

Trasformata di Laplace

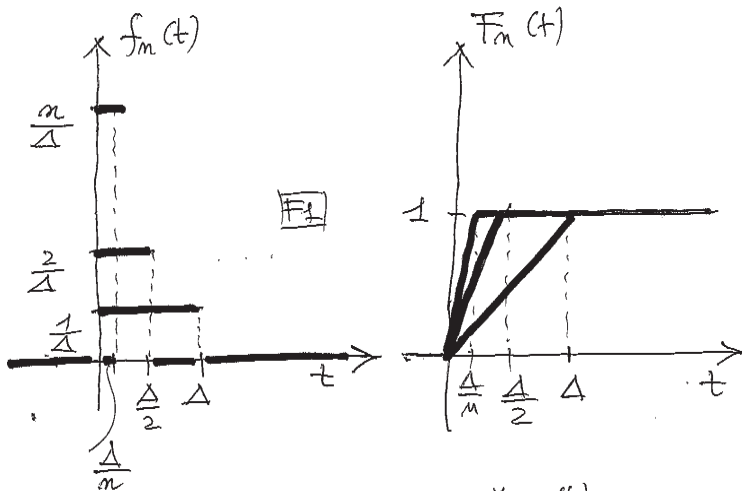
Mauro Forti

May 22, 2020

Preliminari matematici

- **Funzioni impulsive**

- Ricordiamo la definizione in termini euristici della funzione impulsiva $\delta(t)$; consideriamo una successione di funzioni $f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, come mostrato in figura



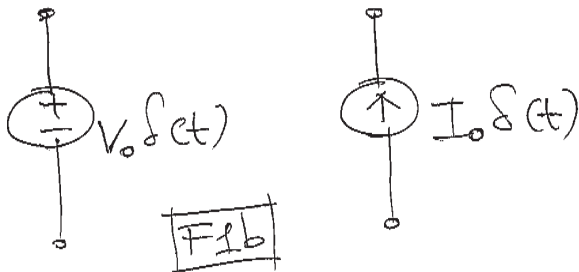
- si ha

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

quindi $\delta(t) = 0$ per $t \neq 0$, $\delta(t)$ singolare in $t = 0$, inoltre l'area sottesa e' unitaria, cioe', per ogni $\epsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

Generatori impulsivi di tensione e corrente



- Con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di tensione che imprime una tensione $V_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di V_0 ; V_0 misura l'area sottesa dall'impulso in un diagramma tensione-tempo, quindi $[V_0] = \text{Volt per secondi}$
- analogamente, con il simbolo in figura indichiamo un generatore impulsivo di corrente che imprime una corrente $I_0 \delta(t)$; e' necessario fare attenzione alle dimensioni di I_0 ; I_0 misura l'area sottesa dall'impulso in un diagramma corrente-tempo, quindi $[I_0] = \text{Ampere per secondi}$

- per quasi ogni (q.o.) t si ha

$$f_n(t) = F'_n(t)$$

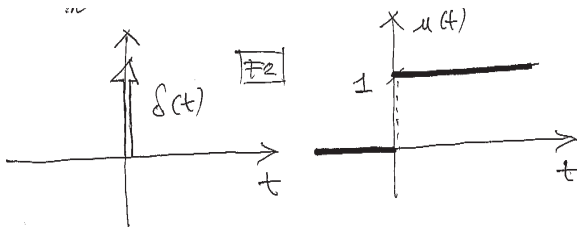
dove $F_n(t)$ e' mostrata in figura; passando al limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(t) = \frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \right) = \frac{d}{dt} u(t)$$

dove $u(t) = 1, t > 0$; $u(t) = 0, t < 0$ e' la funzione gradino unitario

- la funzione (discontinua!) gradino unitario e' quindi derivabile nel senso delle funzioni impulsive e si ha

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$



- per mezzo della δ e' possibile calcolare la derivata generalizzata (nel senso delle funzioni impulsive) di funzioni che hanno discontinuita' di prima specie (di salto)

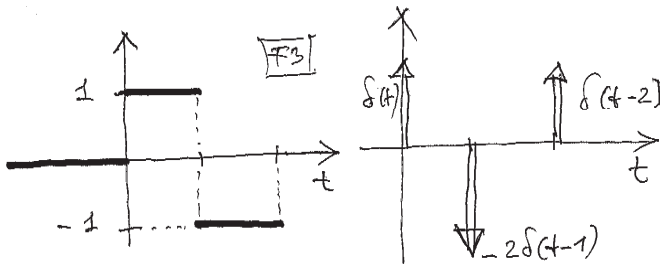
- **Proprieta':** Sia $f(t)$ derivabile (nel senso delle funzioni ordinarie) eccetto che in un numero finito di istanti t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dove vi sono discontinuita' di prima specie (esistono finiti $f(t_i^-)$, $f(t_i^+)$); allora

$$\frac{d}{dt}f = f' + \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)]\delta(t - t_i)$$

dove f' e' la derivata nel senso delle funzioni ordinarie, d/dt la derivata nel senso delle funzioni impulsive, $\sigma_i = f(t_i^+) - f(t_i^-)$ e' il salto di f in t_i e $\delta(t - t_i)$ e' la funzione δ traslata in t_i

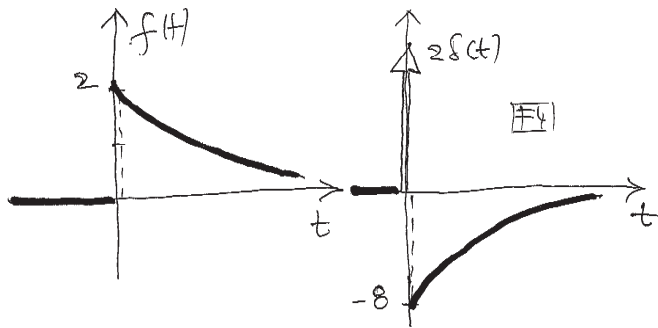
Esempio. Per la funzione in figura si ha, considerando che $f'(t) = 0$ per q.o. t

$$\frac{df}{dt} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$



Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(t) = 2e^{-4t}u(t)$$



- si ha $f'(t) = -8e^{-4t}u(t)$ e quindi

$$\frac{df}{dt} = f'(t) + [f(0^+) - f(0^-)]\delta(t) = -8e^{-4t}u(t) + 2\delta(t)$$

Richiami su trasformata di Laplace

- **Trasformata di Laplace di funzioni ordinarie**

- sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; si definisce Trasformata di Laplace di f la funzione di variabile complessa

$$L[f] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove $s = \sigma + j\omega$ e' la variabile complessa (o di Laplace)

- *Funzioni ordinarie trasformabili secondo Laplace*

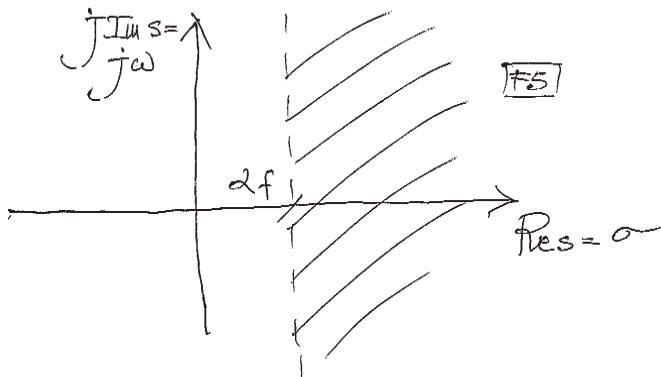
- si considerano nel seguito funzioni ordinarie f di classe $\mathcal{L}$ e cioe'

1) continue a tratti (f ha al piu' discontinuita' di prima specie, cioe' per ogni t esistono finiti $f(t^+)$, $f(t^-)$)

2) di ordine esponenziale, cioe' esistono $M, \beta > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

- in tali ipotesi esiste $\alpha_f \geq 0$ (ascissa di convergenza) tale che $F(s)$ e' ben definita per ogni $\text{Re}[s] = \sigma > \alpha_f$; inoltre $F(s)$ e' analitica per $\text{Re}[s] > \alpha_f$



Trasformata di Laplace di funzioni elementari



$$f(t) = u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

▶ per $s_0 \in \mathbb{C}$

$$f(t) = e^{s_0 t} u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s - s_0}$$

▶ per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$

$$f(t) = \cos(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

▶ per $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$

$$f(t) = \sin(\omega t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

▶ per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

- per $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t) u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

- per $n = 1, 2, \dots$

$$f(t) = t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- per $n = 1$

$$f(t) = t u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

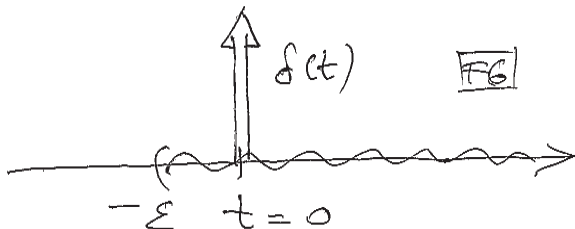
- per $\alpha \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$

$$f(t) = e^{-\alpha t} t^n u(t) \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

Trasformata di Laplace di funzioni impulsive

- Si definisce in termini euristici

$$L_{0-}[\delta(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$



- dato che l'integrazione inizia da un attimo prima di 0, con l'integrale riusciamo a 'catturare' la δ ; in pratica la $\delta(t)$ 'campiona' la funzione e^{-st} in $t = 0$, quindi si ha

$$L_{0-}[\delta(t)] = [e^{-st}]|_{t=0} = 1$$

- per funzioni ordinarie L_{0-} e L coincidono; nel seguito useremo implicitamente L_{0-} quando abbiamo a che fare con funzioni impulsive

Proprieta' della T. Laplace

- 1) Linearita': $f, g \in \mathcal{L}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ implica $af + bg \in \mathcal{L}$ e $L[af + bg] = aL[f] + bL[g]$
- 2) Vediamo l'importante *regola di derivazione*; si ha

$$L_{0-} \left[\frac{df}{dt} \right] = sL_{0-}[f] - f(0^-) = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$$

dove d/dt e' la derivata nel senso delle funzioni impulsive e $f(0^-)$ e' il limite sinistro della f in $t = 0$

- *Osservazione importante.* Una operazione differenziale nel dominio del tempo (d/dt) diventa una operazione algebrica ($s \times$) nel dominio trasformato di Laplace

Esempio. Sappiamo che $\delta(t) = du(t)/dt$; dalla regola di derivazione otteniamo

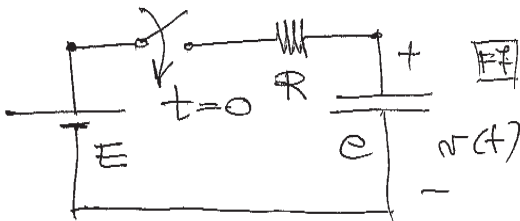
$$L_{0-}[\delta(t)] = sL_{0-}[u(t)] - u(0^-) = sL[u(t)] - u(0^-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1$$

3) regola di integrazione: si ha

$$L\left[\int_{0^-}^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

Transitorio in circuito del primo ordine

- Vogliamo analizzare il transitorio in un circuito RC del primo ordine in parallelo nel dominio del tempo (DT) e nel dominio di Laplace (DL)
- *DT*. Consideriamo il circuito in figura e supponiamo $v(0^-) = V_0$; vogliamo trovare $v(t)$, $t > 0$, con una analisi nel DT; l'analisi consiste di 2 passi



i) analisi all'istante critico (0^- , 0^+); conosco lo stato a $t = 0^-$ ma per risolvere l'equazione differenziale ho bisogno dello stato a $t = 0^+$; si usa il fatto che il circuito e' non degenerare per scrivere

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0$$

ii) analisi in evoluzione continua per $t > 0$; si ha

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E, \quad t > 0$$
$$v(0^+) = V_0$$

- abbiamo quindi una completa e si ha

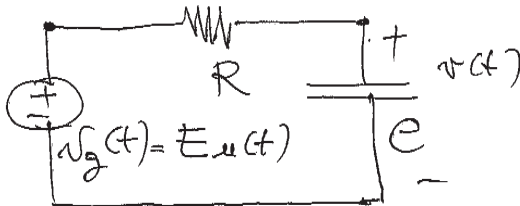
$$v(t) = v_{\text{lib}}(t) + v_{\text{for}}(t) = V_0 e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0$$

con $\tau = RC$

- DL. Considero il circuito a partire da $t = 0^-$ sottoposto a una eccitazione discontinua $v_g(t) = Eu(t)$ e scrivo l'equazione differenziale per $t > 0^-$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_g(t) = Eu(t), \quad t > 0^-$$

$$v(0^-) = V_0$$



- trasformiamo entrambi i membri con Laplace

$$\int_{0^-}^{+\infty} (RC \frac{dv}{dt} + v) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} v_g(t) dt$$

- usando il teorema di derivazione allo 0^-

$$RC[sV(s) - v(0^-)] + V(s) = \frac{E}{s}$$

- quindi nel DL l'equazione differenziale si e' trasformata in una equazione algebrica; inoltre usando il teorema di derivazione allo 0^- sono state automaticamente introdotte le condizioni iniziali sullo stato a $t = 0^-$, $v(0^-) = V_0$ (quelle che conosco)
- risolvendo ottengo

$$V(s) = V_{\text{lib}}(s) + V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{sRC + 1} + \frac{RCV_0}{sRC + 1}$$

- libera:

$$V_{\text{lib}}(s) = \frac{V_0}{s + 1/RC} \longrightarrow v_{\text{lib}}(t) = V_0 e^{-t/RC} u(t)$$

- forzata: si ha

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{\tau} F(s)$$

con

$$F(s) = \frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

- quindi

$$V_{\text{for}}(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}} \longrightarrow v_{\text{for}}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t).$$

Circuiti del secondo ordine

Mauro Forti

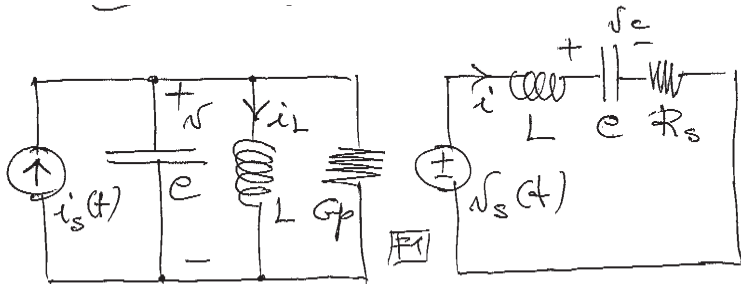
April 21, 2020

Circuiti del Secondo Ordine

- Sono circuiti che contengono due elementi reattivi; il caso più interessante è 1 C e 1 L; li analizziamo prima nel DT e poi nel DL
- DT: risposta in evoluzione continua per $t \geq 0$; libera, forzata a eccitazioni costanti o sinusoidali, completa; transitori che conseguono ad un evento critico a $t = 0$; la trattazione estende quella vista per i circuiti del primo ordine
- DL: verifica con T. Laplace e estensione a eccitazioni più generali

Circuiti RLC del Secondo Ordine (DT)

- Prendiamo in considerazione i due circuiti RLC parallelo e serie e cerchiamo di farne una trattazione unificata nel DT



- per il circuito parallelo ($\parallel$), usando come variabile i_L possiamo scrivere $i_C + i_L + i_G = i_s$, quindi

$$C \frac{dv}{dt} + i_L + G_p v = i_s$$

e, considerando che $v = L di_L / dt$

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_p L \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s, \quad t \geq 0$$

- dualmente, per il circuito serie (Σ), usando come variabile v_C

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R_s C \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s, \quad t \geq 0$$

- entrambe le equaz. diff. affini del secondo ordine sono riconducibili alla forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f, \quad t \geq 0$$

- nel caso ||

$$\alpha = \alpha_p = \frac{G_p}{2C} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 i_s$$

e' il termine forzante

- nel caso Σ

$$\alpha = \alpha_s = \frac{R_s}{2L} \text{ rad/sec}$$

e' il *fattore di smorzamento*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sec}$$

e' la *pulsazione di risonanza* e

$$f = \omega_0^2 v_s$$

e' il termine forzante

Risposta Libera di circuiti RLC

- E' la risposta quando i generatori indipendenti sono disattivati e gli elementi reattivi sono carichi
- Passo 1. troviamo la forma matematica della risposta libera (integrale generale dell'omogenea)
- Passo 2. imponiamo le condizioni iniziali

- consideriamo l'eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0$$

e l'equazione caratteristica associata

$$p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

- le radici caratteristiche valgono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{rad/sec}$$

e sono dette anche *frequenze naturali* in quanto caratterizzano il tipo di risposta naturale di un circuito *RLC*

- consideriamo separatamente i tre casi $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$
- notare che le perdite crescono se cresce α ($G_p v^2$ W nel caso $\parallel$, $R_s i^2$ nel caso Σ)

- $\Delta > 0$. Caso *sovrasmorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff G_p > G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

con G_c *conduttanza critica* in Ohm^{-1}

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \frac{R_s}{2L} > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff R_s > R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

con R_s *resistenza critica* in Ohm

- le due radici caratteristiche sono *reali negative distinte*

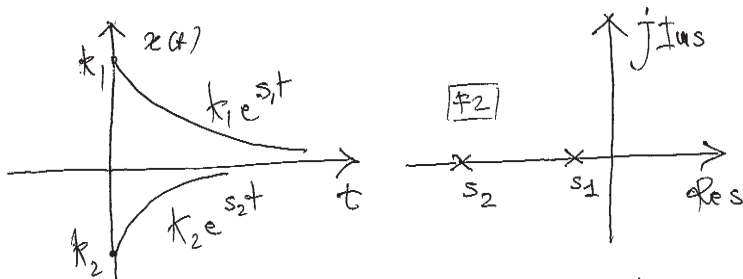
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- $\Delta = 0$. Caso *criticamente smorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p = \omega_0 \iff G_p = G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s = \omega_0 \iff R_s = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- le due radici caratteristiche sono *reali negative coincidenti*

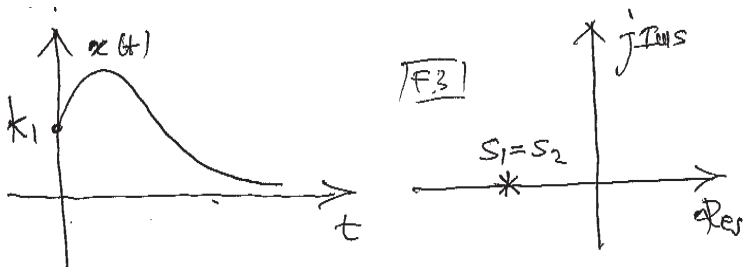
$$s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *aperiodico*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- $\Delta < 0$. Caso *sottosmorzato*
- per un $RLC \parallel$ si ha

$$\alpha_p < \omega_0 \iff G_p < G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha

$$\alpha_s < \omega_0 \iff R_s < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale negativa*

