$. Vogliamo trovare $i(t)$ per $t \geq 0$ assumendo $i(0) = i_0$



- KV: $v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$, quindi il circuito soddisfa alla equazione differenziale affine del primo ordine

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

con $i(0) = i_0$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-t/\tau} + i_{\text{part.affine}}(t)$$

con $K \in \mathbb{R}$ e $\tau = L/R$ (costante di tempo)

- verifichiamo a breve che possiamo scegliere

$$i_{\text{part.affine}}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

quindi

$$i(t) = Ke^{-t/\tau} + I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

• il primo termine (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$) e' detto parte transitoria, mentre il secondo e' detto *risposta in regime permanente sinusoidale*; in pratica, per $t \geq 4\tau$ si ha

$$i(t) \simeq I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

e quindi, esaurito il transitorio, la *corrente nel circuito e' sinusoidale alla stessa pulsazione ω del generatore*

- determiniamo I_M e φ_i nel dominio del tempo; si ha

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) + R I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= I_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi_i) \right] \\ &= Z I_M [\cos \varphi_z \cos(\omega t + \varphi_i) - \sin \varphi_z \sin(\omega t + \varphi_i)] \\ &= Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z) \end{aligned}$$

con

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \sin \varphi_z = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{e quindi}$$

$$\tan \varphi_z = \frac{\omega L}{R}$$

- allora

$$V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

da cui

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

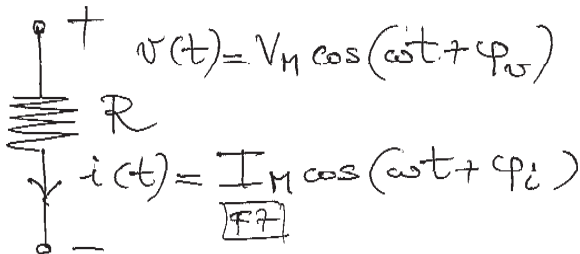
- *soluzione nel dominio del tempo e' complicata!!!*
- introduciamo *metodo dei fasori*, molto efficiente per trovare le correnti e tensioni in regime sinusoidale; attenzione, vedremo che il metodo dei fasori non permette pero' di trovare la parte transitoria delle risposta.

Comportamento dei bipoli ideali R, L, C in regime sinusoidale nel dominio del tempo

- Resistore ideale R . Supponiamo $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora da legge di Ohm

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Ri(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; quindi

$$V_M = RI_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

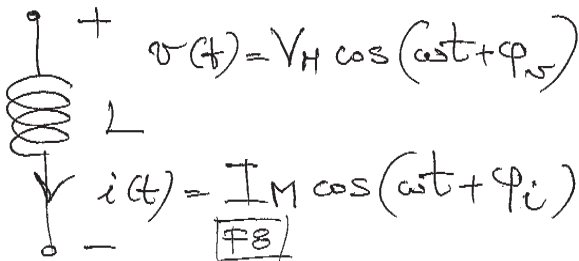


- R rappresenta la resistenza fisica (dovuta a un fenomeno dissipativo) offerta dal resistore al passaggio di una corrente; la tensione da applicare per fare scorrere tale corrente ha ampiezza $V_M = RI_M$ ed è in fase con la corrente

- Induttore ideale. In accordo alla legge di Faraday si ha

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{d\varphi_{\text{conc}}}{dt}$$

dove $\varphi_{\text{conc}} = Li$ e' il flusso concatenato



- Esperimento 1. Supponiamo che L sia percorso da una corrente costante (continua) $i(t) = I$; allora $v(t) = 0$, quindi L e' un corto circuito per le correnti costanti (interpretare fisicamente!)

- Esperimento 2. Supponiamo adesso che L sia attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$; allora

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = L \frac{di}{dt} \\ &= -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \end{aligned}$$

- quindi

$$V_M = \omega L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

- Conclusione importante: a differenza del caso in continua, per far scorrere su L una corrente alternata di ampiezza I_M , e' necessario applicare una tensione alternata di ampiezza

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M.$$

Tale tensione e' necessaria per 'vincere' la forza contro elettromotrice che si sviluppa su L per il fenomeno dell'autoinduzione. Si ha inoltre che la tensione e' in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente

- abbiamo posto

$$X_L = \omega L; \quad [X_L] = \text{Ohm}$$

che e' detta *reattanza induttiva* e si misura in Ohm

- dato che

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} = \frac{V_M}{X_L}$$

la reattanza induttiva ha il significato fisico di *resistenza apparente che l'induttore offre al passaggio di una corrente alternata*;

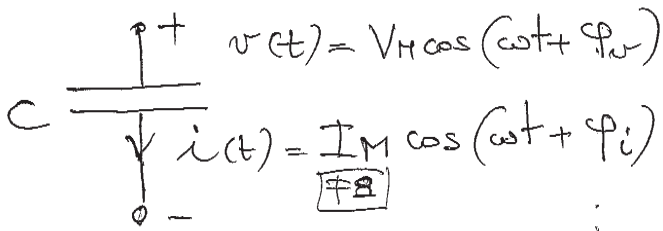
'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non e' legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo (dovuto all'autoinduzione)

- notare che $X_L = \omega L$ cresce se cresce ω ; quindi L offre resistenze apparenti tanto piu' elevate quanto ω e' elevata

- Condensatore ideale. Si ha

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = \frac{dq_c}{dt}$$

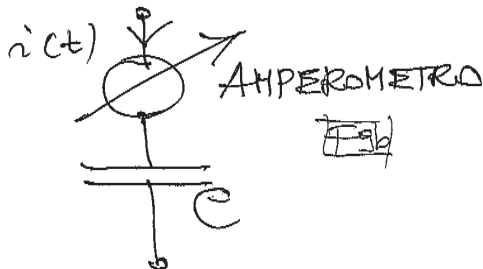
dove $q_c = Cv$ e' la carica sulle armature



Hand-drawn circuit diagram of a capacitor C . The voltage across the capacitor is $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ with the positive terminal at the top. The current flowing downwards through the capacitor is $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$. A small box containing a resistor symbol is drawn next to the current expression.

- Esperimento 1. Supponiamo di applicare a C una tensione costante (continua) $v(t) = V$; allora $i(t) = 0$, quindi C e' un *circuito aperto (una interruzione elettrica) per le tensioni costanti* (interpretare fisicamente!)

- Esperimento 2. Supponiamo adesso di applicare a C una tensione alternata (sinusoidale) $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$; dato che la tensione varia, si ha un passaggio continuativo di cariche (elettroni) fra le armature, quindi l'amperometro misura un passaggio di corrente; ne consegue che C non e' una interruzione elettrica per le correnti alternate



- si ha

$$\begin{aligned} i(t) &= I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = C \frac{dv}{dt} \\ &= -\omega C V_M \sin(\omega t + \varphi_v) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \pi/2) \end{aligned}$$

- quindi

$$I_M = \omega C V_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{X_C}; \quad \varphi_i = \varphi_v + \frac{\pi}{2}$$

- abbiamo indicato con

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad [X_C] = \text{Ohm}$$

la *reattanza capacitiva*

- la reattanza capacitiva (si misura in Ohm) ha il significato fisico di *resistenza apparente che il condensatore offre al passaggio di una corrente alternata*; 'apparente' in quanto, a differenza del resistore, tale resistenza non è legata a un fenomeno dissipativo ma piuttosto a un fenomeno reattivo

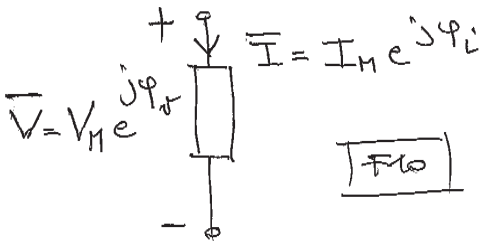
- notare che $X_C = 1/\omega C$ decresce se cresce ω ; quindi C offre resistenze apparenti tanto piu' piccole quanto ω e' elevata
- notare che vi sono diverse proprieta' duali per L e C (rifletterci).

Metodo dei fasori per l'analisi di circuiti in regime sinusoidale

- Consiste di due passi
- Passo 1. Determino le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori
- Passo 2. Determino l'espressione delle leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori
- facciamo vedere che otteniamo nel dominio dei fasori un circuito senza memoria che puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

Relazioni costitutive dei bipoli nel dominio dei fasori

• Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione ai morsetti e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente; indichiamo con $\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v}$ il fasore della tensione e con $\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i}$ quello della corrente; come in figura, pensiamo simbolicamente che al bipolo sia applicato $\bar{\mathbf{V}}$ e vi fluisca $\bar{\mathbf{I}}$ (in questo caso coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori)

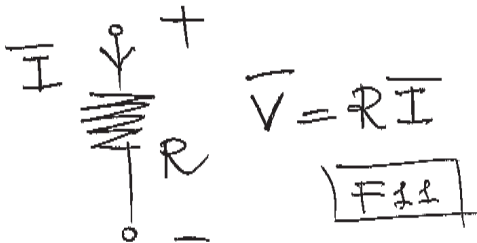


• *Relazione costitutiva del bipolo:* e' il legame che il bipolo stabilisce fra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ nel dominio dei fasori

- **Resistore ideale.** Da $v(t) = Ri(t)$, usando la linearita' della trasformata fasoriale, otteniamo

$$\bar{\mathbf{V}} = R\bar{\mathbf{I}}$$

detta legge di Ohm simbolica nel dominio dei fasori



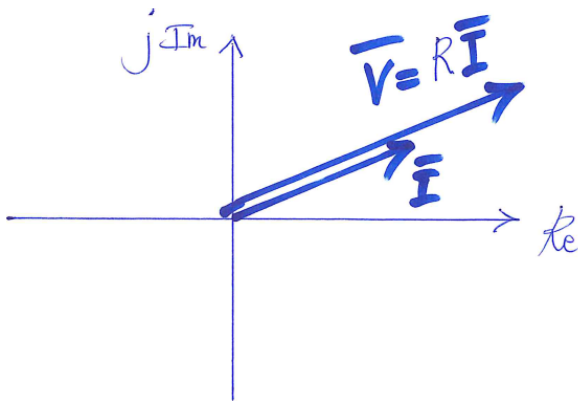
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = R\bar{\mathbf{I}} = R I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi, in accordo a quanto visto nel dominio del tempo

$$V_M = R I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i$$

- per $R > 0$ i due fasori $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ sono *paralleli fra di loro e in fase*



• **Induttore ideale.** Da $v(t) = L di(t)/dt$, usando la linearità e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = jX_L \bar{\mathbf{I}}$$

• *l'induttore è quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di L è il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L = jX_L; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_L] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza è definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_L = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_L}$$

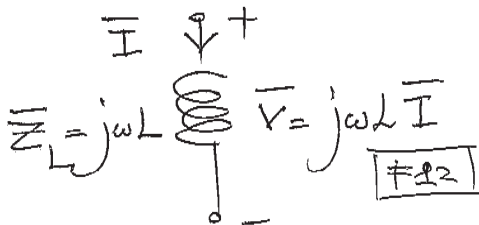
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_L} = \bar{\mathbf{Y}}_L \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per l'induttore'

- quindi, nel dominio dei fasori, l'induttore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_L = j\omega L$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}}_L \bar{\mathbf{I}} = j\omega L \bar{\mathbf{I}} = \omega L I_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_i}$$

quindi

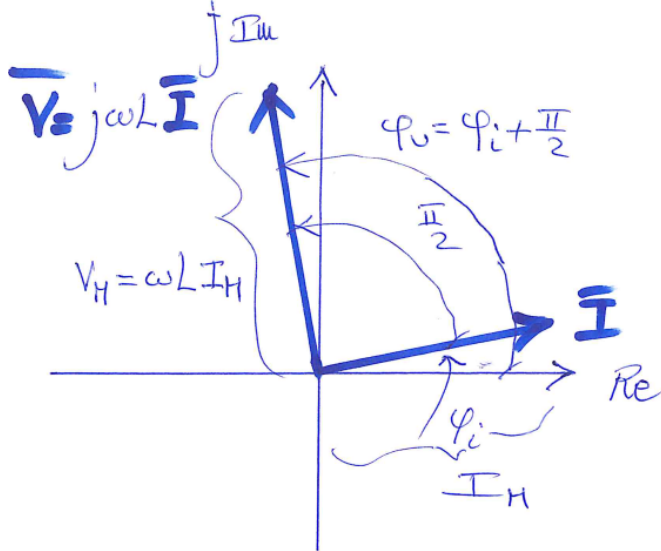
$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \omega L I_M e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

e

$$V_M = \omega L I_M = X_L I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{V}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{I}}$



• **Condensatore ideale.** Da $i(t) = Cdv(t)/dt$, usando la linearita' e regola di derivazione per la trasformata fasoriale si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}}$$

• *il condensatore e' quindi un elemento senza memoria nel dominio dei fasori*

• l'impedenza (in corrente alternata (c.a.)) di C e' il numero complesso

$$\bar{\mathbf{Z}}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C; \quad [\bar{\mathbf{Z}}_C] = \text{Ohm}$$

• l'ammettenza e' definita da

$$\bar{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = j\omega C$$

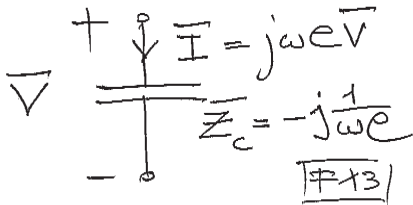
e ha dimensioni Ohm^{-1}

• si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}}_C \bar{\mathbf{I}}; \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{Z}}_C} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}}$$

detta 'legge di Ohm simbolica per il condensatore'

- quindi, nel dominio dei fasori, il condensatore e' un elemento senza memoria di 'resistenza' (anzi impedenza) $\bar{\mathbf{Z}}_C = -j/(\omega C)$ e soddisfa ad una legge di Ohm formalmente analoga a quella di un resistore



- Interpretazione geometrica
- Si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}}_C \bar{\mathbf{V}} = j\omega C \bar{\mathbf{V}} = \omega C V_M e^{j\pi/2} e^{j\varphi_v}$$

quindi

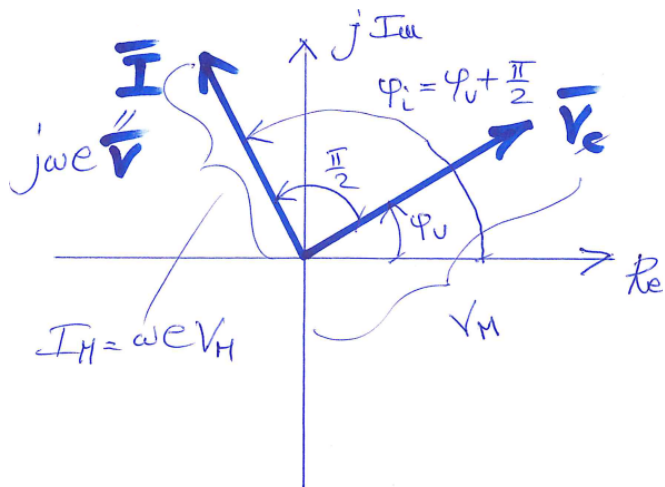
$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \omega C V_M e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

e

$$I_M = \omega C V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \pi/2$$

che sono le stesse relazioni ottenute con una analisi nel dominio del tempo

- notare che nel piano dei fasori $\bar{\mathbf{I}}$ anticipa di $\pi/2$ il fasore $\bar{\mathbf{V}}$



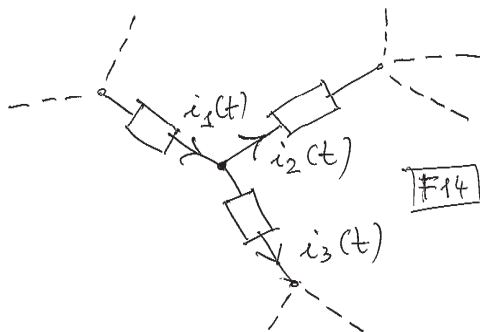
- **Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori**

- Consideriamo una rete in regime sinusoidale a pulsazione ω (tutte le correnti e tensioni, esaurito il transitorio, sono sinusoidali a pulsazione ω); consideriamo un nodo a cui sono collegati tre bipoli. Si ha dalla KI: $-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ per ogni t ; quindi

$$-\text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_2 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\bar{\mathbf{I}}_3 e^{j\omega t}] = \text{Re}[(-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3) e^{j\omega t}] = 0$$

per ogni t da cui

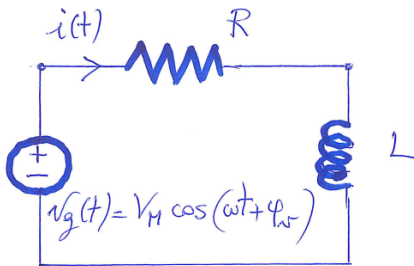
$$-\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_3 = 0$$



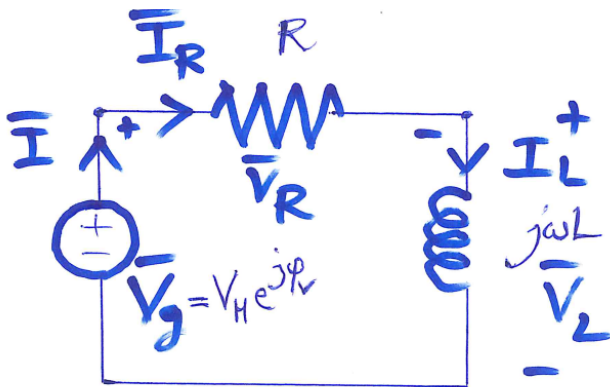
- *KI nel dominio dei fasori: i fasori delle correnti in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le correnti*
- analogamente, *KV nel dominio dei fasori: i fasori delle tensioni in regime sinusoidale soddisfano alla legge di Kirchhoff per le tensioni*
- usando le relazioni costitutive e le leggi di Kirchhoff illustrate possiamo associare al circuito un *circuito simbolico* nel dominio dei fasori; il circuito simbolico e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti senza memoria visti nella Parte 1

Analisi di circuiti elementari RL e RC con il metodo dei fasori

- Consideriamo ancora il circuito RL studiato in precedenza; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Passo 1. Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



- Passo 2. Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$:

- KI: $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}_R = \bar{\mathbf{I}}_L$

- KV: $\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L$

- relazioni costitutive: $\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}}_R$; $\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L\bar{\mathbf{I}}_L$

- si ha quindi

$$\bar{\mathbf{V}}_g = V_M e^{j\varphi_v} = (R + j\omega L)\bar{\mathbf{I}}$$

e

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L}$$

- Passo 3. Da $\bar{\mathbf{I}}$ otteniamo $i(t)$. Scriviamo $\bar{\mathbf{I}}$ in forma esponenziale

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\frac{\omega L}{R})}}$$

quindi

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))}$$

allora

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i = \varphi_v - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

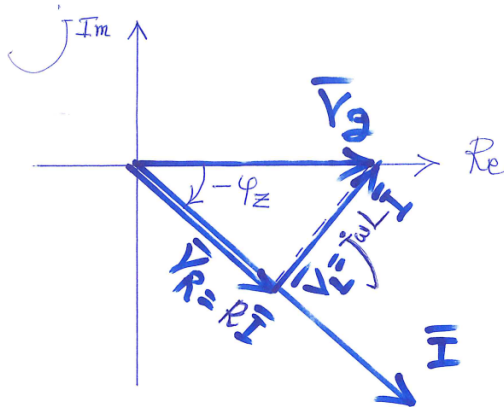
• stesso risultato ottenuto con analisi nel dominio del tempo; il procedimento nel dominio dei fasori e' molto piu' semplice e diretto

- Esercizio per casa: ripetere il Passo 3 usando invece la formula di antitrasformata fasoriale $i(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{I}} e^{j\omega t}]$

- **Diagramma fasoriale**
- Sia ad esempio $\varphi_v = 0$, quindi $\bar{\mathbf{V}}_g = V_M$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega L}{R})}$$

- si ha $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} + j\omega L\bar{\mathbf{I}}$; $R\bar{\mathbf{I}}$ e' parallelo a $\bar{\mathbf{I}}$, mentre $j\omega L\bar{\mathbf{I}}$ e' in anticipo di $\pi/2$ rispetto a $\bar{\mathbf{I}}$; possiamo allora costruire il seguente diagramma fasoriale



- **Interpretazione fisica**

- Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto combinato della resistenza Ohmica e del fenomeno dell'autoinduzione, offre al passaggio di una corrente alternata una "resistenza apparente" (impedenza) pari a

