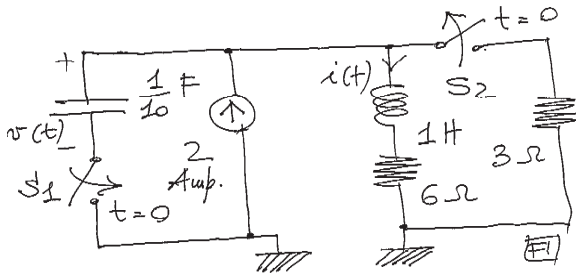
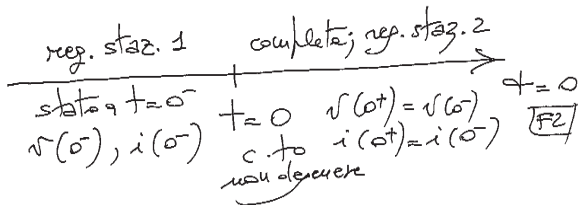


Esempio. L'interruttore S_1 , aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$, mentre S_2 , chiuso da lungo tempo, si apre a $t = 0$.

Determinare $i(t)$, $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel dominio del tempo. E' noto che $v(0^-) = 2$ V. Verificare quindi il risultato ottenuto, a partire da $t = 0^-$, utilizzando il metodo simbolico di Laplace.

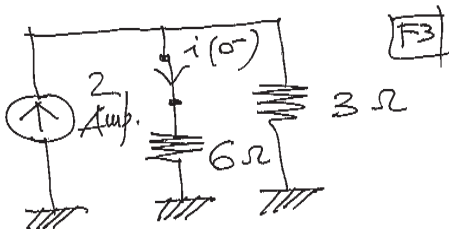


- Schema



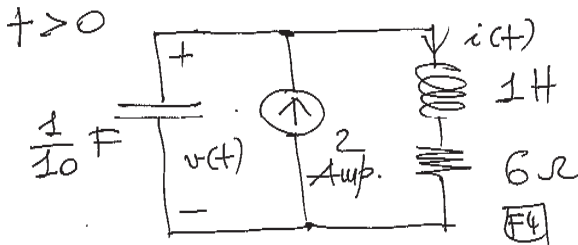
- regime stazionario a $t = 0^-$: si ha $i(0^-) = 2/3$ A, $v(0^-) = 2$ V

$t = 0^-$ reg. staz. 1



- circuito non degenerare per cui $i(0^+) = 2/3$ A, $v(0^+) = 2$ V

- per $t > 0$ il circuito e' in figura



- si tratta di un RLC serie con $R_s = 6 \text{ Ohm}$,
 $R_c = 2\sqrt{L/C} = 2\sqrt{10} \text{ Ohm}$; quindi siamo nel caso sottosmorzato
 dato che $R_s < R_c$. Si ha inoltre

$$\alpha = \frac{R_s}{2L} = 3 \text{ rad/sec}; \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 1 \text{ rad/sec}$$

quindi le radici caratteristiche sono

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -3 \pm j \text{ rad/sec}$$

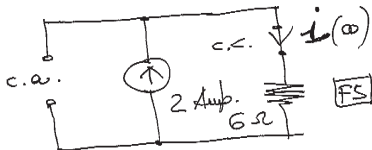
- per $t > 0$ si ha una risposta completa e $C = TC + \text{Regime stazionario 2}$; allora

$$i(t) = k_1 e^{-3t} \cos(t) + k_2 e^{-3t} \sin(t) + i(\infty)$$

- dal circuito in figura ottengo (regime stazionario 2)

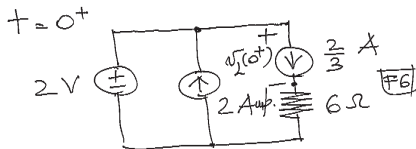
$$i(\infty) = 2 \text{ A}$$

$t = \infty$ rep. staz. 2



- consideriamo adesso l'istantanea a $t = 0^+$; otteniamo $v_L(0^+) + 6 \times (2/3) - 2 = 0$ e quindi

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = v_L(0^+) = -2 \text{ A/sec}$$



- otteniamo infine il problema di Cauchy

$$i(t) = k_1 e^{-3t} \cos(t) + k_2 e^{-3t} \sin(t) + 2$$

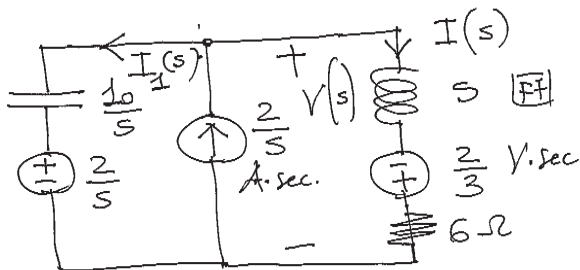
$$i(0^+) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = -2$$

- sostituendo, $i(0^+) = k_1 + 2 = \frac{2}{3}$, $\frac{di}{dt}(0^+) = -3k_1 + k_2 = -2$ da cui $k_1 = -4/3$ e $k_2 = -6$. Abbiamo quindi ottenuto

$$i(t) = -\frac{4}{3}e^{-3t} \cos(t) - 6e^{-3t} \sin(t) + 2, \quad t \geq 0.$$

- Il circuito simbolico di Laplace e' rappresentato in figura



- dalla regola di Millmann otteniamo

$$V(s) = \frac{\frac{2}{s} \frac{s}{10} + \frac{2}{s} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+6}}{\frac{s}{10} + \frac{1}{s+6}}$$

e

$$I(s) = \frac{V(s) + \frac{2}{3}}{s+6}$$

- svolgendo i conti si ha (verificare)

$$I(s) = \frac{\frac{2}{3} \frac{1}{s} \frac{s^2 + 3s + 30}{s^2 + 6s + 10}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} F(s)$$

- $F(s)$ ha un polo semplice in $s = 0$ e due poli semplici in $s_{1,2} = -3 \pm j$ rad/sec; possiamo scomporre in fratti semplici

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - (-3 + j)} + \frac{B^*}{s - (-3 - j)}$$

con

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 3$$

e

$$B = \lim_{s \rightarrow -3+j} (s - (-3 + j))F(s) = -1 + j\frac{9}{2}$$

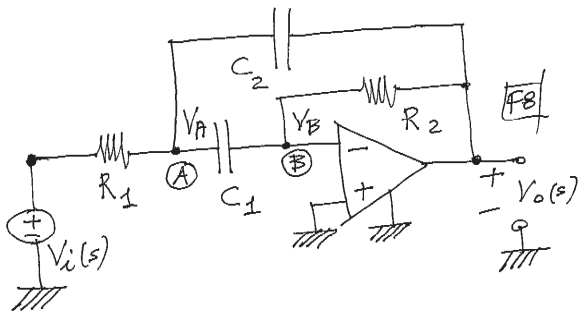
- antitrasformando otteniamo quindi

$$i(t) = \frac{2}{3} \left[3 + \left(-1 + j\frac{9}{2}\right)e^{(-3+j)t} + \left(-1 - j\frac{9}{2}\right)e^{(-3-j)t} \right] u(t)$$

- svolgendo i conti ottengo ancora

$$i(t) = -\frac{4}{3}e^{-3t} \cos(t)u(t) - 6e^{-3t} \sin(t)u(t) + 2u(t).$$

Esempio. Determinare la funzione di trasferimento in tensione $T_v(s) = V_0(s)/V_i(s)$ per il circuito attivo con operazionale ideale in figura.