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ &= -\alpha \pm j\beta \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

dove

$$0 < \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

e' la *pulsazione naturale di oscillazione* in rad/sec

- l'integrale generale dell'omogenea e'

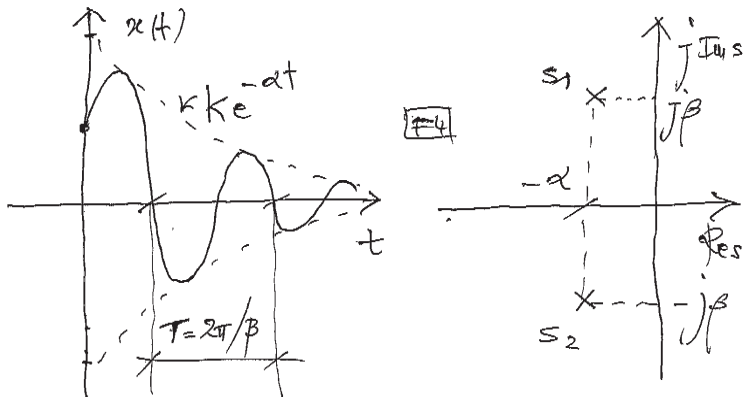
$$x(t) = ke^{-\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è di tipo *oscillatorio smorzato*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- notare che $\alpha = |\operatorname{Re}[s_1]|$ determina quanto velocemente tende a 0 l'involuppo
- $\operatorname{Im}[s_1] = \beta$ individua la pulsazione effettiva di oscillazione all'interno dell'involuppo

- Caso ideale *senza perdite*
- per un $RLC \parallel$ si ha $G_p = 0$ e quindi

$$\alpha_p = 0$$

- per un $RLC \Sigma$ si ha $R_s = 0$ e quindi

$$\alpha_s = 0$$

- le due radici caratteristiche sono *complesse coniugate a parte reale nulla*

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \text{ rad/sec}$$

- l'integrale generale dell'omogenea e'

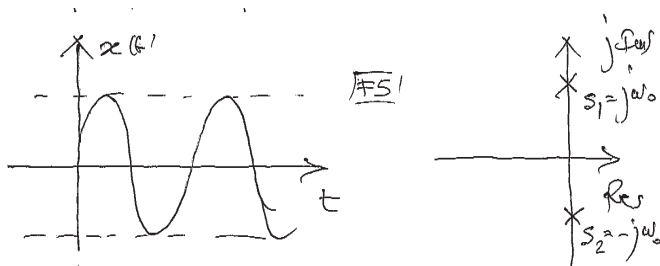
$$x(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t \geq 0$$

con $k, \theta \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie); oppure

$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (costanti arbitrarie)

- la risposta è una *oscillazione alla pulsazione di risonanza ω_0 che non si smorza nel tempo*; in figura un possibile andamento della risposta e la posizione di s_1 e s_2 nel piano complesso detto piano delle frequenze naturali



- come detto le frequenze naturali sono immaginarie pure.

Determinazione delle costanti arbitrarie

- Determiniamo adesso le costanti arbitrarie imponendo le condizioni iniziali sullo stato $v_C(0) = V_0$ e $i_L(0) = I_0$
- illustriamo per un circuito RLC || nel caso sovrasmorzato dove

$$x(t) = i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

- dobbiamo risolvere un problema di Cauchy con le condizioni iniziali $i_L(0) = I_0$ e $\frac{di_L}{dt}(0) = ?$; la seconda è una 'condizione iniziale derivata' che dobbiamo trovare usando l'informazione $v_C(0) = V_0$; per un circuito RLC || si ha $v_L(0) = L \frac{di_L}{dt}(0) = v_C(0)$, quindi

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

- allora, riassumendo, abbiamo il problema di Cauchy con una unica soluzione

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}, \quad t \geq 0$$

$$i_L(0) = I_0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$$

- quindi

$$i_L(0) = I_0 = k_1 + k_2, \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = k_1 s_1 + k_2 s_2$$

e risolvendo

$$k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right); \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right).$$

Esempio. Consideriamo un circuito RLC parallelo con $G_p = 1 \text{ Ohm}^{-1}$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$. Determinare la risposta libera $i_L(t)$ per $i(0) = i_0 = 1 \text{ A}$ e $v_C(0) = V_0 = 1 \text{ V}$

- si ha

$$G_p = 1 < G_c = 2\sqrt{C/L} = 2$$

quindi siamo nel caso sottosmorzato

- $\alpha_p = G_p/2C = 1/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \text{ rad/sec}$ e $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}$; le radici caratteristiche sono

$$s_{1,2} = -\alpha_p \pm j\beta = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/sec}$$

quindi

$$i_L(t) = k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + k_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

con

$$i_L(0) = 1 \text{ A}; \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 1 \text{ A/sec}$$

- imponiamo le condizioni iniziali per determinare k_1 e k_2 :

$$i_L(0) = 1 \implies k_1 = 1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = -\frac{1}{2} + k_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies k_2 = \sqrt{3}$$

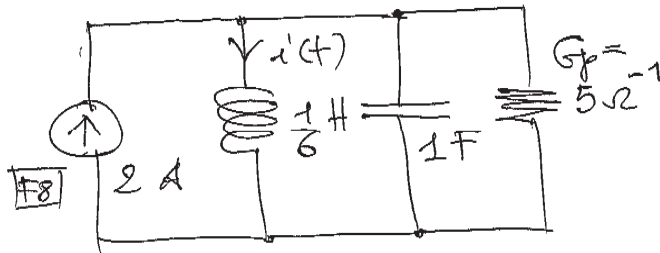
- infine

$$i_L(t) = e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

- puo' anche essere riscritta come (provare!)

$$i_L(t) = 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right), \quad t \geq 0.$$

Esempio. Determinare $i(t)$, risposta forzata, per $t \geq 0$



• la corrente i soddisfa alla eq. diff. non omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 2\omega_0^2$$

con $\alpha = \alpha_p = G_p/2C = 5/2 \text{ rad/sec}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{6} \text{ rad/sec}$

- otteniamo allora il problema di Cauchy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = 12$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- si ha

$$i(t) = i_{\text{omog}}(t) + i_{\text{part.affine}}(t) = i_{\text{trans}}(t) + i_{\text{regime.staz}}(t)$$

- l'equazione caratteristica per l'omogenea e'

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

e le radici caratteristiche sono $s_1 = -2 \text{ rad/sec}$, $s_2 = -3 \text{ rad/sec}$
(caso sovrasmorzato)

- inoltre si ha

$$i_{\text{part.affine}}(t) = \text{costante} = 2$$

quindi

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + 2$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = 0 \text{ A/sec}$$

- imponendo le condizioni iniziali si trova $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, quindi

$$i(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

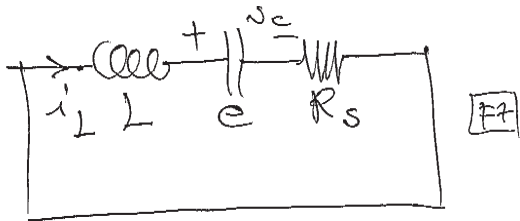
- si ha anche

$$i_{\text{trans}}(t) = -6e^{-2t} + 4e^{-3t}, \quad t \geq 0; \quad i_{\text{regime.staz}}(t) = 2, \quad t \geq 0.$$

Osservazione: frequenze naturali

- Consideriamo un circuito RLC serie. In evoluzione libera v_C soddisfa alla eq. diff. omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0, \quad t \geq 0$$



- consideriamo adesso i_L ; si ha da KV

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C + R_s i_L = 0$$

e quindi

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' + R_s i_L = 0$$

- derivando ottengo

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \quad t \geq 0$$

- tutte le grandezze elettriche del circuito soddisfano in evoluzione libera alla stessa eq. diff. omogenea del secondo ordine; sono caratterizzate quindi dalle stesse frequenze naturali.

Fattore di qualita'

- Il fattore di qualita' di un circuito RLC e' definito come

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

- nel caso $\parallel$ si ha

$$Q = Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p} = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L} \propto R_p$$

- nel caso Σ si ha

$$Q = Q_s = \frac{1}{\omega_0 C R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s} \propto \frac{1}{R_s}$$

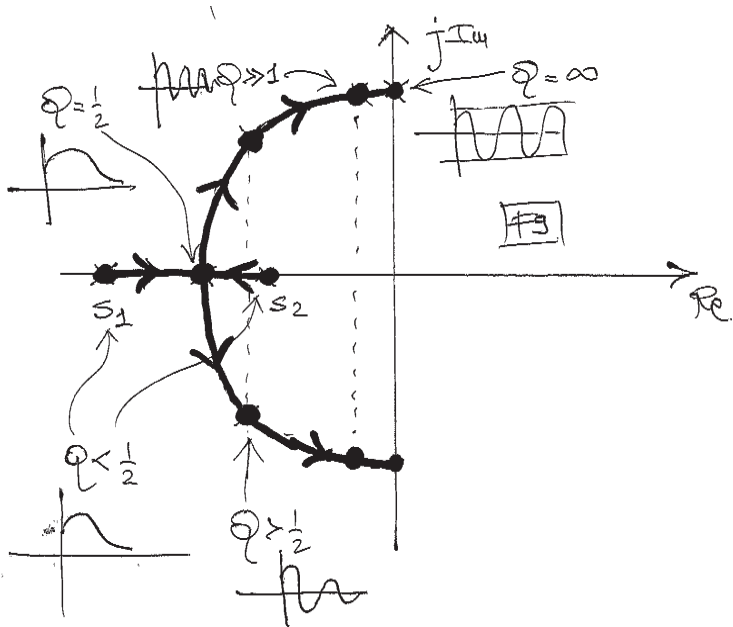
- $Q < 1/2$ caso sovrasmorzato; $Q = 1/2$ caso di morzamento critico; $Q > 1/2$ caso sottosmorzato; $Q \rightarrow +\infty$ caso senza perdite

Luogo delle frequenze naturali

- Le frequenze naturali sono le radici di

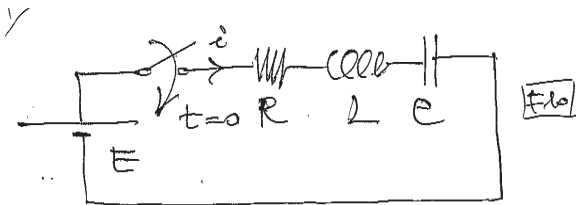
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

- consideriamo un circuito RLC $\parallel$, supponiamo L, C fissi e facciamo crescere R_p , quindi cresce Q_p , decresce α_p (decrescono perdite)
- si ha $s_1 \cdot s_2 = \omega_0^2 = \text{costante}$, mentre $s_1 + s_2 = 2\alpha_p$ decresce
- al variare di R_p le due frequenze naturali descrivono il luogo disegnato in figura; nella figura e' anche riportato qualitativamente il corrispondente andamento delle grandezze in evoluzione libera



Analisi di un circuito RLC in parallelo nel DT e nel DL

- Vogliamo determinare $i(t)$, risposta forzata, prima nel DT e poi nel DL, supponendo di essere nel caso sottosmorzato; per risposta forzata si intende la risposta allo stato iniziale nullo, e cioè' $i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$



- Nel DT procediamo in 2 passi:
i) analisi all'istante critico (0^- , 0^+): dato che il circuito non e' degenere si conservano le variabili di stato, quindi

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0; \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

ii) analisi in evoluzione continua per $t \geq 0$; usando i come variabile si ottiene

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(t') dt' + v_C(0^+) = E, \quad t \geq 0$$

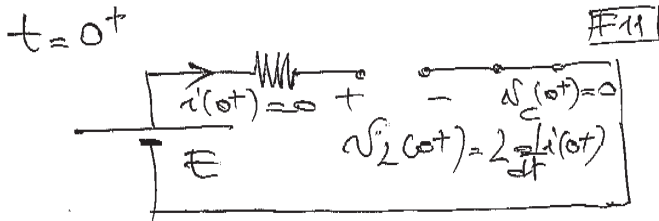
e derivando

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i(0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

dove per trovare la condizione iniziale derivata abbiamo fatto riferimento al circuito a $t = 0^+$ riportato in figura



- nel caso sottosmorzato $s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$ e

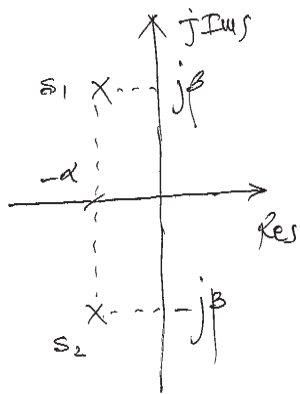
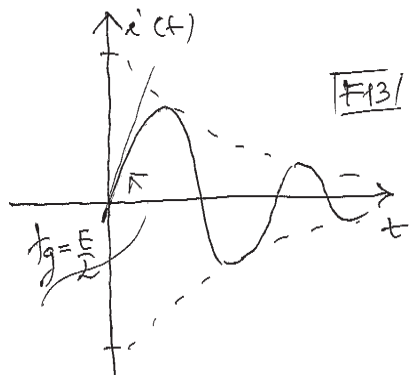
$$i(t) = k_1 e^{-\alpha_s t} \cos(\beta t) + k_2 e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

- si ha $i(0^+) = 0$, quindi $k_1 = 0$; inoltre

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \beta k_2 = \frac{E}{L}$$

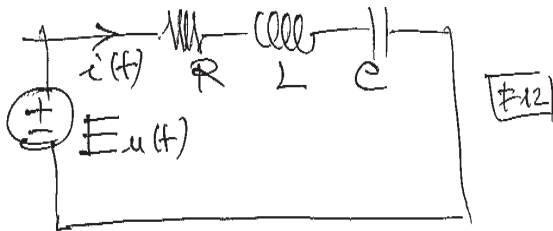
quindi $k_2 = E/\beta L$; concludendo

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0.$$



- Verifichiamo il risultato ottenuto con la TL; consideriamo il seguente circuito a partire da $t = 0^-$ e scriviamo l'equazione integro-differenziale a cui soddisfa i ; si ha

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(t') dt' + v_C(0^-) = Eu(t), \quad t > 0^-$$



- trasformando con Laplace ottengo una equazione algebrica in $I(s)$ in cui appaiono esplicitamente le condizioni iniziali sulle variabili di stato a $t = 0^-$

$$L[sI(s) - i(0^-)] + RI(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{s}$$

da cui

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) + I_{\text{lib}}(s) = \frac{\frac{E}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

- risposta forzata ($i(0^-) = 0$, $v_C(0^-) = 0$)

$$I(s) = I_{\text{for}}(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2}$$

• ne consegue che *i poli di $I(s)$ coincidono con le radici caratteristiche $s_{1,2}$ dell'equazione omogenea*; in questo caso i poli sono complessi coniugati e a parte reale negativa

$$s_{1,2} = -\alpha_s \pm j\beta$$

- per antitrasformare consideriamo che

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\alpha_s s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \\
 &= \frac{1}{(s - (-\alpha_s + j\beta))(s - (-\alpha_s - j\beta))} \\
 &= \frac{A}{s - (-\alpha_s + j\beta)} + \frac{B}{s - (-\alpha_s - j\beta)}
 \end{aligned}$$

- dato che $F(s)$ e' razionale e a coefficienti reali, risulta $B = A^*$; allora otteniamo

$$i(t) = \frac{E}{L} \left[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t} + A^* e^{(-\alpha_s - j\beta)t} \right] u(t) = \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t)$$

- calcoliamo il coefficiente A (residuo di F nel polo semplice $-\alpha + j\beta$); si ha

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_s + j\beta} (s - (-\alpha_s + j\beta)) F(s) \\ &= \frac{1}{-\alpha_s + j\beta - (-\alpha_s - j\beta)} \\ &= \frac{1}{j2\beta} = -\frac{j}{2\beta} \end{aligned}$$

- infine otteniamo

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}[A e^{(-\alpha_s + j\beta)t}] u(t) \\ &= \frac{2E}{L} \operatorname{Re}\left[\frac{-j}{2\beta} e^{(-\alpha_s + j\beta)t}\right] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \operatorname{Re}[-j(\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))] u(t) \\ &= \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha_s t} \sin(\beta t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Metodo simbolico di Laplace

Mauro Forti

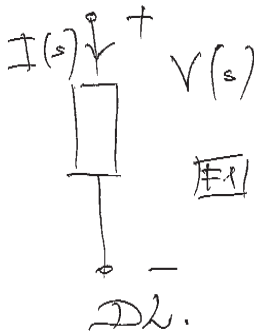
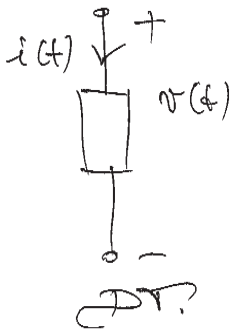
April 25, 2020

Metodo simbolico di Laplace

- E' un metodo applicabile a circuiti lineari e tempo invarianti (LTI). Consiste di due passi:
 - i) trovo le relazioni costitutive dei bipoli nel dominio di Laplace (DL)
 - ii) determino le leggi di Kirchhoff nel dominio di LaplaceOtengo in questo modo un circuito simbolico nel DL che e' senza memoria e puo' essere quindi analizzato con i metodi delle reti resistive visti nella Parte 1

Relazioni costitutive nel DL

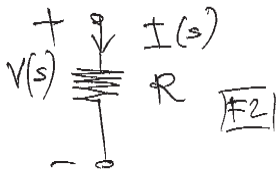
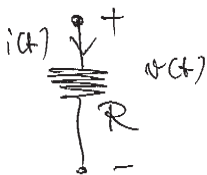
- Consideriamo un bipolo nel dominio del tempo (DT) a cui è applicata $v(t)$ e in cui fluisce $i(t)$; supponiamo $v(t)$ e $i(t)$ trasformabili secondo Laplace; consideriamo poi un bipolo ai cui morsetti è applicato simbolicamente $V(s) = L[v(t)]$ e in cui fluisce $I(s) = L[i(t)]$; per relazione costitutiva nel DL si intende la relazione che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$