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \text{ Ohm}$$

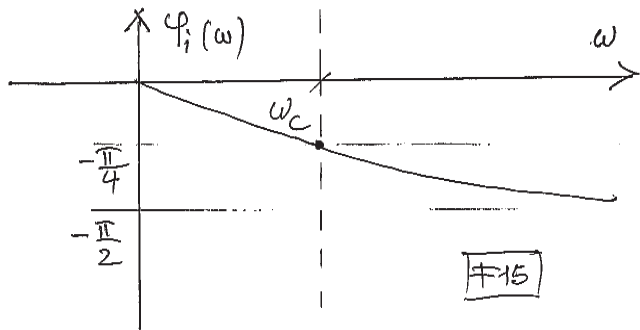
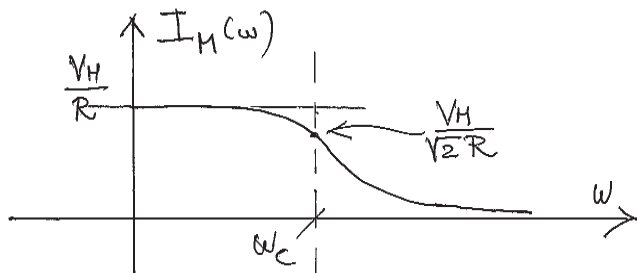
La presenza di L in serie a R provoca quindi

- 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$
- 2) uno sfasamento in ritardo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\varphi_z = \arctan(\omega L/R)$ compreso fra 0 e $\pi/2$
- 3) tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' elevata

- **Risposta in frequenza**
- Supponiamo $v_g(t) = V_M \cos(\omega t)$, facciamo variare ω e studiamo gli andamenti di

$$I_M(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi_i(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

- il primo degli andamenti rappresenta la risposta in ampiezza, mentre il secondo la risposta in fase; nel complesso sono la risposta in frequenza del circuito



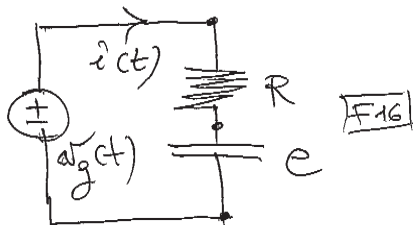
- si tratta di un filtro passa basso del primo ordine; la pulsazione critica vale

$$\omega_c = \frac{R}{L} \text{ rad/sec}$$

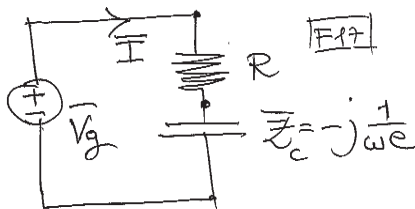
ed e' la pulsazione alla quale la risposta in ampiezza e' pari a $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ la massima risposta in ampiezza (che vale V_M/R quando $\omega = 0$)

- **Circuito RC serie**

Consideriamo il circuito RC serie in figura; vogliamo determinare $i(t)$ in regime sinusoidale



- Associa il circuito simbolico nel dominio dei fasori (e' senza memoria)



- Analizzo il circuito simbolico con i metodi delle reti resistive per determinare il fasore incognito $\bar{\mathbf{I}}$
- si ha

$$\bar{\mathbf{V}}_g = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C = R\bar{\mathbf{I}} - \frac{j}{\omega C}\bar{\mathbf{I}}$$

da cui

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_g}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{j(\varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))}$$

- abbiamo quindi risolto il problema ottenendo

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$

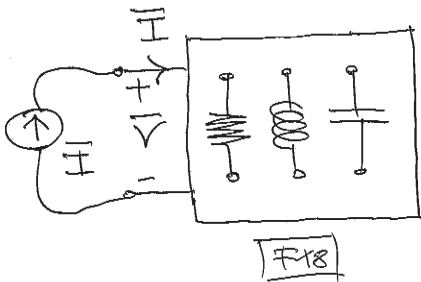
- la presenza di C in serie a R provoca
 - 1) un aumento apparente della resistenza da R a $\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$
 - 2) uno sfasamento in anticipo della corrente rispetto alla tensione di un angolo $\arctan(1/(\omega CR))$ compreso fra 0 e $\pi/2$
 - 3) tali effetti sono tanto piu' evidenti quanto ω e' bassa
- studiare la risposta in frequenza del filtro e mostrare che e' un passa alto del primo ordine con pulsazione critica $\omega_c = 1/(RC)$

Impedenza e ammettenza di un bipolo

- Consideriamo un bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω contenente R, L, C (no generatori ind.ti di tensione e corrente); l'impedenza

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \text{ Ohm}$$

e' definita in modo analogo alla resistenza equivalente di un bipolo



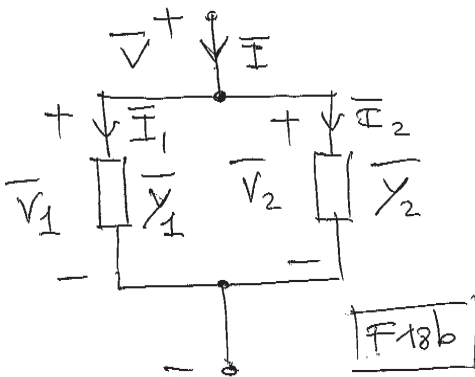
- l'ammettenza del bipolo e' il reciproco dell'impedenza

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{\bar{\mathbf{I}}}{\bar{\mathbf{V}}} \text{ Ohm}^{-1}$$

- si puo' dimostrare che

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}}; \quad \bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Y}}}$$

- Le regole per il calcolo delle impedenze e ammettenze sono perfettamente analoghe a quelle per il calcolo delle resistenze equivalenti; ad esempio, per due bipoli in parallelo si ha $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \bar{V}$, quindi $\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$



- *Forma algebrica:*

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

dove $R(\omega)$ in Ohm e' detta resistenza mentre $X(\omega)$ in Ohm e' detta reattanza

-

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

dove $G(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta conduttanza mentre $B(\omega)$ in Ohm^{-1} e' detta suscettanza

- *formule di trasformazione:* si ha

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

quindi

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- studiare anche le trasformazioni inverse

- *Forma esponenziale:*

$$\bar{\mathbf{Z}} = Ze^{j\varphi_z}$$

dove Z in Ohm e' il modulo dell'impedenza e φ_z e' l'argomento

-

$$\bar{\mathbf{Y}} = Ye^{j\varphi_y}$$

dove Y in Ohm^{-1} e' il modulo dell'ammettenza e φ_y e' l'argomento

- *formule di trasformazione:*

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

- Ulteriori trasformazioni:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e, se $\bar{\mathbf{Z}} \neq 0$, φ_z e' tale che

$$\cos \varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad \sin \varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

quindi

$$\tan \varphi_z = \frac{X}{R}$$

- viceversa

$$R = Z \cos \varphi_z; \quad X = Z \sin \varphi_z$$

- studiare le rimanenti formule di trasformazione

Espressioni di $v(t)$ e $i(t)$ in regime sinusoidale

- Consideriamo un bipolo di cui si conosce $\bar{\mathbf{Z}}$ o $\bar{\mathbf{Y}}$
- nota $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ vogliamo trovare $v(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = V_M e^{j\varphi_v} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{I}} = Z e^{j\varphi_z} I_M e^{j\varphi_i}$$

quindi

$$V_M = Z I_M; \quad \varphi_v = \varphi_i + \varphi_z$$

e

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z)$$

- nota $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ vogliamo trovare $i(t)$; si ha

$$\bar{\mathbf{I}} = I_M e^{j\varphi_i} = \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{V}} = Y e^{j\varphi_y} V_M e^{j\varphi_v}$$

quindi

$$I_M = Y V_M; \quad \varphi_i = \varphi_v + \varphi_y$$

e

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y)$$

- possiamo anche scrivere

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$$

Osservazione: si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}} = \frac{V_M e^{j\varphi_v}}{I_M e^{j\varphi_i}}$$

e quindi

$$Z = \frac{V_M}{I_M}; \quad \varphi_z = \varphi_v - \varphi_i$$

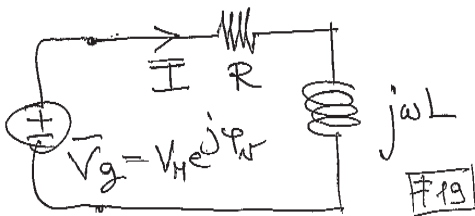
- il modulo dell'impedenza coincide con il rapporto delle ampiezze di tensione e corrente del bipolo; l'argomento dell'impedenza coincide con lo sfasamento tensione corrente
- studiare formule analoghe in relazione all'ammettenza

- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RL ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_v - \arctan(\frac{\omega L}{R}))$$

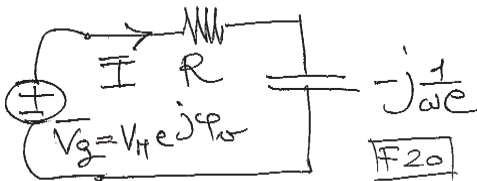


- Esempio: consideriamo ancora il circuito elementare RC ; si ha

$$\bar{\mathbf{Z}} = Z e^{j\varphi_z} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-j \arctan(1/(\omega CR))}$$

quindi

$$i(t) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_v + \arctan(\frac{1}{\omega CR}))$$



Impedenze di tipo ohmico induttivo e ohmico capacitivo

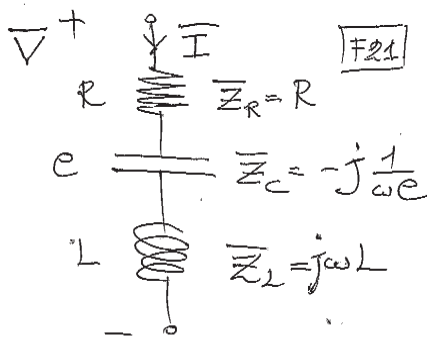
- Consideriamo l'impedenza

$$\bar{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

e supponiamo che il bipolo sia passivo ($R(\omega) > 0$)

- l'impedenza e' di tipo *ohmico-induttivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \geq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in ritardo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- l'impedenza e' di tipo *ohmico-capacitivo* alla pulsazione ω se $X(\omega) \leq 0$; in tal caso da $\varphi_i = \varphi_v - \varphi_z(\omega)$ si ha che la corrente e' in anticipo di un angolo $\varphi_z(\omega)$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione (fare diagramma fasoriale)
- come vedremo, l'impedenza di un bipolo puo' essere di tipo ohmico induttivo per certi valori di ω e di tipo ohmico capacitivo per altri valori di ω

- **Circuiti risonanti RLC**
- Consideriamo il circuito risonante RLC serie in figura in regime sinusoidale a pulsazione ω



- l'impedenza vale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

- c'è un effetto di cancellazione fra X_L e X_C

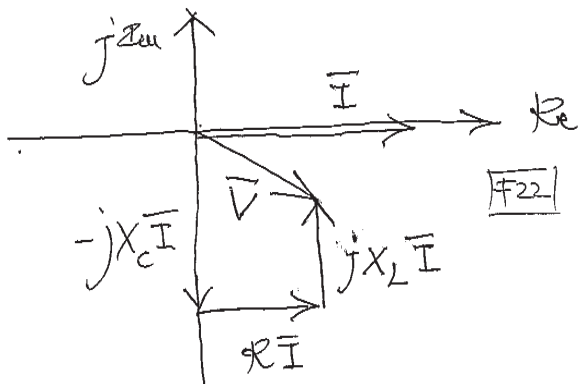
- *pulsazione di risonanza* ω_0 : pulsazione alla quale $X_L = X_C$, cioè' $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$; quindi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

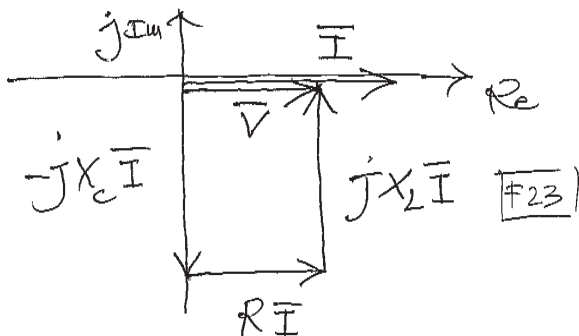
- *diagrammi fasoriali*. Supponiamo scorra una corrente $\bar{\mathbf{I}}$ con $\varphi_i = 0$; vogliamo costruire graficamente la tensione $\bar{\mathbf{V}}$ da applicare per far scorrere tale corrente; si ha

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{V}}_L = R\bar{\mathbf{I}} - jX_C\bar{\mathbf{I}} + jX_L\bar{\mathbf{I}}$$

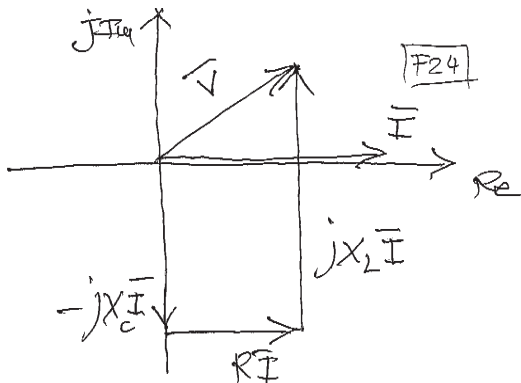
- 3 casi diversi
- Caso 1. $\omega < \omega_0$; in tal caso $X_L < X_C$, $X < 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico capacitivo (corrente anticipa tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Caso 2. $\omega = \omega_0$; in tal caso $X_L = X_C$, $X = 0$ e $\bar{\mathbf{Z}} = R$; quindi il comportamento e' di tipo resistivo (corrente in fase con la tensione)



- Caso 3. $\omega > \omega_0$; in tal caso $X_L > X_C$, $X > 0$, quindi il comportamento e' di tipo ohmico induttivo (corrente ritarda rispetto alla tensione di un angolo fra 0 e $\pi/2$)



- Notare che un circuito RLC cambia drasticamente il suo comportamento al variare di ω passando da un comportamento ohmico-capacitivo ad uno resistivo e infine a uno ohmico-capacitivo

- Si ha

$$\bar{\mathbf{Z}}(\omega) = Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$$

con

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi_z(\omega) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

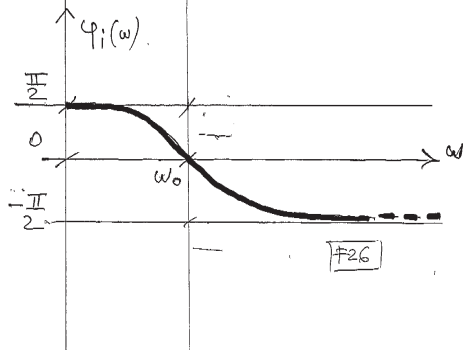
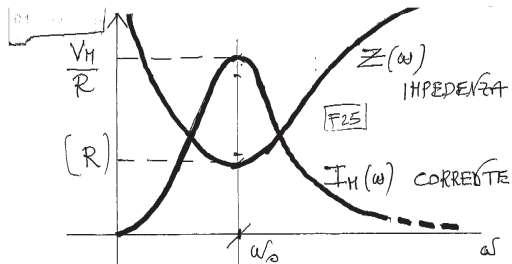
- la corrente assorbita in regime sinusoidale vale

$i(t) = I_M(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$ con

$$I_M(\omega) = \frac{V_M(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_M(\omega)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

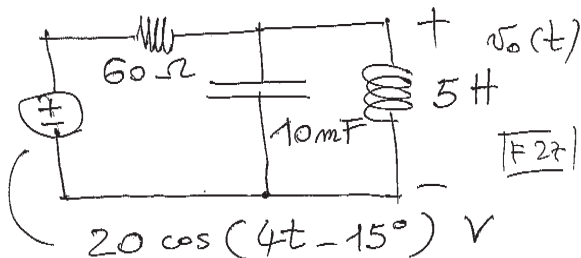
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_v(\omega) - \varphi_z(\omega) = \varphi_v(\omega) - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- *risposta in frequenza*; assumiamo per semplicità' $V_M(\omega) = V_M$ e $\varphi_v(\omega) = 0$ e disegniamo gli andamenti della risposta in ampiezza $I(\omega)$ e in fase $\varphi_i(\omega)$; riportiamo anche per convenienza $Z(\omega)$

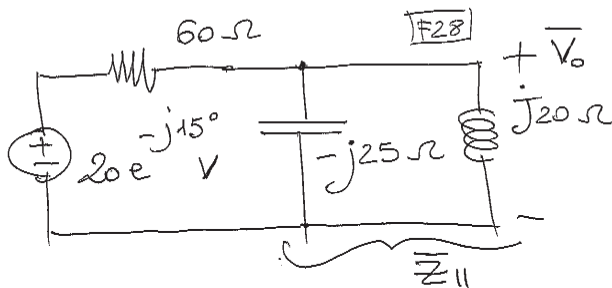


- si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine; notare che *un circuito RLC serie offre la minima impedenza alla pulsazione ω_0 di risonanza, pulsazione alla quale l'ampiezza della corrente assorbita risulta massima.*

Esempio. Determinare $v_o(t)$ in regime sinusoidale per il circuito in figura.



- Notare che la fase della tensione del generatore e' espressa in gradi invece che in radianti; nei calcoli che seguono dobbiamo comportarci di conseguenza



- Si ha

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 25 \text{ Ohm}; \quad X_L = \omega L = 20 \text{ Ohm}$$

quindi otteniamo il circuito simbolico in figura che possiamo analizzare con i metodi delle reti resistive; in particolare

$$\bar{Z}_{||} = -j25 || j20 = j100 \text{ Ohm}$$

- dalla regola del partitore di tensione

$$\bar{\mathbf{V}}_o = 20e^{-j15^\circ} \times \frac{j100}{60 + j100} = 17.15e^{j16^\circ} \text{ V}$$

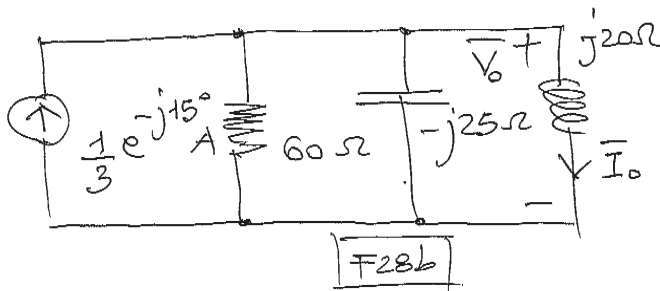
- la tensione in regime sinusoidale vale quindi

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 16^\circ) \text{ V.}$$

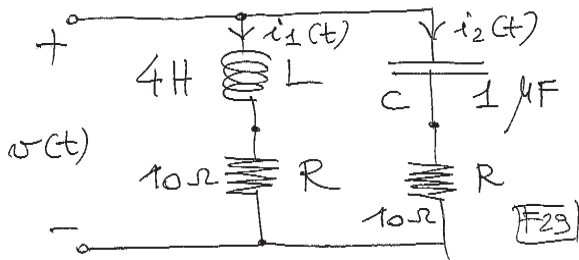
- Metodo alternativo: trasformo il generatore reale di tensione in uno reale di corrente a trovo $\bar{I}_o$ con la regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_o = \frac{e^{-j15^\circ}}{3} \frac{\frac{1}{j20}}{\frac{1}{60} + \frac{1}{-j25} + \frac{1}{j20}}$$

e poi $\bar{V}_o = j20\bar{I}_o$; verificare che si ottiene lo stesso risultato precedente



- **Esempio.** Determinare ω in modo che le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza in regime sinusoidale.



- da cui $X_L = X_C$ ossia

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/sec}$$

- problema: disegnare un diagramma fasoriale alla ω ottenuta assumendo $\varphi_v = 0$ e interpretare il risultato.