- Usiamo il metodo dei nodi; le incognite sono $V_A(s)$ e $V_0(s)$ (si ha poi $V_B(s) = 0$)
- dalla KI al nodo A otteniamo

$$G_1(V_A - V_i) + (V_A - V_0)sC_2 + V_A sC_1 = 0$$

mentre dalla KI al nodo B

$$V_A sC_1 = -V_0 G_2$$

- sostituendo

$$(G_1 + sC_2 + sC_1)V_A - V_i G_1 - v_0 sC_2 = 0$$

$$-V_0 \frac{G_2}{sC_1} (G_1 + sC_2 + sC_1) - V_0 sC_2 = V_i G_1$$

$$-V_0 \frac{G_1 G_2 + sC_2 G_2 + sC_1 G_2 + s^2 C_1 C_2}{sC_1} = V_i G_1$$

da cui otteniamo

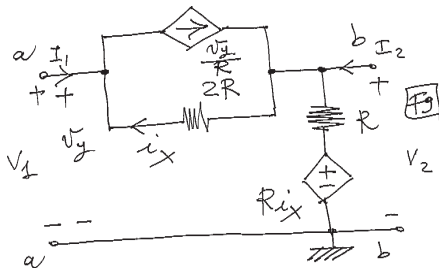
$$\frac{V_0}{V_i} = - \frac{sC_1 G_1}{s^2 C_1 C_2 + sG_2(C_1 + C_2) + G_1 G_2}$$

- infine

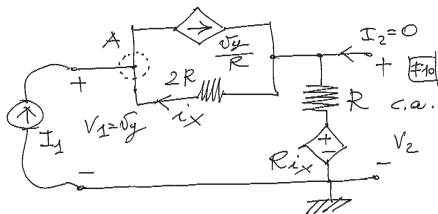
$$T_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = - \frac{G_1}{C_2} \frac{s}{s^2 + sG_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$

- si tratta di un filtro passa banda del secondo ordine asintoticamente stabile per ogni valore dei parametri.

Esempio. Determinare i parametri z della rete due porte aa-bb utilizzando la definizione operativa



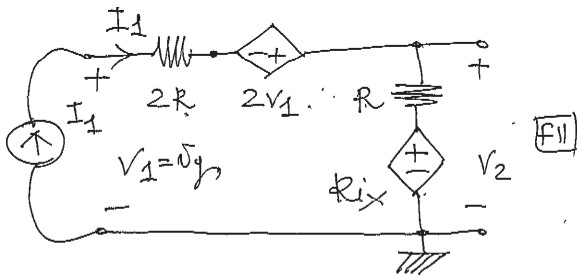
- si ha $z_{11} = (V_1/I_1)|_{I_2=0}$, $z_{21} = (V_2/I_1)|_{I_2=0}$; consideriamo il circuito in figura; si ha $v_y = V_1$ e $i_x = \frac{V_1}{R} - I_1$



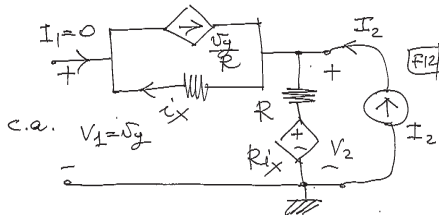
- otteniamo allora il seguente circuito, per il quale si ha

$$V_1 = 2RI_1 - 2V_1 + RI_1 + V_1 - RI_1$$

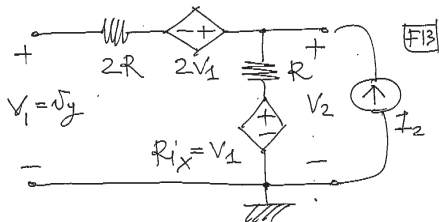
da cui $z_{11} = R$; inoltre $V_2 = RI_1 + V_1 - RI_1$ e quindi $z_{21} = R$



- si ha $z_{22} = (V_2/I_2)|_{I_1=0}$, $z_{12} = (V_1/I_2)|_{I_1=0}$; consideriamo il circuito in figura; si ha $v_y = V_1$ e $i_x = V_1/R$



- ci riconduciamo allora al seguente circuito per il quale $V_1 = -2V_1 + V_2$, cioè $3V_1 = V_2$; inoltre $V_2 = RI_2 + V_1$, quindi $3V_1 = RI_2 + V_1$, cioè $2V_1 = RI_2$; allora si ha $z_{12} = R/2$; inoltre $z_{22} = (V_2/I_2)|_{I_1=0} = 3V_1/I_2 = \frac{3R}{2}$

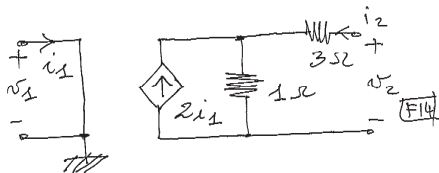


- riassumendo

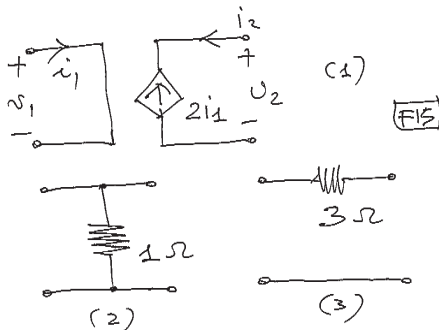
$$Z = \begin{pmatrix} R & \frac{R}{2} \\ R & \frac{3R}{2} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte aa-bb e' non-reciproca.

Esempio. Determinare i parametri ABCD della rete due porte pensandola come cascata di tre reti due porte. Verificare il risultato ottenuto utilizzando la definizione operativa dei parametri ABCD.



- La rete può essere scomposta nella cascata di tre reti elementari



- per la prima rete si ha $v_1 = 0$, $i_2 = -2i_1$, cioè $i_1 = \frac{1}{2}(-i_2)$; quindi

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- per la rete (2) si ha

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- per la rete (3)

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- allora

$$\begin{aligned} T &= (T_1 T_2) T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- vediamo adesso con la definizione operativa; si ha

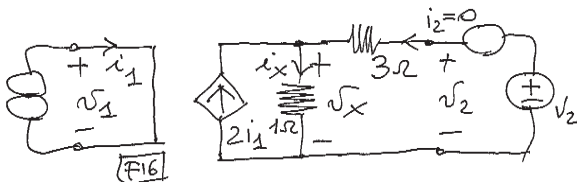
$$v_1 = Av_2 + B(-i_2)$$

$$i_1 = Cv_2 + D(-i_2)$$

- cominciamo a calcolare

$$A = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_2=0}; \quad C = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{i_2=0}$$

facendo riferimento al seguente circuito

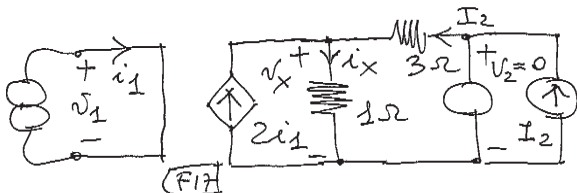


- si ha $v_1 = 0$, quindi $A = 0$. Inoltre $v_x = v_2$ e quindi $i_x = v_2$. Da $2i_1 = i_x = v_2$ otteniamo $C = 1/2$.