- *Resistore ideale*: nel DT soddisfa alla legge di Ohm
 $v(t) = Ri(t)$; per la linearita' della trasf.ta di Laplace si ottiene

$$V(s) = RI(s)$$

quindi un resistore continua a essere definito da una resistenza nel DL



- *Condensatore ideale*: nel DT soddisfa a $i(t) = Cdv(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

$$I(s) = C(sV(s) - v(0^-)) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

- nel DL il condensatore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico
- *C scarico a $t = 0^-$* . Se $v(0^-) = 0$ allora si ha

$$I(s) = sCV(s); \quad V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

- definiamo

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad Ohm$$

impedenza di C nel DL e

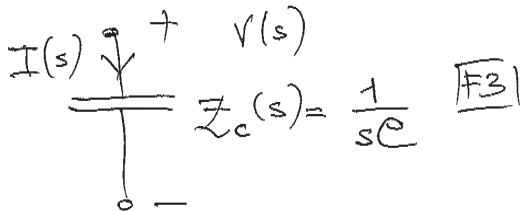
$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = sC \quad Ohm^{-1}$$

ammettenza di C nel DL

• allora un C scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_C(s) = 1/sC$ oppure una ammettenza $Y_C(s) = sC$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_C(s)}; \quad I(s) = Y_C(s)V(s)$$

e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



- C carico a $t = 0^-$. Se $v(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

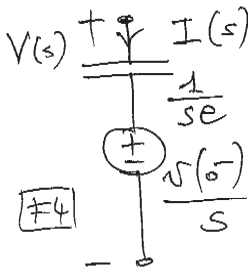
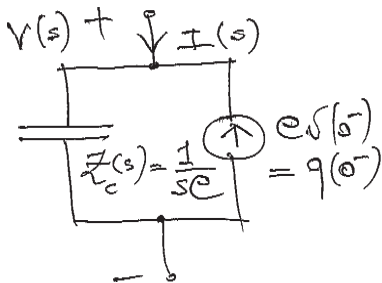
$$I(s) = \frac{V(s)}{\frac{1}{sC}} - Cv(0^-)$$

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- altrimenti possiamo scrivere

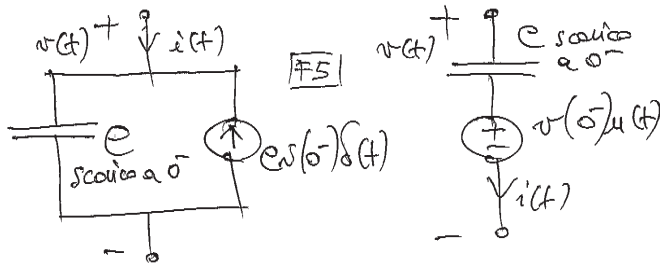
$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



- per un C carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di C a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un C carico a $t = 0^-$ del DT



- *Induttore ideale*: nel DT soddisfa a $v(t) = L di(t)/dt$; trasformando con Laplace e usando la formula di derivazione allo 0^- otteniamo

$$V(s) = L(sI(s) - i(0^-)) = sLI(s) - Li(0^-)$$

- nel DL l'induttore e' un elemento *senza memoria* in quanto soddisfa a una relazione costitutiva di tipo algebrico
- *L scarico* a $t = 0^-$. Se $i(0^-) = 0$ allora si ha

$$V(s) = sLI(s); \quad I(s) = \frac{1}{sL} V(s)$$

- definiamo

$$Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad Ohm$$

impedenza di L nel DL e

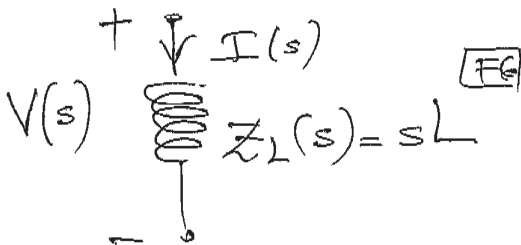
$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL} \quad Ohm^{-1}$$

ammettenza di L nel DL

- allora un L scarico a $t = 0^-$ e' una impedenza $Z_L(s) = sL$ oppure una ammettenza $Y_L(s) = 1/sL$, soddisfa alla 'legge di Ohm simbolica'

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L(s)}; \quad I(s) = Y_L(s)V(s)$$

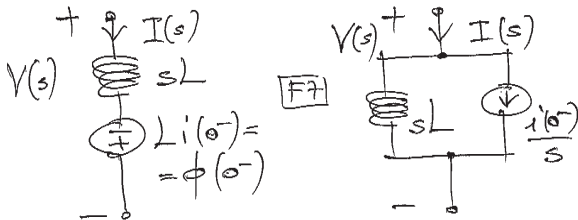
e puo' essere rappresentato simbolicamente nel DL come in figura



- L carico a $t = 0^-$. Se $i(0^-) \neq 0$ possiamo scrivere

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

e ottenere il circuito equivalente serie in figura



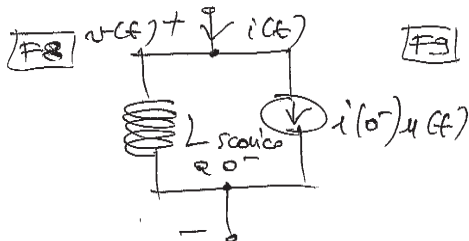
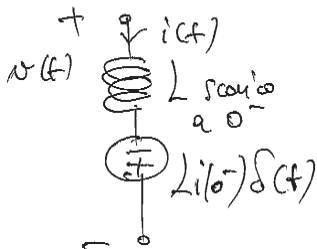
- altrimenti possiamo scrivere

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

e ottenere il circuito equivalente parallelo in figura

- per un L carico a $t = 0^-$ compaiono nel circuito equivalente dei generatori indipendenti proporzionali allo stato di L a $t = 0^-$; in altri termini, nei circuiti equivalenti nel DL appaiono esplicitamente le condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato sotto forma di opportuni generatori indipendenti

- 'antitrasformando' ottengo i seguenti circuiti equivalenti per un L carico a $t = 0^-$ del DT



Leggi di Kirchhoff nel DL

- Consideriamo la KV lungo una maglia di un circuito

$$v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0, \quad t \geq 0$$

- se le tensioni sono trasformabili secondo Laplace, per la linearità della Trasf. di Laplace otteniamo

$$V_1(s) - V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) = 0$$

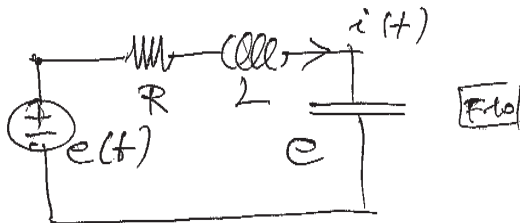
quindi *le trasformate di Laplace delle tensioni soddisfano alla KV*

- analogamente *le trasformate di Laplace delle correnti soddisfano alla KI*

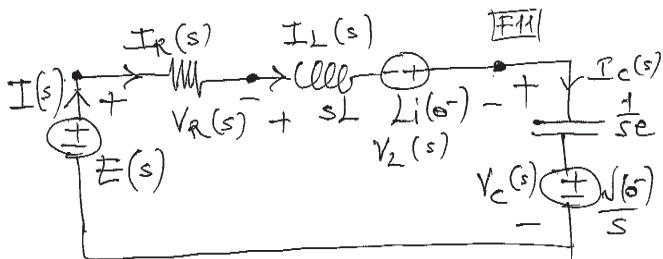
- illustriamo di seguito con degli esempi come si applica il metodo simbolico di Laplace per l'analisi di circuiti LTI.

Esempio. Riconsideriamo il circuito RLC serie e supponiamo

$$i(0^-) = i_0, \quad v(0^-) = v_0$$



- il circuito simbolico di Laplace e' in figura; tale circuito e' senza memoria e puo' essere analizzato con i metodi delle reti resistive



- si ha

$$KI : I(s) = I_R(s) = I_C(s) = I_L(s); \quad KV : E(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

quindi ottengo

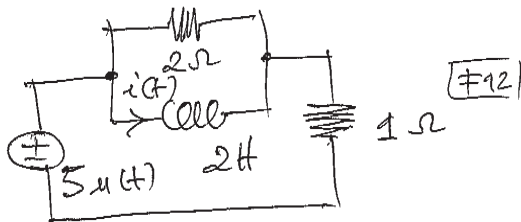
$$E(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

da cui trovo per $I(s)$ lo stesso risultato ottenuto in precedenza scrivendo prima equazione integro differenziale e trasformando tale equazione, cioè'

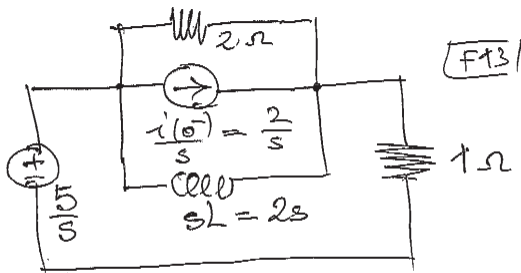
$$I(s) = \frac{E(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v(0^-)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

- notare che il generatore indipendente $E(s)$ e' quello che da' luogo alla risposta forzata, mentre i due generatori legati alle condizioni iniziali di L e C danno luogo alla risposta libera.

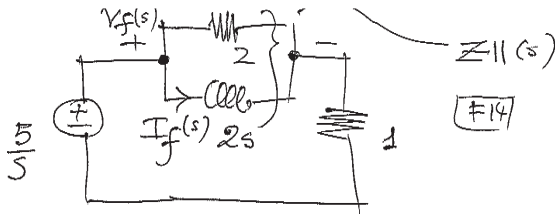
Esempio. Determinare $i(t)$, parte libera e parte forzata, usando il metodo simbolico di Laplace; e' noto che $i(0^-) = 2 \text{ A}$



- consideriamo il circuito simbolico che segue dove abbiamo usato il modello parallelo per l'induttore carico



- forzata: dobbiamo analizzare il seguente circuito



- si ha

$$Z_{||}(s) = 2 \parallel 2s = \frac{2s}{s+1}$$

e dalla regola del partitore di tensione

$$V_f(s) = \frac{5}{s} \frac{Z_{||}}{Z_{||} + 1} = \frac{10}{3s+1}$$

- quindi

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{2s} = \frac{5}{3} \frac{1}{s} \frac{1}{s+\frac{1}{3}} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+\frac{1}{3}}$$

- antitrasformando

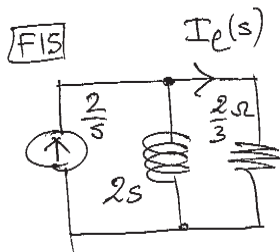
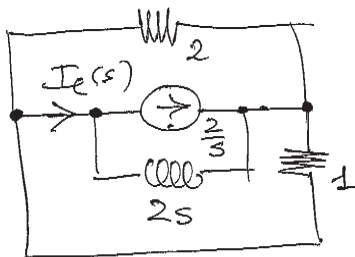
$$i_f(t) = 5(1 - e^{-t/3})u(t)$$

- libera: consideriamo il circuito che segue; dalla regola del partitore di corrente

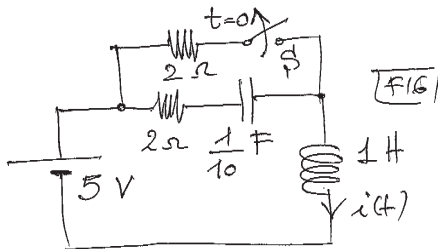
$$I_I(s) = \frac{2}{s} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2s}} = \frac{2}{s + \frac{1}{3}}$$

quindi

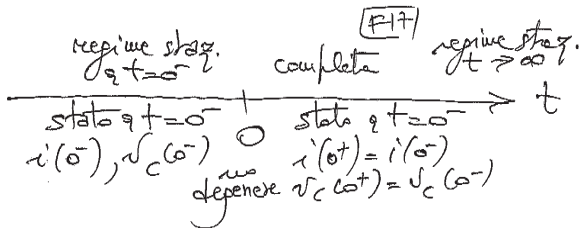
$$i_I(t) = 2e^{-t/3}u(t)$$



Esempio. L'interruttore S, chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$. Determinare $i(t)$, $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel DT. Verificare il risultato ottenuto a partire da $t = 0^-$ usando il metodo simbolico di Laplace

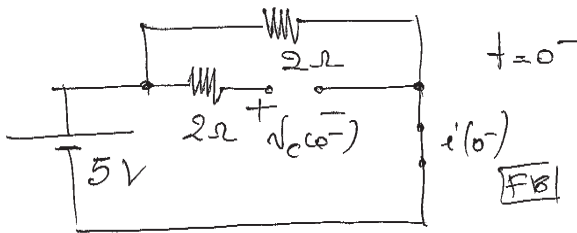


- *Dominio del tempo:* facciamo riferimento al seguente schema



- lo stato a $t = 0^-$ in regime stazionario si determina con il seguente circuito; si ha

$$v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$



- il circuito non e' degenere per cui

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 5 \text{ V}; \quad i(0^+) = i(0^-) = 5/2 \text{ A}$$

- allora

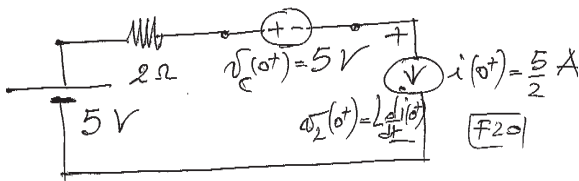
$$TC : i_{tc} = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

- si ha poi evidentemente

$$i_{\text{reg.staz}}(t) = 0$$

- condizioni iniziali per il problema di Cauchy: si ha $i(0^+) = 5/2$ A; per determinare $di(0^+)/dt$ considero l'istantanea del circuito a $t = 0^+$; si ottiene dalla KV

$$5 = 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + v_L(0^+); \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -5 \text{ A/sec}$$



- la completa soddisfa quindi al problema

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(3t) + Be^{-t} \sin(3t)$$

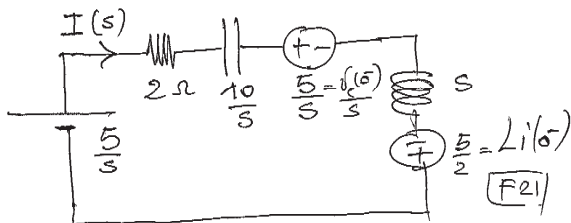
$$i(0^+) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -5$$

- imponendo le condizioni iniziali ottengo $A = 5/2$ e $B = -5/6$.
Riassumendo

$$i(t) = \frac{5}{2}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0.$$

- *Dominio di Laplace*: tenendo conto delle condizioni iniziali a $t = 0^-$ sullo stato otteniamo il circuito simbolico che segue



- dalla KV si ha

$$\frac{5}{s} = 2I(s) + \frac{10}{s}I(s) + \frac{5}{s} + sI(s) - \frac{5}{2}$$

da cui

$$I(s) = \frac{5}{2} \frac{s}{s^2 + 2s + 10}$$

- i poli di $I(s)$ sono $s_{1,2} = -1 \pm j3$ rad/sec e coincidono con le frequenze naturali del circuito

- per antitrasformare scomponiamo $I(s)$ in fratti semplici

$$I(s) = \frac{K}{s - (-1 + j3)} + \frac{K^*}{s - (-1 - j3)}$$

con

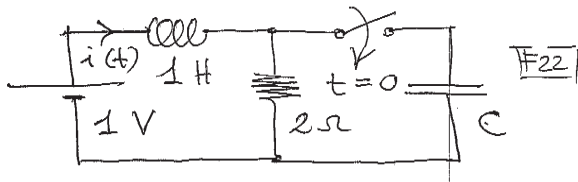
$$K = \lim_{s \rightarrow -1 + j3} (s - (-1 + j3))I(s) = \frac{5}{12}(3 + j)$$

- allora

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1 + j3)t}u(t) + \frac{5}{12}(3 - j)e^{(-1 - j3)t}u(t) \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{5}{12}(3 + j)e^{(-1 + j3)t}\right]u(t) \\ &= \frac{5}{6}e^{-t}\operatorname{Re}[(3 + j)(\cos(3t) + j\sin(3t))]u(t) \\ &= \frac{5}{2}e^{-t}\cos(3t) - \frac{5}{6}e^{-t}\sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Esempio. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$, per $t \geq 0$, con una analisi del DT.