Potenza in regime sinusoidale

Mauro Forti

October 21, 2020

Potenza in regime sinusoidale

- Valore efficace di una grandezza sinusoidale
- Data $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$, il suo valore quadratico medio e'

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = V_M^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{V_M^2}{2}$$

dove la media e' calcolata sul periodo $T = 2\pi/\omega$ della sinusoide

- il valore efficace ('root mean square (rms)') e' definito come

$$V_{\text{rms}} = V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 V_M$$

- e' utile per esprimere potenze in regime sinusoidale
- se $V_M = 310 \text{ V}$ si ha $V = 220 \text{ V}$

Comportamento energetico in regime sinusoidale dei bipoli ideali R, L, C

• Resistore Ideale

- Consideriamo un resistore ideale R soggetto a $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e quindi attraversato da $i(t) = V_M \cos(\omega t)/R$
- la potenza istantanea assorbita in regime sinusoidale in Watt e'

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cos^2(\omega t) \geq 0$$

- consideriamo adesso la *potenza media assorbita da R in un periodo T*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

quindi

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{V^2}{R} = R I^2 = V I > 0$$

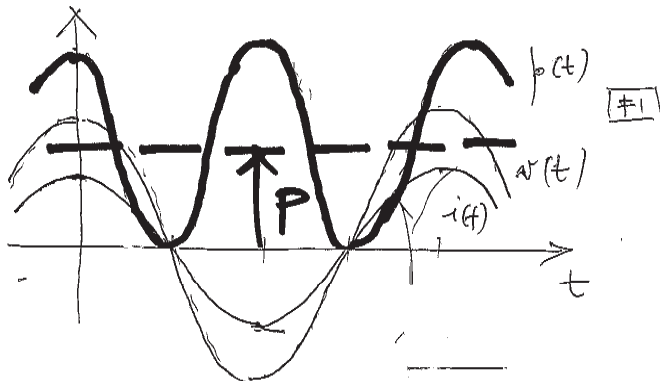
- la quantita' P e' detta *potenza attiva e si misura in Watt*

- si ha

$$P \cdot T = \int_0^T p(t) dt = E = \text{energia in Joule}$$

- quindi E in Joule e' l'energia elettrica assorbita dal resistore in un periodo; tale energia e' trasformata in altre forme di energia dal resistore (ad esempio, calore, luce, etc.)
- se conosco la potenza attiva posso trovare quindi l'energia elettrica trasferita al bipolo in modo irreversibile; la potenza attiva viene anche detta potenza reale o potenza utilizzata
- consideriamo ad esempio una stufa da 1 kW alimentata alla frequenza $f = 50$ Hz. Il periodo e' $T = 20$ msec. L'energia assorbita dalla stufa e trasformata integralmente in calore in un periodo a' pari a $1000 \times 20 \times 10^{-3} = 20$ Joule. L'energia assorbita in un secondo vale $50 \times 20 = 1000$ joule e quella assorbita in un'ora e' $3600 \times 1000 = 3.6 \times 10^6$ Joule, che corrisponde per definizione a 1 kWh (chilowattora)

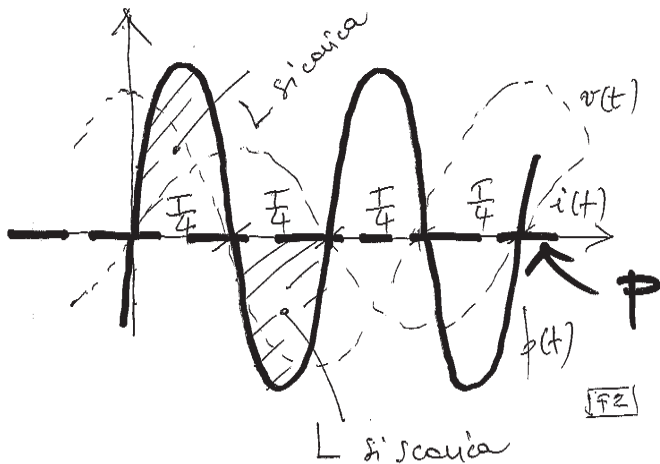
- la figura che segue riporta i diagrammi di $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ e la quantità P .



- **Induttore ideale**

- Sia ancora $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che
 $i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{V_M}{\omega L} \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{V_M^2}{2\omega L} \sin(2\omega t) \text{ W}$$



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ l'induttore assorbe energia ($p(t) \geq 0$) ma nel secondo quarto dà indietro tutta l'energia assorbita nel primo quarto ($p(t) \leq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- la potenza attiva assorbita da L vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M^2}{2\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi è uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta L e campo magnetico di L ; tecnicamente è importante misurare tale scambio energetico; ciò viene fatto introducendo la *potenza reattiva* dell'induttore

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M = VI = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{\omega L} = \frac{1}{2} \omega L I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unità di misura i VAR (volt-ampere reattivi)

- si può mostrare che

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}}$$

dove

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt$$

è l'energia media del campo magnetico di L ; quindi Q_L è proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo magnetico in T e dipende anche dalla velocità con cui tale scambio avviene

- verifica: si ha

$$\begin{aligned} E_L^{\text{media}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} Li^2(t) dt \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{4} LI_M^2 \text{ Joule} \end{aligned}$$

mentre, come visto, $Q_L = \frac{1}{2} \omega LI_M^2$.

- possiamo pensare a Q_L come una misura convenzionale della potenza che si deve impegnare per creare il campo magnetico dell'induttore

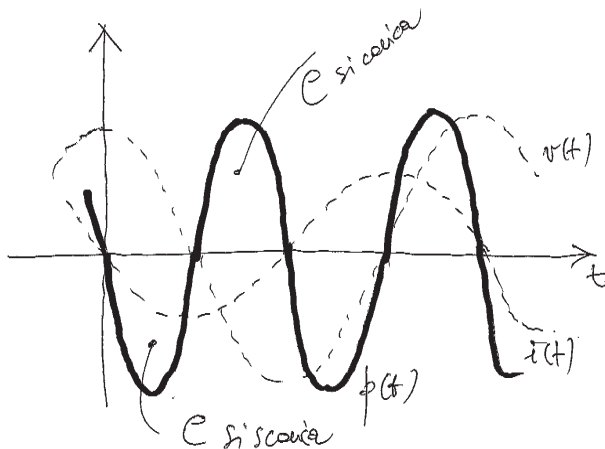
- **Condensatore ideale**

- Vale una trattazione duale rispetto a quella dell'induttore. Sia

$v(t) = V_M \cos(\omega t)$ così che

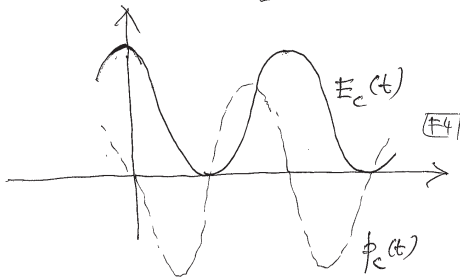
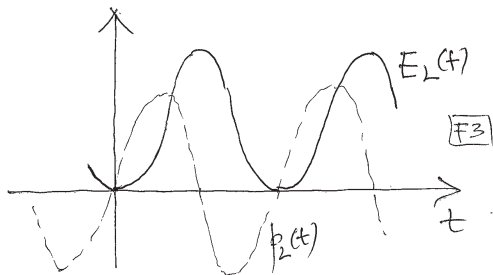
$i(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_M \sin(\omega t)$; allora

$$p(t) = -\omega C V_M^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 \sin(2\omega t) \text{ W}$$



- i diagrammi con $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ sono riportati in figura; notare che nel primo quarto di periodo $T/4$ il condensatore eroga energia ($p(t) \leq 0$) mentre nel secondo quarto assorbe una quantità di energia pari a quella erogata nel primo quarto ($p(t) \geq 0$); il fenomeno si ripete negli intervalli di tempo a seguire
- notare che L e C scambiano energia con il generatore con fasi esattamente opposte

- cio' e' confermato dai diagrammi che seguono che mostrano la potenza istantanea assorbita da L ($p_L(t)$), quella assorbita da C ($p_C(t)$) e l'energia $E_L(t)$ e $E_C(t)$



- la potenza attiva assorbita da C vale

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \text{ W}$$

- vi e' uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo T fra generatore che alimenta C e campo elettrico di C ; tale scambio energetico viene misurato convenzionalmente con la *potenza reattiva* del condensatore

$$Q_C = -\frac{1}{2} V_M I_M = -VI = -\frac{1}{2} \omega C V_M^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} I_M^2 \text{ VAR}$$

- per ricordarsi che si tratta di potenza scambiata ma non utilizzata utilizziamo come unita' di misura i VAR (volt-ampere reattivi)
- notare che si attribuisce convenzionalmente segno negativo a Q_C ; in effetti in un circuito gli induttori hanno bisogno di impegnare (assorbire) potenza reattiva per creare il loro campo magnetico, mentre i condensatori funzionano da sorgenti (erogano) potenza reattiva

- si ha

$$Q_C = -2\omega E_C^{\text{media}}$$

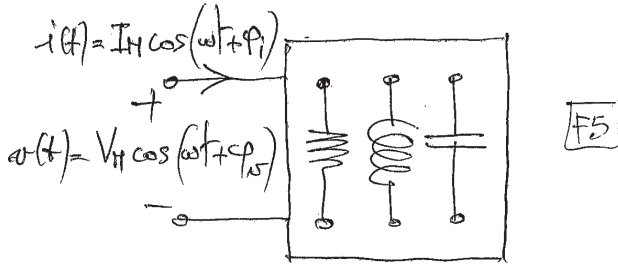
dove

$$E_C^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t) dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \quad \text{Joule}$$

e' l'energia media del campo elettrico di C ; quindi Q_C e' proporzionale all'energia mediamente scambiata con il campo elettrico in T e dipende anche dalla velocita' con cui tale scambio avviene.

Potenza in regime sinusoidale per un bipolo generico

- Consideriamo un bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω ; sia $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$ la tensione e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$ la corrente coordinata secondo la convenzione degli utilizzatori; vogliamo studiare la potenza in regime sinusoidale che viene assorbita dal bipolo



- la *potenza istantanea assorbita dal bipolo in regime sinusoidale* vale

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) I_M \cos(\omega t + \varphi_i) \quad W$$

- siamo interessati alla *potenza media* su un periodo $T = 2\pi/\omega$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

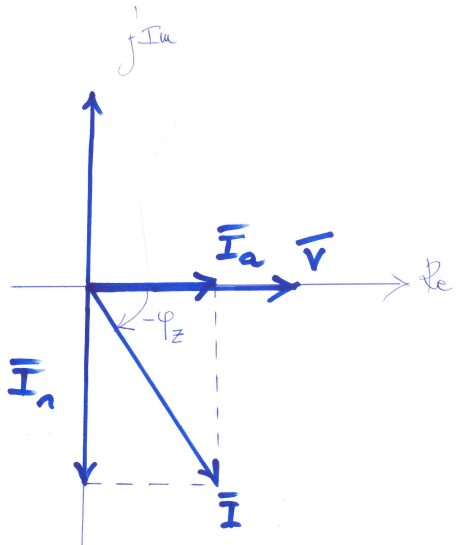
- la *potenza media*, misurata in Watt, e' detta anche *potenza attiva* o *potenza reale* e ha, come per il resistore, un importante significato fisico; infatti

$$PT = \int_0^T p(t) dt = E$$

dove E e' l'energia elettrica in Joule che viene trasferita irreversibilmente e assorbita dal bipolo in un periodo T ; se conosciamo la *potenza attiva* siamo quindi capaci di trovare l'energia utilizzata dal bipolo in T , energia che viene trasformata in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)

Espressione della potenza attiva e reattiva di un bipolo generico

- Consideriamo un bipolo di tipo ohmico-induttivo di impedenza $\bar{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$. Applichiamo $v(t) = V_M \cos(\omega t)$, quindi $\bar{V} = V_M$ e' un vettore diretto lungo l'asse orizzontale. Come noto la corrente $\bar{I}$ e' in ritardo di un angolo $-\varphi_Z$ fra 0 e $\pi/2$ rispetto alla tensione
- proiettiamo $\bar{I}$ lungo una direzione parallela a $\bar{V}$ e una direzione ortogonale a $\bar{V}$. Otteniamo $\bar{I}_a$, detta componente di $\bar{I}$ in fase con $\bar{V}$ (o *componente attiva della corrente*), e $\bar{I}_r$, detta componente di $\bar{I}$ ortogonale a $\bar{V}$, o in ritardo rispetto a $\bar{V}$ di $\pi/2$ (o *componente reattiva della corrente*)



- si ha $\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_r$ e quindi $i(t) = i_a(t) + i_r(t)$, dove $i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$ and $i_r(t) = I_{rM} \cos(\omega t - \pi/2) = I_{rM} \sin(\omega t)$
- si ha inoltre

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = P_a + P_r \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_r(t)dt \end{aligned}$$

dove P_a e' la potenza attiva trasportata dalla componente di corrente in fase con la tensione e P_r e' la potenza attiva trasportata dalla componente in quadratura

- valutiamo P_a ; si ha

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i_a(t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_M I_{aM} + \frac{1}{2} V_M I_{aM} \cos(2\omega t) \right] dt \end{aligned}$$

- quindi

$$P_a = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = V I_a > 0 \quad W$$

- quindi *la componente attiva della corrente trasporta potenza attiva (e quindi energia utile al carico)*
- valutiamo adesso P_r ; si ha

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i_r(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M I_{rM} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_M I_{rM} \sin(2\omega t) dt \end{aligned}$$

quindi

$$P_r = 0 \quad W$$

- *indipendentemente dalla sua ampiezza, la corrente reattiva non trasporta potenza attiva al carico; quindi ad essa non e' associato un trasferimento di energia utile al carico*

- la componente reattiva della corrente e' detta anche *corrente oziosa* o *corrente swattata*
- da un punto di vista fisico la corrente reattiva modella uno scambio reversibile di energia, a media nulla su un periodo, fra generatore che alimenta il bipolo e campi elettrici e magnetici all'interno del bipolo (vedremo meglio con teorema di Boucherot)
- come misura convenzionale di tale scambio reversibile a media nulla si introduce la *potenza reattiva*

$$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = V I_r > 0 \quad \text{VAR}$$

- la potenza reattiva corrisponde a *potenza scambiata ma non utilizzata*; per tale motivo Q viene misurata in VAR
- la trattazione nel caso ohmico capacitivo e' analoga; si attribuisce pero' segno negativo alla potenza reattiva, cioe'

$$Q_r = -\frac{1}{2} V_M I_{rM} = -V I_r < 0 \quad \text{VAR}$$

Conclusione

- Lo stato relativo al trasferimento energetico in regime sinusoidale verso il bipolo consta di due contributi:

1) Trasferimento irreversibile di energia elettrica (energia utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza attiva

$$P = \frac{1}{2} V_M I_{aM} = VI_a = VI \cos(\varphi_z) = VI \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad W$$

2) vi è sovrapposto uno scambio reversibile di energia elettrica a media nulla su un periodo (energia scambiata ma non utilizzata) che può essere valutato tramite la potenza reattiva

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_{rM} = VI_r = VI \sin(\varphi_z) = VI \sin(\varphi_v - \varphi_i) \quad VAR$$

Potenza apparente

- Si introduce la *potenza apparente*

$$A = \frac{1}{2} V_M I_M = VI \quad \text{VA}$$

che si misura convenzionalmente in volt-ampere (VA)

- si ha

$$P = A \cos(\varphi_z), Q = A \sin(\varphi_z)$$

e

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

cioè la potenza apparente è una combinazione di potenza attiva e reattiva

- notare che se $P, Q \neq 0$ allora si $A > P, Q$

Espressioni della potenza istantanea

- Si ha

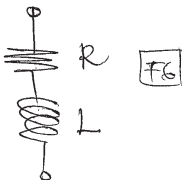
$$\begin{aligned}
 p(t) = v(t)i(t) &= V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \\
 &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

- $p(t)$ ha un termine costante P pari alla potenza attiva e un termine variabile a pulsazione 2ω con ampiezza pari alla potenza apparente
- il termine variabile della potenza istantanea può causare problemi; p. es. un alternatore richiede una coppia pulsante per funzionare a frequenza costante; inoltre, lo stesso termine origina vibrazioni meccaniche indesiderabili

- **Esempio** Consideriamo un bipolo dato da L in serie R



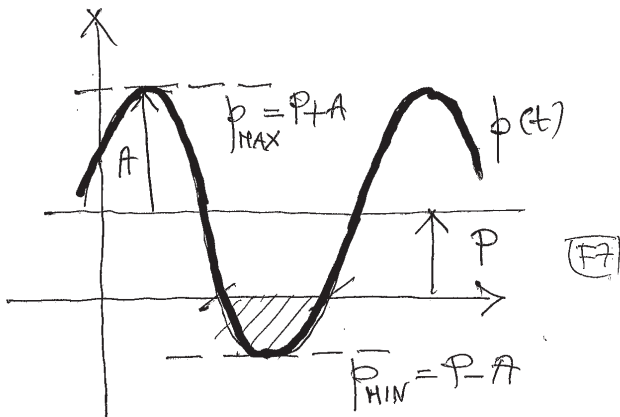
- in questo caso $P = P_R > 0$, $Q = Q_L > 0$ e $A > P, Q$;
l'andamento qualitativo della potenza istantanea $p(t)$ e' riportato in figura
- si noti che $p(t)$ varia fra un massimo

$$p_{\max} = P + A = P + \sqrt{P^2 + Q^2} \quad W$$

e un minimo

$$p_{\min} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0 \quad W$$

- ci sono intervalli di tempo in cui $p(t) < 0$; interpretare fisicamente cosa accade in tali intervalli



Espressioni della potenza attiva e reattiva

- Consideriamo un bipolo di impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e ammettenza $\bar{Y} = G + jB$. Siano $\bar{V}$ e $\bar{I}$ i fasori di tensione e corrente coordinati secondo la convenzione degli utilizzatori. La potenza attiva assorbita dal bipolo può essere espressa in una delle seguenti forme equivalenti

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2 \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2
 \end{aligned}$$

- verifica: si ha

$$\bar{V} \bar{I}^* = V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_M I_M e^{j\varphi_z}$$

- inoltre

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z} \bar{I} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} I_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Z}]$$

e

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} (\bar{Y} \bar{V})^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2 \operatorname{Re}[\bar{Y}^*]$$

- analogamente, per la potenza reattiva assorbita dal bipolo si ha

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} V_M I_M \sin \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{V} \bar{I}^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{Y}] V_M^2 = -\frac{1}{2} B V_M^2 \end{aligned}$$

dove l'asterisco denota il complesso coniugato

Potenza Complessa

- Definiamo la *potenza complessa*

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \quad VA$$

- si ha

$$\bar{P} = P + jQ$$

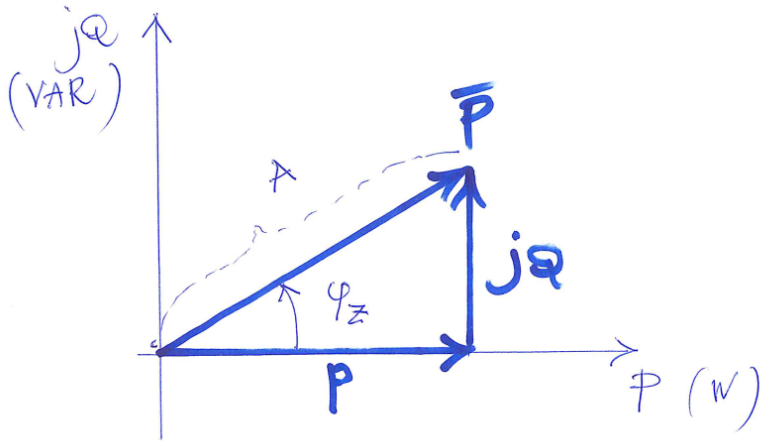
- inoltre

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} V_M I_M e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

e quindi

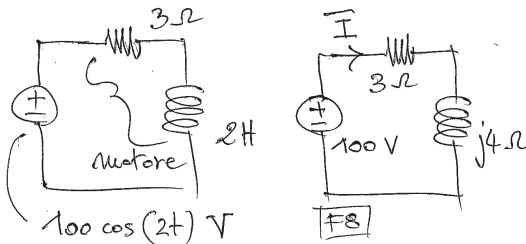
$$\bar{P} = A e^{j\varphi_z}$$

- riassumendo: la potenza complessa ha come parte reale la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva; ha come modulo la potenza apparente e come argomento l'argomento dell'impedenza



- il trasferimento di potenza in regime sinusoidale può essere caratterizzato in modo completo riportando nel piano complesso $\bar{P}$, P , Q , A e φ_z . Otteniamo così il triangolo delle potenze (che è simile a quello delle impedenze)
- in questo contesto il piano complesso è inteso come piano delle potenze. La potenza attiva P (Watt) è sull'asse reale e rappresenta una cessione irreversibile di energia al carico; la potenza reattiva Q (VAR) è sull'asse immaginario e rappresenta uno scambio reversibile di energia con i campi elettrici e magnetici del carico
- ricordiamoci anche che la potenza attiva è il tramite con cui si trasforma energia elettrica in altre forme di energia (calore, energia meccanica, etc.)
- si noti in particolare che il triangolo rettangolo P, Q, A rappresenta geometricamente la nota relazione $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Esempio. Determinare la potenza istantanea, attiva e reattiva fornita dal generatore al motore.