- Calcoliamo adesso

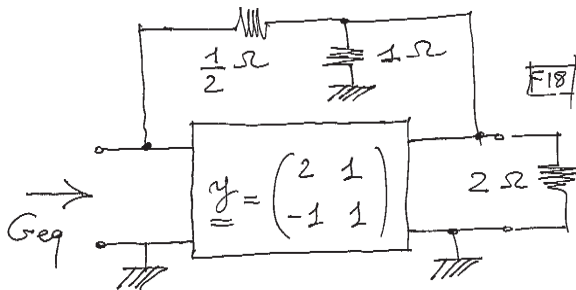
$$B = \frac{v_1}{-i_2} \Big|_{v_2=0}; \quad D = \frac{i_1}{-i_2} \Big|_{v_2=0}$$

facendo riferimento al seguente circuito



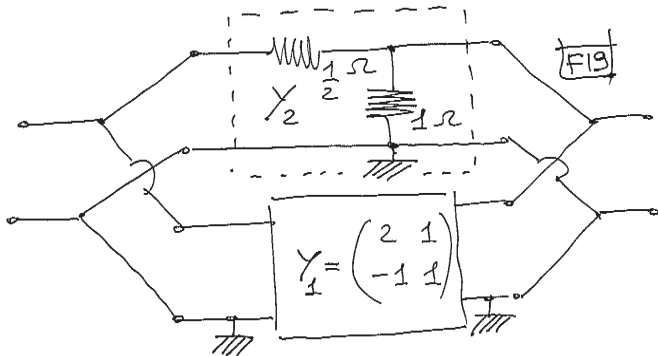
- si ha $v_1 = 0$, quindi $B = 0$; possiamo scrivere $v_x = -3i_2$ e $i_x = -3i_2$. Inoltre $2i_1 = i_x - i_2 = -4i_2$. Quindi $D = 2$.

Esempio. Calcolare la conduttanza equivalente del bipolo in figura



- possiamo pensare ad una rete due porte N che alimenta una conduttanza di carico $G_L = 1/2 \text{ Ohm}^{-1}$

- a sua volta N può essere scomposta in due reti due porte in parallelo N_1 e N_2



- per N_1 conosciamo già la matrice Y_1 ; N_2 può essere pensata come una particolare rete a Π ; si ha

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

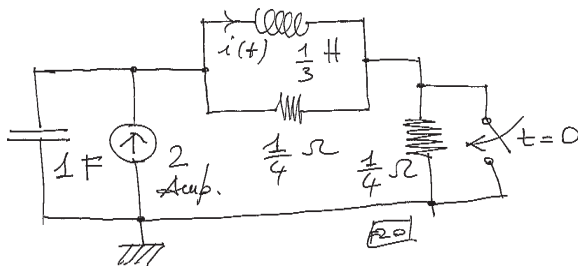
- allora la matrice Y di N e' data da

$$Y = Y_1 + Y_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

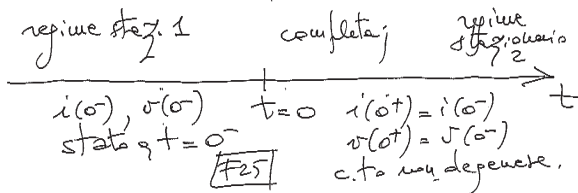
- e' noto a questo punto che

$$G_{eq} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + G_L} = 4 - \frac{3}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3} \text{ Ohm}^{-1}.$$

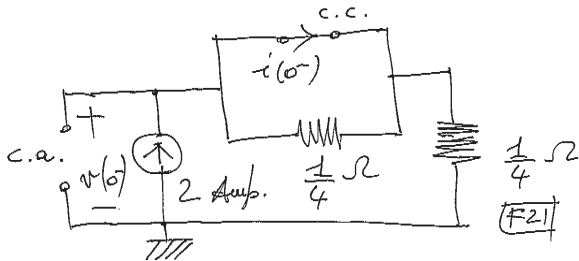
Esempio. L'interruttore, aperto da lungo tempo, si chiude a $t = 0$. Determinare $i(t)$ per $t \geq 0$, risposta completa, analizzando il circuito nel dominio del tempo. Verificare il risultato, a partire da $t = 0^-$, utilizzando il metodo simbolico di Laplace.



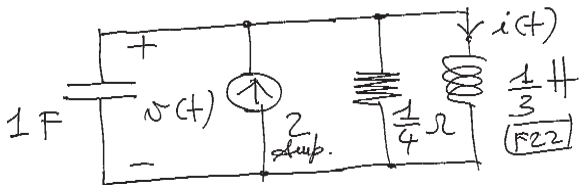
- Schema



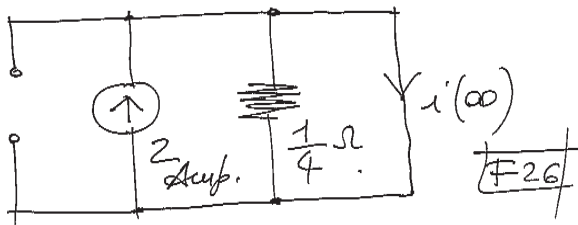
- comportamento a $t = 0^-$ in Regime stazionario 1; lo stato a $t = 0^-$ e' dato da $i(0^-) = 2 \text{ A}$, $v(0^-) = 1/2 \text{ V}$; essendo il circuito non degenerare si ha $i(0^+) = 2 \text{ A}$, $v(0^+) = 1/2 \text{ V}$



- per $t > 0$ otteniamo il circuito in figura, che corrisponde a un RLC parallelo con eccitazione costante in corrente; possiamo scrivere $C = TC + \text{Regime stazionario 2}$



- la corrente in Regime stazionario 2 si trova tramite il seguente circuito e vale $i(\infty) = 2 \text{ A}$



- valutiamo la forma del TC, e cioè della libera; si ha

$$\alpha = \frac{G_p}{2C} = 2 > \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{3}$$

quindi siamo nel caso sovrasmorzato

- le radici caratteristiche sono date da

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \{-1, -3\} \text{ rad/sec}$$

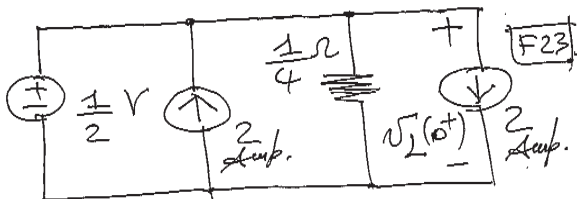
- allora la completa e'

$$i(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

- si ha $i(0^+) = 2$ A; per determinare $di(0^+)/dt$ consideriamo l'istantanea del circuito a $t = 0^+$, dalla quale

$$v(0^+) = \frac{1}{2} = v_L(0^+) = L \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{1}{3} \frac{di}{dt}(0^+)$$

quindi $\frac{di}{dt}(0^+) = 3/2$ A/sec



- sostituendo ottengo $2 = k_1 + k_2 + 2$ e $3/2 = -k_1 - 3k_2$, che ha come soluzione $k_1 = 3/4$, $k_2 = -3/4$; quindi la risposta completa vale

$$i(t) = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} + 2, \quad t \geq 0$$

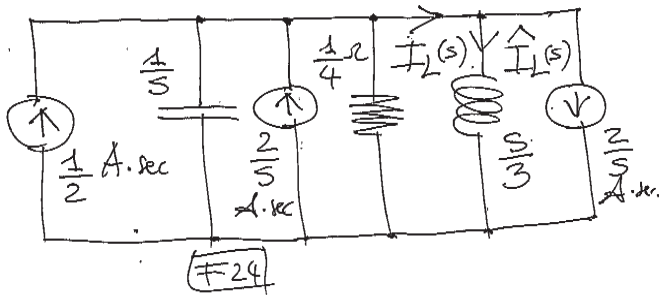
- il circuito simbolico nel dominio di Laplace e' rappresentato in figura; si ha

$$I_L(s) = \hat{I}_L(s) + \frac{2}{s}$$

con

$$\hat{I}_L(s) = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{s}}{\frac{3}{s} + s + 4} = \frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

che ha poli semplici in $s = -1$, $s = -3$



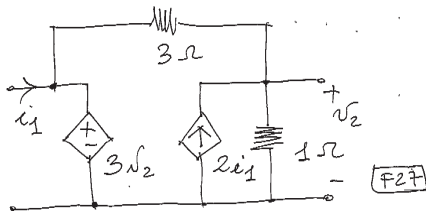
- scomponiamo in fratti semplici

$$\hat{I}_L(s) = \frac{3}{2} \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+3} \right]$$