Verificare il risultato a partire da $t = 0^-$ con il metodo simbolico di Laplace. Per $t > 0$ la pulsazione di risonanza e' pari a 2 volte il fattore di smorzamento. Il condensatore e' scarico a $t = 0^-$



• DT: per $t > 0$, *in evoluzione libera*, si tratta di un circuito RLC parallelo; allora

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{C}} = 2\alpha_p = 2\frac{G_p}{2C} = 2\frac{1}{2} \frac{1}{2C}$$

quindi $\sqrt{C} = 1/2$ e $C = 1/4$ F

• inoltre

$$\alpha_p = \frac{G_p}{2C} = 1 \text{ rad/sec}; \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_p^2} = \sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

- per $t > 0$ le frequenze naturali sono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ rad/sec
 - si ha $C = TC + \text{Regime stazionario}$, con $i_{\text{reg.staz.}}(t) = 1/2$ A;
- allora

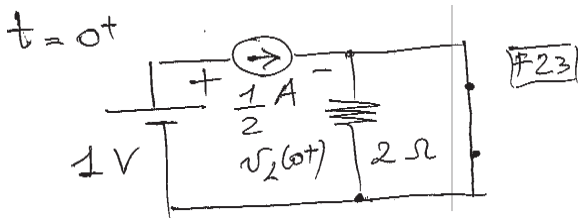
$$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$

- analisi a $t = 0^-$; si ha $i(0^-) = 1/2$ A, $v_C(0^-) = 0$ V, quindi, dato che il circuito e' non degenere

$$i(0^+) = i(0^-) = 1/2 \text{ A}; \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

- a $t = 0^+$ otteniamo

$$v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{di(0^+)}{dt} = 1 \text{ V}$$



- quindi dobbiamo risolvere

$$i(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + Be^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}$$

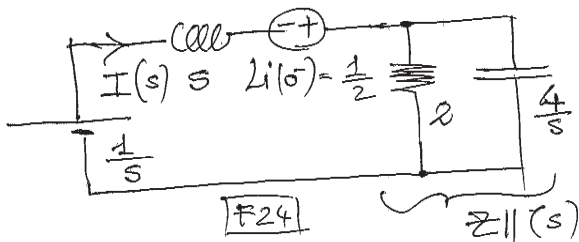
$$i(0^+) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 1$$

da cui ottengo $A = 0$ e $B = \sqrt{3}/3$, quindi

$$i(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}, \quad A; \quad t \geq 0.$$

DL: il circuito simbolico e' rappresentato in figura



- si ha $Z_{||}(s) = 2 \parallel (4/s) = 4/(s+2)$ Ohm, quindi KV implica

$$\frac{1}{s} = sI(s) - \frac{1}{2} + \frac{4}{s+2}I(s)$$

- risolvendo si ottiene

$$I(s) = \frac{1}{2s} \frac{s^2 + 4s + 4}{s^2 + 2s + 4}$$

i cui poli sono $s = 0$, $s = -1 \pm j\sqrt{3}$; quindi

$$I(s) = \frac{K}{s} + \frac{H}{s - (-1 + j\sqrt{3})} + \frac{H^*}{s - (-1 - j\sqrt{3})}$$

- si ha

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \frac{1}{2}; H = \lim_{s \rightarrow -1+j\sqrt{3}} (s - (-1+j\sqrt{3}))I(s) = \frac{1}{j2\sqrt{3}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{j2\sqrt{3}}e^{(-1+j\sqrt{3})t}u(t) + \frac{1}{-j2\sqrt{3}}e^{(-1-j\sqrt{3})t}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\frac{e^{j\sqrt{3}t} - e^{-j\sqrt{3}t}}{j2}u(t) \\ &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)u(t), \quad A. \end{aligned}$$

Funzioni di rete

Mauro Forti

April 28, 2020

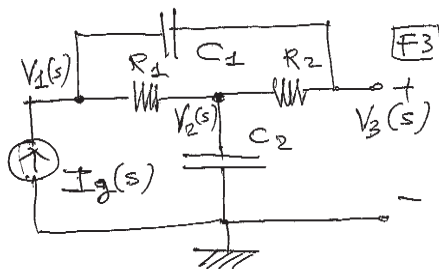
- Il punto di vista ingresso-uscita

Per un circuito lineare e tempo invariante (LTI) con un ingresso (causa, eccitazione) e una uscita (effetto, risposta) definiamo funzione di rete nel dominio di Laplace

$$H(s) = \frac{\text{trasformata di Laplace dell'effetto (risposta forzata)}}{\text{trasformata di Laplace della causa}}$$

- **Esempio.** Determinare la funzione di rete

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)}$$



- consideriamo il circuito simbolico nel dominio di Laplace con gli elementi reattivi scarichi a $t = 0^-$ (risposta forzata)

• analizzando con il metodo dei nodi otteniamo un sistema risolvente del tipo $\mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}(s)$ e cioè'

$$\begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & -sC_1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & -G_2 \\ -sC_1 & -G_2 & G_2 + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• quindi

$$\begin{aligned} V_3(s) &= \frac{\det \begin{pmatrix} G_1 + sC_1 & -G_1 & I_g(s) \\ -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 & 0 \\ -sC_1 & -G_2 & 0 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 + sC_2 \\ -sC_1 & -G_2 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Y}(s)} I_g(s) \\ &= H(s) I_g(s) \end{aligned}$$

- svolgendo i conti otteniamo

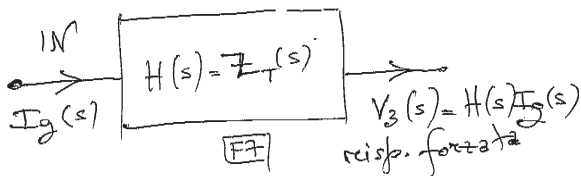
$$H(s) = \frac{s^2 + (\frac{G_1}{C_2} + \frac{G_2}{C_2})s + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}{(G_1 + G_2)s^2 + \frac{G_1 G_2}{C_1} s}$$

- nel dominio di Laplace il circuito stabilisce un 'legame di proporzionalita' fra ingresso e uscita (risposta forzata). La 'costante di proporzionalita' e' una funzione $H(s)$ della variabile s detta funzione di rete del circuito
- si puo' dimostrare in generale che per un circuito lineare e tempo invariante

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e' una funzione razionale a coefficienti reali; inoltre $H(s)$ non dipende dalla grandezza impressa dalla eccitazione

- nel caso considerato il circuito puo' essere rappresentato come una scatolina che si caratterizza completamente dal punto di vista ingresso-uscita (risposta forzata) con $H(s)$; se cambia eccitazione ($I_{g1}(s)$), $H(s)$ non cambia e la nuova risposta forzata e' $H(s)I_{g1}(s)$

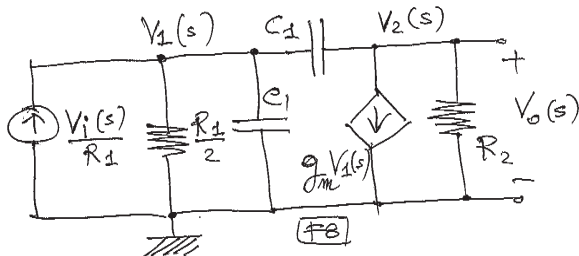


- in questo caso

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{I_g(s)} = Z_T(s)$$

e' detta 'impedenza di trasferimento'.

- **Esempio.** Determinare la funzione di trasferimento in tensione $T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$



- dalle KI ai nodi 1 e 2 otteniamo

$$V_1(s) \left(\frac{2}{R_1} + sC_1 \right) + (V_1(s) - V_2(s))sC_1 = \frac{V_i(s)}{R_1}$$

$$\frac{V_2(s)}{R_2} + (V_2(s) - V_1(s))sC_1 + g_m V_1(s) = 0$$

- sotto forma di sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{R_1} + 2sC_1 & -sC_1 \\ g_m - sC_1 & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_i(s)}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

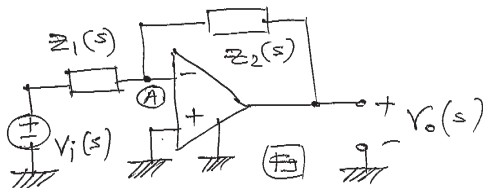
- risolvendo ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{C_1}{R_1} - \frac{g_m}{R_1}}{3C_1^2 s^2 + (\frac{2C_1}{R_1} + C_1 g_m)s + \frac{2}{R_1 R_2}}.$$

Funzioni di rete di circuiti con amplificatori operazionali

Esempio. Per il circuito in figura, scrivendo una KI al nodo A ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



- se $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = R_2$, si ha $T_v(s) = -R_2/R_1$ (amplificatore invertente)
- se $Z_1(s) = R$, $Z_2(s) = 1/sC$, si ha

$$T_v(s) = -\frac{1}{sRC}$$

che corrisponde ad un integratore invertente

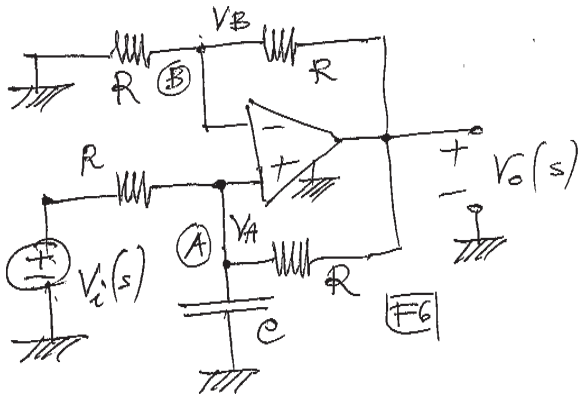
Esempio. Per il circuito in figura si ha $V_B(s) = V_0(s)/2 = V_A(s)$ e

$$\frac{V_0(s)}{2} \left(\frac{2}{R} + sC \right) - \frac{V_i(s)}{R} - \frac{V_0(s)}{R} = 0$$

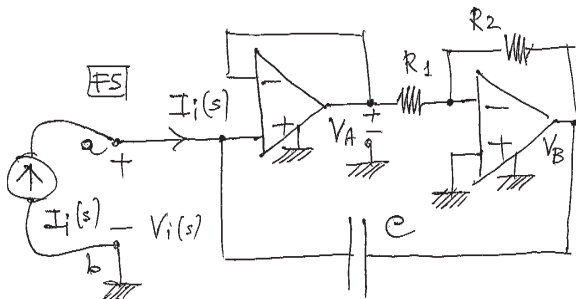
dalle quali ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{sCR}$$

- e' un integratore non invertente (integratore di Deboo).



Esempio. Moltiplicatore di capacita'. Determinare l'impedenza $Z_i(s)$ del bipolo ab in figura



- alimento con un generatore di corrente I_i ; si ha $V_A = V_i$, e $V_B = -(R_2/R_1)V_A = -(R_2/R_1)V_i$; allora

$$I_i = (V_i - V_B)sC = [V_i + V_i \frac{R_2}{R_1}]sC$$

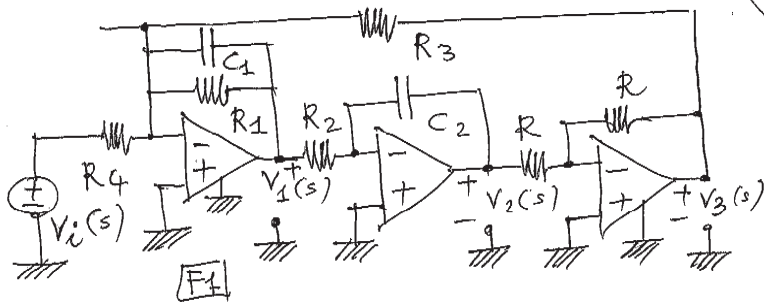
e

$$Z_i(s) = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})sC} = \frac{1}{sC_{eq}}$$

- il bipolo equivale un condensatore di capacita' $C_{eq} = (1 + \frac{R_2}{R_1})C$.

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_3(s)/V_i(s)$$



- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$
- scriviamo 3 KI ai nodi di ingresso degli ao; per il secondo ao si ha

$$V_2 = -\frac{1}{sR_2C_2}V_1$$

mentre per il terzo ao

$$V_3 = -V_2$$

- infine per il primo ao

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + V_1\left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) = 0$$

- allora

$$V_2 = -V_3; \quad V_1 = -sR_2C_2V_2 = sR_2C_2V_3$$

quindi

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_3}{R_3} + sR_2C_2V_3\left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{R_4} &= -V_3\left[\frac{1}{R_3} + s^2R_2C_1C_2 + s\frac{R_2C_2}{R_1}\right] \\ &= -V_3\frac{R_1 + s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2}{R_1R_3} \end{aligned}$$

- quindi

$$\frac{V_3}{V_i} = -\frac{1}{R_4} \frac{R_1R_3}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + R_1}$$

- infine

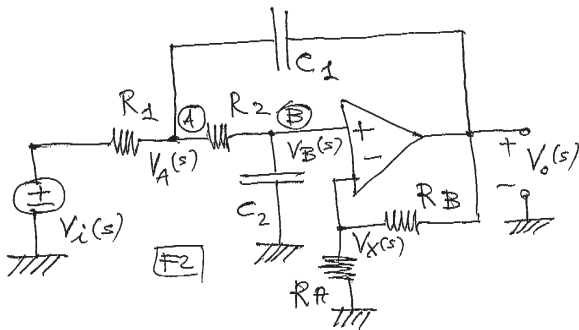
$$T_v(s) = \frac{V_3}{V_i} = -\frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

- e' un filtro passa passo del secondo ordine

$$T_v(s) = -k \frac{1}{s^2 + as + b}.$$

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione

$$T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$$



- utilizziamo il metodo dei nodi; le tensioni incognite sono $V_A(s)$, $V_B(s)$, $V_0(s)$; scriviamo 3 KI ai nodi A, B e X
- dalla KI al nodo X si ha

$$V_x = \frac{V_0}{k}; \quad k = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

- da KI al nodo B ($V_B = V_X$) si ottiene

$$V_A = V_B(1 + sR_2C_2) = \frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2)$$

- infine dalla KI al nodo A

$$\frac{V_A - V_i}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + (V_A - V_0)sC_1 = 0$$

- sostituendo ottengo

$$V_A \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_B}{R_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

e quindi

$$\frac{V_0}{k}(1 + sR_2C_2) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right] - \frac{V_0}{kR_2} - V_0sC_1 = \frac{V_i}{R_1}$$

- svolgendo i conti ottengo

$$T_v(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{k}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

Esempio. La risposta forzata di un circuito LTI a $e(t) = u(t)$ vale $y(t) = (3 - e^{-3t})u(t)$. Determinare la risposta forzata a $e_1(t) = \cos(2t)u(t)$.

- Si ha $E(s) = 1/s$ e

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+3}$$

quindi

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = 3 - \frac{s}{s+3} = \frac{2s+9}{s+3}$$

- inoltre $E_1(s) = s/(s^2 + 4)$ e allora

$$Y_1(s) = H(s)E_1(s) = \frac{2s+9}{s+3} \frac{s}{s^2+4} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-j2} + \frac{B^*}{s+j2}$$

- i coefficienti della scomposizione in fratti semplici sono

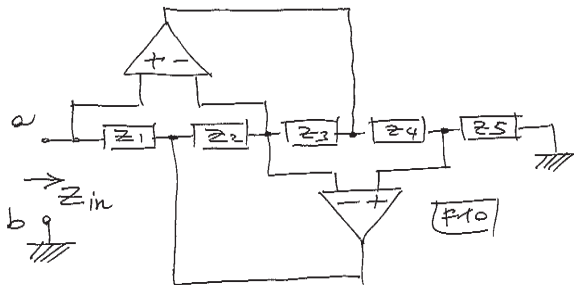
$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)Y_1(s) = -\frac{9}{13}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow j2} (s-j2)Y_1(s) = \frac{35-j6}{26}$$

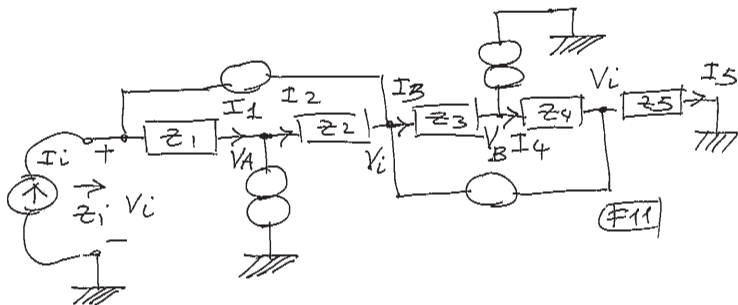
- allora

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Ae^{-3t}u(t) + Be^{j2t}u(t) + B^*e^{-j2t}u(t) \\&= Ae^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}[Be^{j2t}]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + 2\operatorname{Re}\left[\frac{35-j6}{26}(\cos(2t) + j\sin(2t))\right]u(t) \\&= -\frac{9}{13}e^{-3t}u(t) + \frac{35}{13}\cos(2t)u(t) + \frac{6}{13}\sin(2t)u(t).\end{aligned}$$

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo ab



- usiamo la rappresentazione con nullatore e noratore degli ai



- possiamo scrivere $I_5 = V_i/Z_5$ e, essendo $I_4 = I_5$,

$$V_B = V_i + Z_4 I_5 = V_i \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

- inoltre

$$I_3 = \frac{V_i - V_B}{Z_3} = \frac{1}{Z_3} \left(-V_i \frac{Z_4}{Z_5}\right)$$

e essendo $I_2 = I_3$

$$V_A = V_i + Z_2 I_2 = V_i \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right)$$

- quindi

$$I_i = \frac{V_i - V_A}{Z_1} = V_i \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5}$$

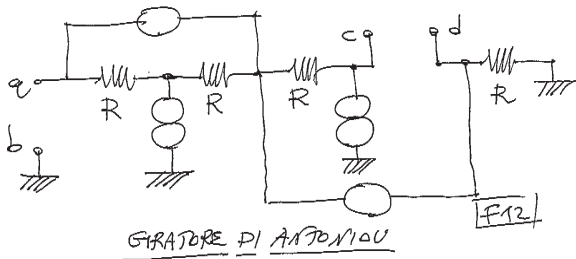
- infine

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

- ad esempio, se $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R$ e $Z_4 = 1/sC$ si ha

$$Z_{\text{in}}(s) = sR^2C = sL_{\text{eq}}$$

- corrisponde ad un giratore con resistenza di girazione R chiuso su un condensatore (giratore di Antoniou)



- se $Z_1 = Z_3 = 1/sC$, $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$, si ottiene

$$Z_{in}(s) = \frac{1}{RC^2 s^2}$$

e per $s = j\omega$

$$Z_{in}(j\omega) = -\frac{1}{RC^2 \omega^2}$$

che corrisponde a un resistore negativo dipendente dalla frequenza (FDNR; 'frequency dependent negative resistor').