- Consideriamo il circuito simbolico per il quale si ha

$$P = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* = P + jQ \text{ VA}$$

- si ha

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = 12 - j16 \text{ A}$$

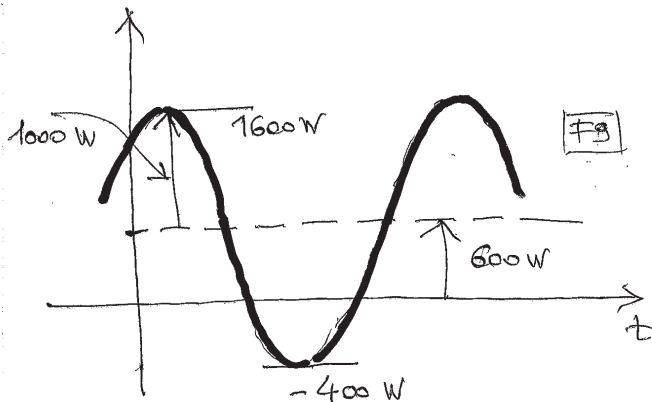
quindi

$$P = \frac{1}{2} 100(12 + j16) = 600 + j800 \text{ VA}$$

- allora $P = 600 \text{ W}$, $Q = 800 \text{ VAR}$
- si ha inoltre $A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA}$ e
 $\varphi_z = \arctan(4/3) \simeq 53^\circ$; allora

$$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_z) = 600 + 1000 \cos(4t - 53^\circ) \text{ W}$$

- notare che $p(t)$ varia fra un massimo $p_{\max} = P + A = 1600 \text{ W}$ e un minimo $p_{\min} = P - A = -400 \text{ W}$.



Potenza complessa degli elementi fondamentali

- Resistore ideale
- si ha

$$\bar{P}_R = P_R + jQ_R = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}R\bar{I}\bar{I}^* = \frac{1}{2}RI_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_R = \frac{1}{2}RI_M^2 = \frac{1}{2}GV_M^2 = RI^2 = GV^2 \quad \text{W}$$

e

$$Q_R = 0 \quad \text{VAR}$$

- un resistore ideale assorbe solo potenza attiva, mentre la potenza reattiva impegnata e' nulla (non vi e' energia scambiata)

- Induttore ideale
- si ha

$$\bar{P}_L = P_L + jQ_L = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}j\omega L\bar{I}\bar{I}^* = j\frac{1}{2}\omega LI_M^2 \quad VA$$

quindi

$$P_L = 0 \quad W$$

e

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega LI_M^2 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{\omega L} = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad VAR$$

- un induttore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

- Condensatore ideale
- si ha

$$\bar{P}_C = P_C + jQ_C = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{V}(j\omega C\bar{V})^* = -j\frac{1}{2}\omega CV_M^2 \quad \text{VA}$$

quindi

$$P_C = 0 \quad \text{W}$$

e

$$Q_C = -\frac{1}{2}\omega CV_M^2 = -\frac{1}{2}\frac{I_M^2}{\omega C} = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \quad \text{VAR}$$

- un condensatore ideale assorbe solo potenza reattiva mentre la potenza attiva e' nulla (non vi e' potenza utilizzata)

- mettiamo anche in evidenza che un induttore ha una potenza reattiva positiva. Tale potenza e' impegnata per creare il campo magnetico dell'induttore
- invece un condensatore ha una potenza reattiva negativa, e' cioe' una sorgente di potenza reattiva (una sorgente di potenza magnetizzante)
- quando L e C sono presenti in uno stesso circuito, la potenza reattiva necessaria a L puo' essere in parte, o completamente, fornita da C ; discuteremo ulteriormente questo fatto in relazione al problema del rifasamento di carichi industriali

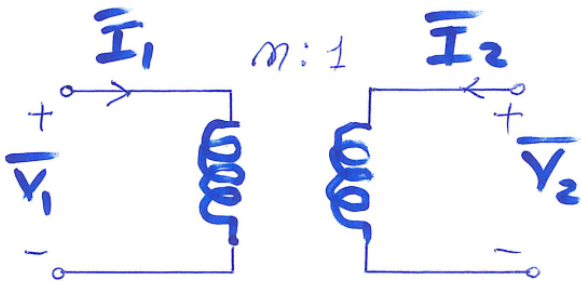
- Trasformatore ideale
- consideriamo un trasformatore ideale e cioè' una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = nv_2(t)$$

e

$$i_1(t) = -\frac{1}{n}i_2(t)$$

dove $n = N_1/N_2$ e' il rapporto di trasformazione (N_1 e N_2 sono le spire del primo e secondo avvolgimento)



- sappiamo che $p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t)(-\frac{1}{n}i_2(t)) + v_2(t)i_2(t) = 0$ per ogni t , quindi il trasformatore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = n\bar{V}_2, \bar{I}_1 = -\frac{1}{n}\bar{V}_2$$

- la potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned}\bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2}\bar{V}_1\bar{I}_1^* + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2}n\bar{V}_2(-\frac{1}{n}\bar{I}_2^*) + \frac{1}{2}\bar{V}_2\bar{I}_2^* = 0 \quad \text{VA}\end{aligned}$$

- quindi un trasformatore ideale e' trasparente sia alla potenza attiva che alla potenza reattiva

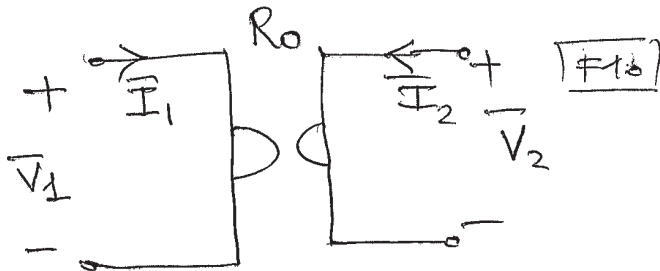
- Giratore ideale
- consideriamo un giratore ideale e cioè una rete due porte caratterizzata da

$$v_1(t) = -R_0 i_2(t)$$

e

$$v_2(t) = R_0 i_1(t)$$

dove R_0 in Ohm e' il rapporto di girazione



- sappiamo che anche il giratore ideale e' trasparente alla potenza istantanea
- per la linearita' della trasformata fasoriale, in regime sinusoidale le relazioni costitutive sono date da

$$\bar{V}_1 = -R_0 \bar{I}_2, \bar{V}_2 = R_0 \bar{I}_1$$

- la potenza complessa assorbita vale

$$\begin{aligned} \bar{P} = P + jQ &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \\ &= \frac{1}{2} \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* \\ &= -\frac{1}{2} R_0 \bar{I}_2 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} R_0 \bar{I}_1 \bar{I}_2^* \\ &= \frac{1}{2} R_0 [\bar{I}_1 \bar{I}_2^* - \bar{I}_1^* \bar{I}_2] \\ &= jR_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad VA \end{aligned}$$

- quindi un giratore ideale e' trasparente alla potenza attiva ($P = 0$); non e' invece trasparente alla potenza reattiva che vale

$$Q = R_0 \text{Im}[\bar{I}_1 \bar{I}_2^*] \quad \text{VAR.}$$

Teorema di Boucherot (conservazione della potenza attiva, reattiva e complessa)

- Consideriamo una rete con ℓ bipoli in regime sinusoidale a pulsazione ω . Utilizziamo per ogni bipolo k la convezione degli utilizzatori per coordinare i fasori $\bar{V}_k$ e $\bar{I}_k$. Si ha allora (teorema di Boucherot)

$$\sum_{k=1}^{\ell} \bar{P}_k = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \sum_{k=1}^{\ell} (P_k + jQ_k) = 0 \quad \forall A$$

vale cioè' la *conservazione della potenza complessa*

- ne consegue che vale anche la conservazione di potenza attiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} P_K = 0 \quad W$$

e della potenza reattiva

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_K = 0 \quad VAR$$

- in un circuito in cui sono presenti R, L, C e un certo numero di generatori di tensione e/o corrente possiamo scrivere

$$\sum_{\text{gen.ri}} P_{s,i} = \sum_{\text{resistori}} P_{R_i} = \sum_{\text{resistori}} R_i I_i^2 \quad W$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\text{gen.ri}} Q_{s,i} &= \sum_{\text{induttori}} Q_{L_i} + \sum_{\text{condensatori}} Q_{C_i} \\ &= \sum_{\text{induttori}} \omega L_i I_i^2 + \sum_{\text{condensatori}} (-\omega C_i V_i^2) \\ &= 2\omega \left[\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} - \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}} \right] \quad VAR \end{aligned}$$

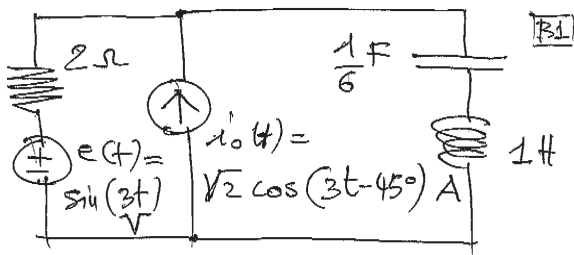
dove $P_{s,i}$ (risp., $Q_{s,i}$) e' la potenza attiva (risp., potenza reattiva) erogata dal generatore i -esimo

- notare che, nel complesso, i generatori non hanno bisogno di erogare potenza reattiva al circuito se L e C si compensano, cioè l'energia media di tipo elettrico è pari a quella di tipo magnetico

$$\sum_{\text{induttori}} E_{L_i}^{\text{media}} = \sum_{\text{condensatori}} E_{C_i}^{\text{media}}$$

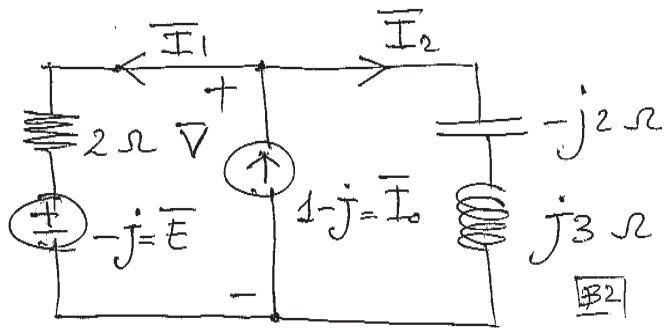
- ciò accade ad esempio in condizioni di risonanza.

Esempio. Verificare il teorema di Boucherot per il circuito in figura



- consideriamo il circuito simbolico associato e usiamo il teorema di Millmann per determinare $\bar{V}$; si ha

$$\bar{V} = \frac{-\frac{j}{2} + 1 - j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}} = \frac{8 + j}{5} \text{ V}$$



• allora

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V} + j}{2} = \frac{4 + j3}{5} \text{ A}$$

e

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 - \bar{I}_1 = \frac{1 - j8}{5} \text{ A}$$

- la potenza *erogata* dal generatore di corrente vale

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}_0^* = \frac{7 + j9}{10} \text{ VA}$$

e quella erogata dal generatore di tensione

$$\bar{P}_e = -\frac{1}{2} \bar{E} \bar{I}_1^* = \frac{3 + j4}{10} \text{ VA}$$

- inoltre la potenza assorbita dal resistore vale

$$P_R = \frac{1}{2} 2 I_{1M}^2 = 1 \text{ W}$$

quella assorbita da L vale

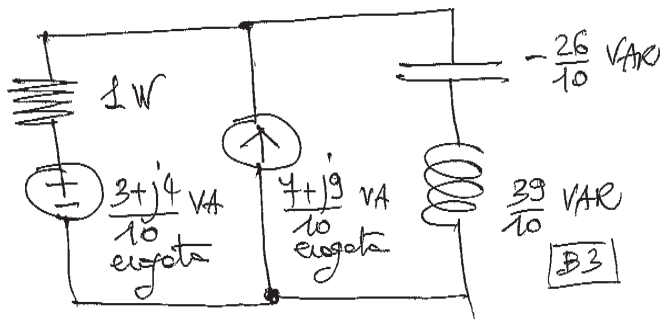
$$Q_L = \frac{1}{2} 3 I_{2M}^2 = \frac{39}{10} \text{ VAR}$$

e quella assorbita da C

$$Q_C = -\frac{1}{2} 2 I_{2M}^2 = -\frac{13}{5} \text{ VAR}$$

- e' verificato il teorema di Boucherot

- conviene riportare quanto ottenuto in una figura



Alcune convenzioni

- Abbiamo definito

$$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_i} \quad A$$

- a volte utilizzeremo negli esercizi questa notazione

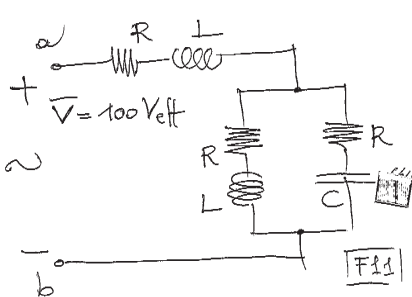
$$\bar{I} = I_{\text{rms}} e^{j\varphi_i} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi_i} = I e^{j\varphi_i} \quad A_{\text{eff}}$$

dove il modulo del fasore corrisponde al valore efficace; per evitare ambiguità va esplicitamente indicata l'unità di misura, e cioè Ampere efficaci

- con la seconda notazione si ha ad esempio che la potenza complessa è semplicemente espressa da

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* \quad VA$$

Esempio. Determinare potenza attiva e reattiva assorbita dal bipolo ab (in regime sinusoidale a pulsazione ω); verificare inoltre la validità del teorema di Boucherot; e' noto che $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ Ohm}$

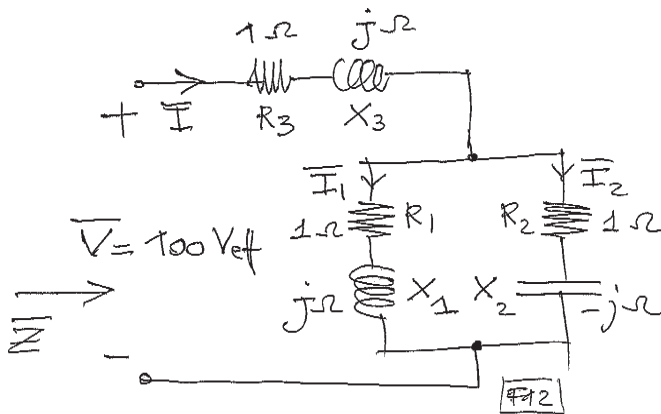


- consideriamo il circuito simbolico associato, per quale

$$\bar{Z} = 1 + j + \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = 2 + j \text{ Ohm}$$

e

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{2 + j} = 40 - j20 \text{ Aeff}$$



• allora

$$\bar{P} = \bar{V}\bar{I}^* = 100(40 + j20) = 4000 + j2000 \text{ VA}$$

e quindi

$$P = 4 \text{ kW}; \quad Q = 2 \text{ kVAR}$$

- verifichiamo adesso Boucherot; si ha dalla regola del partitore di corrente

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j}} = (40 - j20) \frac{1-j}{2} = 10 - j30 \text{ Aeff}$$

e quindi

$$\bar{I}_2 = \bar{I} - \bar{I}_1 = 30 + j10 \text{ Aeff}$$

- valutiamo potenze attive e reattive assorbite dai bipoli R, L, C ; si ha $I_1^2 = 1000$, $I_2^2 = 1000$ e $I^2 = 2000$; quindi

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 1 \text{ kW}; P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1 \text{ kW}; P_{R3} = R_3 I_3^2 = 2 \text{ kW}$$

e

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = P = 4 \text{ kW}$$

- inoltre

$$Q_{X1} = X_1 I_1^2 = 1 \text{ kVAR}; Q_{X2} = -X_2 I_2^2 = -1 \text{ kVAR}$$

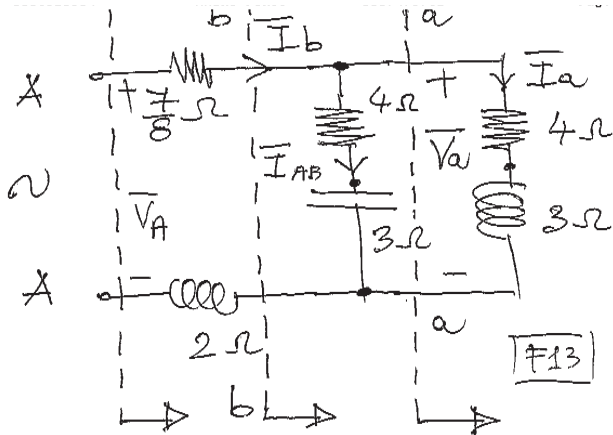
$$Q_{X3} = X_3 I_3^2 = 2 \text{ kVAR}$$

e quindi

$$Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3} = Q = 2 \text{ kVAR}$$

- il teorema di Boucherot e' verificato.

Esempio. Il bipolo AA e' in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Sulla figura sono indicate resistenze e reattanze dei bipoli alla ω considerata. E' noto che $I_a = 20$ Aeff. Calcolare per via energetica (utilizzando il teorema di Boucherot) potenza attiva e reattiva ai morsetti AA



- Analizziamo il circuito iniziando dalla sezione aa e poi procedendo verso le sezioni a monte
- sezione aa):

$$P_a = 4I_a^2 = 1600 \text{ W}; Q_a = 3I_a^2 = 1200 \text{ VAR}$$

- allora

$$A_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} = 2000 = V_a I_a = 20 V_a \text{ VA};$$

da cui $V_a = 100 \text{ Veff}$. Inoltre

$$I_{AB} = \frac{V_a}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{V_a}{5} = 20 \text{ Aeff}$$

- sezione bb): dal teorema di Boucherot

$$P_b = P_a + 4I_{AB}^2 = 3200 \text{ W}; Q_b = Q_a - 3I_{AB}^2 = 0 \text{ VAR}$$

- quindi

$$A_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} = 3200 = V_a I_b = 100 I_b \text{ VA}$$

da cui $I_b = 32 \text{ Aeff}$

- sezione di ingresso AA): si ha

$$P_A = P_b + \frac{7}{8}I_b^2 = 4096 \text{ W}; Q_A = Q_b + 2I_b^2 = 2048 \text{ VAR}$$

- si ha anche

$$A_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 4580 = V_A I_b = 36 V_A \text{ VA}$$

da cui $V_A = 143 \text{ V}$.

- *Osservazione importante:* si ha da KV $\bar{I}_b = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_a$, pero'

$$I_b = 36 \neq I_{AB} + I_a = 20 + 20 = 40 \text{ A}$$

- **non si possono sommare i valori efficaci di grandezze sinusidali**

- interpretare usando un diagramma fasoriale.