- antitrasformando ottengo

$$i(t) = \frac{3}{4} e^{-t} u(t) - \frac{3}{4} e^{-3t} u(t) + 2u(t).$$

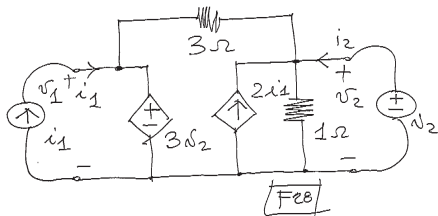
Esempio. Determinare i parametri ibridi h della rete due porte in figura



- si ha per definizione

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$



- consideriamo la rete in figura, dove si alimenta la porta 1 con i_1 e la porta 2 con v_2 ; si ha

$$v_1 = 3v_2$$

e

$$i_2 = -2i_1 + v_2 + \frac{v_2 - v_1}{3} = -2i_1 + \frac{4}{3}v_2 - \frac{v_1}{3} = -2i_1 + \frac{4}{3}v_2 - v_2$$

quindi

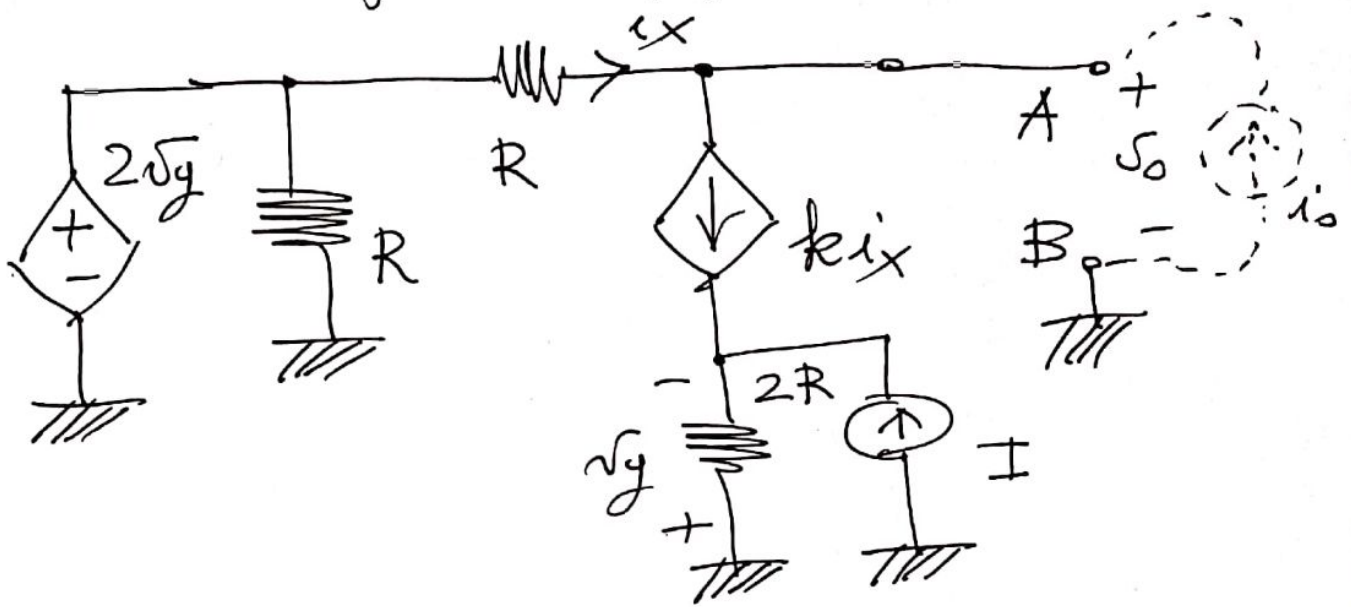
$$i_2 = -2i_1 + \frac{1}{3}v_2$$

- la matrice ibrida e' quindi data da

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- la rete due porte e' non reciproca.

Esempio ? Thevenin di AB con metodo rapido. Il parametro $k \in \mathbb{R}$.



Soluzione Si ha

$$i_x + i_o = k i_x$$

$$(k-1)i_x = i_o$$

1) $k=1 \Rightarrow i_o = 0 \Rightarrow$ il diodo non è controllabile in corrente.

$$2) k \neq 1 \Rightarrow i_x = -\frac{i_o}{1-k}$$

$$v_y = -(I + k i_x) 2R = -2RI - 2R k i_x$$

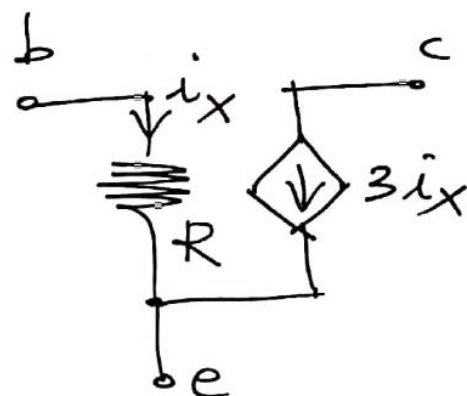
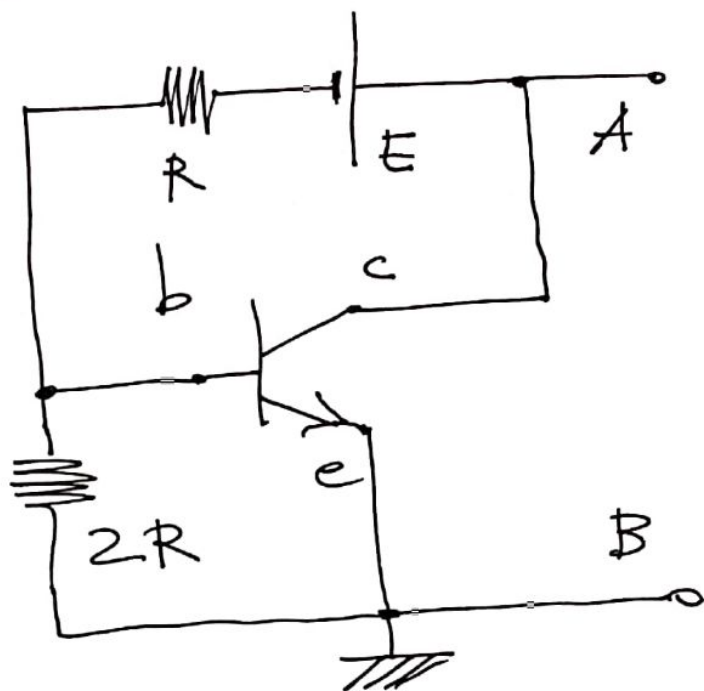
$$v_y = -2RI + 2R \frac{k}{1-k} i_o$$