Cenni su Stabilità di Circuiti

- Consideriamo la funzione di rete di un circuito LTI

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono polinomi a coefficienti reali nella variabile s

- Il circuito è asintoticamente stabile (AS) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} < 0$
- il circuito è stabile (marginalmente) (S) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a $\text{Re} \leq 0$ e inoltre quelli con $\text{Re} = 0$ sono semplici (di molteplicità 1)
- il circuito è instabile (INST) rispetto alla funzione di rete $H(s)$ in tutti i casi rimanenti

Circuiti Passivi: contengono solo bipoli e reti due porte (e mutiporta) passivi; contengono in particolare solo elementi dissipatori e/o accumulatori

- si può dimostrare che la *stabilità è una proprietà intrinseca di ogni circuito passivo*; ne consegue questo risultato fondamentale

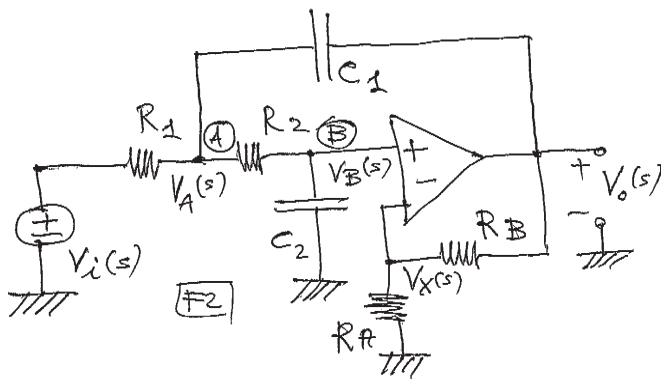
- *Proprietà*: sia $H(s)$ la funzione di rete di un circuito LTI passivo. Allora i poli di $H(s)$ possono essere dei seguenti tipi:

- 1) poli a $\text{Re} < 0$ (anche multipli)
- 2) poli a $\text{Re} = 0$ (necessariamente semplici)
- 3) polo per $s = \infty$ (necessariamente semplice)

Circuiti Passivi: contengono oltre a bipoli dissipatori e accumulatori anche elementi attivi (BJT, generatori controllati, ao)

- per i circuiti attivi la stabilita' non e' una proprieta' intrinseca; e' invece una proprieta' che va garantita in fase di progetto del circuito

Esempio consideriamo ancora il circuito attivo con un ao in figura



- abbiamo visto che la funzione di rete

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

$$= \frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{k}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

dove il parametro $k = 1 + R_B/R_A$

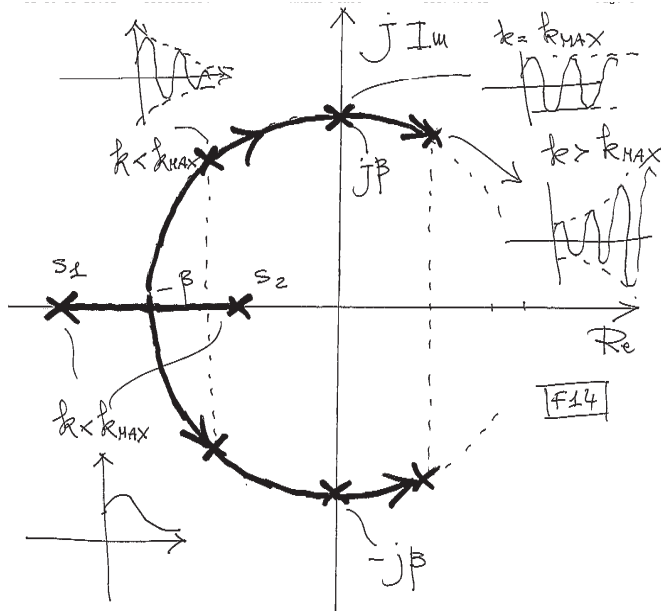
- si tratta di un filtro passa basso del secondo ordine; per poter essere utilizzato come filtro è necessario che sia AS
- studiamo la stabilità al variare di k ; si ha quanto segue; il denominatore di $H(s)$ è della forma $D(s) = s^2 + 2\alpha(k)s + \omega_0^2$; sia

$$k_{\max} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}}{\frac{1}{R_2 C_2}}$$

il valore per cui si annulla $\alpha(k)$; si ha

- 1) $k < k_{\max}$ implica $\alpha(k) > 0$, quindi $D(s)$ ha due radici a $\text{Re} < 0$; il circuito è AS
- 2) $k = k_{\max}$ implica $\alpha(k) = 0$; $D(s)$ ha due radici semplici a $\text{Re} = 0$ dati da $s_{1,2} = \pm j\beta$ con $\beta = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$; il circuito è S
- 3) $k > k_{\max}$ implica $\alpha(k) < 0$, quindi $D(s)$ ha due radici a $\text{Re} > 0$; il circuito è INST

- il luogo dei poli di $H(s)$ al variare di k e' riportato in figura



Derivazione del metodo dei fasori dal metodo simbolico di Laplace

Mauro Forti

June 4, 2021

- **Comportamento asintotico anti-trasformata di Laplace**
- Sia $F(s)$ una funzione razionale e $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

se e solo se tutti i poli di $F(s)$ sono a parte reale negativa.

- **Teorema del regime sinusoidale**
- Consideriamo la funzione di rete

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

di un circuito LTI ($E(s)$ e' la trasformata dell'eccitazione $e(t)$ e $U(s)$ e' la trasformata dell'uscita $u(t)$, risposta forzata).

Supponiamo che

- 1) il circuito sia asintoticamente stabile rispetto a $H(s)$ (tutti i poli di $H(s)$ sono a parte reale negativa)
- 2) l'eccitazione $e(t)$ sia sinusoidale a pulsazione ω con fasore associato $\bar{E}$.

Allora, esaurita una fase transitoria, la risposta $u(t)$ e' sinusoidale alla stessa pulsazione ω della eccitazione. Inoltre, il fasore $\bar{U}$ della risposta in regime sinusoidale e' dato da

$$\bar{U} = H(s)|_{s=j\omega} \bar{E} = H(j\omega) \bar{E}.$$

- Se scriviamo $H(j\omega)$ in forma esponenziale

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

allora il modulo $A(\omega)$ di $H(j\omega)$ e' la **risposta in ampiezza** mentre l'argomento $\varphi(\omega)$ di $H(j\omega)$ e' la **risposta in fase** del circuito

- Verifica. Possiamo scrivere

$$e(t) = \frac{1}{2}(\bar{E}e^{j\omega t} + \bar{E}^*e^{-j\omega t})$$

e quindi

$$E(s) = \frac{1}{2}\bar{E}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\bar{E}^*\frac{1}{s+j\omega}$$

e

$$U(s) = H(s)\frac{1}{2}[\bar{E}\frac{1}{s-j\omega} + \bar{E}^*\frac{1}{s+j\omega}]$$

- Allora

$$U(s) = \frac{1}{2}\bar{U}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\bar{U}^*\frac{1}{s+j\omega} + U_{\text{trans}}(s)$$

dove $U_{\text{trans}}(s)$ e' la parte della scomposizione in fratti semplici corrispondente a poli di $U(s)$ a parte reale negativa

- Quindi

$$u(t) = u_{\text{regime}}(t) + u_{\text{trans}}(t)$$

dove per quanto detto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{\text{trans}}(t) = 0$$

mentre

$$u_{\text{regime}}(t) = \frac{1}{2}(\bar{U}e^{j\omega t} + \bar{U}^*e^{-j\omega t}) = \text{Re}[\bar{U}e^{j\omega t}]$$

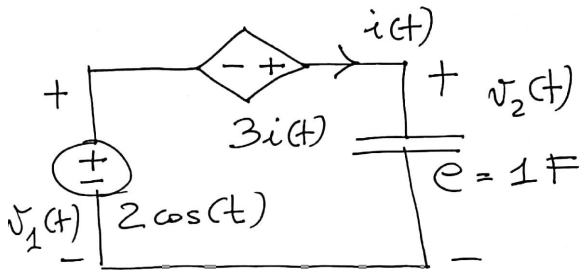
e' una sinusoide a pulsazione ω con fasore associato $\bar{U}$

- valutiamo adesso il fasore $\bar{U}$. Si ha

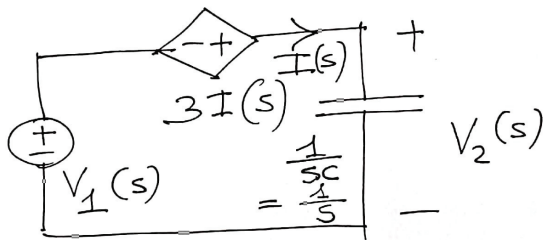
$$\begin{aligned}\bar{U} &= 2\text{Res}[H(s)E(s), j\omega] \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)H(s)E(s) \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s) \left[\frac{1}{2}\bar{E} + \frac{1}{2}\bar{E}^* \frac{s - j\omega}{s + j\omega} \right] \\ &= H(j\omega)\bar{E}\end{aligned}$$

dove per calcolare il residuo abbiamo sfruttato il fatto che il polo $j\omega$ e' semplice (dato che il circuito e' asintoticamente stabile e quindi $H(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa).

- Esempio. Determinare la risposta in regime permanente sinusoidale $v_2(t)$.



- !!!? Fisicamente che senso ha $v_{2,\text{regime}}(t)$?
- e' osservabile in pratica solo se il circuito e' asintoticamente stabile!!!
- La stabilita' non si puo' pero' valutare con il metodo dei fasori. Bisogna invece usare Laplace
- Con i fasori non si vede niente di sospetto ... pero' adesso vediamo con Laplace che il circuito e' instabile



- Con Laplace consideriamo il circuito in figura per il quale

$$V_1(s) = -3I(s) + \frac{1}{s}I(s) = \frac{1-3s}{s}I(s)$$

da cui $I(s) = \frac{s}{1-3s} V_1(s)$ e

$$v_2(s) = \frac{1}{s} \frac{s}{1-3s} = \frac{1}{1-3s} V_1(s)$$

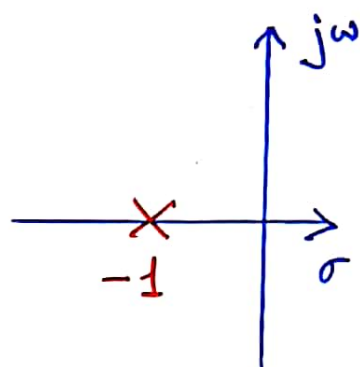
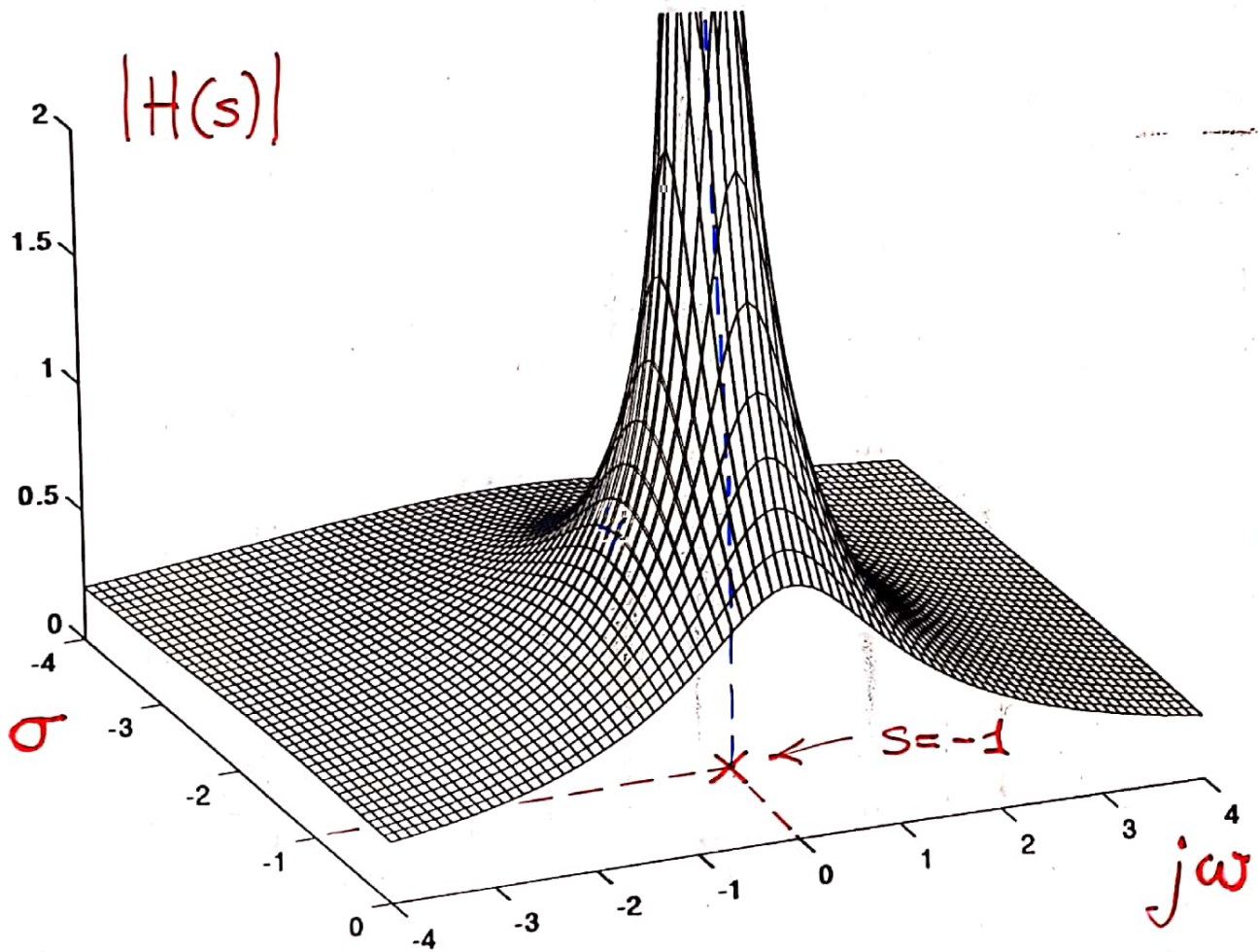
- la funzione di rete vale

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 - 3s}$$

- il circuito e' quindi instabile dato il polo di $H(s)$ in $s = 1/3$. La risposta $v_2(t)$ e' allora data da

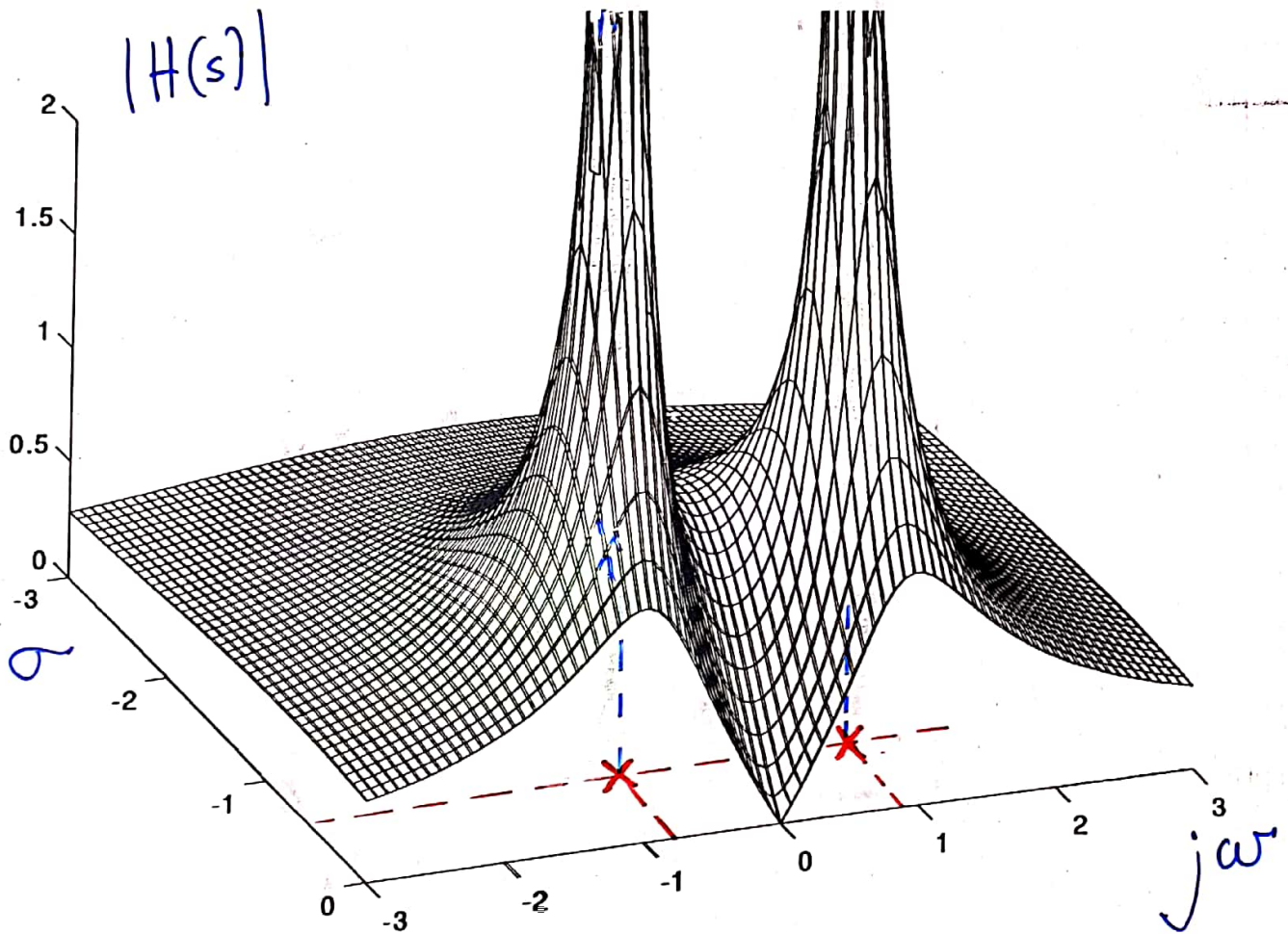
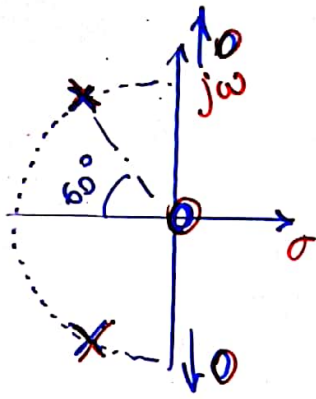
$$v_2(t) = ke^{\frac{1}{3}t} + \frac{2}{\sqrt{10}} \cos(t - \arctan(3)) \quad V$$

quindi il regime permanente non e' in pratica osservabile.