Rifasamento di carichi industriali

Mauro Forti

April 18, 2020

- La potenza attiva fornita ad un carico vale

$$P = VI \cos \varphi_z = VI \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad W$$

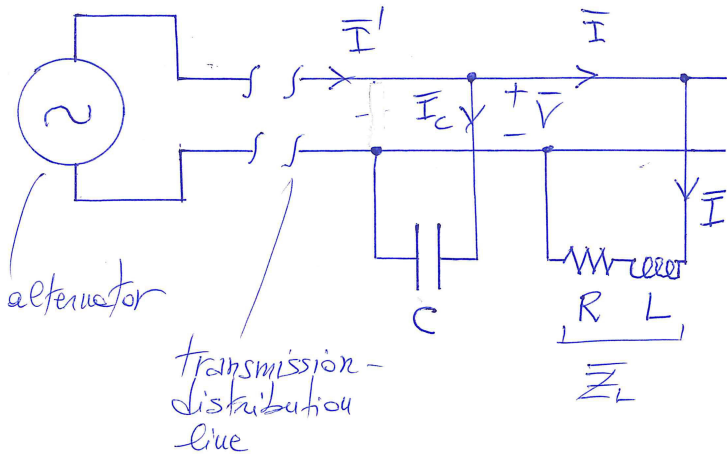
- supponiamo che sia una linea fase-neutro che trasporta potenza al carico; in questo caso la tensione V e' fissa. Si nota che, a parita' di corrente I , e cioe' a parita' di potenza apparente $A = VI$, la potenza attiva dipende in modo sostanziale da

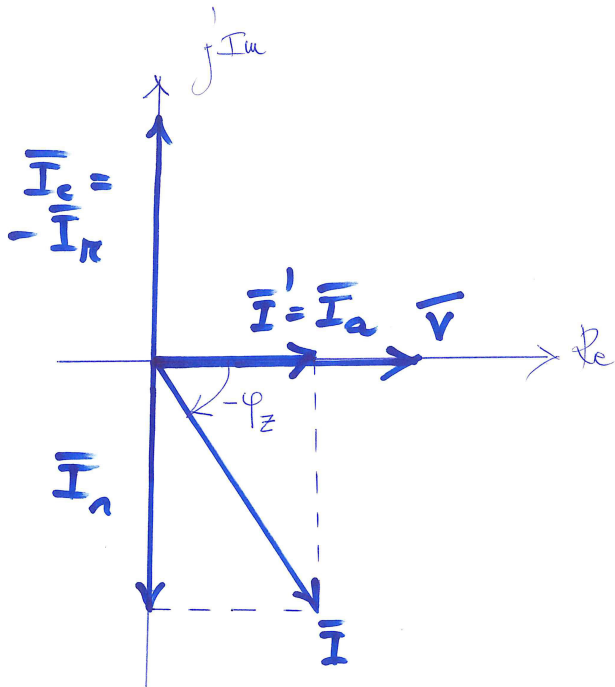
$$\cos \varphi_z = \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

che e' chiamato *fattore di potenza* (fp) del carico e che assume valori $\text{fp} \in [0, 1]$ per un carico passivo

- si dice che il fattore di potenza e' in ritardo se la corrente e' in ritardo rispetto alla tensione e cioe' il carico e' di tipo ohmico-induttivo; si dice che il fattore di potenza e' in anticipo se la corrente e' in anticipo sulla tensione e cioe' il carico e' di tipo ohmico-capacitivo

- la rete elettrica e' concepita e progettata per trasportare potenza attiva ai carichi; ci sono pero' degli utilizzatori (tipicamente i motori) che necessitano di potenza reattiva per funzionare correttamente. I motori hanno un fattore di potenza in ritardo e determinano una diminuzione del fattore di potenza di una linea; cio' comporta una serie di problemi pratici che discuteremo
- quando il fattore di potenza e' troppo basso (diciamo < 0.5), e' conveniente migliorarlo con l'inserzione di carichi capacitivi (sappiamo che si comportano da sorgenti di potenza reattiva, come discusso in precedenza)
- discutiamo meglio quanto detto; consideriamo lo schema in figura dove un alternatore eroga potenza a un motore (un carico ohmico induttivo) con impedenza $\bar{Z}_L = Ze^{j\varphi_z}$ per mezzo di una lunga linea di potenza a tensione $\bar{V}$. Il diagramma fasoriale rappresenta $\bar{V}$ (supponiamo $\varphi_v = 0$), la corrente di carico ($\bar{I}$) e la componente attiva ($\bar{I}_a$) e reattiva ($\bar{I}_r$) della corrente $\bar{I}$. Il motore ha un fattore di potenza in ritardo dato da $\cos \varphi_z < 1$





- sappiamo che solo la componente $\bar{I}_a$ **trasporta potenza attiva al carico**. Cio' corrisponde alla potenza che da elettrica viene trasformata in potenza meccanica dal motore. Al contrario, $\bar{I}_r$ non trasporta potenza attiva ed e' invece legata a uno **scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo fra alternatore e campo magnetico del motore**; tale scambio coinvolge l'intera linea di distribuzione
- supponiamo di inserire in derivazione, vicino al motore, un condensatore da rifasamento e indichiamo con $\bar{I}_C$ la corrente del condensatore. Sia inoltre $\bar{I}' = \bar{I}_C + \bar{I}$ la corrente di linea a monte del condensatore. Scegliendo C in modo che

$$\bar{I}_C = -\bar{I}_r$$

si ha

$$\bar{I}' = \bar{I}_a$$

- così facendo non cambia la potenza attiva che viene fornita al motore; però, la corrente sulla linea a monte del condensatore è diminuita dato che

$$I' = I_a < I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}$$

- correnti di linea più basse sono ovviamente desiderabili, dato che è possibile usare conduttori di linea di minor sezione per trasportarle; inoltre, se la linea ha una resistenza R_{linea} , il rifasamento garantisce che le perdite si riducano da $R_{\text{linea}} I^2$ a $R_{\text{linea}} (I')^2$
- da un punto di vista fisico, la potenza reattiva necessaria per creare il campo magnetico del motore viene fornita dal condensatore (che sappiamo essere una sorgente di potenza reattiva magnetizzante); l'alternatore e la linea sono invece disimpegnati dal generare e trasportare potenza reattiva; la linea non è più coinvolta dallo scambio reversibile di energia

- il condensatore necessario per il rifasamento puo' essere ottenuto tramite il teorema di Boucherot imponendo

$$Q_C = -\omega C V^2 = -Q_{\text{carico}}$$

e quindi

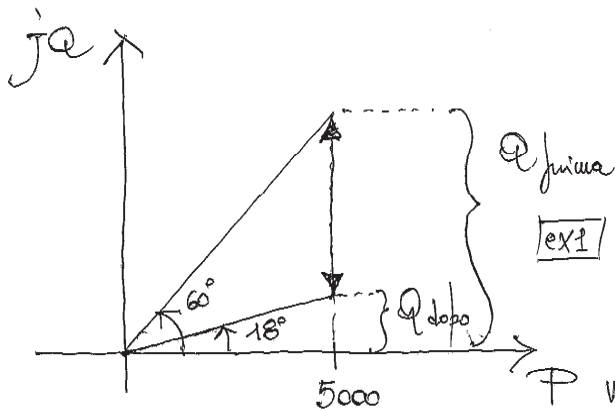
$$C = C_{\text{corr}} = \frac{Q_{\text{carico}}}{\omega V^2} = \frac{P_{\text{carico}} \tan \varphi_z}{\omega V^2} \quad F$$

- cio' corrisponde ad un rifasamento perfetto, dato che con l'inserzione del condensatore il carico dato da motore e condensatore ha un fattore di potenza massimo pari a 1
- in pratica, sono accettabili valori del fattore di potenza leggermente minori di 1, per esempio, $\cos \varphi_{\text{corr}} = 0.95$. In questo caso (rifasamento parziale) il condensatore e' scelto con la formula

$$C = C_{\text{corr}} = \frac{P_{\text{carico}} \tan \varphi_z - P_{\text{carico}} \tan \varphi_{\text{corr}}}{\omega V^2} \quad F.$$

Esempio. Un motore di potenza 5 kW ha un fattore di potenza 0.5 (in ritardo). Inserire un C da rifasamento che elevi il fattore di potenza a 0.95 (in ritardo). Si ha $\omega = 314$ rad/sec e $V = 160$ V efficaci.

- Da un punto di vista delle potenze, la situazione e' rappresentata in figura



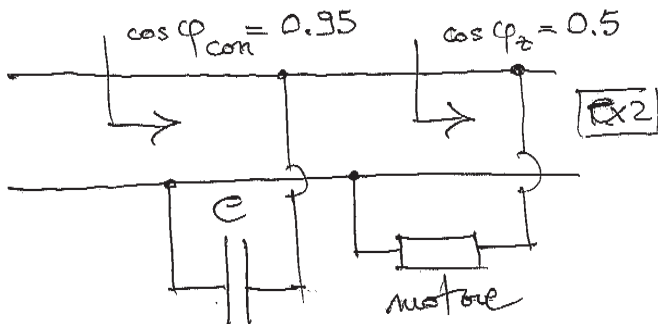
- si ha

$$C = C_{\text{corr}} = \frac{P_{\text{carico}} \tan \varphi_z - P_{\text{carico}} \tan \varphi_{\text{corr}}}{\omega V^2}$$

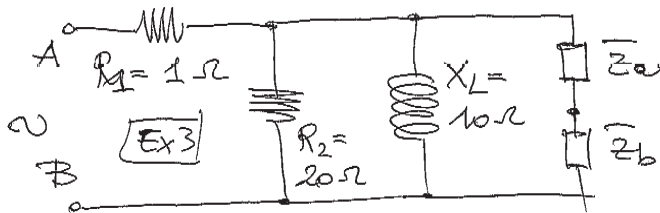
dove $\varphi_z = \arccos(0.5) = 60^\circ$ e $\varphi_{\text{corr}} = \arccos(0.95) = 18^\circ$. Quindi

$$C = \frac{5000(1.732 - 0.329)}{314 \cdot 160^2} = 873 \mu\text{F}$$

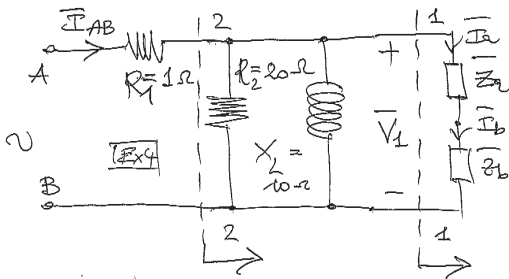
- dal punto di vista della linea la situazione e' sintetizzata in figura.



Esempio. Il bipolo AB e' in regime sinusoidale alla frequenza di 50 Hz. L'impedenza $\bar{Z}_a$ assorbe 1500 W con fattore di potenza 0.7 induttivo ed e' soggetta a 100 Veff. L'impedenza $\bar{Z}_b$ ha un fattore di potenza 0.3 capacitivo ed e' soggetta a una tensione di 100 Veff. Determinare potenza attiva, reattiva e fattore di potenza del bipolo AB. Effettuare un rifasamento completo del bipolo.



- Per $\bar{Z}_a$ si ha $A_a = P_a / \cos \varphi_a = 1500 / 0.7 = 2142$ VA, quindi $I_a = I_b = A_a / V_a = 2142 / 100 = 21.42$ Aeff.
- Allora $A_b = I_b V_b = 21.42 \cdot 100 = 2142$ VA e quindi $P_b = A_b \cos \varphi_b = 643$ W, $Q_b = A_b \sin \varphi_b = -2043$ VAR.



- sezione 11: $P_1 = P_a + P_b = 2143 \text{ W}$; $Q_1 = Q_a + Q_b = -513 \text{ VAR}$, $A_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 2203 \text{ VA}$, e $V_1 = A_1/I_a = 2203/21.42 = 103 \text{ Veff}$.
- Si ha

$$Q_{X_L} = \frac{V_1^2}{X_L} = 1058 \text{ VAR}; P_{R_2} = \frac{V_1^2}{R_2} = 530 \text{ W}$$

- allora $P_2 = 2673 \text{ W}$; $Q_2 = 545 \text{ VAR}$; $A_2 = 2728 = I_{AB} V_1$ da cui

$$I_{AB} = 26.5 \text{ Aeff}$$

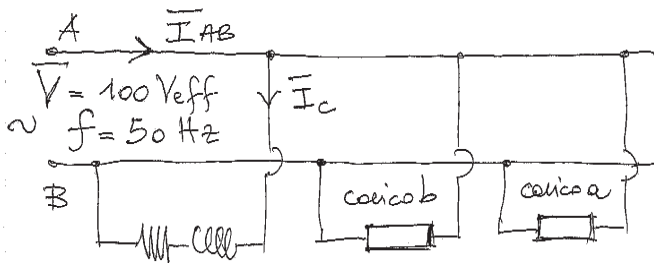
• a questo punto $P_{AB} = 2673 + 26.5^2 = 3374 \text{ W}$; $Q_{AB} = 545 \text{ VAR}$; $A_{AB} = 3418 = V_{AB} \cdot I_{AB}$, quindi $V_{AB} = 129 \text{ Veff}$. Si ottiene

$$\cos \varphi_{AB} = \frac{P_{AB}}{A_{AB}} = 0.987$$

induttivo e

$$C_{\text{corr}} = \frac{Q_{AB}}{\omega V_{AB}^2} = \frac{545}{314 \cdot 129^2} = 104 \text{ } \mu\text{F}.$$

Esempio. Il carico a, di potenza apparente pari a 1000 VA, ha un fattore di potenza 0.8 induttivo. Il carico b assorbe una corrente attiva di 5 Aeff e una corrente reattiva induttiva di 5 Aeff. Effettuare un rifasamento che elevi il fattore di potenza del bipolo AB a 0.9 induttivo e valutare la diminuzione di corrente assorbita dal bipolo AB in valore efficace ottenuta con il rifasamento



- si ha $P_a = A_a \cos \varphi_a = 800 \text{ W}$, $Q_a = A_a \sin \varphi_a = 600 \text{ VAR}$;
 $P_b = VI_{att,b} = 100 \cdot 5 = 500 \text{ W}$, $Q_b = VI_{reatt,b} = 100 \cdot 5 = 500 \text{ VAR}$

- inoltre

$$I_c = \frac{V}{Z_c} = \frac{100}{\sqrt{100 + 100}} = 7.07 \text{ Aeff}$$

per cui $P_c = RI_c^2 = 500 \text{ W}$ e $Q_c = X_L I_c^2 = 500 \text{ VAR}$

- per il teorema di Boucherot

$$P_{AB} = P_a + P_b + P_c = 1800 \text{ W}; \quad Q_{AB} = A_a + Q_b + Q_c = 1600 \text{ VAR}$$

- si ha

$$C = \frac{Q_{AB} - P_{AB} \tan \varphi_{\text{corr}}}{\omega V^2} = \frac{728}{314 \times 100^2} = 232 \text{ } \mu\text{F}$$

- valutiamo la corrente del bipolo prima e dopo il rifasamento; si ha

$$A_{AB, \text{prima}} = \sqrt{P_{AB}^2 + Q_{AB}^2} = 2410 = VI_{AB, \text{prima}}$$

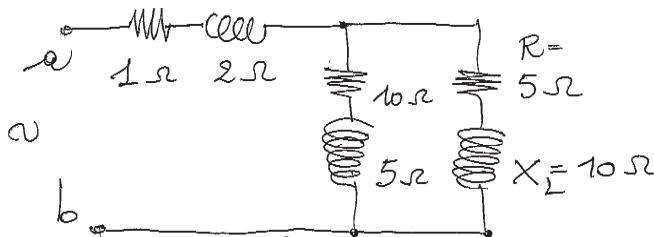
quindi $I_{AB, \text{prima}} = 24.1 \text{ Aeff}$; inoltre

$$A_{AB, \text{dopo}} = \sqrt{P_{AB}^2 + Q_{AB, \text{dopo}}^2} = 2000 = VI_{AB, \text{dopo}}$$

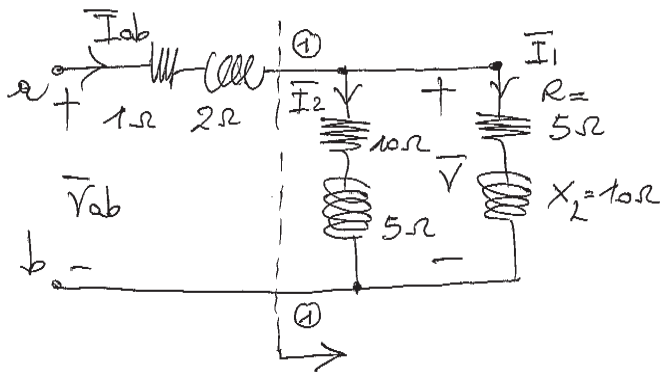
e quindi $I_{AB, \text{dopo}} = 20 \text{ Aeff}$. Infine

$$\Delta I_{AB} = I_{AB, \text{prima}} - I_{AB, \text{dopo}} = 4.1 \text{ Aeff}.$$

Esempio. Il bipolo ab e' in regime permanente sinusoidale alla frequenza di 50 Hz. La reattanza X_L assorbe una potenza reattiva di 2 kVAR. Determinare potenza attiva, reattiva e fattore di potenza del bipolo ab. Effettuare un rifasamento che elevi il fattore di potenza a 0.9 induttivo



- si ha $Q_L = 2000 = X_L I_1^2$, quindi $I_1 = 14.1\text{ Aeff}$; inoltre $P_R = R I_1^2 = 1\text{ kW}$. Da qui otteniamo $V = I_1 \sqrt{5^2 + 10^2} = 158\text{ Veff}$ e $I_2 = I_1 = 14.1\text{ Aeff}$



- alla sezione 11 abbiamo $P_1 = 3 \text{ kW}$, $Q_1 = 3 \text{ kVAR}$ e $A_1 = 4243 \text{ VA}$, quindi $I_{ab} = A_1/V = 26.85 \text{ Aeff}$
- $P_{ab} = P_1 + 26.85^2 = 3721 \text{ W}$, $Q_{ab} = Q_1 + 2 \cdot 26.85^2 = 4442 \text{ VAR}$, $A_{ab} = 5794 \text{ VA}$ e $\cos \varphi_{ab} = P_{ab}/A_{ab} = 0.642$ induttivo; inoltre $V_{ab} = A_{ab}/I_{ab} = 216 \text{ Veff}$
- infine

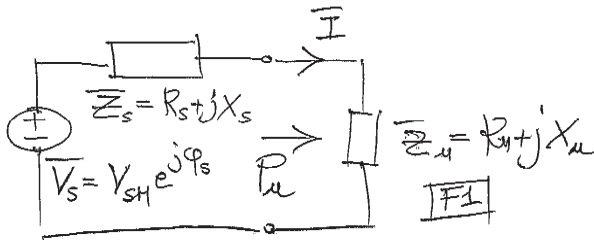
$$C_{\text{corr}} = \frac{4442 - 3721 \cdot 0.4843}{314 \cdot 216^2} = 180 \mu\text{F}.$$

Massimo trasferimento di potenza attiva

Mauro Forti

April 9, 2020

Consideriamo la situazione dove un generatore reale di tensione con impedenza interna $\bar{\mathbf{Z}}_s = R_s + jX_s$ alimenta un carico di impedenza $\bar{\mathbf{Z}}_u = R_u + jX_u$



• *Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva.* Il carico che assorbe la massima potenza attiva e'

$$\bar{\mathbf{Z}}_u = \bar{\mathbf{Z}}_s^*$$

quindi

$$R_u = R_s; \quad X_u = -X_s$$

la massima potenza attiva e' una caratteristica del generatore, detta potenza disponibile, che vale

$$P_{\max} = P_d = \frac{V_{SM}^2}{8R_s} = \frac{V_S^2}{4R_s} \quad W$$

- il carico ottenuto e' detto anche carico adattato per il massimo assorbimento di potenza attiva
- il teorema vale purché $R_s > 0$
- cenno alla dimostrazione: si ha

$$P_u = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{\mathbf{Z}}_u] I_M^2 = \frac{1}{2} R_u I_M^2 = \frac{1}{2} R_u \frac{V_{SM}^2}{(R_u + R_s)^2 + (X_u + X_s)^2}$$

- determiniamo i punti critici della funzione

$$F(R_u, X_u) = \frac{(R_u + R_s)^2 + (X_u + X_s)^2}{R_u}$$

- si ha

$$\frac{\partial F}{\partial X_u} = 0 \Leftrightarrow X_u = -X_s$$

per tale valore di X_u

$$\frac{\partial F}{\partial R_u} = \frac{2(R_u + R_s)R_u - (R_u + R_s)^2}{R_u^2} - \frac{(X_u + X_s)^2}{R_u^2} = \frac{R_u^2 - R_s^2}{R_u^2} = 0$$

• la soluzione accettabile per avere un minimo e' $X_u = -X_s$ e $R_u = R_s$; corrispondentemente si ha

$$P_{\max} = \frac{1}{2}R_s \frac{V_{SM}^2}{(R_s + R_s)^2} = \frac{V_{SM}^2}{8R_s}.$$

- *Rendimento nella trasmissione di potenza attiva*: e' definito come

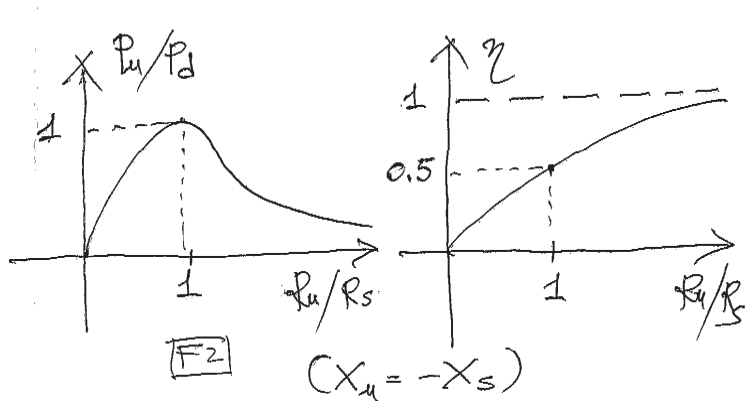
$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_s} = \frac{\frac{1}{2}R_u I_M^2}{\frac{1}{2}(R_u + R_s)I_M^2} = \frac{R_u}{R_u + R_s}$$

- in condizioni di massimo trasferimento di potenza attiva si ha quindi

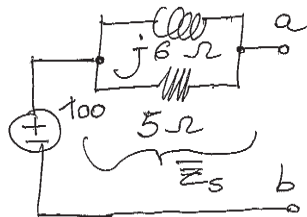
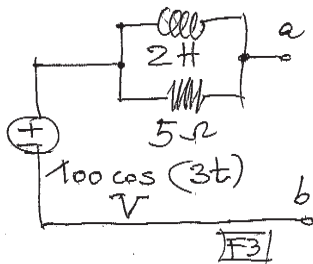
$$\eta = 50 \% \quad !!!$$

- il massimo trasferimento di potenza attiva e' importante nei sistemi di trasmissione di segnali, dove il rendimento e' bassissimo (qui interessa solo che la potenza sul ricevitore sia massima); nei sistemi di trasmissione dell'energia si lavora invece in condizioni di massimo rendimento e cioe' per $R_u \gg R_s$

- le curve in figura rappresentano l'andamento di P_u/P_d e di η in funzione di R_u/R_s quando $X_u = -X_s$.