$$v_o = -R i_x + 2v_y = \frac{R i_o}{1-k} - 4RI + 4R \frac{k}{1-k} i_o$$

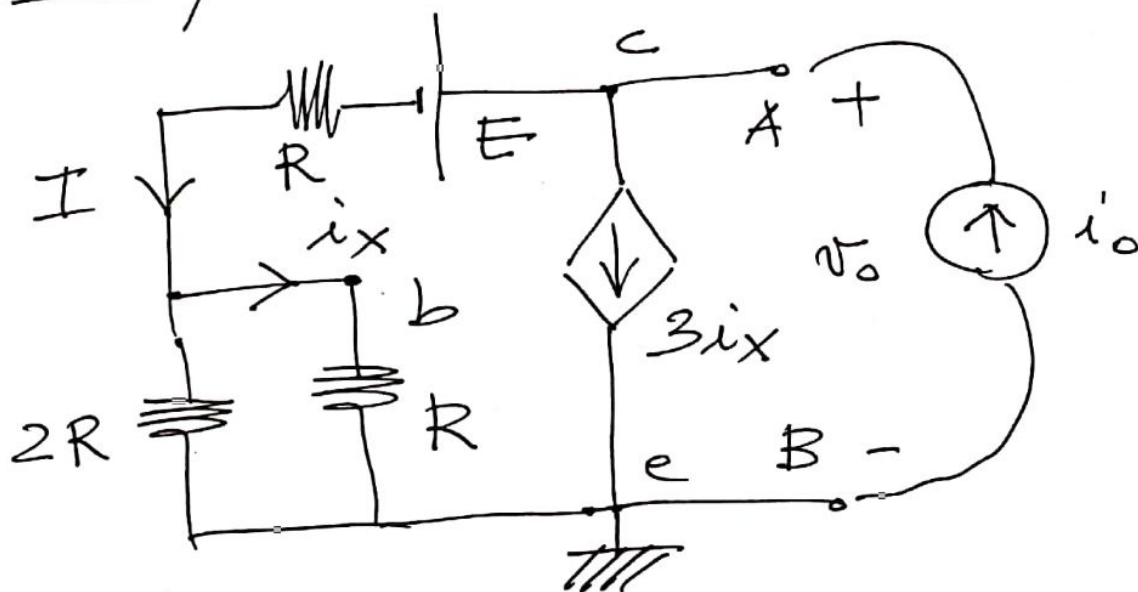
$$v_o = \underbrace{-4RI}_{v_{eq}} + \underbrace{\frac{R}{1-k} [1 + 4k]}_{R_{eq}} i_o, \quad k \neq 1.$$

Esempio ? Thevenin bipoles AB

①



Soluzione. Con 1 metodo rapido'



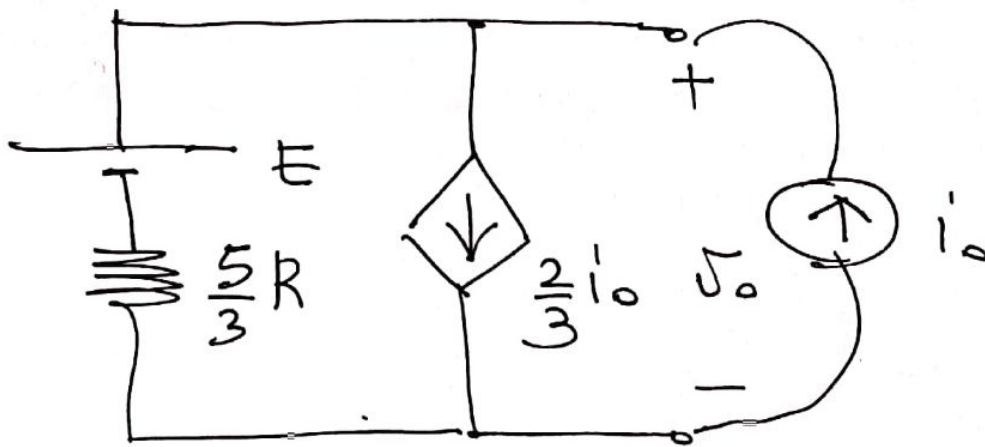
Si ha: $I = i_o - 3i_x$

$$i_x = \frac{2}{3} I \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} i_x = i_o - 3i_x \Rightarrow$$

$$\boxed{i_x = \frac{2}{9} i_o}$$

2

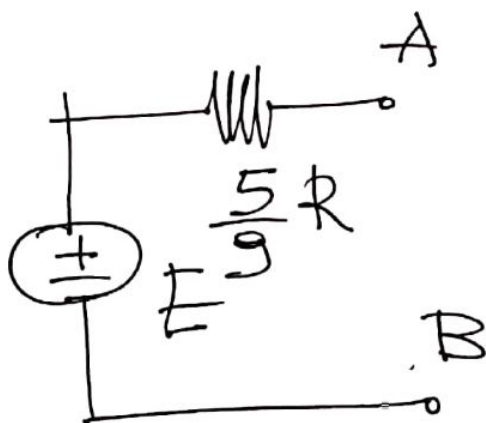


Per Millmann:

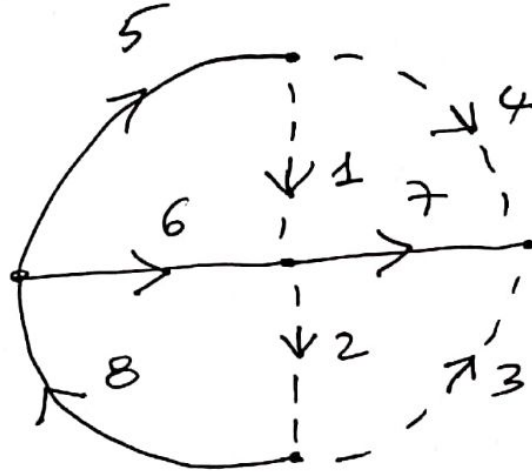
$$V_o = \frac{E \frac{3}{5R} - \frac{2}{3} i_o + i_o}{\frac{3}{5R}}$$

$$\frac{3}{5R} V_o = \frac{3}{5R} E + \frac{1}{3} i_o$$

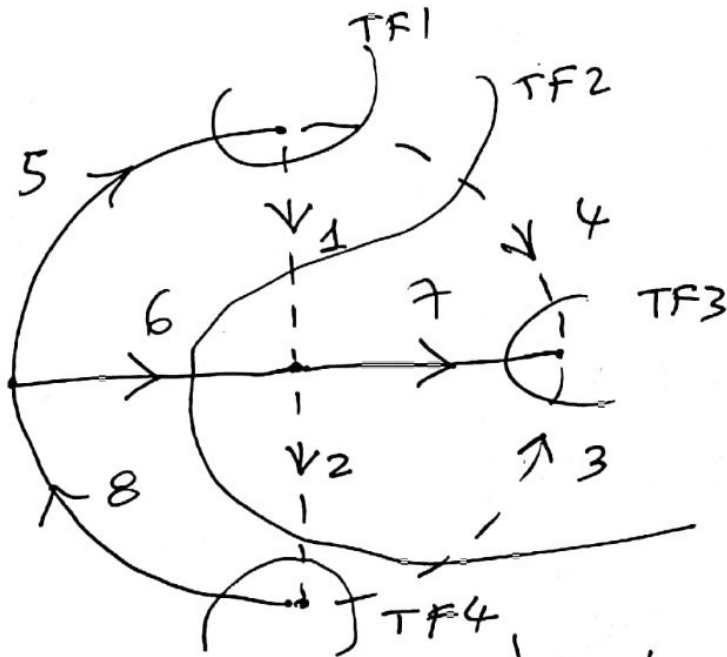
$$V_o = \underbrace{E}_{V_{eq}} + \underbrace{\frac{5}{9} R}_{R_{eq}} i_o$$



Esercizio Determinare le matrici topologiche A dei tagli fondamentali e B delle maglie fondamentali per il grafo orientato in figura. ①



Soluzione



$$\underline{i}_c = \{i_1, i_2, i_3, i_4\} ; \underline{i}_l = \{i_5, i_6, i_7, i_8\}$$