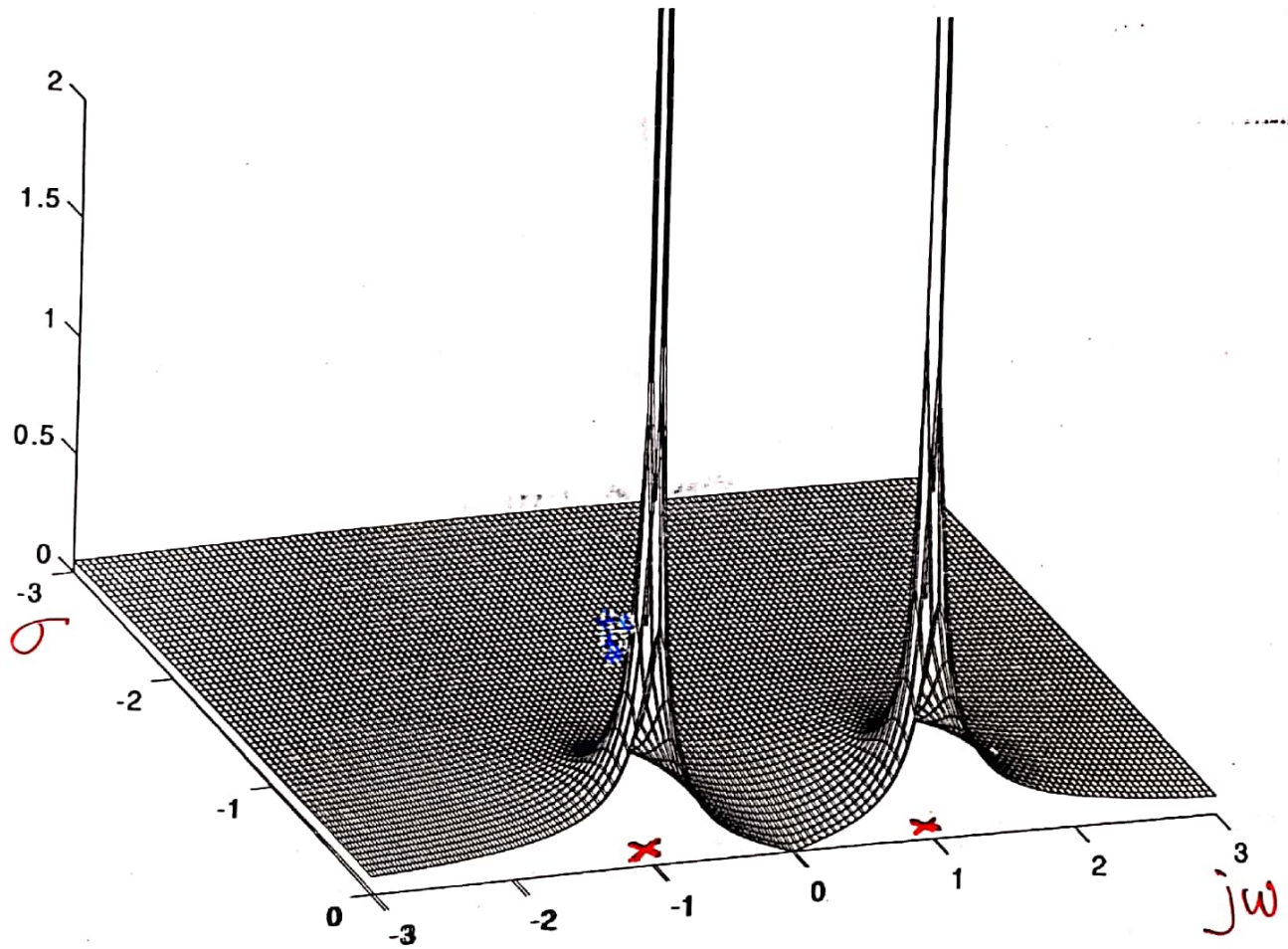
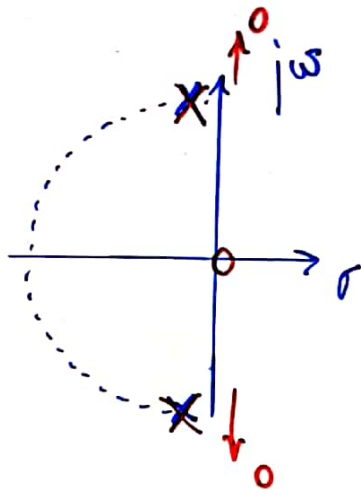
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\omega_c = 1$$



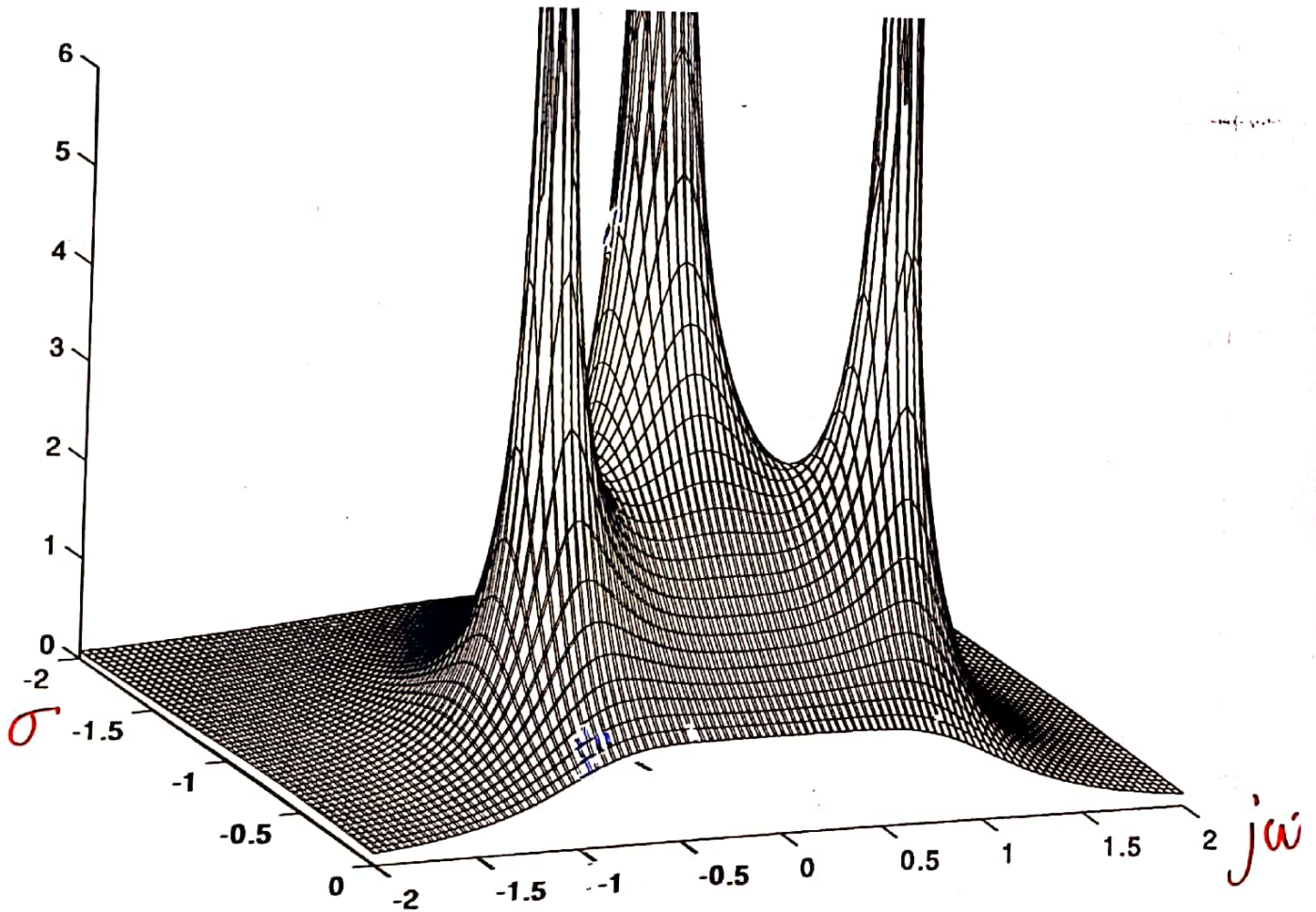
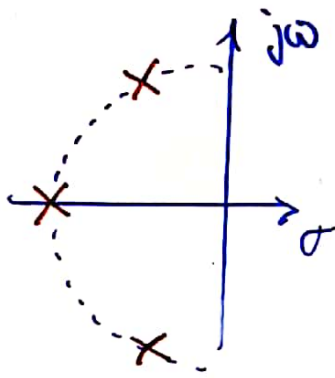
$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad Q_s = 1$$

$$\text{poli } s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$H(s) = 0.2 \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1} \quad Q_s = 5$$

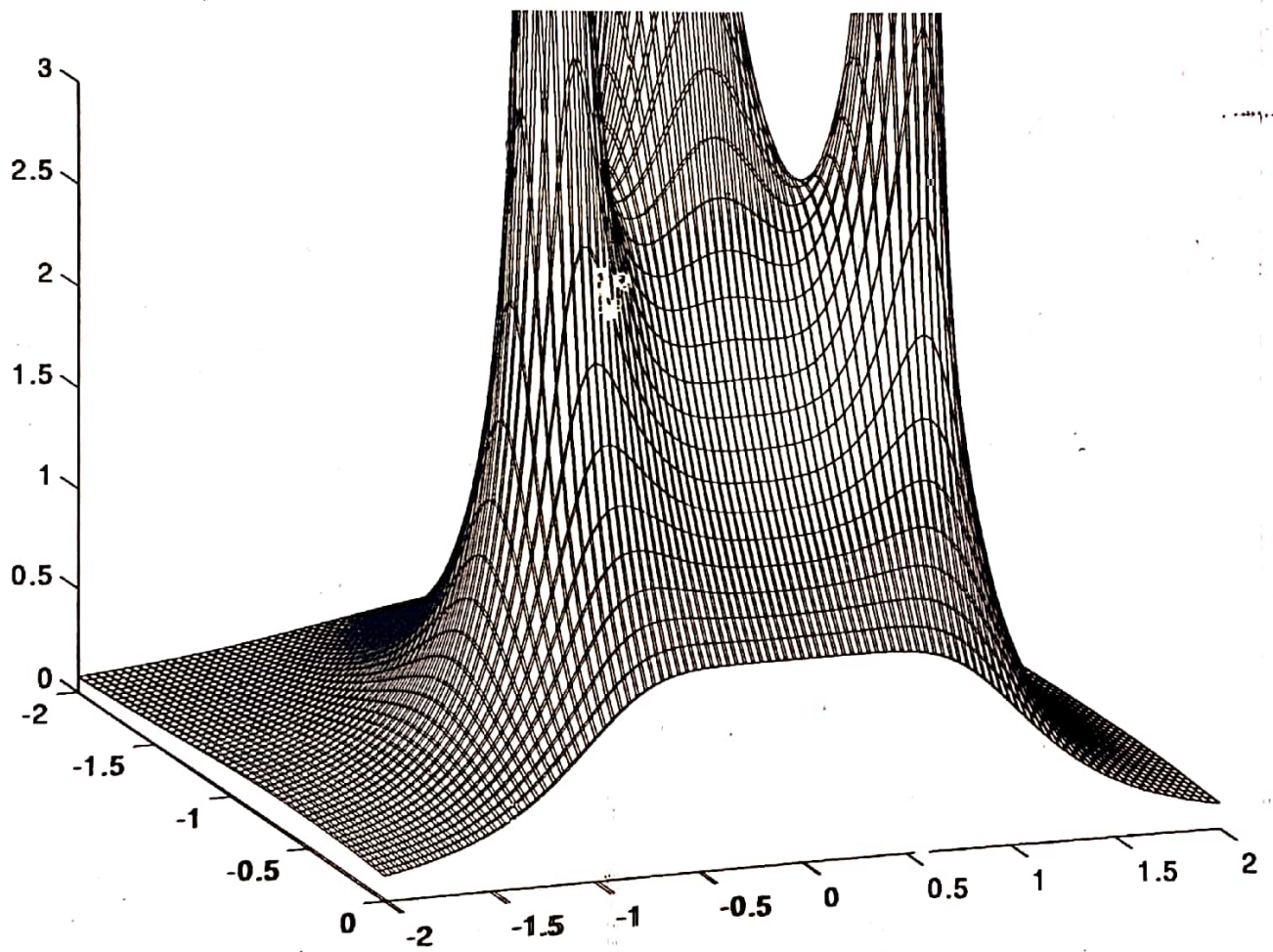
$$\text{poli: } s_{1,2} \approx -0.1 \pm j1$$

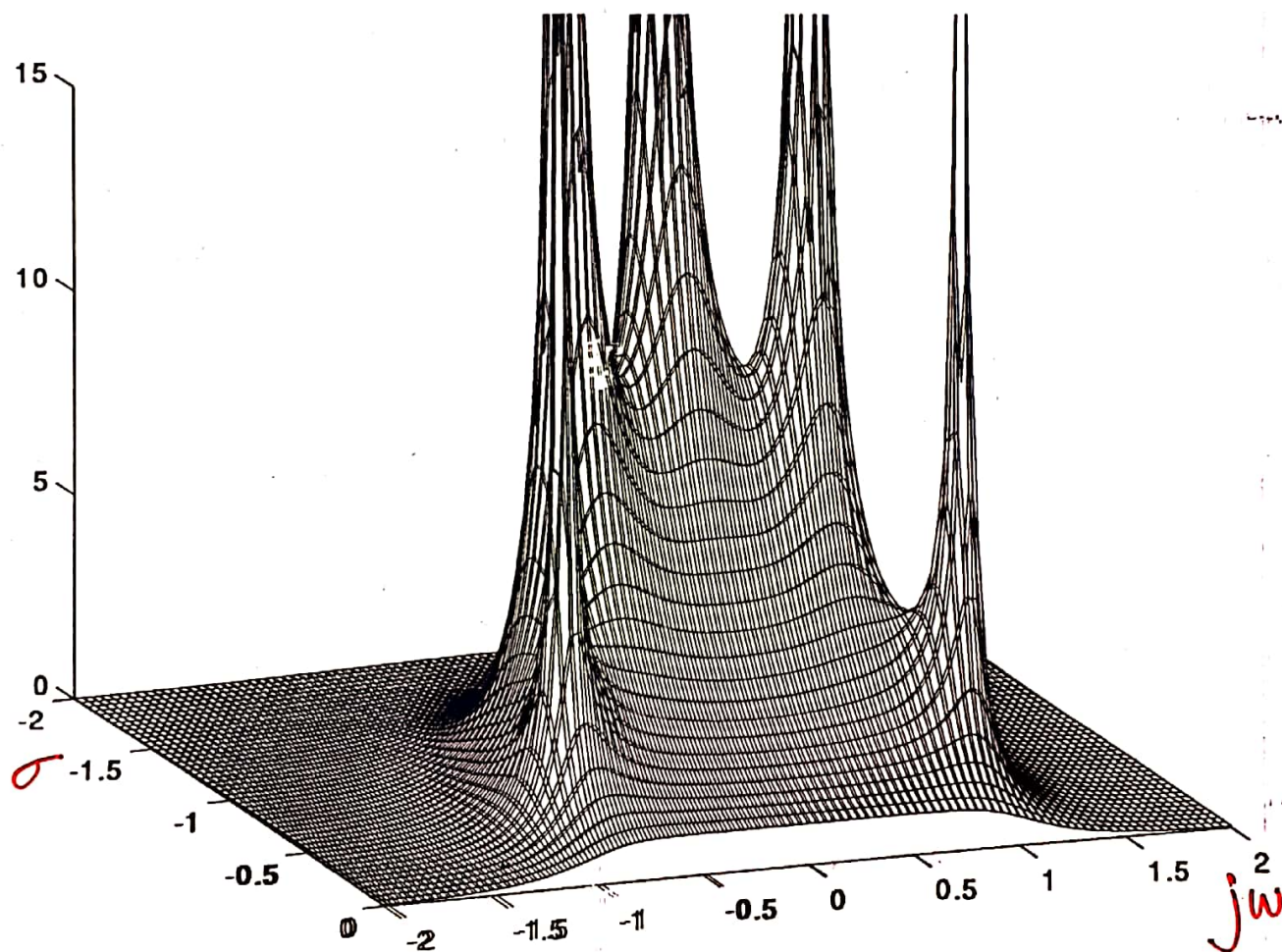
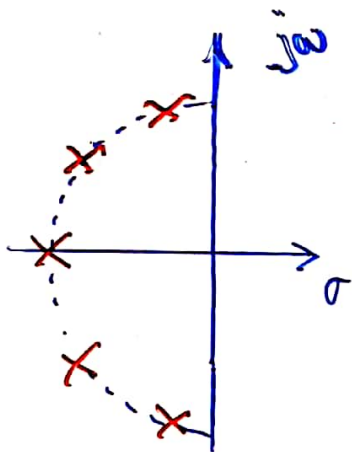


PASSA BASSO DI BUTTERWORTH III ORDINE

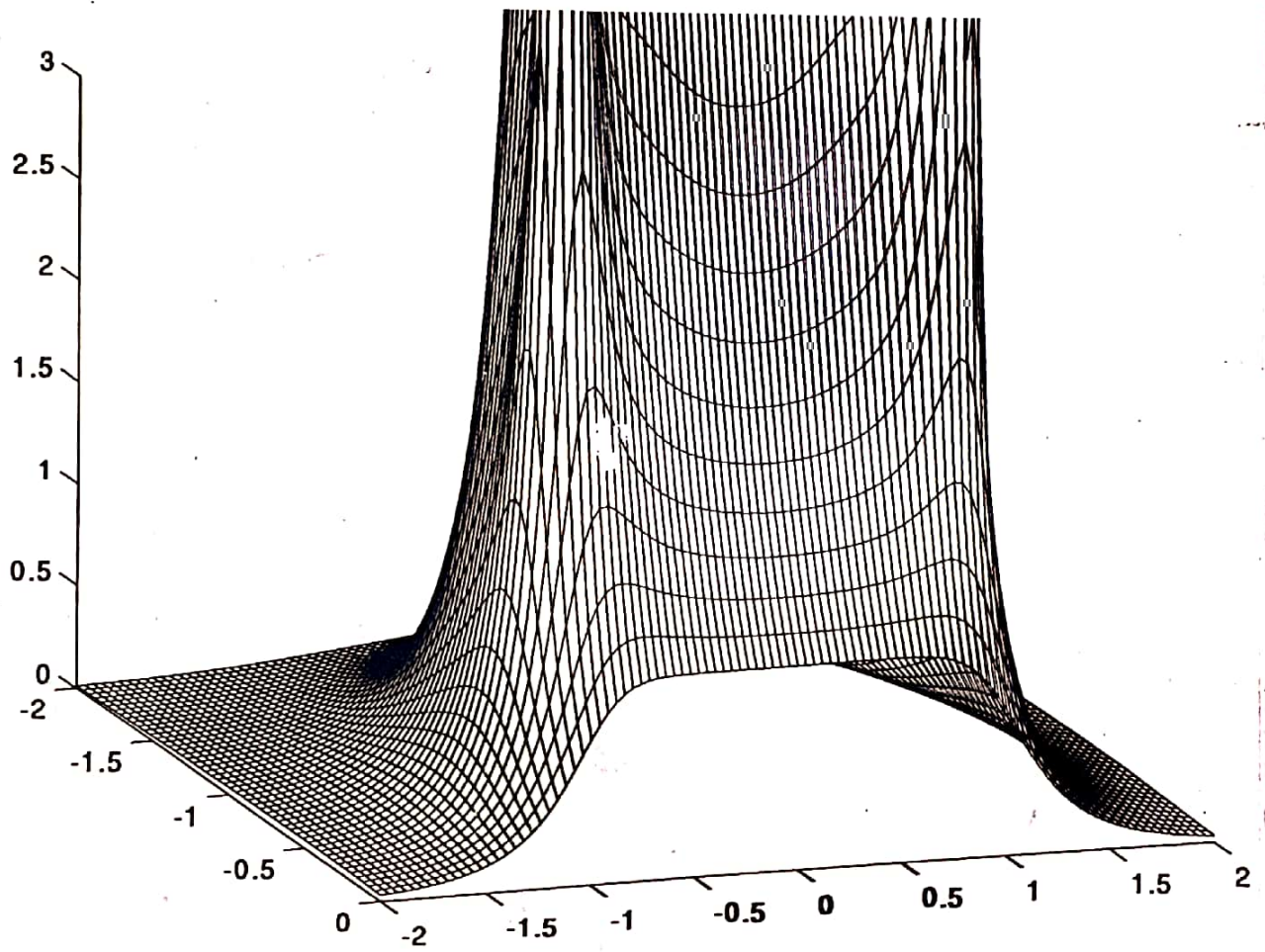
$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$\text{poli: } s_1 = -1; \quad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$