Esempio. Determinare la potenza disponibile del generatore reale in figura



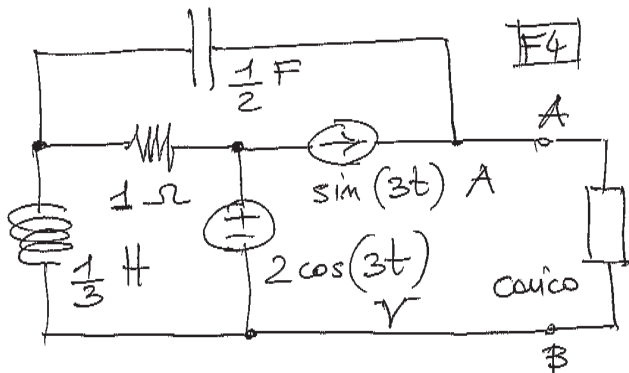
• si ha

$$\bar{Z}_s = R_s + jX_s = 5 \parallel j6 = \frac{180 + j150}{61} \text{ Ohm}$$

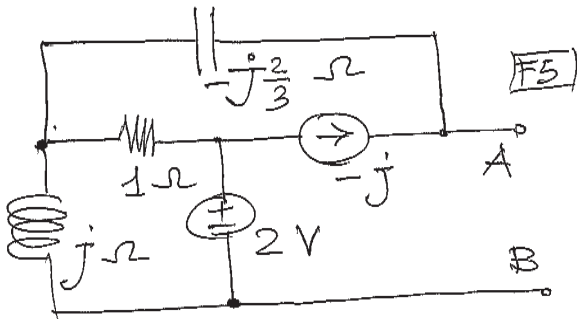
quindi

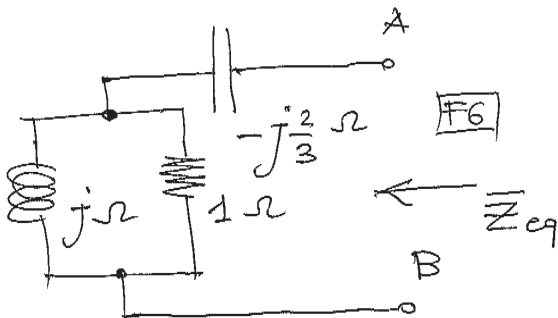
$$P_d = \frac{V_{SM}^2}{8R_s} = \frac{100^2}{8 \times \frac{180}{61}} \simeq 424 \text{ W.}$$

Esempio. Determinare il carico che assorbe la massima potenza attiva e valutare tale potenza massima



- consideriamo il circuito simbolico e determiniamo l'equivalente di Thevenin del bipolo AB che alimenta il carico



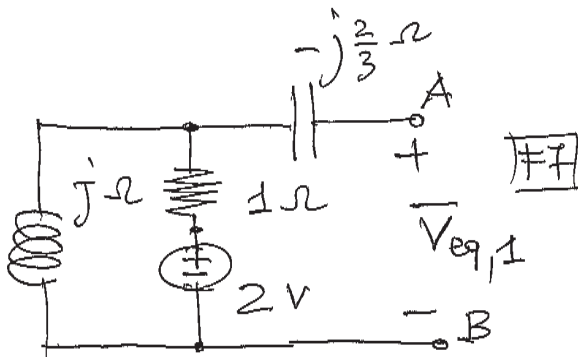


• si ha

$$\bar{Z}_{eq} = R_{eq} + jX_{eq} = -j\frac{2}{3} + 1 \parallel j = \frac{1}{2} - j\frac{1}{6} \text{ Ohm}$$

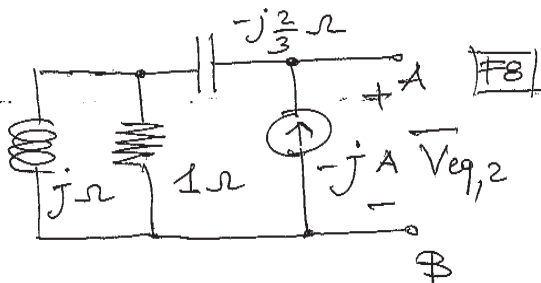
quindi il carico adattato e'

$$\bar{Z}_u = \bar{Z}_{eq}^* = \frac{1}{2} + j\frac{1}{6} \text{ Ohm}$$



- per determinare la tensione equivalente usiamo il pse; si ha

$$\bar{V}_{eq,1} = \frac{2j}{1+j} = 1+j \text{ V}$$



- $$\bar{V}_{eq,2} = -j \left(-j\frac{2}{3} + \frac{j}{1+j} \right) = -\frac{1}{6} - j\frac{1}{2} \text{ V}$$

quindi

$$\bar{V}_{eq} = \bar{V}_{eq,1} + \bar{V}_{eq,2} = \frac{5}{6} + j\frac{1}{2} \text{ V}$$

- infine

$$P_d = \frac{V_{eqM}^2}{8R_{eq}} = \frac{(5/6)^2 + (1/2)^2}{8 \times (1/2)} \simeq 0.236 \text{ W.}$$

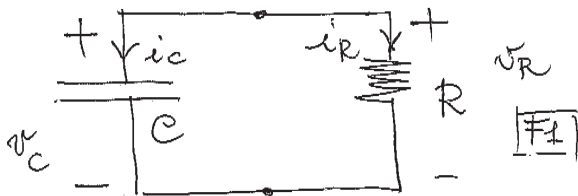
Circuiti del primo ordine

Mauro Forti

June 10, 2020

Risposta libera

- Scarica di C su R
- Consideriamo un circuito elementare RC senza generatori indipendenti; sia $v_C(0) = V_0$; vogliamo determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la tensione su C (v_C) e' la *variabile di stato* del circuito



- si ha dalla KV: $v_C = v_R$ e dalla KI: $i_R + i_C = 0$, mentre le relazioni costitutive sono $i_C = Cdv_C/dt$ e $i_R = v_R/R$; allora

$$v_C = v_R = Ri_R = -Ri_C = -RC \frac{dv_C}{dt}$$

- quindi, ponendo $v_C = v$ il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = 0$$

con condizione iniziale

$$v(0) = V_0$$

- con $\tau = RC$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RC ; si ha $[\tau] = \text{sec}$

- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per $t \geq 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$v(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea

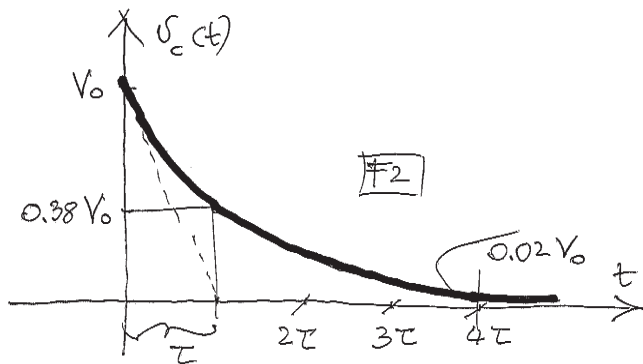
- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$v(0) = ke^0 = k = V_0$$

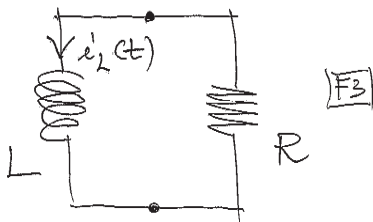
quindi la tensione nel circuito RC vale

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di C inizialmente carico sul resistore R
- in figura e' rappresentato l'andamento temporale della scarica; si ha $v(\tau) \simeq 0.38V_0$, cioe' dopo τ la tensione si e' ridotta al 38 % del valore iniziale; si ha anche $v(4\tau) = 0.02V_0$, cioe' dopo 4τ la tensione si e' ridotta al 2 % della tensione iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RC*



- Scarica di L su R
- Consideriamo un circuito elementare RL senza generatori indipendenti; sia $i_L(0) = I_0$; vogliamo determinare $i_L(t)$ per $t \geq 0$ analizzando il circuito nel dominio del tempo; notare che la corrente in L (i_L) e' la variabile di stato del circuito



- il circuito soddisfa alla equazione differenziale omogenea del primo ordine (ponendo $i_L = i$)

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

con condizione iniziale

$$i(0) = I_0$$

- con $\tau = L/R$ e' stata indicata la *costante di tempo* del circuito RL ; si ha $[\tau] = \text{sec}$
- e' un *problema di Cauchy* che ammette soluzione unica per $t \geq 0$; consideriamo l'equazione caratteristica associata

$$\rho + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \rho = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

dove ρ e' la radice caratteristica; allora l'integrale generale dell'omogenea e' dato da

$$i(t) = ke^{\rho t} = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-\frac{tR}{L}}, \quad t \geq 0$$

dove $k \in \mathbb{R}$; sono ∞^1 soluzioni dell'omogenea

- imponendo le condizioni iniziali trovo l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$i(0) = ke^0 = k = I_0$$

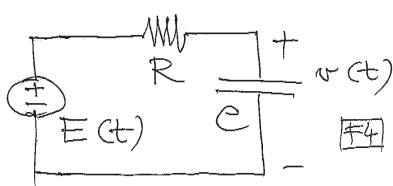
quindi la corrente nel circuito RL vale

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

- e' detta risposta libera o naturale o risposta a ingresso nullo; rappresenta la scarica di L inizialmente carico sul resistore R
- si ha $i(\tau) \simeq 0.38I_0$, cioe' dopo τ la corrente si e' ridotta gia' al 38 % del valore iniziale; si ha anche $i(4\tau) = 0.02I_0$, cioe' dopo 4τ la corrente si e' ridotta al 2 % della corrente iniziale; in pratica si ritiene che la durata del transitorio di scarica sia di circa 4τ
- la costante di tempo τ determina la durata del transitorio (τ piccolo transitorio veloce, τ grande transitorio lento)
- la radice caratteristica $\rho = -1/\tau$ ha dimensione di frequenza ed e' chiamata anche *frequenza naturale del circuito RL*

Risposta forzata

- Consideriamo un circuito RC con un generatore indipendente di tensione $E(t)$; per risposta forzata in corrente si intende la risposta quando e' presente il generatore indipendente e le condizioni iniziali sullo stato sono nulle, cioe' $v(0) = 0$; la risposta forzata e' detta anche risposta allo stato iniziale nullo



- si puo' verificare che il circuito soddisfa all'equazione differenziale del primo ordine di tipo non omogeneo

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E(t), \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$v(0) = 0$$

- tale problema di Cauchy ha soluzione unica
- dall'analisi sappiamo che

$$v(t) = v_{\text{omogenea}}(t) + v_{\text{part.affine}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_{\text{part.affine}}(t)$$

dove $v_{\text{omogenea}}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ e' l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre $v_{\text{part.affine}}(t)$ e' un integrale particolare dell'equazione affine

- ovviamente l'integrale particolare dipende dalla forma della eccitazione $E(t)$; puo' essere determinato usando ad esempio l'integrale di convoluzione

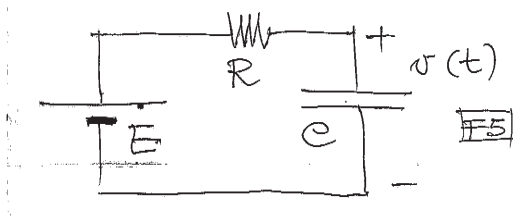
$$v_{\text{part.affine}}(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\sigma}{\tau}} E(\sigma) d\sigma$$

oppure usando il metodo della trasformata di Laplace

- nel seguito vediamo come si determina $v_{\text{part.affine}}(t)$ nel caso importante di eccitazioni costanti o eccitazioni sinusoidali

Circuito RC con Eccitazione Costante

- determiniamo $v(t)$, risposta forzata, per il circuito RC in figura con eccitazione costante $E(t) = E$



- e' naturale cercare un integrale particolare costante, e cioe' 'della stessa forma della eccitazione':

$$v_{\text{part.affine}}(t) = H = \text{costante}$$

- sostituendo ottengo

$$H = E$$

e quindi

$$v(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

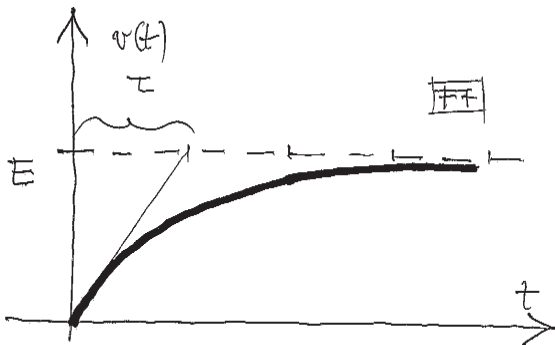
- imponendo la condizione iniziale si ha

$$v(0) = k + E = 0$$

quindi $k = -E$ e la risposta forzata vale

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

- e' il transitorio di carica di un C inizialmente scarico con una batteria di tensione E ; l'andamento temporale e' mostrato in figura



Scomposizione della risposta forzata

- scriviamo la risposta forzata ad una eccitazione costante del circuito RC nella forma

$$v_{\text{forzata}}(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

dove

$$E = v_{\text{part.affine}} = v_{\text{regime stazionario}}$$

e' cio' che resta per $t \rightarrow +\infty$ ed e' della stessa forma della eccitazione; invece $-Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ si dice parte transitoria della risposta forzata ed e' una soluzione dell'omogenea associata

- abbiamo ottenuto la scomposizione:
- Forzata = Transitorio + Regime Stazionario
- oppure $F = T + R$

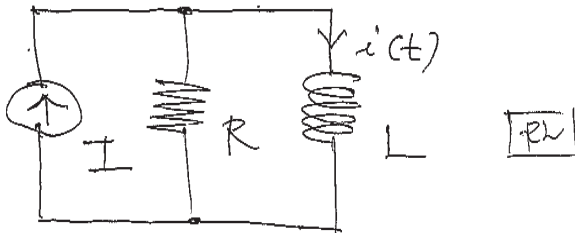
Circuito RL con eccitazione costante

- Mostrare che la risposta forzata in corrente del circuito RL in figura e' data da

$$i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0$$

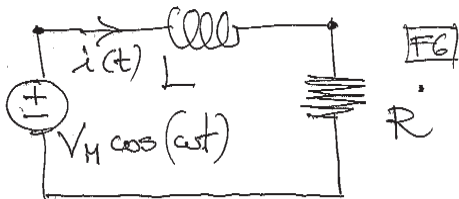
con $\tau = L/R$

- anche adesso vale la scomposizione $F = T + R$



Risposta forzata ad eccitazioni sinusoidali

- Circuito RL con eccitazione sinusoidale



- Determinare $i(t)$, risposta forzata
- Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_M \cos(\omega t)$$

con condizione iniziale nulla sullo stato

$$i(0) = 0$$

- si ha anche in questo caso $F = T + R$, dove T e' una soluzione dell'omogenea associata mentre R e' un integrale particolare dell'affine che corrisponde alla risposta in regime sinusoidale; si ha allora

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$$

quindi

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

- imponiamo adesso la condizione iniziale

$$i(0) = 0 = k + \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

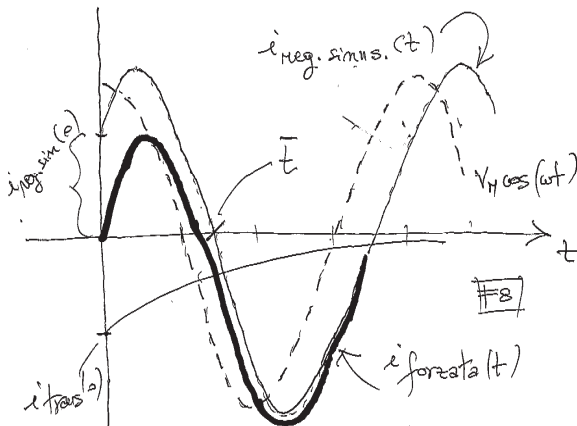
e quindi

$$k = -\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$$

- da $i(0) = 0$ si ha che

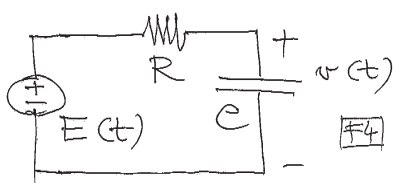
$$i_{\text{transitoria}}(0) = -i_{\text{regime sinusoidale}}(0)$$

- la seguente figura riporta gli andamenti della tensione del generatore, di $i_{\text{regime sinusoidale}}(t)$, di $i_{\text{transitoria}}(t)$ e di $i(t)$ risposta forzata



Risposta completa

- Consideriamo un circuito RC con un generatore di tensione $E(t)$. Per *risposta completa* in corrente si intende la corrente quando e' presente $E(t)$ e il condensatore e' carico a $v(0) = V_0 \neq 0$



- vi sono quindi due cause: la causa 1 e' il generatore indipendente (sorgente esterna di energia); la causa 2 e' l'energia elettrica immagazzinata inizialmente in C ($\frac{1}{2}CV_0^2$)
- vale la seguente forma del principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta completa (C) e' data dalla risposta libera (L) piu' la risposta forzata (F); quindi $C = L + F$

- facciamo una verifica per il circuito elementare RC ; la risposta completa e' l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\tau \frac{dv_{\text{com}}}{dt} + v_{\text{com}} = E(t)$$
$$v(0) = V_0$$

- la risposta libera e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{\text{lib}}}{dt} + v_{\text{lib}} = 0$$
$$v_{\text{lib}}(0) = V_0$$

- la risposta forzata e' soluzione di

$$\tau \frac{dv_{\text{for}}}{dt} + v_{\text{for}} = E(t)$$
$$v_{\text{for}}(0) = 0$$

- sommando ottengo

$$\tau \frac{d(v_{\text{lib}} + v_{\text{for}})}{dt} + (v_{\text{lib}} + v_{\text{for}}) = E(t)$$
$$(v_{\text{lib}} + v_{\text{for}})(0) = V_0$$

- quindi, per l'unicita' della soluzione del problema di Cauchy iniziale si ottiene che

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t)$$

- **Esempio.** Nel caso di un circuito RC con eccitazione costante E otteniamo

$$v_{\text{com}}(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- **Scomposizione in parti significative:** si ha $C = L + F$ e $F = T + R$; ma L e T sono soluzioni dell'omogenea; si definisce transitorio completo $TC = L + T$; nel caso in questione

$$L = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; F = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); T = -E e^{-\frac{t}{\tau}}; R = E$$

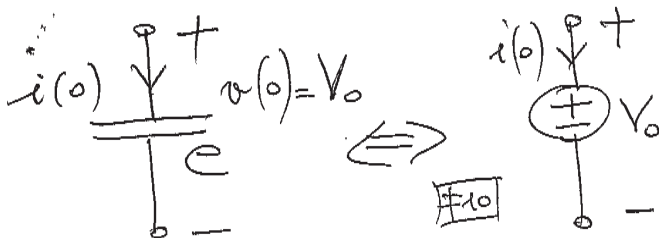
$$TC = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Comportamento a $t = 0$ di L e C

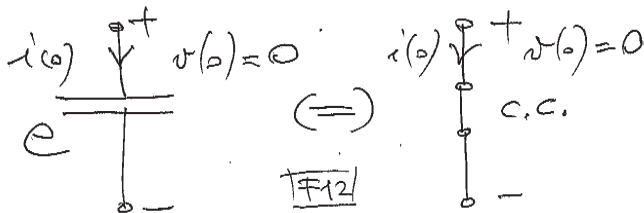
- Consideriamo un condensatore C e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $v(0) = V_0$; allora si ha

$$v(0) = V_0; \quad \forall i(0)$$

quindi all'istante iniziale $t = 0$ il condensatore equivale a un generatore di tensione ideale V_0



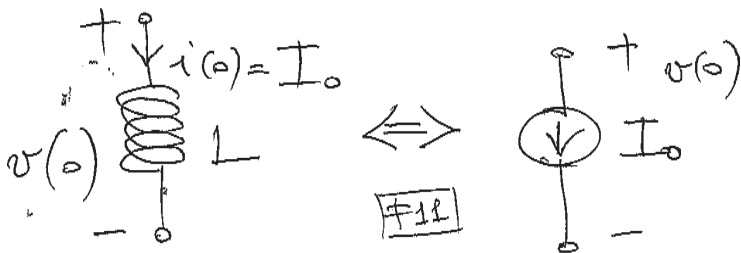
- se il condensatore e' scarico a $t = 0$, cioe' $v(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un corto circuito