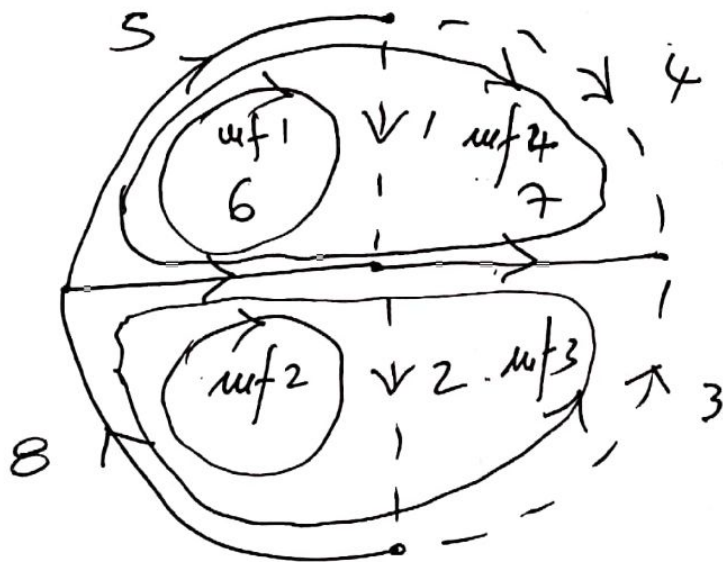
$$K_{tf} \begin{cases} i_5 = i_1 + i_4 \\ i_6 = -i_1 + i_2 - i_3 - i_4 \\ i_7 = -i_3 - i_4 \\ i_8 = i_2 - i_3 \end{cases}$$

$$\underline{\dot{i}}_q = \underline{\underline{A}} \underline{\dot{i}}_c$$

$$\underline{\underline{A}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

②



KV
mf

$$\begin{cases} v_1 = -v_5 + v_6 \\ v_2 = -v_6 - v_8 \\ v_3 = v_6 + v_7 + v_8 \\ v_4 = -v_5 + v_6 + v_7 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{v}}_c = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}}_q$$

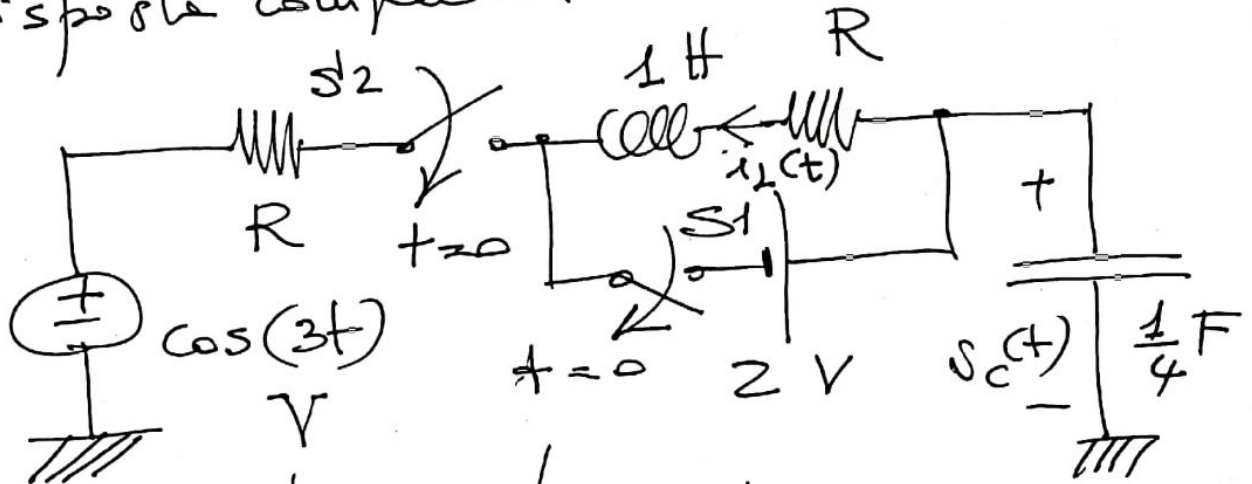
$$\underline{\underline{B}} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{B}}^t$$

Esempio S_1 , chiuso da lungo tempo, si apre a $t=0$; S_2 , aperto da lungo tempo, si chiude a $t=0$. Determinare $v_c(t)$, $t \geq 0$, risposta completa.



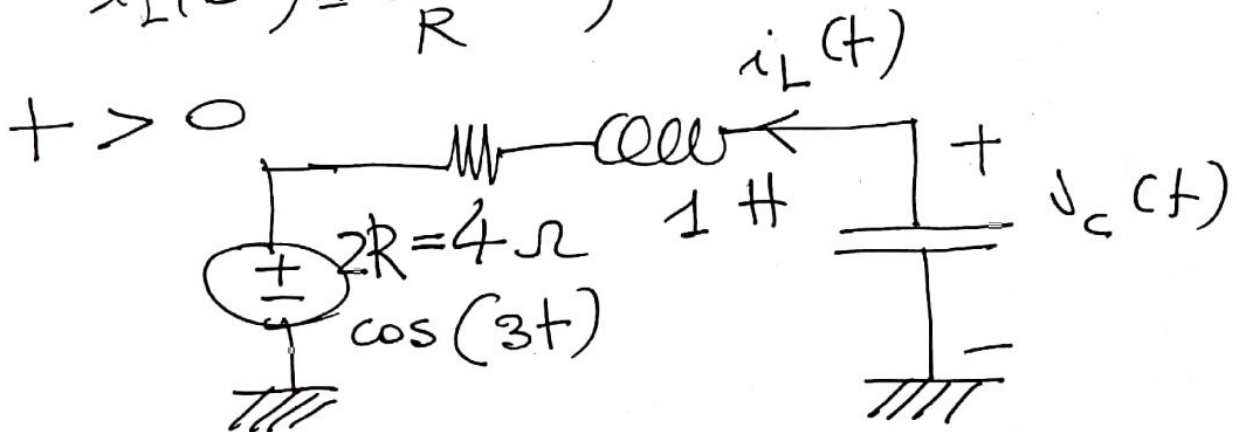
Il circuito è criticamente smorzato per $t \geq 0$. Si ha $v_c(0^-) = 3 \text{ V}$.

Soluzione (traccia).

$t=0^-$ regime stazionario

$$i_L(0^-) = \frac{2}{R} ; v_c(0^-) = 3 \text{ V}$$

$$i_L(0^+) = \frac{2}{R} ; v_c(0^+) = 3 \text{ V}$$



$$|t| > 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 = \alpha_s = \frac{2R}{2L} \Rightarrow \textcircled{2}$$

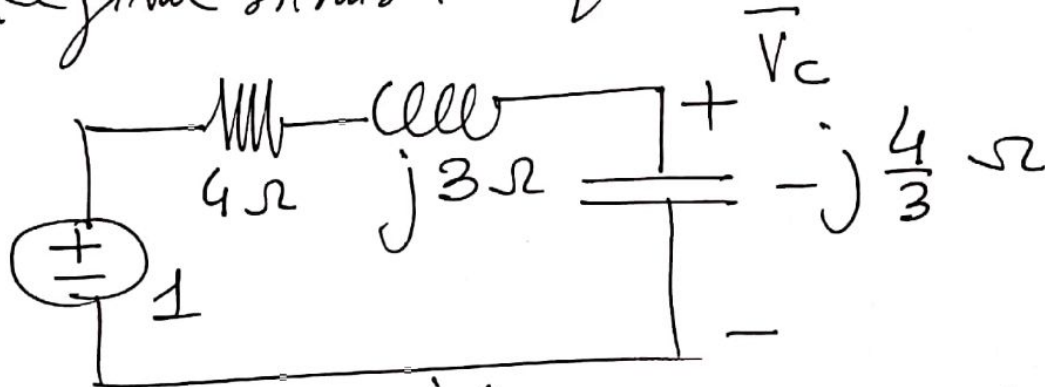
$$R = 2 \Omega.$$

Si ha $v_c(t)$

$e = TE + \text{Regime Sinusoidale}$

$$v_c(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + V_H \cos(3t + \varphi_v) \quad t \geq 0$$