Passo Basso di Butterworth VORDINE



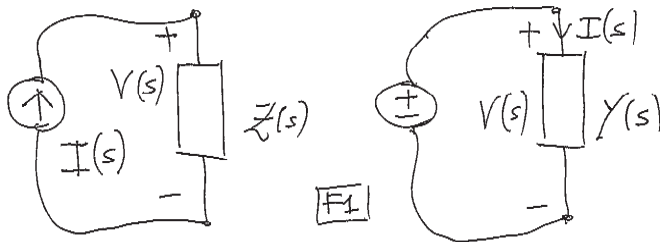
Reti due porte

Mauro Forti

April 30, 2020

- **Bipoli RLC**

- Consideriamo un bipolo LTI nel DL contenente un certo numero di condensatori C_i e induttori L_i . Supponiamo C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$; la *relazione costitutiva nel DL* e' il legame che il bipolo stabilisce fra $V(s)$ e $I(s)$



- ci sono solo due possibili rappresentazioni (relazioni costitutive) del bipolo
- se il bipolo e' controllabile in corrente; alimento in corrente ($I(s)$, causa) e trovo la tensione $V(s)$ (effetto); ottengo cosi' la rappresentazione impedenza

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

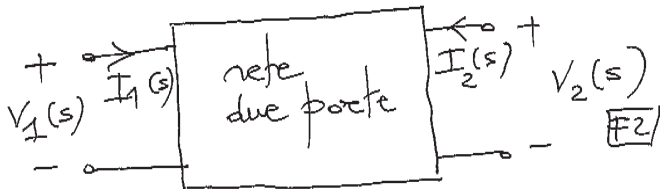
- dualmente, se il bipolo e' controllabile in tensione, ottengo la rappresentazione ammettenza

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

- se esistono entrambe le rappresentazioni, sono legate da

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

- Consideriamo adesso una rete due porte LTI nel DL contenente C_i e L_i scarichi a $t = 0^-$



- relazioni costitutive: 2 legami che la rete stabilisce fra le 4 grandezze di porta $V_1(s)$, $V_2(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$
- abbiamo varie possibilita' per scrivere le relazioni costitutive; ad esempio, scegliendo come cause I_1, I_2 e come effetti V_1, V_2 ottengo la rappresentazione a parametri z della rete due porte

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s)$$

che generalizza la rappresentazione impedenza di un bipolo

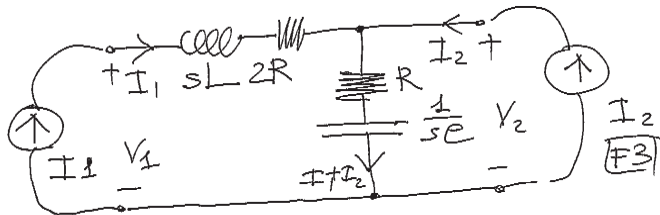
- scegliendo come cause I_1, V_2 e come effetti V_1, I_2 ottengo la rappresentazione a parametri h della rete due porte

$$V_1(s) = h_{11}(s)I_1(s) + h_{12}(s)V_2(s)$$

$$I_2(s) = h_{21}(s)I_1(s) + h_{22}(s)V_2(s)$$

- complessivamente, in base alla scelta della coppia di variabili indipendenti, abbiamo 6 diverse possibili rappresentazioni di una rete due porte; essendo rappresentazioni della stessa rete due porte, sono legate fra di loro (nota una rappresentazione posso ottenerne un'altra con opportune formule di trasformazione)

Esempio. Determinare parametri z e h della rete due porte in figura



• si ha

$$V_1 = (sL + 2R)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = \left(R + \frac{1}{sC}\right)(I_1 + I_2)$$

quindi

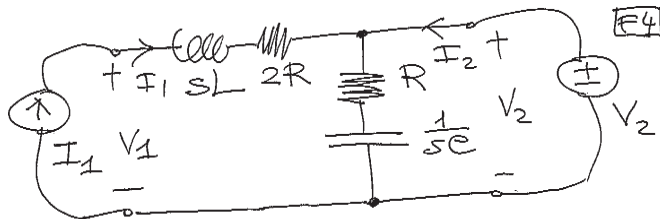
$$V_1 = \left(sL + 3R + \frac{1}{sC}\right)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_2$$

$$V_2 = \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_1 + \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_2$$

- inoltre

$$V_1 = (sL + R)I_1 + V_2$$

$$I_2 = -I_1 + \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} V_2$$



- **Parametri z (a circuito aperto)**
- Scegliamo I_1, I_2 come grandezze indipendenti; V_1, V_2 come dipendenti; si ha

$$V_1 = z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

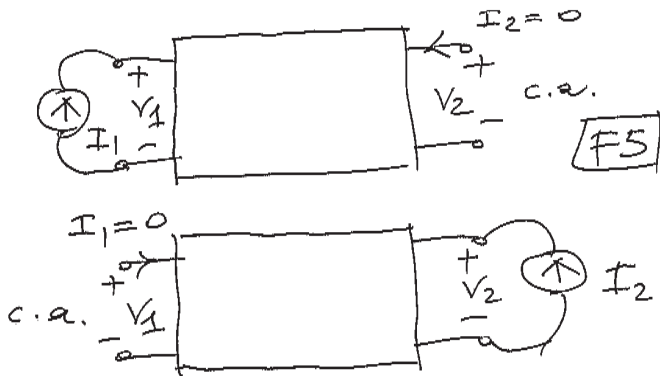
oppure

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- *Definizione operativa*: si ha

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_1 sulla porta 1 e lasciando a circuito aperto la porta 2



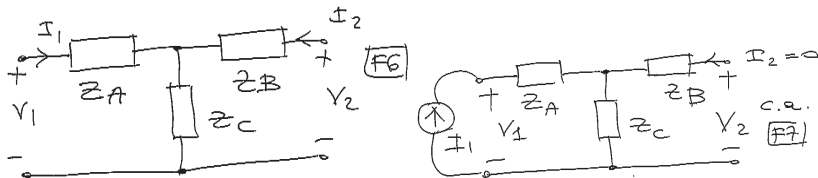
- operativamente z_{11} e' l'impedenza alla porta 1 quando la porta 2 e' a circuito aperto; z_{21} e' l'impedenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' a circuito aperto

- analogamente si ha

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}; \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo I_2 sulla porta 2 e lasciando a circuito aperto la porta 1
- operativamente z_{22} e' l'impedenza alla porta 2 quando la porta 1 e' a circuito aperto; z_{12} e' l'impedenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 e' a circuito aperto

- **Esempio.** Parametri z di rete a T



• si ha $z_{11} = Z_A + Z_C$, $z_{21} = Z_C$ inoltre $z_{22} = Z_B + Z_C$, $z_{12} = Z_C$, quindi

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_A + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_B + Z_C \end{pmatrix}$$

• notare che la matrice $\mathbf{Z}$ di una rete a T e' *simmetrica*

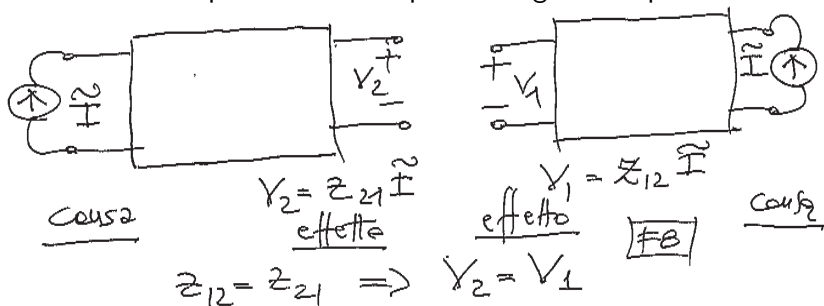
Reciprocità di una rete due porte.

- Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri z ; la rete si dice *reciproca* se $\mathbf{Z}$ è simmetrica, cioè

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

- quindi *una rete due porte è reciproca se e solo se le due impedenze di trasferimento z_{21} e z_{12} coincidono*

- consideriamo per una rete reciproca il seguente esperimento



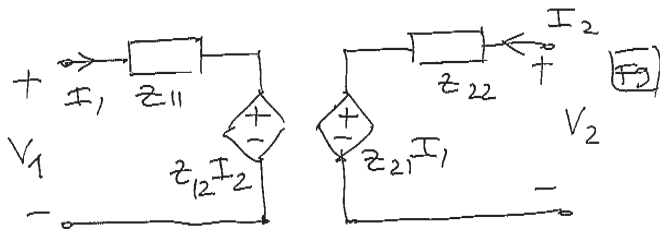
- ne consegue che: *in una rete reciproca l'effetto non cambia se si scambiano fra di loro posizione di causa e effetto*
- si puo' dimostrare che: *una rete due porte che contiene solo bipoli e' reciproca*

Circuito equivalente a parametri z : supponiamo siano assegnati i parametri z di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri z); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

$$V_1 = z_{11}(s)I_1 + z_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = z_{21}(s)I_1 + z_{22}(s)I_2$$

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura



- **Parametri y (di corto circuito)**
- Scegliamo V_1, V_2 come grandezze indipendenti; I_1, I_2 come dipendenti; si ha

$$I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2$$

- in forma vettoriale

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV}$$

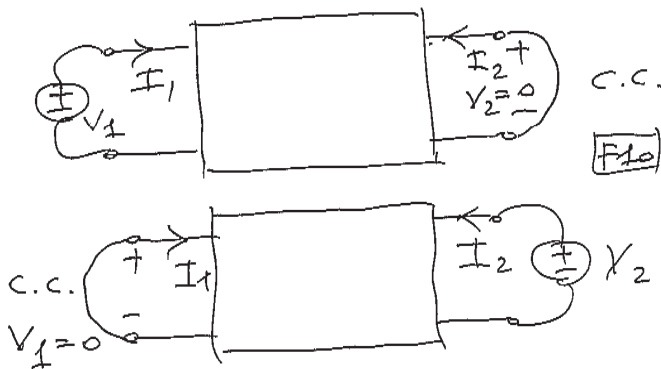
oppure

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- *Definizione operativa*: si ha

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}; \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_1 sulla porta 1 e mettendo in corto circuito la porta 2



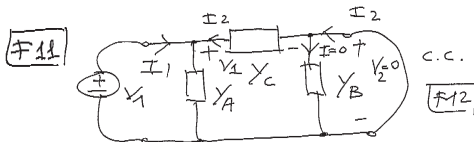
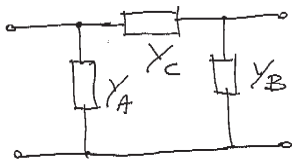
- operativamente y_{11} e' l'ammettenza alla porta 1 quando la porta 2 e' in corto circuito; y_{21} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 quando la porta 2 e' in corto circuito

- analogamente si ha

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}; \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

- quindi tali parametri si misurano inserendo V_2 sulla porta 2 e mettendo in corto circuito la porta 1
- operativamente y_{22} e' l'ammettenza alla porta 2 quando la porta 1 e' in corto circuito; y_{12} e' l'ammettenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 quando la porta 1 e' corto circuito

- **Esempio.** Parametri y di rete a Π



- si ha $y_{11} = Y_A + Y_C$, $y_{21} = -Y_C$ inoltre $y_{22} = Y_B + Y_C$, $y_{12} = -Y_C$, quindi

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_A + Y_C & -Y_C \\ -Y_C & Y_B + Y_C \end{pmatrix}$$

- notare che la matrice $\mathbf{Y}$ di una rete a Π e' *simmetrica*

Reciprocita' di una rete due porte.

- Consideriamo una rete due porte che ammette una rappresentazione in termini di parametri y ; la rete si dice *reciproca* se $\mathbf{Y}$ e' simmetrica, cioe'

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

- quindi rete due porte reciproca se e solo se le due ammettenze di traferimento y_{21} e y_{12} coincidono
- verificare che se una rete ammette sia i parametri z che i parametri y allora si ha

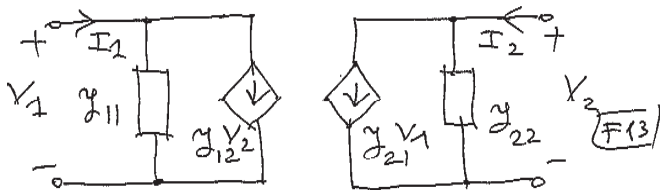
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$$

Circuito equivalente a parametri y : supponiamo siano assegnati i parametri y di una rete due porte (quindi conosciamo le relazioni costitutive in termini di parametri y); vogliamo costruire un circuito equivalente alla rete di partenza (circuito che ha le stesse relazioni costitutive); a tal fine e' sufficiente interpretare circuitalmente le relazioni

$$I_1 = y_{11}(s)V_1 + y_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = y_{21}(s)V_1 + y_{22}(s)V_2$$

dalle quali ottengo il circuito equivalente in figura



Parametri ibridi h

- Scegliamo I_1, V_2 come grandezze indipendenti; V_1, I_2 come dipendenti; si ha

$$V_1 = h_{11}(s)I_1 + h_{12}(s)V_2$$

$$I_2 = h_{21}(s)I_1 + h_{22}(s)V_2$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- definizione operativa dei parametri h e legame con altri parametri; si ha

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{\left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}} = \frac{1}{y_{11}}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{\left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}} = \frac{1}{z_{11}}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{i_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \frac{V_1}{i_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{i_1=0} = \dots = \frac{z_{12}}{z_{22}}$$

• **Reciprocita'.** Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri h se e solo se

$$h_{21} = -h_{12}$$

• **Esempio.** Determinare i parametri z in funzione dei parametri h

Assegnate le relazioni costitutive

$$V_1 = h_{11}i_1 + h_{12}V_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}V_2$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$V_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

- si ottiene

$$V_1 = h_{11}I_1 - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}}I_2$$

$$V_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{1}{h_{22}}I_2$$

e quindi

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

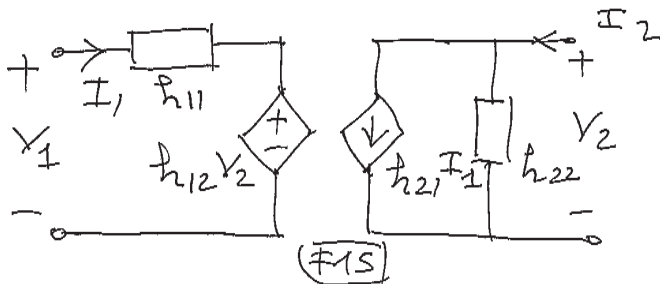
- notare che se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha $z_{21} = z_{12}$, quindi $h_{21} = -h_{12}$

- il circuito equivalente a parametri h si ottiene dalle relazioni costitutive

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

ed e' mostrato in figura



Parametri ibridi g

- Scegliamo V_1, I_2 come grandezze indipendenti; I_1, V_2 come dipendenti; si ha

$$I_1 = g_{11}(s)V_1 + g_{12}(s)I_2$$

$$V_2 = g_{21}(s)V_1 + g_{22}(s)I_2$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Parametri di trasmissione

- Scegliamo $V_2, -I_2$ come grandezze indipendenti; V_1, I_1 come dipendenti; si ha

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

- in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{T}$ *matrice di trasmissione diretta*

- definizione operativa dei parametri di trasmissione:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}; \quad B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

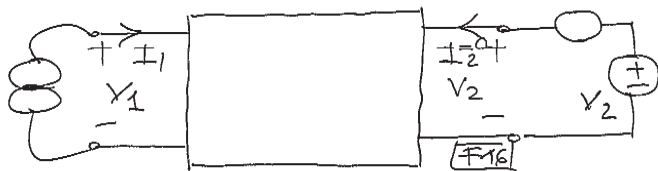
$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}; \quad D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

- tutti e 4 i parametri rappresentano funzioni di trasferimento da porta 2 verso porta 1

- i parametri

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

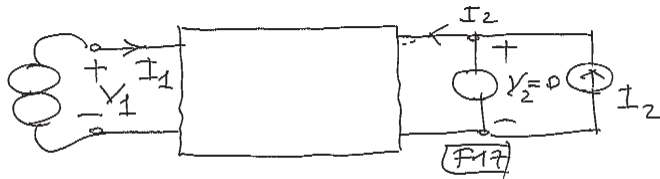
si trovano facendo riferimento al seguente circuito



- i parametri

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

si trovano facendo riferimento al seguente circuito



- **Reciprocita'.** Una rete due porte e' reciproca in termini di parametri di trasmissione se e solo se

$$\det \mathbf{T} = AD - BC = 1$$

- **Esempio.** Determinare i parametri z in funzione dei parametri di trasmissione

- date le relazioni costitutive

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

vogliamo esprimerle nella forma

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

- si ha

$$V_2 = \frac{1}{C}I_1 + \frac{D}{C}I_2$$

e quindi

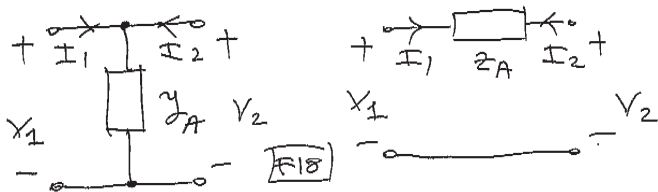
$$V_1 = \frac{A}{C}I_1 + \left(\frac{AD}{C} - B\right)I_2$$

- otteniamo allora

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & \det \mathbf{T} \\ 1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- se la rete e' reciproca in termini di parametri z si ha $z_{21} = z_{12}$ e quindi $\det \mathbf{T} = 1$

Esempio. Determinare i parametri di trasmissione delle reti due porte in figura



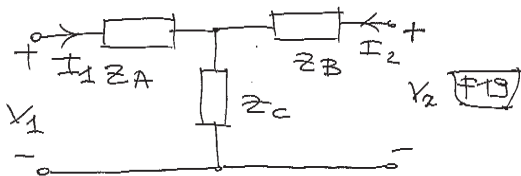
- per la rete di sinistra si ha $V_1 = V_2$ e $I_1 = Y_A V_2 - I_2$, quindi

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_A & 1 \end{pmatrix}$$

- per la rete a destra verificare che

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z_A & 1 \end{pmatrix}$$

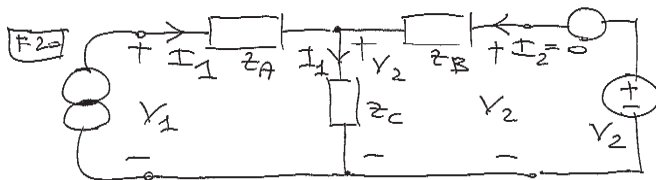
- **Esempio.** Determinare i parametri di trasmissione della rete due porte utilizzando la definizione operativa



- dato che

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}; \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

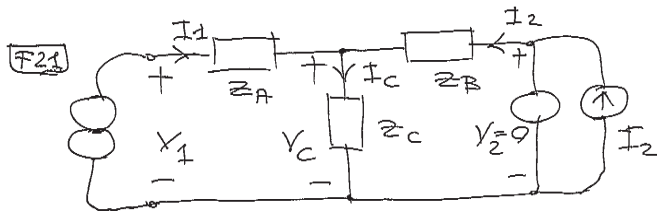
facciamo riferimento a questa rete



- si ha $I_1 = V_2/Z_C$ da cui $C = 1/Z_C$
- inoltre $V_1 = (Z_A + Z_C)I_1 = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C} V_2$, quindi $A = \frac{Z_A}{Z_C} + 1$
- i parametri

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

si trovano facendo riferimento al seguente circuito



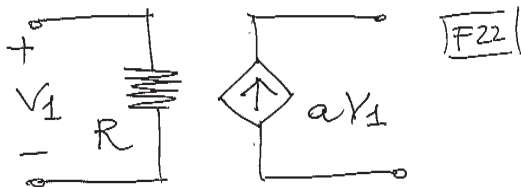
- si ha $V_C = -Z_B I_2$ e $I_C = V_C/Z_C = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2$;
 - $I_1 = I_C - I_2 = -\frac{Z_B}{Z_C} I_2 - I_2$ e quindi $D = 1 + \frac{Z_B}{Z_C}$
 - infine $V_1 = Z_A I_1 - Z_B I_2 = -\frac{Z_A Z_B}{Z_C} I_2 - Z_A I_2 - Z_B I_2$ e perciò'
- $$B = Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C}$$

- riassumendo

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{Z_A}{Z_C} + 1 & Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C} \\ \frac{1}{Z_C} & 1 + \frac{Z_B}{Z_C} \end{pmatrix}$$

- e' facile verificare che $\det \mathbf{T} = 1$ e quindi la rete e' reciproca.