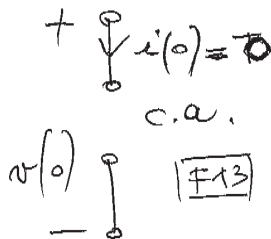
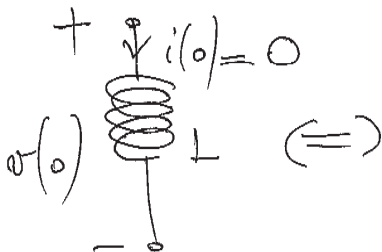
- Consideriamo un induttore L e supponiamo di conoscere lo stato a $t = 0$, cioè $i(0) = I_0$; allora si ha

$$i(0) = I_0; \quad \forall v(0)$$

quindi all'istante iniziale $t = 0$ l'induttore equivale a un generatore di corrente ideale I_0



- se l'induttore e' scarico a $t = 0$, cioe' $i(0) = 0$, allora equivale a $t = 0$ ad un circuito aperto

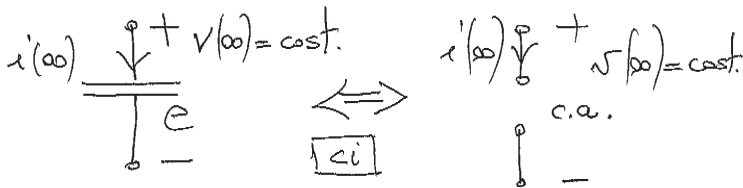


Comportamento per $t \rightarrow \infty$ di L e C

- interessano i due casi: a) il circuito raggiunge un *regime stazionario* dove tutte le tensioni e correnti divengono costanti per $t \rightarrow \infty$; b) il circuito raggiunge un *regime sinusoidale* dove tutte le tensioni e correnti divengono sinusoidali a pulsazione ω per $t \rightarrow \infty$
- a) C in regime stazionario: si ha

$$i(\infty) = 0; \quad \forall v(\infty) = \text{costante}$$

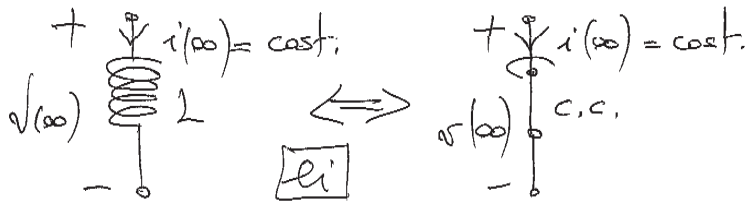
quindi C equivale ad un circuito aperto



L in regime stazionario: si ha

$$v(\infty) = 0; \quad \forall i(\infty) = \text{costante}$$

quindi L equivale ad un corto circuito

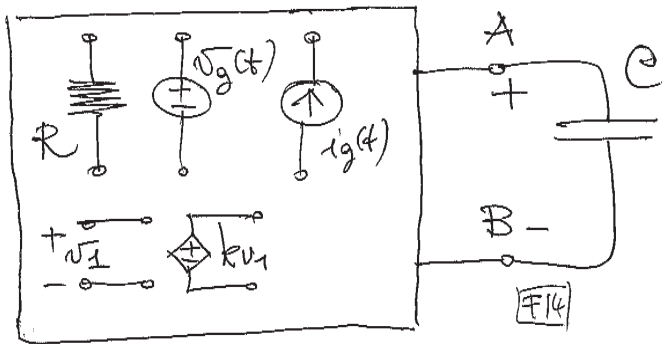


b) • C in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_C = -j/(\omega C)$

• L in regime sinusoidale: e' una impedenza di valore $\bar{Z}_L = j\omega L$

Circuiti del primo ordine

- Sono costituiti da un bipolo AB senza memoria che alimenta un C o un L (un solo elemento reattivo)



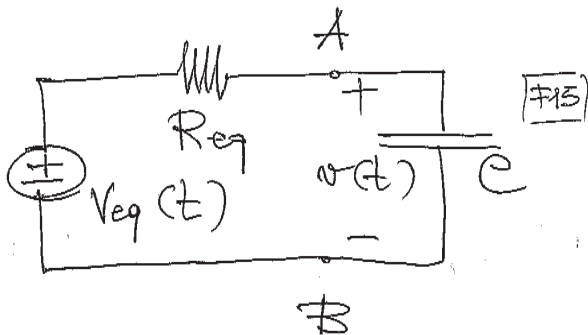
- consideriamo il caso con un solo C ; supponiamo che il bipolo AB sia controllabile in corrente; consideriamo l'equivalente di Thevenin e supponiamo $R_{eq} > 0$

- ci riconduciamo allora al problema di Cauchy già studiato

$$\tau_{eq} \frac{dv}{dt} + v = V_{eq}(t)$$

$$v(0) = V_0$$

dove $\tau_{eq} = R_{eq}C$

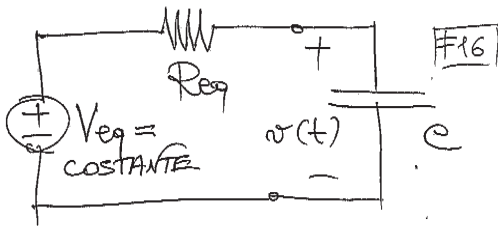


- si parla di risposta libera se $V_{eq}(t) = 0$ e $V_0 \neq 0$; forzata se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 = 0$; completa se $V_{eq}(t) \neq 0$ e $V_0 \neq 0$

Circuiti del primo ordine con eccitazioni costanti

- Supponiamo che i generatori indipendenti all'interno del bipolo AB imprimano tensioni e/o correnti costanti; in tal caso si ha

$$V_{eq}(t) = V_{eq} = \text{costante}$$



- così' ci siamo ricondotti a un caso già' studiato; quindi si ha

$$L : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

$$F : v(t) = V_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

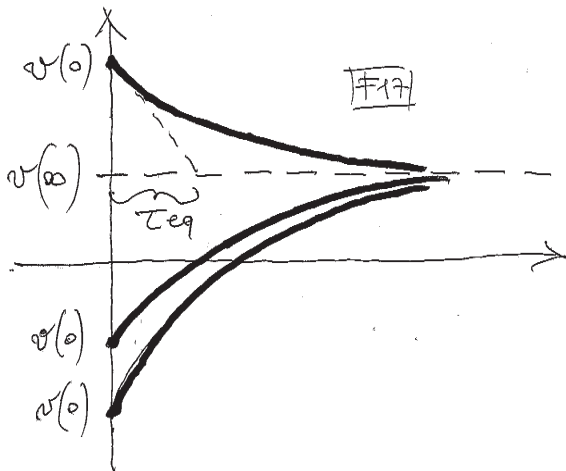
$$C = L + F : v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + V_{eq} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- possiamo scrivere la completa (ma anche la libera e forzata, pensarci!) nella seguente forma

$$\begin{aligned}v(t) &= V_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}} + V_{\text{eq}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}}) \\&= V_{\text{eq}} + [V_0 - V_{\text{eq}}]e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}} \\&= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{\text{eq}}}}\end{aligned}$$

dove $v(\infty) = V_{\text{eq}}$

- la completa dipende quindi da tre parametri: il valore all'istante iniziale $t = 0$, il valore in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$ e la costante di tempo equivalente τ_{eq}
- l'andamento tipico e' riportato nella figura che segue



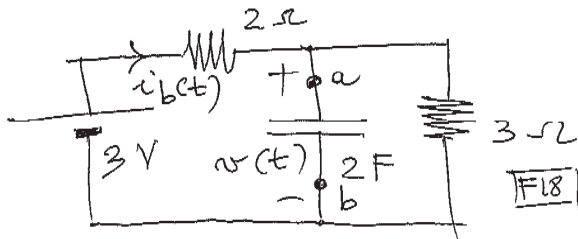
- l'analisi di un circuito del primo ordine con eccitazioni costanti e' perciò condotta in tre passi: 1) analisi all'istante iniziale $t = 0$; 2) analisi in regime stazionario per $t \rightarrow \infty$; 3) determinazione della costante di tempo equivalente

- si può dimostrare che anche la libera e la forzata sono 'della stessa forma'; inoltre, è della stessa forma l'andamento di qualunque altra grandezza elettrica nel circuito; ad esempio, se consideriamo la corrente in un resistore avremo

$$i_R(t) = i_R(\infty) + [i_R(0) - i_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

- notare che τ_{eq} è la stessa per tutte le grandezze elettriche.

Esempio. Determinare $i_b(t)$ per $t \geq 0$, risposta completa, sapendo che $v(0) = 4 \text{ V}$

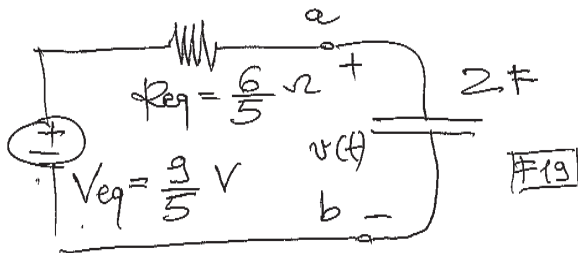


- Metodo 1). Determino la variabile di stato $v(t)$ e poi, indirettamente $i_b(t)$ (che non è variabile di stato)
- troviamo l'equivalente di Thevenin del bipolo ab ; si ha $\tau_{eq} = R_{eq}C = 12/5 \text{ s}$; allora la risposta completa in tensione è'

$$v(t) = 4e^{-\frac{5t}{12}} + \frac{9}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{12}}) = \frac{9}{5} + \frac{11}{5}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$

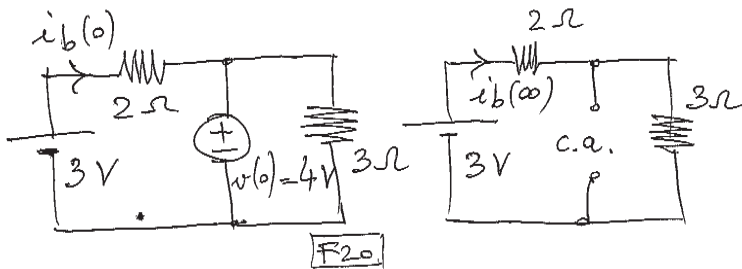
- infine

$$i_b(t) = \frac{3 - v(t)}{2} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0$$



- Metodo 2). Per un circuito del primo ordine con eccitazione costante la forma della corrente e' del tipo

$$i_b(t) = i_b(\infty) + [i_b(0) - i_b(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

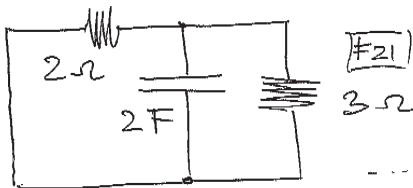


- analisi a $t = 0$; il condensatore e' un generatore di tensione V_0 quindi

$$i_b(0) = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

- analisi per $t \rightarrow +\infty$; il condensatore e' un circuito aperto quindi

$$i_b(\infty) = \frac{3}{5} \text{ A}$$



- per determinare τ_{eq} si nota che

$$ke^{-\frac{t}{\tau_{eq}}}$$

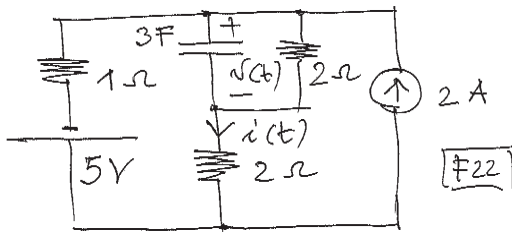
e' una soluzione dell'omogenea; studiamo allora il circuito in evoluzione libera disattivando la batteria; noto allora che C si scarica sul parallelo fra 2 Ohm e 3 Ohm; si ha quindi

$$\tau_{eq} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \text{ s}$$

- infine

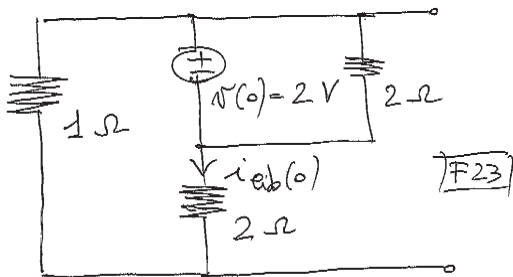
$$i_b(t) = \frac{3}{5} + \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right]e^{-\frac{5t}{12}} = \frac{3}{5} - \frac{11}{10}e^{-\frac{5t}{12}}, \quad t \geq 0.$$

- **Esempio.** Determinare $i(t)$, parte libera, forzata, transitoria e di regime; si ha $v_C(0) = 2\text{ V}$



- per la libera si ha

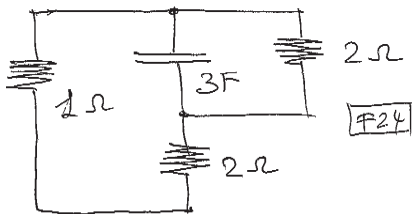
$$i_{\text{lib}}(t) = i_{\text{lib}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{lib}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$



- dalla 'istantanea del circuito a $t = 0$ ', dove C e' un generatore di tensione $v_C(0) = 2 \text{ V}$, si ha

$$i_{\text{lib}}(0) = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

mentre $i_{\text{lib}}(\infty) = 0$



- infine

$$\tau_{eq} = 3 \times \frac{6}{5} = \frac{18}{5} \text{ s}$$

- quindi

$$i_{lib}(t) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

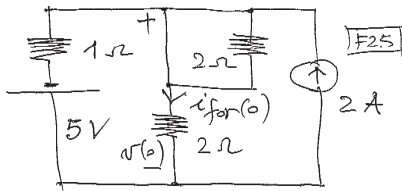
- la forzata puo' essere scritta come

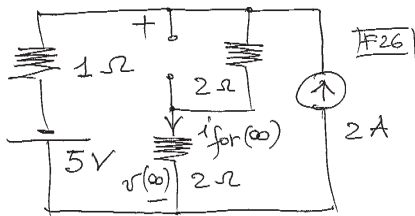
$$i_{\text{for}}(t) = i_{\text{for}}(0)e^{-t/\tau_{\text{eq}}} + i_{\text{for}}(\infty)(1 - e^{-t/\tau_{\text{eq}}})$$

- istantanea a $t = 0$ (C e' scarico a $t = 0$): si ha

$$v(0) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = -2 \text{ V}$$

quindi $i_{\text{for}}(0) = -1 \text{ A}$





- studiamo adesso il regime stazionario per $t \rightarrow +\infty$; si ha

$$v(\infty) = \frac{-5 + 2}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{12}{5} \text{ V}$$

e $i_{\text{for}}(\infty) = -12/(5 \times 4) = -3/5 \text{ A}$; quindi

$$i_{\text{for}}(t) = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{18}t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

- il primo termine rappresenta la parte di regime stazionario, mentre il secondo e' la parte transitoria della forzata.

- **Transitori che conseguono ad un evento critico**

- Finora abbiamo studiato risposta libera, forzata, completa per $t > 0$ in evoluzione continua; vogliamo adesso studiare i transitori che conseguono ad un evento critico

- *Evento critico*: apertura o chiusura di uno o più interruttori oppure discontinuità sulla tensione o corrente impressa da uno o più generatori indipendenti di tensione e/o corrente

- cominciamo studiando alcune proprietà delle variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti negli induttori)

- **Proprietà'**: Se la corrente $i_C(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la tensione $v_C(t)$ è continua in (t_a, t_b) ; analogamente, se la tensione $v_L(t)$ è una funzione limitata in $[t_a, t_b]$, allora la corrente $i_L(t)$ è continua in (t_a, t_b)

- cenno alla verifica: sia $t_0 \in (t_a, t_b)$ e $\epsilon > 0$ piccolo; si ha

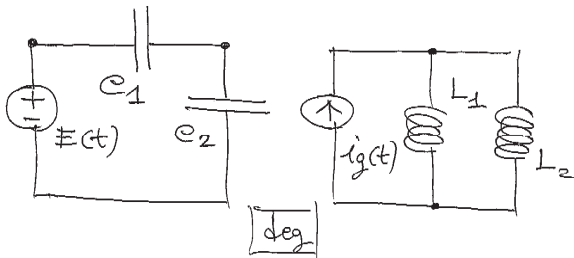
$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| = \left| \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} i_C(t') dt' \right| \leq \frac{1}{C} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} |i_C(t')| dt'$$

quindi essendo $|i_C| \leq M$

$$|v_C(t_0 + \epsilon) - v_C(t_0 - \epsilon)| \leq (2M\epsilon)/C \rightarrow 0 \text{ per } \epsilon \rightarrow 0$$

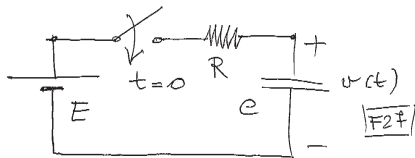
- **Rete RLC degenere:** e' una rete che contiene una maglia di soli condensatori e/o generatori indipendenti ideali di tensione, oppure un taglio di soli induttori e/o generatori indipendenti ideali di corrente

- ad esempio

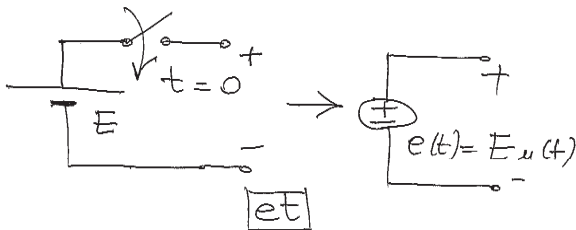


- **Proprieta' di continuita' delle variabili di stato:** in una rete *non degenerare* le variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti degli induttori) sono continue in presenza di eventi critici
 - tale proprieta' deriva dal fatto che in una rete non degenerare le correnti dei condensatori e le tensioni degli induttori sono funzioni limitate in corrispondenza di eventi critici
- nel seguito studiamo transitori supponendo che vi sia un evento critico all'istante critico $t = 0$

- Consideriamo un circuito elementare RC ; supponiamo C scarico per $t < 0$; l'interruttore si chiude a $t = 0$; vogliamo determinare $v_C(t) = v(t)$ per $t \geq 0$



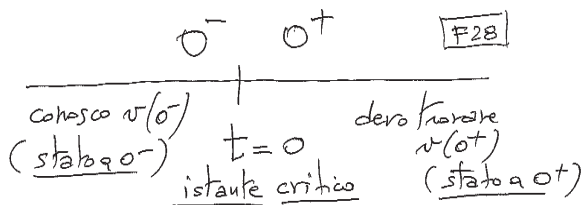
- si noti che chiudere l'interruttore equivale a applicare una tensione a gradino $e(t) = Eu(t)$ con $u(t) = 0$ per $t < 0$ e $u(t) = 1$ per $t > 0$



- per $t > 0$ il circuito soddisfa alla nota equazione

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = ?$$



- notare che conosciamo lo stato a $t = 0^-$, cioè $v_C(0^-) = 0$; però per risolvere l'equazione differenziale devo conoscere lo stato a $t = 0^+$! A tal fine uso il fatto che il circuito *non è degenero* e quindi lo stato si conserva all'istante critico, quindi $v(0^+) = v(0^-) = 0$ e

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0$$

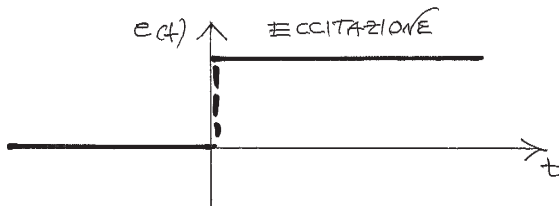
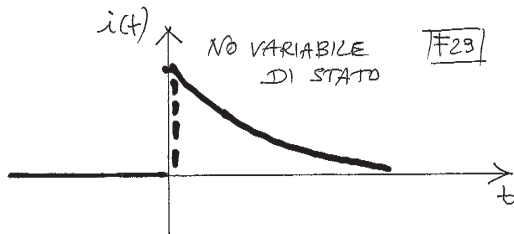
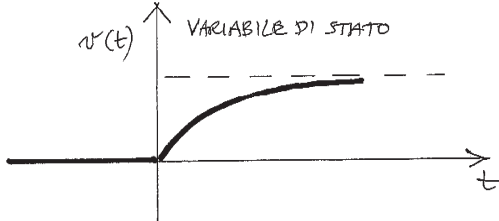
- si tratta quindi di una risposta forzata per cui

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad t > 0$$

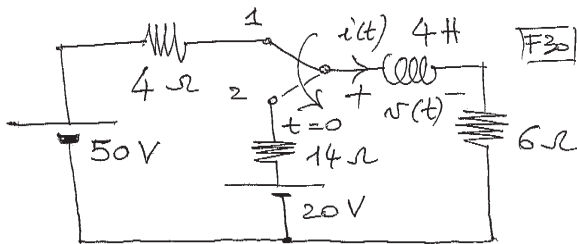
- si ha inoltre

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

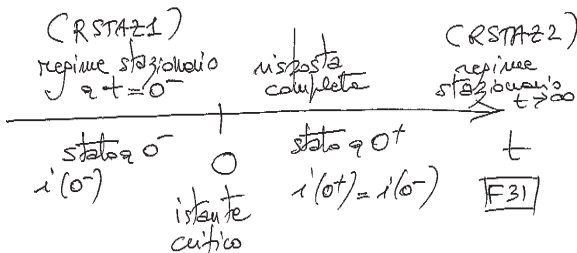
- lo scenario e' quindi rappresentabile come in figura: l'eccitazione $e(t) = Eu(t)$ e' discontinua in $t = 0$, la variabile di stato $v(t)$ e' continua in $t = 0$ mentre $i_C(t)$, che non e' variabile di stato, e' discontinua in $t = 0$; questo e' lo scenario tipico che possiamo aspettarci in una rete non degenera in corrispondenza di un istante critico.