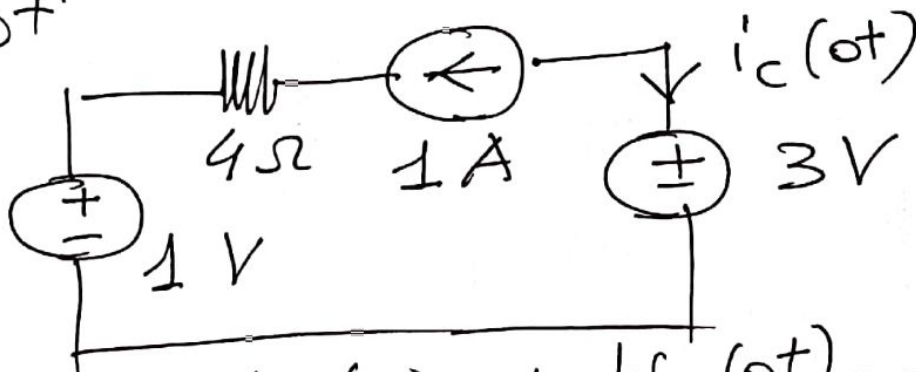
Regime sinusoidale $|t| \rightarrow \infty$.



$$\bar{V}_c = 1 \cdot \frac{-j\frac{4}{3}}{4 + j(3 - \frac{4}{3})} = \dots = V_H e^{j\varphi_v}$$

Condizioni iniziali per problema di Cauchy.

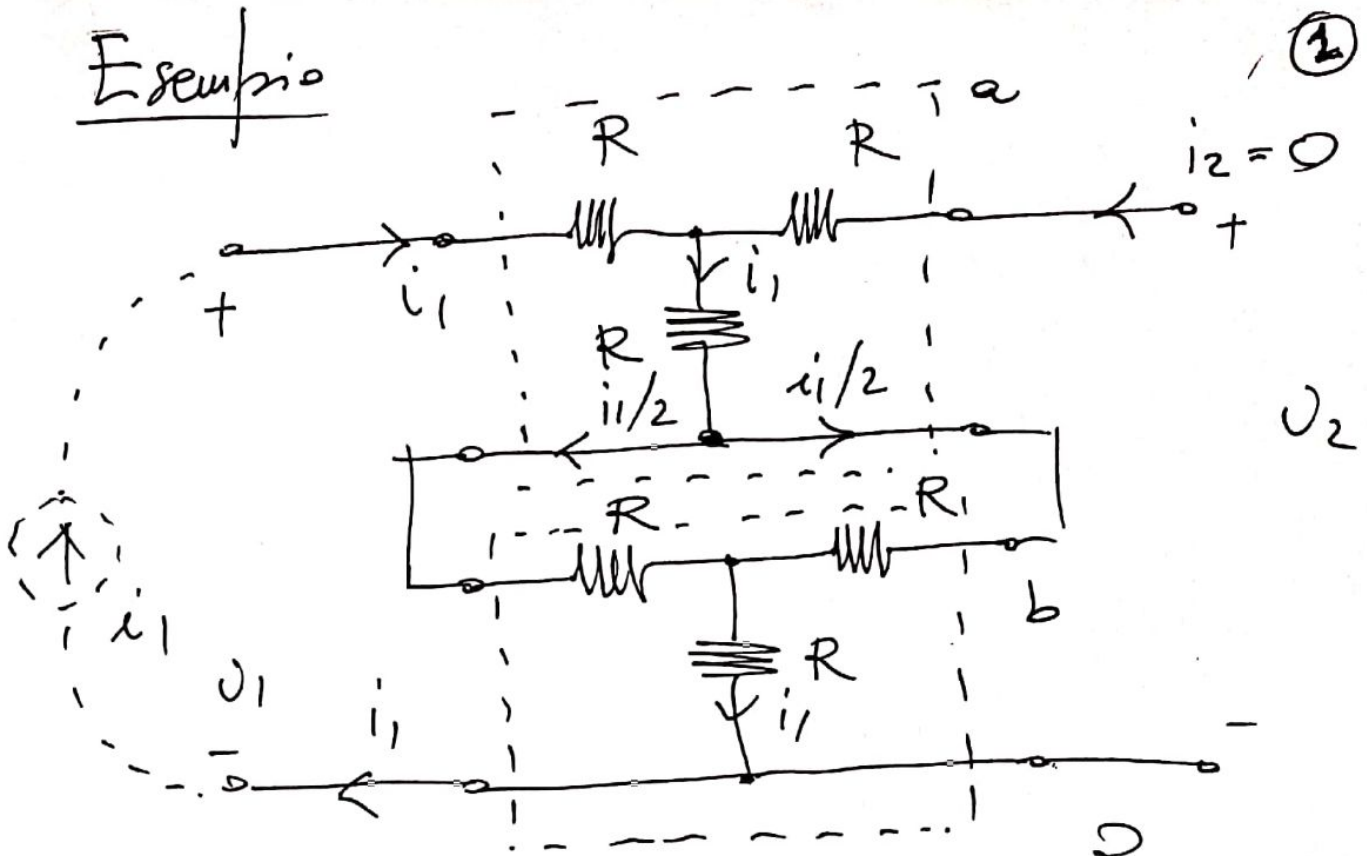
$t = 0^+$



$$i_c(0^+) = C \frac{dv_c}{dt}(0^+) = \frac{1}{4} \frac{dv_c}{dt}(0^+) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dv_c}{dt}(0^+) = -4 \text{ V/}\mu\text{s}.$$

Esempio



$$\underline{\underline{Z}}_a = \underline{\underline{Z}}_b = \begin{pmatrix} 2R & R \\ R & 2R \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}_a + \underline{\underline{Z}}_b = \begin{pmatrix} 4R & 2R \\ 2R & 4R \end{pmatrix} !?$$

ma dalla definizione operativa

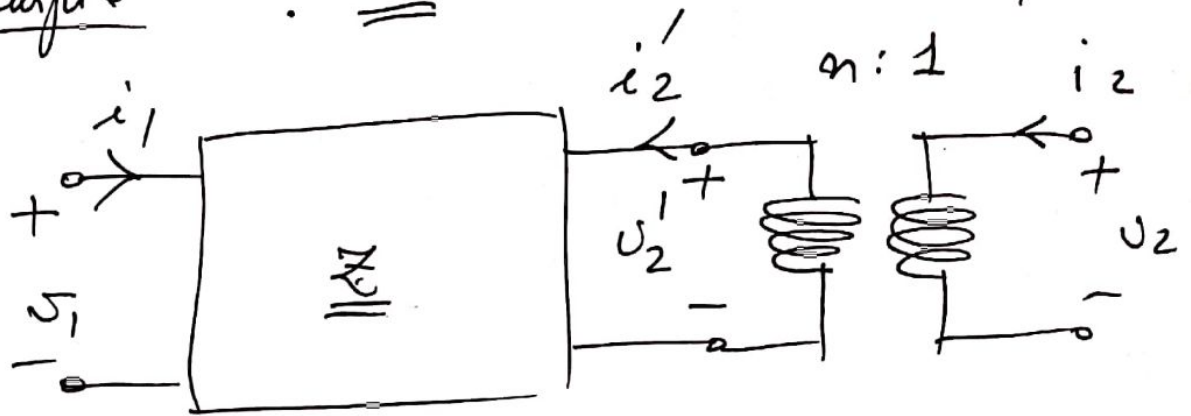
$$Z_{11} = R + R + \frac{R}{2} + R = \frac{7}{2}R \neq 4R$$

Il problema è che i due quadripoli così interconnessi non funzionano da reti due porte.