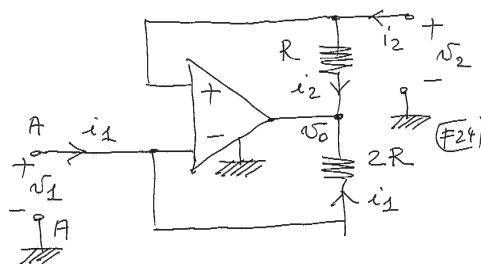
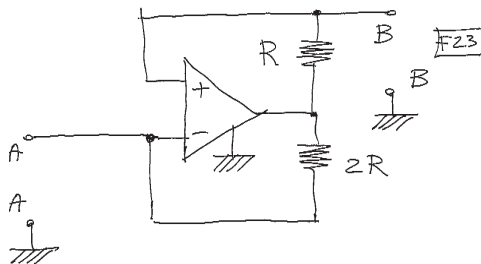
- **Esempio.** Determinare, se esistono, i parametri z, y, h, g e ABCD della seguente rete due porte in figura



- si ha $v_1 = Ri_1$ e $i_2 = -av_1 = -aRi_1$; quindi i_1 e i_2 sono dipendenti e non esistono gli z ; anche v_1 e i_2 sono dipendenti, per cui non esistono i g
- gli altri parametri esistono e sono dati da

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ -aR & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{aR} \end{pmatrix}$$

- **Esempio.** Determinare i parametri z , y e ABCD della rete due porte AA-BB. Verificare la reciprocita' della rete



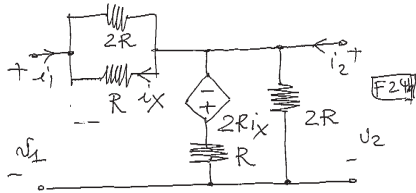
- si ha $v_1 = v_2$; inoltre, $v_1 = 2Ri_1 + v_0$, $v_2 = Ri_2 + v_0$, quindi $i_1 = i_2/2$; non esistono perciò né gli z né gli y

- esistono gli ABCD e si ha

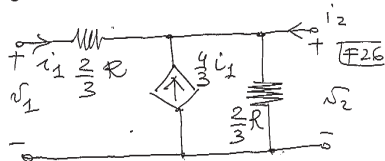
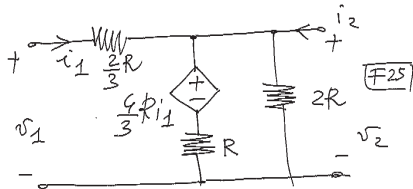
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

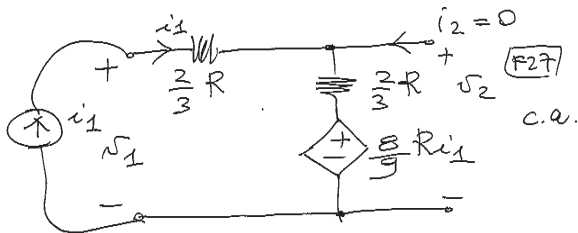
- la rete due porte non e' reciproca

Esempio. Determinare i parametri $z_{11}, z_{21}, h_{11}, h_{21}$ della rete



- notiamo che $i_x = -\frac{2}{3}i_1$ e che la rete due porte puo' essere trasformata in questo modo





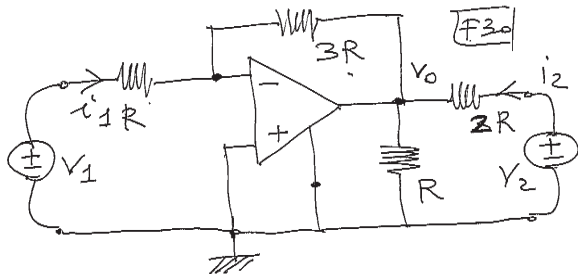
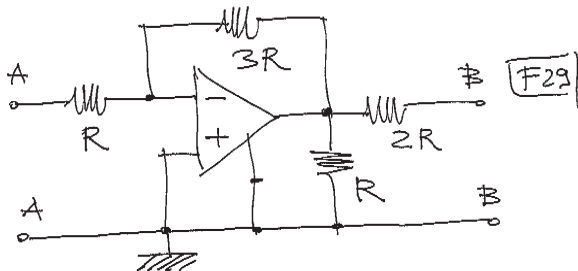
- alimentiamo con i_1 e lasciamo la porta 2 a circuito aperto; allora $v_1 = \frac{4}{3}Ri_i + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{20}{9}R$$

- inoltre $v_2 = \frac{2}{3}Ri_1 + \frac{8}{9}Ri_1$, quindi

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{14}{9} R$$

- **Esempio.** Determinare i parametri y della rete due porte AA-BB



- si ha

$$i_1 = \frac{v_1}{R}$$

- inoltre

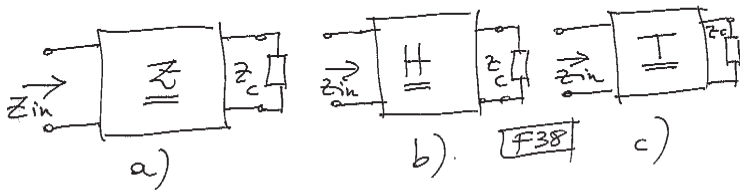
$$i_2 = \frac{v_2 - v_0}{2R} = \frac{v_2 + 3v_1}{2R} = \frac{3}{2R}v_1 + \frac{1}{2R}v_2$$

- quindi

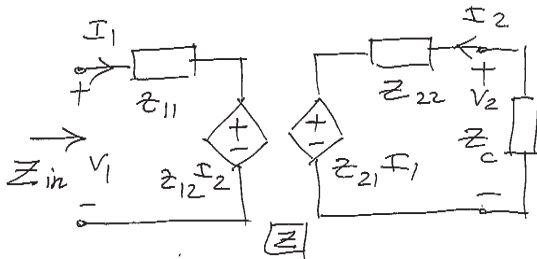
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{3}{2R} & \frac{1}{2R} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte non e' reciproca.

Esempio. Determinare l'impedenza del bipolo nei tre casi indicati in figura



- nel caso a) sostituisco il circuito equivalente a parametri z ottenendo



- si ha $I_2 = -z_{21}I_1/(z_{22} + z_c)$ e da KV alla maglia di sinistra

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1 - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}I_1$$

quindi

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + z_c}$$

- nel caso b) si puo' procedere in modo analogo dimostrando che

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22} + y_c}$$

- consideriamo il caso c); si ha

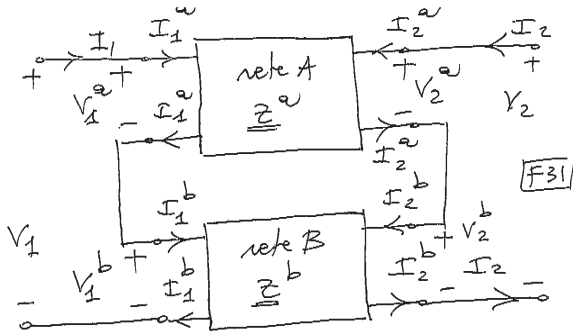
$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

e quindi

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A \frac{V_2}{-I_2} + B}{C \frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{Az_c + B}{Cz_c + D}.$$

- Collegamento serie fra reti due porte
- E' il collegamento mostrato in figura



- si ha

$$\underline{Z} = \underline{Z}^a + \underline{Z}^b$$

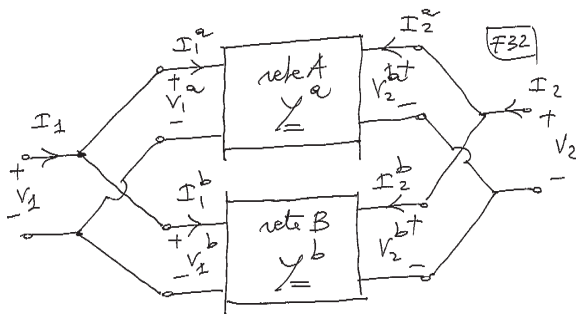
- verifica: si ha $I_1 = I_1^a = I_1^b$; $V_1 = V_1^a + V_1^b$; inoltre $I_2 = I_2^a = I_2^b$; $V_2 = V_2^a + V_2^b$; allora

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a + V_1^b = z_{11}^a I_1^a + z_{12}^a I_2^a + z_{11}^b I_1^b + z_{12}^b I_2^b \\ &= (z_{11}^a + z_{11}^b) I_1 + (z_{12}^a + z_{12}^b) I_2 \end{aligned}$$

- quindi $z_{11} = z_{11}^a + z_{11}^b$, $z_{12} = z_{12}^a + z_{12}^b$
- in maniera simile si dimostra che $z_{21} = z_{21}^a + z_{21}^b$, $z_{22} = z_{22}^a + z_{22}^b$

- **Collegamento parallelo fra reti due porte**

- E' il collegamento mostrato in figura



- si ha

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b$$

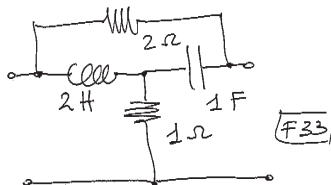
- verifica: si ha $V_1 = V_1^a = V_1^b$; $I_1 = I_1^a + I_1^b$; inoltre $V_2 = V_2^a = V_2^b$; $I_2 = I_2^a + I_2^b$; allora

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a + I_1^b = y_{11}^a V_1^a + y_{12}^a V_2^a + y_{11}^b V_1^b + y_{12}^b V_2^b \\ &= (y_{11}^a + y_{11}^b) V_1 + (y_{12}^a + y_{12}^b) V_2 \end{aligned}$$

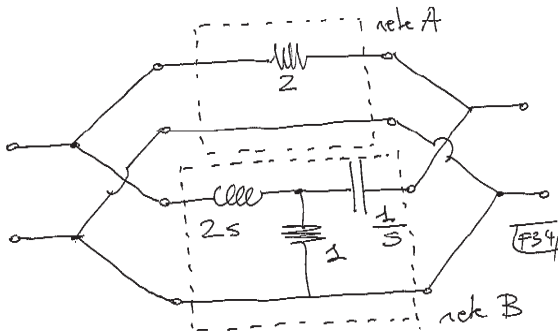
quindi $y_{11} = y_{11}^a + y_{11}^b$, $y_{12} = y_{12}^a + y_{12}^b$

- in maniera simile si dimostra che $y_{21} = y_{21}^a + y_{21}^b$, $y_{22} = y_{22}^a + y_{22}^b$

- **Esempio.** Determinare i parametri y della rete a 'T pontato'



- scomponiamo la rete in due reti in parallelo



- si ha $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b$ con

$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

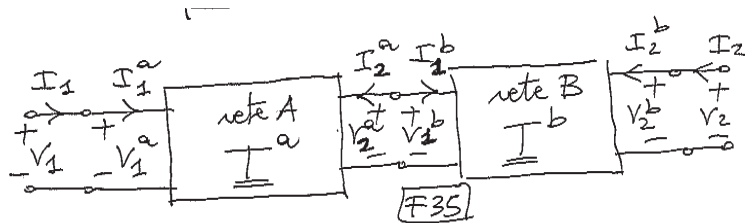
- inoltre

$$\mathbf{Z}^b = \begin{pmatrix} 2s+1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{s}+1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{Y}^b = [\mathbf{Z}^b]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{s}+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{Z}_b}$$

Collegamento in cascata fra reti due porte



- le variabili di porta soddisfano a: $V_1 = V_1^a$, $I_1 = I_1^a$; $V_2^a = V_1^b$, $I_2^a = -I_1^b$, $V_2^b = V_2$, $I_2^b = I_2$
- allora si ha

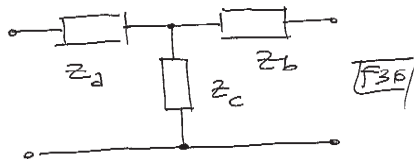
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_1^a \\ I_1^a \end{pmatrix} = T^a \begin{pmatrix} V_2^a \\ -I_2^a \end{pmatrix} \\ &= T^a \begin{pmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{pmatrix} = T^a T^b \begin{pmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{pmatrix} \\ &= T^a T^b \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- quindi

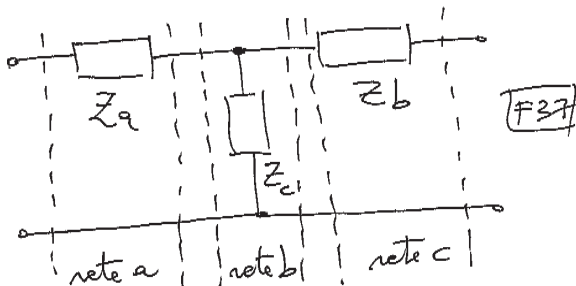
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b$$

cioe' la matrice di trasmissione di due reti in cascata e' pari al prodotto delle matrici di trasmissione delle singole reti

- **Esempio.** Determinare la matrice di trasmissione della rete due porte a T in figura



- scomponiamo la rete in tre reti due porte in cascata



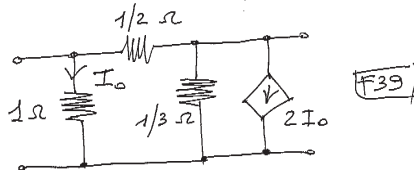
- allora

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b) \mathbf{T}^c$$

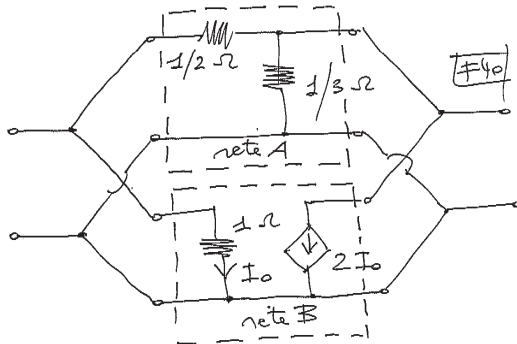
con

$$\mathbf{T}^a = \begin{pmatrix} 1 & Z_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c} & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^b = \begin{pmatrix} 1 & Z_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio. Determinare i parametri y della rete due porte in figura pensandola come parallelo fra due reti due porte



- scomponiamo come richiesto la rete in due sottoreti in parallelo



- si ottiene

$$\mathbf{Y}^a = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- inoltre per la rete in basso e' facile vedere che si ha

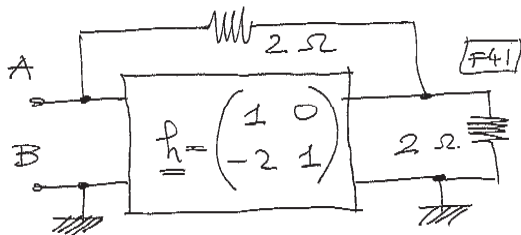
$$\mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- allora

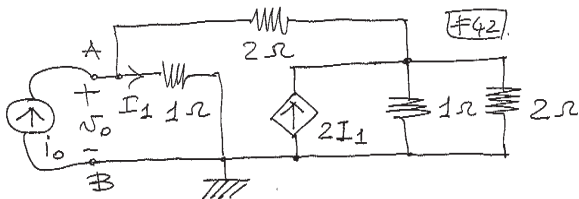
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

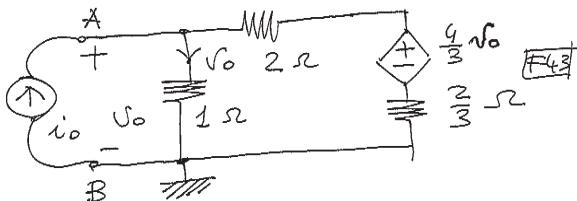
- la rete due porte e' non reciproca.

Esempio. Determinare la resistenza equivalente del bipolo AB



• sostituisco il circuito equivalente a parametri h e alimento il bipolo con un generatore di corrente i_0 ; si ha $i_1 = v_0$, quindi trasformando ottengo





- per Millmann

$$v_0 = \frac{i_0 + \frac{4}{3} \frac{3}{8} v_0}{1 + \frac{3}{8}}$$

- risolvendo ottengo

$$\frac{7}{11} v_0 = \frac{8}{11} v_0$$

e quindi

$$R_{eq} = \frac{v_0}{i_0} = \frac{8}{7} \text{ Ohm}$$