Esempio. L'interruttore, da lungo tempo nella posizione 1, viene commutato a $t = 0$ nella posizione 2. Determinare $i(t)$ e $v(t)$ per $t > 0$



- consideriamo il seguente schema



- determiniamo lo stato a $t = 0^-$ considerando che il circuito ha raggiunto un regime stazionario e quindi L e' un corto circuito a $t = 0^-$; si ha

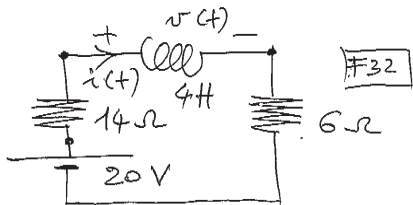
$$i(0^-) = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

- il circuito non e' degenere per cui lo stato si conserva fra 0^- e 0^+ :

$$i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

- per $t > 0$ analizziamo il seguente circuito in evoluzione continua; si ha

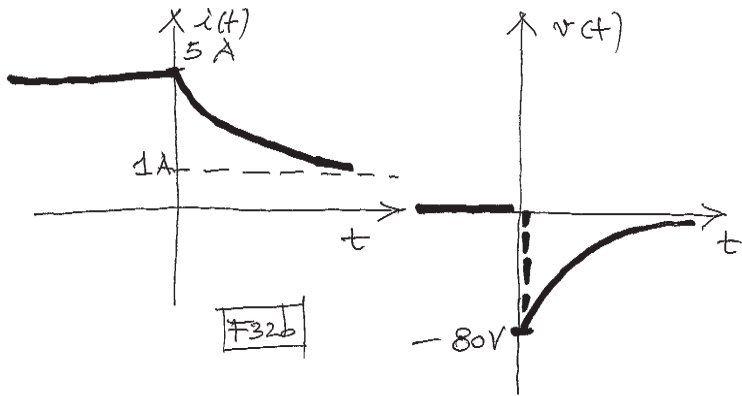
$$i(t) = i(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 5e^{-5t} + 1 - e^{-5t} = 1 + 4e^{-5t}, \quad t > 0$$



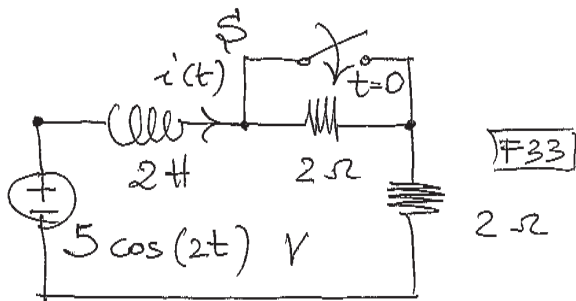
- per $t > 0$ si ha anche

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -80e^{-5t} \text{ V}$$

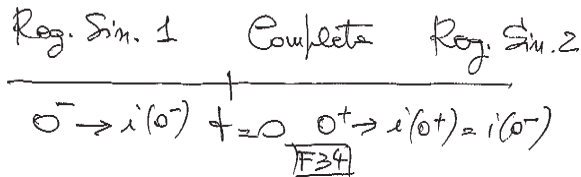
- gli andamenti di $i(t)$ e $v(t)$ sono riportati in figura; notare che $v(t)$ e' discontinua all'istante critico

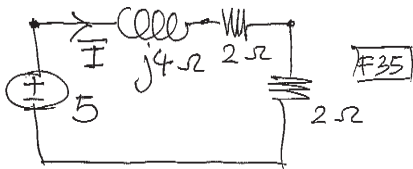


Esempio. L'interruttore S, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, $t > 0$, risposta completa.



- vale il seguente schema





- determiniamo lo stato $i(0^-)$; dal circuito nel dominio dei fasori ottengo

$$\bar{I} = \frac{5}{4 + j4} = \frac{5}{8}(1 - j) \text{ A}$$

quindi

$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}e^{j0}] = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{5}{8} \text{ A}$$

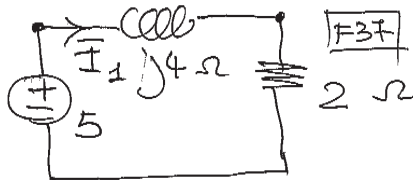
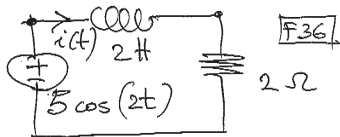
- il circuito non e' degenere per cui

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{5}{8} \text{ A}$$

- per $t > 0$ il circuito diventa quello in figura; si ha $C = L + F$, oppure $C = TC + R$ (regime sinusoidale), quindi

$$i(t) = ke^{-t/\tau} + I_M \cos(2t + \varphi_i)$$

con $\tau = L/R = 1$ sec



- per il secondo regime sinusoidale

$$\bar{I}_1 = \frac{5}{2 + j4} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(2)} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j \arctan(63.4^\circ)}$$

- quindi

$$i(t) = ke^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}$$

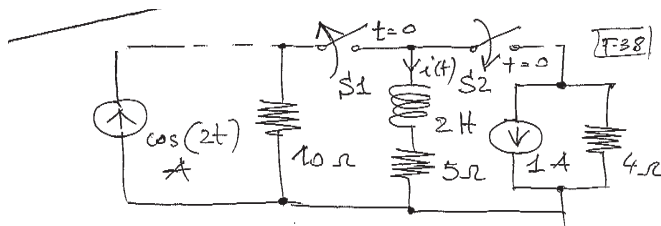
- infine determiniamo k con le condizioni iniziali

$$i(0^+) = \frac{5}{8} = k + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-63.4^\circ)$$

da cui $k \simeq 0.125$. Riassumendo

$$i(t) = 0.125e^{-t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - 63.4^\circ) \text{ A}, \quad t > 0.$$

Esempio. L'interruttore S1, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$, mentre S2, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, per $t \geq 0$

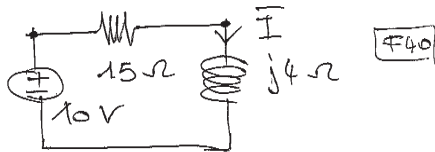
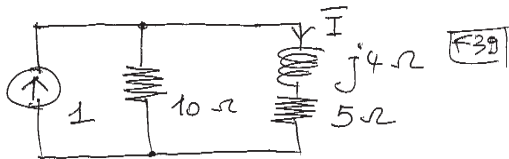


- troviamo lo stato in regime sinusoidale a $t = 0^-$; si ha

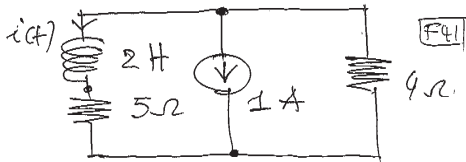
$$\bar{I} = \frac{10}{15 + j4} = \frac{10(15 - j4)}{241} \text{ A}$$

quindi

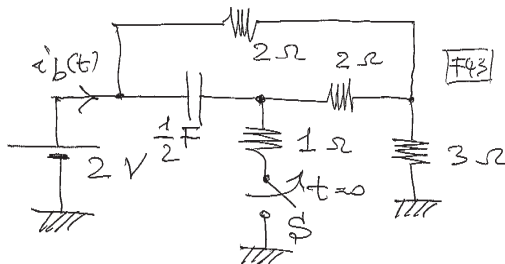
$$i(0^-) = \text{Re}[\bar{I}] = \frac{150}{241} \text{ A}$$



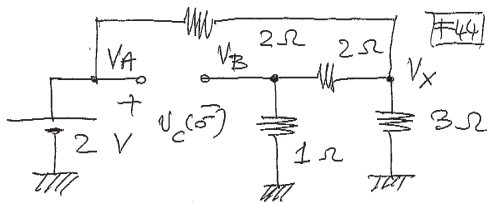
- per $t > 0$ il circuito diviene



Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.
 Determinare $i_b(t)$, per $t \geq 0$, risposta completa



- consideriamo il circuito in regime stazionario a $t = 0^-$



- si ha $v_C(0^-) = V_A - V_B$, inoltre

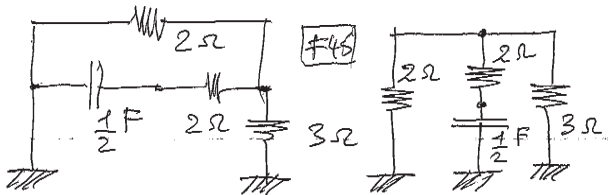
$$V_x = 2 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{7} \text{ V}; \quad V_B = \frac{V_x}{3} = \frac{2}{7} \text{ V}$$

quindi $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12/7 \text{ V}$ (rete non degenere)

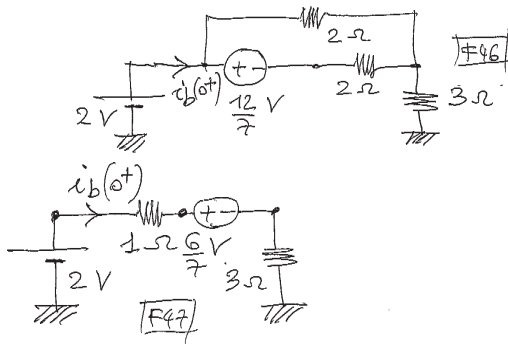
- per $t > 0$ si ha

$$i_b(t) = i_b(0^+)e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}} + i_b(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{eq}}})$$

- per τ_{eq} considero il seguente circuito, per cui $\tau_{eq} = 8/5 \text{ sec}$



- si ha $i_b(\infty) = 2/5$ A (... disegnare il circuito per $t > 0$ e verificare)
- per $i(0^+)$ considero l'istantanea a 0^+



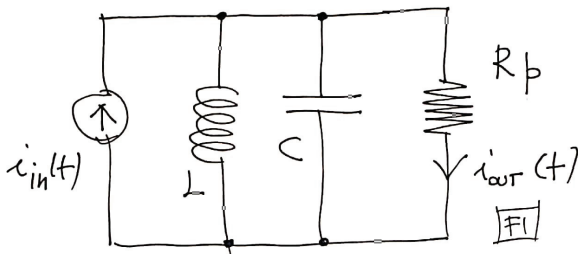
- allora dalla KV ottengo $2 = 4i_b(0^+) + 6/7$, quindi $i_b(0^+) = 2/7$
- A. Riassumendo

$$i_b(t) = \frac{2}{7}e^{-\frac{5t}{8}} + \frac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5t}{8}}) \text{ A}; \quad t > 0.$$

Circuiti risonanti

April 4, 2021

- Circuito risonante parallelo



- punto di vista ingresso uscita. Ingresso

$$i_{in}(t) = I_{in,M}(\omega) \cos(\omega t + \varphi_{in}(\omega)) = 1 \cdot \cos(\omega t)$$

uscita

$$i_{out}(t) = I_{out,M}(\omega) \cos(\omega t + \varphi_{out}(\omega))$$

- sperimentalmente faccio variare ω molto lentamente e trovo risposta in ampiezza

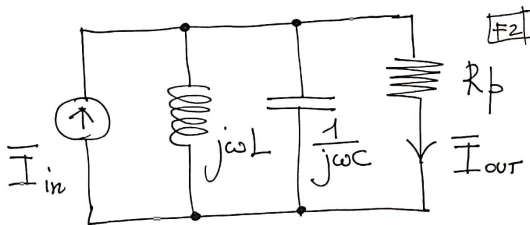
$$I_{\text{out},M}(\omega)$$

e risposta in fase

$$\varphi_{\text{out}}(\omega)$$

- tali andamenti in funzione di ω forniscono la risposta in frequenza del circuito

- nel dominio dei fasori consideriamo il circuito



e definiamo

$$H(\omega) = \frac{\bar{I}_{out}}{\bar{I}_{in}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- si ha

$$\bar{I}_{out} = \bar{I}_{in}H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

e quindi

$$i_{out}(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

da cui si nota che $I_{out}(\omega) = A(\omega)$ e quindi $A(\omega)$ e' la risposta in ampiezza; inoltre $\varphi_{out}(\omega) = \varphi(\omega)$, quindi $\varphi(\omega)$ e' la risposta in fase

- nell'attraversare il circuito l'ampiezza della corrente di ingresso viene moltiplicata per $A(\omega)$; inoltre si ha una rotazione di fase pari a $\varphi(\omega)$
- si ha

$$\bar{I}_{\text{out}} = \frac{\frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_p} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{1 + j\omega R_p C - j\frac{R_p}{\omega L}}$$

- definiamo il fattore di qualita' del circuito risonante parallelo

$$Q = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

con ω_0 in rad/sec pulsazione di risonanza

- otteniamo

$$\bar{I}_{\text{out}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 C R_p - j\frac{\omega_0}{\omega} \frac{R_p}{\omega_0 L}}$$

- infine

$$\frac{\bar{I}_{\text{out}}}{\bar{I}_{\text{out}}} = H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + jQ_p \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

con

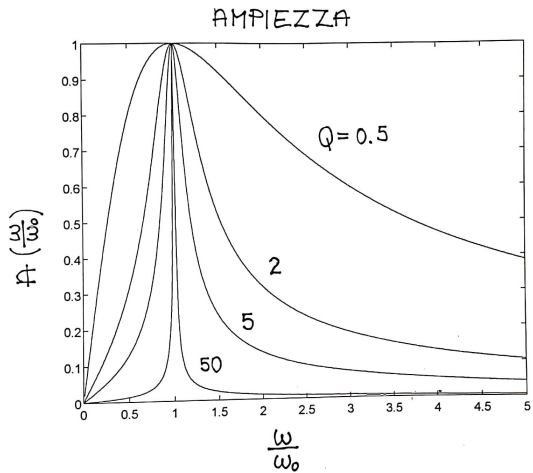
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_p^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

e

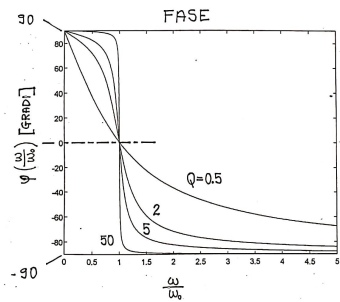
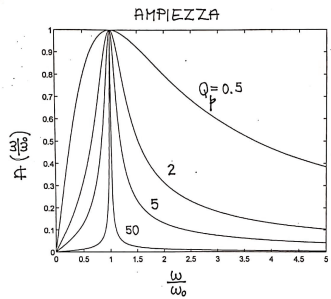
$$\varphi(\omega) = -\arctan \left[Q_p \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

- seguono andamenti della risposta in ampiezza e risposta in fase

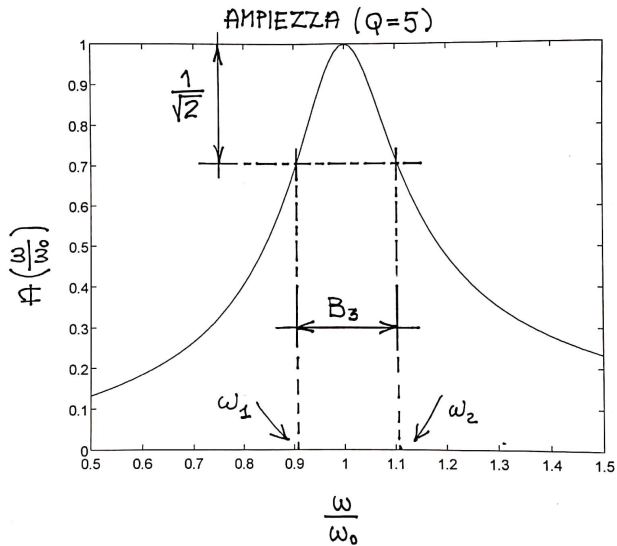
- RISONANZA -



-RISONANZA-



- si tratta di un filtro passa banda la cui selettività' cresce se cresce Q_p



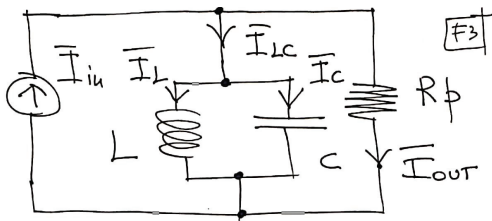
- banda passante a -3 dB: $B_3 = \omega_2 - \omega_1$: per $Q \gg 1$ si ha

$$B_3 \simeq \frac{\omega_0}{Q_p}$$

- deriva dal fatto che $\omega_1 \simeq \omega_0(1 - 1/(2Q_p))$ e
 $\omega_2 \simeq \omega_0(1 + 1/(2Q_p))$

- **il fattore di qualita' Q_p e' quindi un indice della selettivita' del filtro**

- comportamento alla pulsazione di risonanza



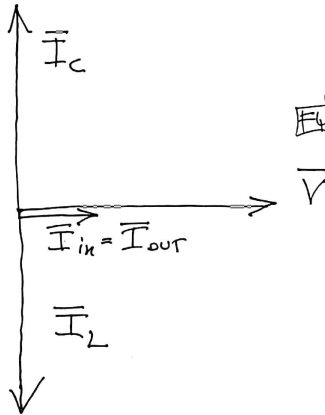
- si ha $H(\omega_0) = 1$, cioè $A(\omega_0) = 1$ e $\varphi(\omega_0) = 0$, quindi $\bar{I}_{out} = \bar{I}_{in}$
- a $\omega = \omega_0$, L e C si bilanciano: sono nel complesso un circuito aperto dato che $\bar{Y}_{LC} = j\omega_0 C - j/(\omega_0 L) = 0$, quindi $\bar{I}_{LC} = 0$
- ciò nonostante, le correnti $\bar{I}_L$ e $\bar{I}_C$ non sono nulle; anzi, se Q_p è elevato, si ha una circolazione di corrente di intensità elevata nella maglia $L - C$
- in effetti si ha $\bar{I}_C = \bar{V}j\omega_0 C = R_p j\omega_0 C$, quindi

$$\bar{I}_C = jQ_p \bar{I}_{in}$$

analogamente

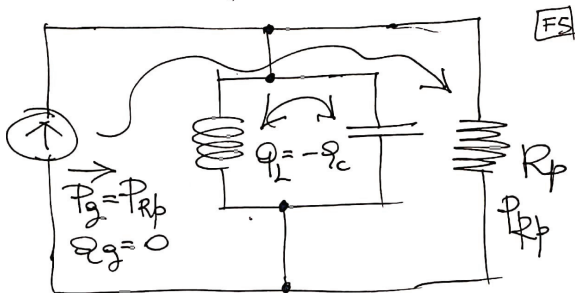
$$\bar{I}_L = -jQ_p \bar{I}_{in}$$

- il diagramma fasoriale alla risonanza e' riportato nella figura che segue



- alla pulsazione di risonanza la corrente in L e in C e' Q_p volte la corrente di ingresso

- Bilancio energetico alla risonanza

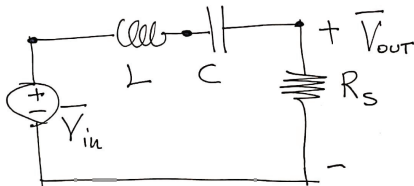


- Per $\omega = \omega_0$ si ha $Q_L = -Q_C$ per cui il generatore eroga solo la potenza attiva assorbita da R_p
- si puo' dimostrare che per $\omega = \omega_0$ si ha

$$Q_p = \omega_0 \frac{E_C^{\text{media}} + E_L^{\text{media}}}{P_{R_p}}$$

dove le medie sono calcolate su un periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

- Circuito risonante serie



- valgono considerazioni perfettamente duali. Si ha

$$\frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + jQ_s \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_s^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left[Q_s \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{1}{\omega_0 C R_s}$$