È una interconnessione serie

NON VALIDA.

Esempio ? $\equiv$



T ideale: $v_2' = n v_2$; $i_2' = \frac{1}{n} i_2$
 È una rete due porte

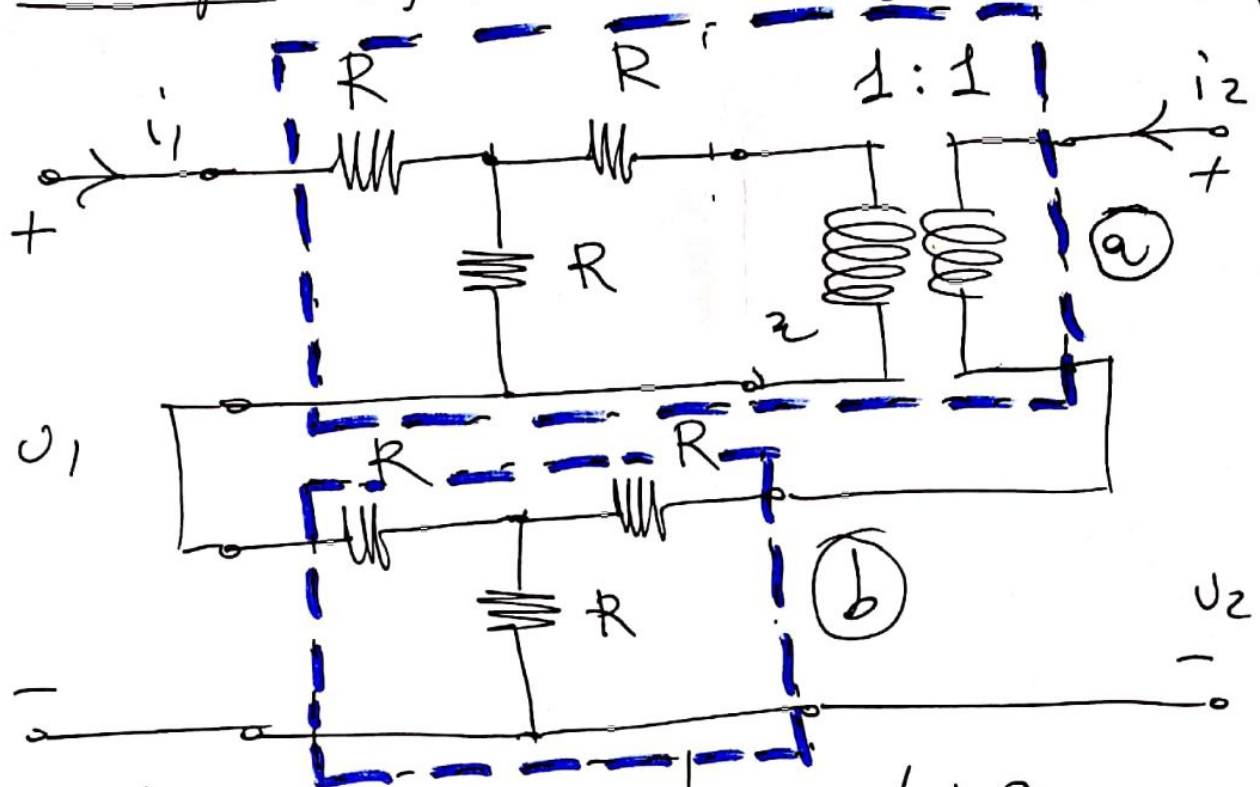
$$Z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2'=0} = Z_{11}$$

$$Z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{1}{n} \frac{v_2'}{i_1} \Big|_{i_2'=0} = \frac{1}{n} Z_{21}$$

Mostrare poi che

$$Z_{12} = \frac{1}{n} Z_{12} \quad ; \quad Z_{22} = n^2 Z_{22}$$

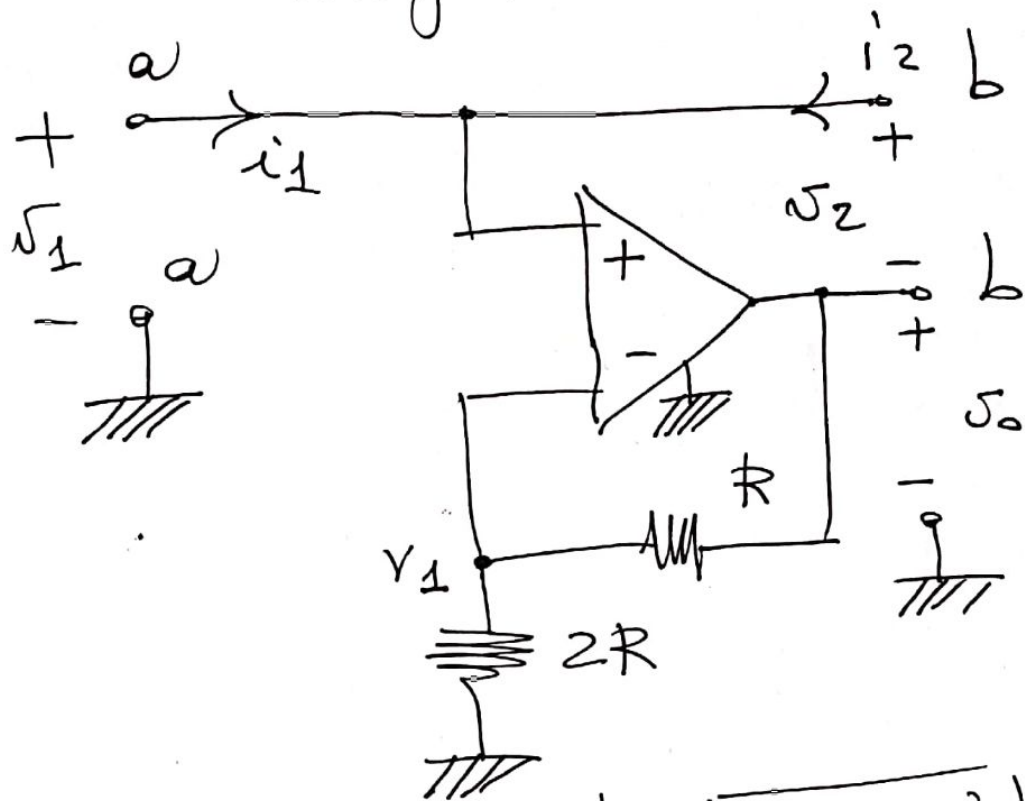
Esempio Interconnessione serie valida. (3)



Adesso si sommano i parametri z .
Si ha

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{z}}_a + \underline{\underline{z}}_b = \begin{pmatrix} 4R & 2R \\ 2R & 4R \end{pmatrix}.$$

Esempio: ? parametri z, y , ABCD rete
due porte aa-bb



Soluzione: si ha $|i_1 = -i_2| \Rightarrow$
~~parametri z~~

Inoltre:

$$v_1 = \frac{2}{3} v_2 ; v_1 = v_2 + v_0 \Rightarrow$$

$$v_1 = v_2 + \frac{3}{2} v_1 ; -\frac{1}{2} v_1 = v_2 \Rightarrow$$

$$|v_1 = -2v_2| \Rightarrow \text{parametri } y$$

Il sistema è un sistema lineare; parametri ABCD e
si ha

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$